جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

تقدير دالة البقاء التوزيع Xgamma
مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة الى

مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة القادسية

وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء

قدمها

كرار راضي منعم السياب

بإشراف

أ. د. محمد حبيب الشاروط

1444 هـ 2023 م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿ اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿1﴾ خَلَقَ الْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ ﴿2﴾ اقْرَأْ
وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ﴿3﴾ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿4﴾ عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ
﴿5﴾ ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة العلق (الاية1 -5)

الإهداء

الى سيد الوصيين وخاتم النبيين الحبيب المصطفى محمد عليه افضل الصلاة والسلام وعلى اله الطيبين الطاهرين .

الى الأرض المقدسة والبلد الحبيب العراق العظيم.

الى من تمشي فوق جنان الخلد ... الى من تذوب كالشمعة لتنير الدرب لنا .. الى من كان دعاؤها سر نجاحي .. حبيبتي (أمي الغالية)

الى جبل الوفاء والإخلاص الذي أمدني بالعطاء و القوة و الشموخ ... الى صاحب القلب الكبير (والدي العزيز)

الى روافد الوفاء سندي و عزي و فرحتي ووسامي ... أخوتي ... أخواتي

الى رفقاء الطريق الطويل ... أصدقاء الدراسة (زملائي ... زميلاتي)

الى جميع أساتذتي ... الى كل من ساعدني للوصول الى هذه المرحلة .

الى كل من أحببناهم و أحبونا ...

اهدي ثمرة جهدي هذا...

كرار

شكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ﴾

صدق الله العلي العظيم

(سورة إبراهيم: الاية (7))

بعد الانتهاء من إعداد هذا البحث أشكر الله عز وجل الذي أعجز عن أحصاء نعمه واحمده تعالى على تتابع النعم ودواماها.

أتقدم بعظيم شكري وامتناني إلى أستأذي الفاضل (الأستأذ الدكتور محمد حبيب الشاروط) لقبوله الاشراف على هذه الرسالة والذي كان لتوجيهاته القيمة وملاحظاته السديدة الأثر العميق في تذليل الكثير من الصعوبات، وفقه الله وجزاه خير الجزاء.

كما أتقدم بجزيل الشكر والتقدير الى أساتذتي الكرام رئيس لجنة المناقشة وأعضائها لتفضلهم بالموافقة على مناقشة هذه الرسالة وتقويمها.

وأتوجه بوافر شكري وامتناني إلى السيد رئيس قسم الإحصاء وكافة أساتذتي الأجلاء في قسم الإحصاء لما قدموه لي من علم.

أشكر من رأيت الفخر بعينيهم منذ ولادتي من منحوني الثقة والاهتمام أمي الحنونة وابي الغالي.

أشكر كل فرد من أفراد عائلتي وكل أصدقائي في طريق الدراسة خاصة وفي الحياة عامة لوقوفهم الى جانبي طيلة فترة الدراسة .

ومن الله (جل جلاله) السداد...

المستخلص

يعد الاهتمام بدراسة دالة البقاء من المواضيع المهمة في التحليل الاحصائي لارتباطها المباشر بحياة الجنس البشري اذ انها تدرس احتماليات تهتم بالجانب الطبي مثل احتمالية فترة رقود المصاب بمرض معين لحين التعافي او الوفاة او احتمالية استمرار تأثير المخدر على احد المرضى اثناء العمليات الجراحية وغيرها.

تهدف هذه الرسالة الى دراسة دالة البقاء باستخدام توزيع Xgamma(XG).

لقد تم في هذا البحث دراسة خصائص توزيع Xgamma واستخدامه في احتساب دالة البقاء، كما تم اقتراح ثلاثة اشكال للتوزيع Xgamma1(XG1D),Xgamma2(XG2D),Xgamma3(XG3D) فضلا عن ذلك تمت المقارنة مع توزيعين معروفين هما توزيع لندلي بمعلمة واحدة LD(θ) والتوزيع الاسي EXP(θ) باستخدام أربع طرائق تقدير مختلفة هي (طريقة الإمكان الأعظم، طريقة العزوم، طريقة المقدرات التجزيئية، طريقة بيز القياسية).

وتكون أهمية هذا البحث في اقتراح توزيع جديد يقوم بتقدير دالة البقاء بشكل اكثر دقة عن طريق تقليل الخطأ بين الحقيقي والمقدر.

أظهرت نتائج تجارب المحاكاة وتحليل البيانات الحقيقية ان طريقة بيز القياسية هي الطريقة الأفضل لتقدير دالة البقاء باستخدام التوزيع المقترح XG1D للمرضى المصابين بمرض كوفيد-19 في مدينة النجف الاشرف للمدة الزمنية المحددة في البحث.

قائمة المحتويات

			رقم الصفحة
		الآية الكريمة	I
		الاهداء	II
		الشكر والتقدير	III
		المستخلص	IV
		قائمة المحتويات	V
		قائمة الجداول	XI
		قائمة الاشكال	XII
		قائمة الرموز والمختصرات	XIII
		الفصل الاول: منهجية الرسالة	1
1.1		المقدمة	2
2.1		مشكلة الرسالة	3
3.1		هدف الرسالة	3
4.1		الاستعراض المرجعي	4
		الفصل الثاني: الجانب النظري	8
0.2		تمهيد	9
1.2		المفاهيم الأساسية:	9
	1.1.2	دالة الكثافة الاحتمالية للفشل	9
	2.1.2	دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية للفشل	10
	3.1.2	دالة البقاء	10
	4.1.2	دالة المخاطرة	11
	5.1.2	دالة متوسط الحياة المتبقي	12
	6.1.2	متوسط الوقت حتى الفشل	12
2.2		التوزيعات الاحتمالية للبقاء	12
	1.2.2	توزيع Xgamma (XG)	12
	1.1.2.2	العزوم اللامركزية	15
	2.1.2.2	العزوم المركزية	16
	3.1.2.2	المنوال	17

		4.1.2.2	معامل الاختلاف	18
		5.1.2.2	معامل الالتواء	18
		6.1.2.2	معامل التفرطح	19
		7.1.2.2	الدالة المولدة للعزوم	20
		8.1.2.2	الدالة المميزة	20
		9.1.2.2	الاحصائات المرتبة	21
		10.1.2.2	دالة البقاء	21
		11.1.2.2	دالة المخاطرة	21
		12.1.2.2	دالة متوسط الحياة المتبقية	22
		13.1.2.2	متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل	23
		14.1.2.2	خاصية فقدان الذاكرة	24
	2.2.2	توزيع Xgamma1 (XG1)		24
		1.2.2.2	العزوم اللامركزية	26
		2.2.2.2	العزوم المركزية	27
		3.2.2.2	المنوال	27
		4.2.2.2	معامل الاختلاف	28
		5.2.2.2	معامل الالتواء	28
		6.2.2.2	معامل التفرطح	29
		7.2.2.2	الدالة المولدة للعزوم	30
		8.2.2.2	الدالة المميزة	31
		9.2.2.2	الاحصائات المرتبة	31
		10.2.2.2	دالة البقاء	32
		11.2.2.2	دالة المخاطرة	32
		12.2.2.2	دالة متوسط الحياة المتبقية	32
		13.2.2.2	متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل	33
		14.2.2.2	خاصية فقدان الذاكرة	34
		3.2.2	توزيع Xgamma2 (XG2D)	34
		1.3.2.2	العزوم اللامركزية	36

		2.3.2.2	العزوم المركزية	37
		3.3.2.2	المنوال	38
		4.3.2.2	معامل الاختلاف	38
		5.3.2.2	معامل الالتواء	39
		6.3.2.2	معامل التفرطح	39
		7.3.2.2	الدالة المولدة للعزوم	40
		8.3.2.2	الدالة المميزة	40
		9.3.2.2	الاحصائات المرتبة	41
		10.3.2.2	دالة البقاء	41
		11.3.2.2	دالة المخاطرة	41
		12.3.2.2	دالة متوسط الحياة المتبقية	42
		13.3.2.2	متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل	43
		14.3.2.2	خاصية فقدان الذاكرة	43
	4.2.2	توزيع (XG3D) xgamma3		44
		1.4.2.2	العزوم اللامركزية	46
		2.4.2.2	العزوم المركزية	46
		3.4.2.2	المنوال	47
		4.4.2.2	معامل الاختلاف	48
		5.4.2.2	معامل الالتواء	48
		6.4.2.2	معامل التفرطح	49
		7.4.2.2	الدالة المولدة للعزوم	49
		8.4.2.2	الدالة المميزة	50
		9.4.2.2	الاحصائات المرتبة	51
		10.4.2.2	دالة البقاء	51
		11.4.2.2	دالة المخاطرة	51
		12.4.2.2	دالة متوسط الحياة المتبقية	52
		13.4.2.2	متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل	53
		14.4.2.2	خاصية فقدان الذاكرة	53

	5.2.2	توزيع لندلي بمعلمة واحدة Lindley distribution (LD)			54
	6.2.2	التوزيع الأسي Exponential Distribution (Exp)			56
	7.2.2	تقدير دالة البقاء			57
		1.7.2.2	توزيع Xgamma (XG)		58
			1	طريقة الإمكان الأعظم	58
			2	طريقة العزوم	59
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	61
			4	طريقة بيز القياسية	62
		2.7.2.2	توزيع Xgamma1 (XG1D)		64
			1	طريقة الإمكان الأعظم	64
			2	طريقة العزوم	66
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	67
			4	طريقة بيز القياسية	68
		3.7.2.2	توزيع Xgamma2 (XG2D)		70
			1	طريقة الإمكان الأعظم	70
			2	طريقة العزوم	71
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	73
			4	طريقة بيز القياسية	74
		4.7.2.2	توزيع Xgamma3 (XG3D)		76
			1	طريقة الإمكان الأعظم	76
			2	طريقة العزوم	77
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	78
			4	طريقة بيز القياسية	80
		5.7.2.2	توزيع ليندلي		82
			1	طريقة الإمكان الأعظم	82
			2	طريقة العزوم	83
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	84

			4	طريقة بيز القياسية	85
		6.7.2.2		التوزيع الاسي	86
			1	طريقة الإمكان الأعظم	86
			2	طريقة العزوم	87
			3	طريقة المقدرات التجزيئية	88
			4	طريقة بيز القياسية	89
	8.2.2	معايير المقارنة			89
		1.8.2.2		متوسط مربعات الخطأ التكاملي	89
		2.8.2.2		معيار معلومات اكايكي	90
		3.8.2.2		معيار اكيكي المتسق	90
		4.8.2.2		معيار معلومات بيز	90
	9.2.2	اختبار مربع كاي			91
	10.2.2	تقريب ليندلي			91
الفصل الثالث: الجانب التجريبي					93
1.3	مفهوم المحاكات				94
2.3	تجارب المحاكاة				94
	1.2.3	اختيار القيم الافتراضية			94
	2.2.3	توليد البيانات			94
		1.2.2.3		توليد بيانات توزيع Xgamma(XG)	94
		2.2.2.3		توليد بيانات توزيع Xgamma1(XG1D)	95
		3.2.2.3		توليد بيانات توزيع Xgamma2(XG2D)	96
		4.2.2.3		توليد بيانات توزيع Xgamma3(XG3D)	96
		5.2.2.3		توليد بيانات توزيع Lindley(LD)	96
		6.2.2.3		**توليد بيانات التوزيع الاسي Exponential (EXP)**	97
	3.2.3	التقدير			97
	4.2.3	المقارنة بين المقدرات			98
3.3	مناقشة نتائج تجربة المحاكاة				98
الفصل الرابع: الجانب التطبيقي					127

1.4	مرض كورونا Corona Vires (COVD19)	128
2.4	البيانات الحقيقية	128
3.4	اختبار حسن المطابقة للبيانات	129
4.4	المقارنة بين توزيع XG1D وباقي التوزيعات	130
4.5	تحليل البيانات الحقيقية	130
	الفصل الخامس: الاستنتاجات والتوصيات	133
1.5	الاستنتاجات	134
2.5	التوصيات	134
	المصادر	135
	الملاحق	140
	Abstract	A

قائمة الجداول

رقم الجدول	عنوان الجدول	الصفحة
(1-3)	مختصرات طرائق التقدير	98
(2-3)	مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة (AIC, AICc, BIC) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=0.5	99
(3-3)	مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة (AIC, AICc, BIC) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=1	113
(4-3)	مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة (AIC, AICc, BIC) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=5	117
(5-3)	مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة (AIC, AICc, BIC) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=10	121
(6-3)	عدد مرات ونسب افضلية لكل طريقة من طرائق التقدير حسب معيار (IMSE)	124
(1-4)	أوقات البقاء (بالايام) حتى الوفاة او الشفاء للمرضى الراقدين في مستشفى الامل في محافظة النجف الاشرف وللفترة من (2022/2/1) الى (2022/2/28)	129
(2-4)	نتائج اختبار مربع كاي للبيانات الحقيقية	129
(3-4)	نتائج المقارنة بين التوزيعات	130
(4-4)	مقارنة دالة البقاء الحقيقية مع دالة البقاء المقدرة لتوزيع XG1D	130

قائمة الاشكال

رقم الشكل	عنوان الشكل	الصفحة
(1-2)	أنواع مختلفة لمنحني دالة البقاء	11
(2-2)	منحنيات الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma لبعض قيم θ. (الرسم من عمل الباحث)	14
(3-2)	يوضح منحنيات الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma1 لبعض قيم θ.	25
(4-2)	يوضح منحنيات الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma2 لبعض قيم θ.	35
(5-2)	يوضح منحنيات الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma3 لبعض قيم θ.	45
(1-3) الى (30-3)	منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيعات (XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP) بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10, 20, 50, 80, 100	112-103
(1-4)	منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بتوزيع XG1D	132
ملحق A 1 الى 30	منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيعات (XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP) بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10, 20, 50, 80, 100	148-141
ملحق B 31 الى60	منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيعات (XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP) بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10, 20, 50, 80, 100	156-149
ملحق C 61 الى90	منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيعات (XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP) بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10, 20, 50, 80, 100	164-157

قائمة الرموز والمختصرات

الرمز	المعنى
θ	معلمة التوزيعات المستخدمة
α	معلمة الشكل لتوزيع كاما(التوزيع السابق) في طريقة تقدير بيز
β	معلمة القياس لتوزيع كاما(التوزيع السابق) في طريقة تقدير بيز
t	الزمن لحين الفشل
T	متغير عشوائي يمثل وقت حدوث الفشل
f(t)	دالة الكثافة الاحتمالية للفشل
F(t)	دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية للفشل
S(t)	دالة البقاء
h(t)	دالة المخاطرة
mrl(t)	دالة متوسط الحياة المتبقي
MTTF	متوسط الوقت حتى الفشل
Mle	طريقة تقدير الإمكان الأعظم
Mom	طريقة تقدير العزوم
Per	طريقة تقدير المقدرات التجزيئية
Bay	طريقة تقدير بيز
XG	توزيع Xgamma
XG1D	توزيع Xgamma1 المقترح
XG2D	توزيع Xgamma2 المقترح
XG3D	توزيع Xgamma3 المقترح
LD	توزيع ليندلي بمعلمة واحدة
EXP	التوزيع الاسي
$\hat{\theta}$mle	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة الإمكان الاعظم
$\hat{\theta}$mom	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة العزوم
$\hat{\theta}$per	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة المقدرات التجزيئية
$\hat{\theta}$Bay	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة بيز القياسية

S	دالة البقاء الحقيقية (المفترضة)
$\hat{S}$ mle	دالة البقاء بمقدر الإمكان الاعظم
$\hat{S}$ mom	دالة البقاء بمقدر العزوم
$\hat{S}$ per	دالة البقاء بمقدر المقدرات التجزيئية
$\hat{S}$ Bay	دالة البقاء بمقدر بيز
IMSE	متوسط مربعات الخطأ التكاملي عند طرائق التقدير
AIC	معيار معلومات اكايكي
AICc	معيار اكيكي المتسق
BIC	معيار معلومات بيز

الفصل الاول
منهجية الرسالة

المبحث الأول – المقدمة.

المبحث الثاني – مشكلة الرسالة.

المبحث الثالث – هدف الرسالة.

المبحث الرابع – الاستعراض المرجعي.

1.1 المقدمة Introduction

ان حاجة الانسان الى الاستمرار في الحياة بشكل افضل هو دافع أساس للتعمق في الدراسات والبحوث التي تخص تحليل البقاء،اذ ان معرفة الانسان بفترة بقائه عند الإصابة بمرض معين هو ما يجعله يهتم بدراسات تحليل البقاء إذ ان دراسة الوقت الممتد من (بداية الحدث) اي بداية الاصابة وصولا الى نقطة النهاية المعينة (نقطة وقوع الحدث شفاء او موت)، وعادة يستعمل مصطلح دالة البقاء (Survival Function) في الدراسات الطبية والحياتية، أما في الدراسات الهندسية أو الميكانيكية فيستخدم مصطلح دالة المعّولية/ الموثوقية (Reliability Function).

ومن منطلق ان البحوث العلمية تمثل حجر الاساس في التقدم المعرفي، و ان زيادة المعرفة العلمية للباحث تعد امراً مهما للارتقاء بالمستوى العلمي و من اهم السبل هي معرفة طرائق التحليل الاحصائي، اذ ان تفعيل دور الباحث سيؤدي الى زيادة امكانيته لدراسة تأثير العوامل المتعددة بشكل ادق وافضل، ومما يجعله صاحب مقدرة على مواكبة أي تطور علمي ويبتعد عن التكرار عند اجراء البحوث العلمية، وفي مجال الطب مازالت حالة صحة المريض اهم ما يتم دراسته في تطبيقات التحليل الاحصائي وذلك من خلال تقدير الحالة الصحية للمريض.

وعلى ما تقدم كان الاهتمام في هذه الرسالة بدراسة دالة البقاء لواحد من التوزيعات المستخدمة في نمذجة بيانات البقاء وهو توزيع Xgamma وهو من التوزيعات المهمة الذي اثبت أفضليته في تقدير دالة البقاء إذ كان اول من درس هذا التوزيع Subhradev Sen واخرون في عام 2016 وتم تطبيقه في تقدير دالة البقاء لأوقات راحة المرضى (بالساعات) لـ 20 مريضًا يتلقون المسكنات .

وكانت المشكلة في هذه الرسالة هي ان التوزيعات السابقة التي قدرت دالة البقاء كانت تعاني من قصور في تقدير دالة البقاء وكانت جهود الباحثين في تطور مستمر لزيادة كفائة التقدير وتقليل الخطأ وتحسين جودة مقدر دالة البقاء، وبالتالي جائت الحاجة الى اقتراح توزيع جديد مبني من خلط توزيعين هما التوزيع الاسي وتوزيع كاما وهو توزيع Xgamma. من ثم اقتراح صيغ جديدة لهذا التوزيع محاولةً لزيادة الدقة المطلوبة في تقدير دالة البقاء عن طريق تقليل نسبة الخطأ بين الحقيقي والمقدر.

وتهدف هذه الرسالة الى دراسة خصائص توزيع Xgamma وتقدير دالة البقاء له عن طريق تقدير معلمته باستخدام اربع طرق تقدير وهي (طريقة الإمكان الأعظم، طريقة العزوم، طريقة المقدرات التجزيئية، طريقة بيز القياسية). من ثم اقتراح ثلاثة توزيعات مشتقة من توزيع Xgamma وهي توزيع Xgamma1 عن طريق تعويض مقلوب المعلمة في التوزيعات المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، وتوزيع Xgamma2 من خلال تبديل الاوزان في معادلة الخلط المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، وأخيرا توزيع Xgamma3 بخلط الفكرتين السابقتين حيث يتم استخدام مقلوب المعلمة في التوزيعات وتبديل الاوزان في معادلة الخلط المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، ومن ثم حساب الخصائص الرياضية وخصائص البقاء وتقدير المعلمة بطرق التقدير الاربعة. تم استخدام المحاكاة لايجاد افضل طريقة للتقدير في جميع التوزيعات السابقة من خلال استخدام متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE). اختيار النموذج الأفضل في تمثيل البيانات عن طريق معايير المقارنة المختلفة (AIC, AICc, BIC) والمطبقة على بيانات حقيقية مثلت أوقات البقاء بالايام لمرضى كورونا الراقدين

في مستشفى الامل في النجف الاشرف وللفترة من 2022/2/1 ولغاية 2/28/ 2022 وبواقع (61) مشاهدة.

وتم اشتقاق الصيغ الثلاث المقترحة وتقدير معالمها بطرق التقدير الأربعة واختيار الطريقة الأفضل في التقدير إضافة الى دراسة خصائص توزيعين اخرين وتقدير معلمتهما بطرق التقدير الاربعة وهما توزيع لندلي بمعلمة واحدة LD(θ)، والتوزيع الاسي EXP(θ) لغرض المقارنة بهما.

ولتحقيق هدف هذه الرسالة، تم تقسيمها على خمسة فصول وكالاتي:-

الفصل الاول: تضمن المقدمة ومشكلة الدراسة وهدفها والاستعراض المرجعي للدراسات السابقة.

الفصل الثاني: تضمن الجانب النظري والذي تطرق الى اهم المفاهيم الاساسية التي تناولها موضوع الدراسة وهو مفهوم تحليل البقاء ،فضلاً عن بعض المفاهيم الاساسية الخاصة بدالة الكثافة التراكمية (التجميعية) ودالة المخاطرة وغيرها، بالإضافة الى عرض التوزيعات الاحتمالية المستخدمة وخصائصها وطرائق تقدير معالمها لتقدير دوال البقاء الخاصة بها.

الفصل الثالث: تضمن الجانب التجريبي من خلال استخدام المحاكاة بطريقة مونت-كارلو لتوليد البيانات وذلك لتأكد من دقة نتائج طرائق التقدير واختيار الأفضل بينها لاستخدامه في الجانب التطبيقي.

الفصل الرابع: تضمن الجانب التطبيقي أوقات البقاء لعينة من المصابين بمرض كورونا COVID19 من الإصابة لحين الشفاء او الوفاة.

الفصل الخامس: تضمن اهم الاستنتاجات والتوصيات التي تم التوصل اليها.

وأخيرا المصادر التي اعتمدت عليها الرسالة والملاحق.

2.1 مشكلة الرسالة Problem of the thesis

التوزيعات السابقة التي قدرت دالة البقاء كانت تعاني من قصور في تقدير دالة البقاء وكانت جهود الباحثين في تطور مستمر لزيادة كفائة التقدير وتقليل الخطأ وتحسين جودة مقدر دالة البقاء، وبالتالي جاءت الحاجة الى اقتراح توزيع جديد مبني على خلط توزيعين هما التوزيع الاسي وتوزيع كاما وهو توزيع Xgamma.

3.1 هدف الرسالة Aim of the thesis

تهدف هذه الرسالة الى

1. اقتراح توزيع Xgamma1 عن طريق تعويض مقلوب المعلمة في التوزيعات المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، وحساب خصائصه الرياضية وتقدير دالة البقاء بطرق التقدير الاربعة.
2. اقتراح توزيع Xgamma2 عن طريق تبديل الاوزان في معادلة الخلط المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، من ثم حساب خصائصه الرياضية وتقدير دالة البقاء بطرق التقدير الاربعة.

3. اقتراح توزيع Xgamma3 عن طريق خلط الفكرتين السابقتين إذ يتم استخدام مقلوب المعلمة في التوزيعات وتبديل الاوزان في معادلة الخلط المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma، من ثم حساب خصائصه الرياضية وتقدير دالة البقاء بطرق التقدير الاربعة.
4. استخدام المحاكاة لايجاد افضل طريقة للتقدير من خلال استخدام متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) في جميع التوزيعات السابقة.
5. استخدام بيانات حقيقية لمرضى كورونا في مدينة النجف الاشرف/ مستشفى الامل للامراض الانتقالية للفترة (1-2022/2/28) وبواقع (61) مشاهدة لاختيار النموذج الأفضل في تقدير دالة البقاء للبيانات عن طريق معايير المقارنة المختلفة (AIC, AICc, BIC).

4.1 الاستعراض المرجعي Literature Review

اقترح الباحث Subhradev Sen واخرون عام (2016) توزيعاً احتمالياً جديداً ذا معلمة واحدة عن طريق مزيج من التوزيع الأسي وتوزيع كاما باوزان محددة واطلق عليه اسم Xgamma Distribution (XGD). إذ قاموا باشتقاق العديد من الخصائص الرياضية والهيكلية مثل العزوم ومقاييس الانحراف والتفرطح، ومناقشة خصائص البقاء مثل معدل الخطر ومتوسط الحياة المتبقية وتقدير معلمة التوزيع بطريقتين الإمكان الأعظم MLE والعزوم MOM. كما استخدموا المحاكاة Monte Carlo لتقدير المعلمة بالطرق المذكورة. كما قارنوا التوزيع الجديد بالتوزيع الاسي عن طريق تحليل مجموعة بيانات واقعية عن أوقات راحة المرضى (بالساعات) لـ 20 مريضًا يتلقون المسكنات فقد وجدوا أن توزيع Xgamma يوفر ملاءمة أفضل للبيانات مقارنة بالتوزيع الأسي.(Sen et al., 2016)

في عام (2017) قام Subhradev Sen مع اخرين بدمج معلمة إضافية لتوزيع Xgamma بمعامل واحد، واطلق عليه توزيع شبه Xgamma (Quasi Xgamma Distribution) كتعميم أو امتداد لتوزيع Xgamma بمعلمة واحد. إذ تمت دراسة الخصائص الرياضية والإحصائية المختلفة إلى جانب بعض خصائص البقاء المهمة للتوزيع. وتقدير معلمات النموذج بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم. واستخدموا محاكاة مونت كارلو لحساب متوسط الأخطاء التربيعية لتقديرات معلمات التوزيع لأحجام العينات المختلفة. كما تمت مقارنة التوزيع ببعض التوزيعات الاخرى من خلال التطبيق على مجموعة بيانات غير خاضعة للرقابة لأوقات الراحة (بالأشهر) لعينة عشوائية من 128 مريضًا بسرطان المثانة وظهر أن النموذج المعمم من توزيع Xgamma يوفر ملاءمة أفضل من النماذج الأخرى مع مراعاة مجموعة البيانات الحقيقية.(Sen & Chandra, 2017)

في العام (2017) عاد الباحث Subhradev Sen واخرون ليدرسوا النسخة الموزونة لتوزيع Xgamma (The Weighted Xgamma Distribution (WXGD)) تعميماً لتوزيع XG، ثم تم الحصول على توزيع Xgamma المنحاز للطول (length biased version of xgamma distribution (LBXG)) بوصفه حالة خاصة لدالة الكثافة لتوزيع WXGD. وتمت دراسة خصائص التوزيع (LBXG) وخصائص البقاء. كما تم تقدير معلمة التوزيع بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم، ثم استخدام محاكاة مونت كارلو لاختيار الطريقة الأفضل في التقدير لأحجام العينات المختلفة. وأخيرا تمت مقارنة التوزيع (LBXG) مع توزيعات أخرى بالتطبيق على بيانات عمر الاجهاد ل 23 من المحامل

الكروية ذات الأخدود العميق (deep-groove ball bearings) ليثبت ان (LBXG) كان الأفضل من بين باقي النماذج المقارنة.(Sen et al., 2017)

في عام (2018) قام الباحثون (Maiti, S. S.) واخرون باشتقاق صيغتين متقطعتين من توزيع Xgamma، وهما Xgamma-I و Xgamma-II باستخدام طريقتين مختلفتين وهما طريقة التركيز المتقطع والطريقة التناظرية المتقطعة. تمت دراسة الخصائص الرياضية وخصائص البقاء لهذه التوزيعات. تم تقدير المعلمة بطريقتي العزوم والامكان الاعظم. تمت مقارنة توزيعات Xgamma-I و Xgamma-II المتقطعة مع توزيع Poisson وتوزيع ذو الحدين السالب وتوزيع Lindley المتقطعة المركبة باستخدام ست مجموعات من البيانات، وقد تبين أن التوزيع المنفصل Xgamma-II أكثر ملاءمة نسبيًا لدراسة البيانات.(Maiti et al., 2018)

في العام (2018)قام (Subhradev Sen) بدراسة خصائص إضافية (مثل ، الدالة المميزة ودالة التوليد) وبعض خصائص البقاء الأخرى (مثل الوقت حتى الفشل). وتم تقدير المعلمة غير المعروفة باستخدام طريقة الإمكان الاعظم وطريقة بيز مع افتراض توزيع كاما كتوزيع سابق وباستخدام البيانات المبتورة Truncated والبيانات تحت الرقابة. أجريت دراسة محاكاة لمقارنة التقديرات الموضحة في عمليتي التقدير وأنظمة الرقابة Censored. اسستنتج بان استخدام تقدير بيز عند توفر معلومات مسبقة هو الافضل. كما تم تحليل بيانات حقيقية تمثل أوقات البقاء على قيد الحياة (بالأيام) لـ 72 خنزيراً غينيا مصابًا بعصيات درنة خبيثة ووجد أن أداء Xgamma مرضٍ تمامًا.(Sen et al., 2018b)

في العام (2018) قام الباحث (Subhradev Sen) بتعميم توزيع Xgamma عن طريق إضافة معلمة إضافية، واشتقاق توزيع Xgamma ذي المعلمتين، الذي اضاف مرونة إضافية في نمذجة بيانات الحياة الحقيقية وتم تقدير معلمات التوزيع بطريقتين وهما طريقة الإمكان الاعظم وطريقة العزوم.واستخدام محاكاة مونت كارلو لمقارنة الطرق في عملية التقدير. تم تحليل مجموعتين من البيانات فقد قاموا بدراسة أوقات الفشل ل 18 جهازاً إلكترونياً و مجموعة بيانات عمر 50 جهازاً ومقارنة النموذج المقترح مع بعض نماذج العمر ذات المعلمتين الأخرى وتم التوصل الى ان توزيع Xgamma ذا المعلمتين قد وفر مرونة اكبر في نمذجة البيانات.(Sen et al., 2018a)

وفي العام (2018) قام كل من (Altun, Emrah, and G. G. Hamedani) بتقديم توزيع جديد مكون من معلمة واحدة يسمى "log-xgamma" عن طريق استبدال المتغير العشوائي لتوزيع Xgamma بدالة لوغاريتم طبيعي للمتغير العشوائي. وتم استخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم لتقدير المعلمة غير المعروفة لتوزيع log-xgamma باستخدام المحاكاة للمقارنة بين طرق التقدير. تم تحليل مجموعتين من البيانات الحقيقية لتوزيع log-xgamma مقارنة مع توزيعات Beta و Kumaraswamy و Topp-Leone وقد تم التوصل الى ان طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل من بين الطرق المستخدمة لتقدير معلمة التوزيع كما ان التوزيع log-xgamma قد وفر ملاءمة افضل للبيانات الحقيقية.(Altun & Hamedani, 2018)

في عام (2019) قام (Yadav) واخرون باشتقاق توزيع احتمالي جديد وهو توزيع Inverted Xgamma (IXG) الذي استخدم مقلوب المتغير العشوائي في توزيع XG. وتمت دراسة خصائص

البقاء، والعزوم العكسية ،ومتوسط الحياة المتبقية العكسية والإحصاءات المرتبة للتوزيع المقترح. وتقدير معلمات توزيع IXG باستخدام تقدير الإمكان الاعظم، وتقدير المربعات الصغرى ، وتقدير المربعات الصغرى الموزونة ، وتقدير Cramèr-von-Mises ،والحد الأقصى لتقدير التباعد (MPSE). تم إجراء دراسة محاكاة لمقارنة أداء هذه المقدرات من حيث متوسط أخطائهم التربيعية.تم استخدام مجموعة بيانات أوقات الفشل (بالدقائق) لعينة مكونة من 15 مكونًا إلكترونيًا لإثبات إمكانية تطبيق توزيع IXG في مواقف الحياة الحقيقية ومقارنته مع توزيعات معكوسة اخرى. وقد تم التوصل الى ان طريقة MPSE هي الأفضل في تقدير معلمة التوزيع ، وعلى أساس معايير المقارنة (AIC, BIC) تم اختياره بوصفه النموذج الأنسب ليلائم مجموعات البيانات المستخدمة.(Yadav, Maiti, et al., 2019)

في عام (2020) قام (Hassan, Anwar, et al) بتقديم توزيع شبه xgamma الموزون Weighted Quasi Xgamma Distribution (WQXGD). تم تقدير معلمات النموذج من خلال طريقة الإمكان الاعظم. تم اجراء محاكاة للتحقق من أداء تقديرات الإمكان العظم. كما تم تقديم التطبيق على مجموعتين من البيانات الحقيقية (وقت البقاء على قيد الحياة في أسابيع 44 فأرًا تم إعطاؤها جرعات من Cytoxan بتركيز 60 مجم / كجم مرة واحدة أسبوعيًا وأوقات البقاء (بالأشهر) لمرضى سرطان الرئة) لفحص أهمية النموذج الذي تم تقديمه حديثًا. تمت مقارنة النتائج مع توزيع Quasi Xgamma وتوزيع Rayleigh ، مما كشف أن WQXGD يوفر ملاءمة أفضل من توزيع Quasi Xgamma وتوزيع Rayleigh لبيانات العمر.(Hassan et al., 2020)

في العام (2020) قام (Yadav) واخرون بدراسة بعض الخصائص الإضافية لتوزيع IXGD. تم اجراء التقدير باستخدام الطرق الكلاسيكية (تقدير الإمكان الاعظم (MLE) ، تقدير المربعات الصغرى (LSE) ، تقدير المربعات الصغرى الموزونة (WLSE) ، تقدير Cramer-von-Mises (CME) وأقصى ناتج لتقدير التباعد (MPSE)) مع تقدير بيز (Bayes) لبيانات تحت الرقابة من النوع الثاني. تم الاستنتاج بان تقدير Bayes تؤدي أداءً أفضل من باقي التقديرات. تم تحليل مجموعة بيانات الفشل لجهاز إرسال واستقبال للاتصالات المحمولة جواً 46 مرة (بالساعات). تمت مقارنة نموذج IXGD بعائلة توزيعات مقلوبة بمعلمة واحدة معروفة ، مثل التوزيع الأسي العكسي (IED)، وتوزيع ليندلي العكسي (ILD) ، وتوزيع رايلي العكسي (IRD) ووجد أن IXGD هو الخيار الأفضل لـ مجموعة البيانات المدروسة.(Yadav et al., 2020)

في عام (2021) استخدم (Saha) واخرون اربع طرق كلاسيكية لتقدير معلمة توزيع XGD وهي (طريقة الامكان الأعظم MLE، المربعات الصغرى الاعتيادية OLSE، المربعات الصغرى المرجحة WLSE، ناتج التباعد الأعظم MPS) وطريقة تقدير بيز باستخدام توزيع كاما كتوزيع سابق ودالة الانتروبية العامة كدالة خسارة. تم إجراء دراسة محاكاة لمقارنة هذه الطرق بأحجام عينات مختلفة ومجموعات مختلفة من المعلمات غير المعروفة. لوحظ أن تقدير بيز لخصائص البقاء أفضل مقارنة بعمليات التقدير الكلاسيكية. تم تحليل مجموعة بيانات خاضعة للرقابة لأوقات الراحة (بالساعات) لـ 20 مريضًا يتلقون مسكنًا لغرض التوضيح.(Saha & Yadav, 2021)

في العام (2021) درس (Elshahhat, Ahmed, and Berihan R. Elemary) توزيع Xgamma أحادي المعلمة.ثم تم تقدير المعلمة غير المعروفة وبعض خصائص البقاء لنموذج Xgamma بناءً على العينات الخاضعة للرقابة. تم الحصول على تقديرات الإمكان الأعظم وتقديرات بيز. أجريت دراسة محاكاة لمقارنة التقديرات المختلفة. وأوضحوا أن تقديرات Bayes أفضل من التقديرات الكلاسيكية .تم تحليل مجموعتي بيانات تتعلقان بالتجارب الهندسية والكيميائية (مجموعة بيانات اوقات الفشل لـعينة من 25 قطعة من الخيوط تم اختبارها عند مستوى إجهاد معين بطول (100 سم) و مجموعة بيانات ل 34 مشاهدة بال (ملليغرام / لتر) لكلوريد الفينيل التي تم الحصول عليها من آبار مراقبة التدرج النظيف).(Elshahhat & Elemary, 2021)

في عام (2022) قام (Alomani, G., & Al-Omari, A. I.) بدراسة توزيع Xgamma ذو المعلمتين (The two parameters Xgamma distribution TPXGD) تم تطبيق بيانات حقيقية مما بين ان النتائج تشجع الباحثين على استخدام توزيع TPXGD.(Alomani & Al-Omari, 2022)

في العام (2022) استخدم (Al-Omari) واخرون عدة طرق لتقدير معلمات توزيع Xgamma ذي المعلمتين (The two parameters Xgamma distribution TPXGD) باستخدام العينات المرتبة RSS والعينات العشوائية البسيطة SRS. تم تقدير معلمات التوزيع بطرق التقدير(الإمكان الأعظم MLE، المربعات الصغرى LS، المربعات لاصغرى الموزونة WLS، Cramer-von Mises، ناتج التباعد الأعظم MPS، Anderson-Darling). تم إجراء دراسة المحاكاة لمقارنة أداء المقدرات المختلفة. وتم تحليل مجموعة بيانات أوقات الانتظار (بالدقائق) لخدمة 100 عميل بنك وتبين ان مقدرات RSS أفضل من مقدر SRS باستخدام معيار MSE للمقارنة.(Al-Omari et al., 2022)

قام الباحث في هذه الرسالة بدراسة خصائص توزيع Xgamma واستخدامه في احتساب دالة البقاء، كما تم اقتراح ثلاثة اشكال للتوزيع Xgamma1(XG1D), Xgamma2(XG2D), Xgamma3(XG3D) فضلا عن ذلك تمت المقارنة مع توزيعين معروفين هما توزيع لندلي بمعلمة واحدة LD(θ) والتوزيع الاسي EXP(θ) باستخدام أربع طرائق تقدير مختلفة هي (طريقة الإمكان الأعظم، طريقة العزوم، طريقة المقدرات التجزيئية، طريقة بيز القياسية). كما أظهرت نتائج تجارب المحاكاة وتحليل البيانات الحقيقية ان طريقة بيز القياسية هي الطريقة الأفضل لتقدير دالة البقاء باستخدام التوزيع المقترح XG1D للمرضى المصابين بمرض كوفيد-19 في مدينة النجف الاشرف للمدة الزمنية المحددة في البحث.

الفصل الثاني
الجانب النظري

المبحث الأول - مفاهيم أساسية.

المبحث الثاني - التوزيعات الاحتمالية للفشل.

- التقدير.

0.2 تمهيد

يتكون هذا الفصل من مبحثين، **إذ** تضمن المبحث الأول عرضاً لاهم المفاهيم الأساسية المتعلقة بموضوع المعولية او البقاء Survival مثل دالة البقاء و دالة الكثافة الاحتمالية والدالةالاحتمالية التجميعية واهم خصائص هذه الدوال والمفاهيم ذات العلاقة.

اما المبحث الثاني فيتضمن عرض توزيع Xgamma (XGD) ودراسة اهم خصائص هذا التوزيع، واقتراح ثلاثة توزيعات مشتقة من هذا التوزيع اطلق عليها Xgamma1, Xgamma2, Xgamma3. وعرض أربع طرق من طرائق التقدير هي كالاتي:

1- طريقة الإمكان الأعظم.
2- طريقة العزوم.
3- طريقة المقدرات التجزيئية.
4- طريقة بيز القياسية.

كما تضمن ايضاً عرضاً لتوزيعين من التوزيعات المستخدمة في تحليل دالة البقاء هي توزيع ليندلي Lindley بالمعلمة الواحدة والتوزيع الاسي Exponential.

1.2 المفاهيم الأساسية:

1.1.2 دالة الكثافة الاحتمالية للفشل Failure Probability Density Function

(جليل، 2013) (Miller Jr, 2011)

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية للفشل الذي يرمز لها f(t) بانها احتمال حدوث الحدث (الفشل) خلال المدة الزمنية $(t, t+\Delta t)$ مهما كانت قيمة (Δt)صغيرة إذ ان $(t_i = t_{i-1} + \Delta t_i)$، ويعبر عنها بالصيغة الرياضية الاتية:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t \le T < t + \Delta t)}{\Delta t}; \quad t \ge 0 \qquad (2\text{-}1)$$

إذ ان

Δt : التغير في قيمة المتغير العشوائي (t) التي يشير الى وقت ظهور الحدث.

T: متغير عشوائي يمثل وقت البقاء للكائن الحي.

t: يمثل زمن بقاء الكائن الحي ويكون دائماً اكبر من او يساوي صفراً $(t \ge 0)$.

ومن خصائص هذه الدالة ما يأتي:

1- $\int_{\forall t} f(t)dt = 1$

2- $f(t) \ge 0, \quad \forall \quad t \ge 0$

2.1.2 الدالة الكثافة التجميعية للفشل Failure Cumulative Density Function

(جليل، 2013) (Miller Jr, 2011)

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية للفشل والذي يرمز لها بالرمز F(t) بأنها الاحتمال التجميعي لموت الكائن الحي حتى الزمن (t). فاذا كان (T) متغيراً عشوائياً مستمراً يمتلك دالة كثافة احتمالية (pdf)، f(t) فأن دالة التوزيع التراكمية للفشل له تكون بالصيغة الاتية:

$$F(t) = Pr(T \le t)$$

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \qquad (2\text{-}2)$$

ومن خصائص الدالة F(t) هي:

1- $(0 \le F(t) < 1)$.
2- تكون متزايدة أي ان $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ وهذا يعني ان كل الوحدات (الكائنات) يجب ان تصل الى الفشل (الموت) في النهاية.
3- مستمرة باتجاه اليمين أي ان:

$$\lim_{t\to 0} F(t^+) - F(t) = 0$$

3.1.2 دالة البقاء The Survival Function

(Banerjee et al., 2003) (Dietz et al., 2002) (Gail et al., 2007)

تعرف دالة البقاء والذي يرمز لها بالرمز S(t) بانها احتمال بقاء الفرد على قيد الحياة بعد الوقت t (وقوع الحدث بعد الوقت t). وتحسب بالصيغة الاتية:

$$S(t) = Pr(T > t) = 1 - F(t)$$

اما في دراسة ازمنة البقاء للمكائن والمعدات أو العناصر المصنعة ، فيرمز الى هذه الدالة بالرمز R(t) وتعرف بدالة المعولية (The reliability function) او الموثوقية. واهم خصائص دالة البقاء S(t) هي:

a- دالة رتيبة Monotonie.
b- دالة متناقصة Decreasing.
c- دالة موجبة.
d- مستمرة لجميع قيم t.
e- تقع قيمتها بين الصفر والواحد $\lim_{t\to 0} S(t) = 0, \quad S(0) = 1$

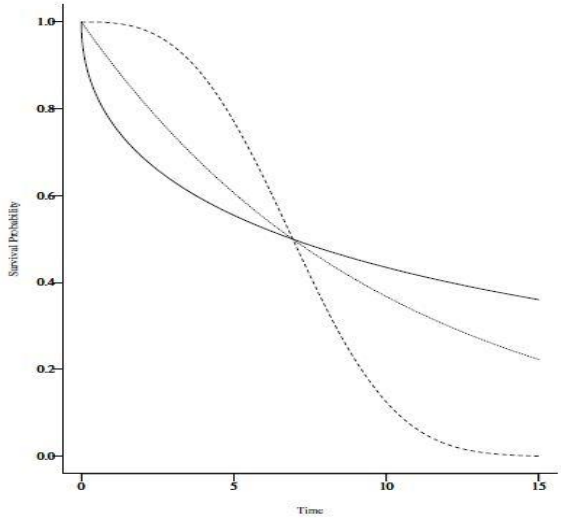
ان دالة البقاء على قيد الحياة هي مكملة لدالة الكثافة التجميعية للفشل F(t) ، أي أن

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (2\text{-}3)$$

ويمكن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للفشل من اشتقاق دالة البقاء S(t) بالنسبة الى الزمن t كالاتي:

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt}$$

والشكل (2-1) يمثل أنواعاً مختلفة لمنحني دالة البقاء S(t) :



شكل (2-1) دالة البقاء لتوزيع وايبل

عندما α=0.5, λ=0.26328 (—)؛ α=0.1, λ=0.1 (...)؛ α=3.0, λ=0.00208 (---) (Dietz et al., 2002)

4.1.2 دالة المخاطرة Hazard function

(Stevenson & EpiCentre, 2009؛ الوكيل et al., 2018)

وهي الدالة الاحتمالية الشرطية للحصول على الحدث (الموت) ضمن المدة $(t, t+\Delta t)$ باعتبار ان الفرد قد بقى على قيد الحياة للزمن (t) او اكثر، وتسمى كذلك نسبة المخاطرة (Hazard rate) ويرمز لها h(t) ،وتعرف رياضيا بما يأتي:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t * \Pr(T > t)}$$

$$= \frac{1}{S(t)} * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t}$$

$$h(t)=\frac{1}{S(t)}*\frac{dF(t)}{dt}$$

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)} \qquad (2\text{-}4)$$

5.1.2 دالة متوسط الحياة المتبقي Mean Residual Life function(mrl)

(Dietz et al., 2002)

تقيس هذه الدالة توقع العمر المتبقي للأشخاص الموجودين في الزمن t ,وتعرف رياضيا بما يأتي:

$$mrl(t)=E\left[T-t \middle| T>t\right]=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_{t}^{\infty}S(\mathrm{u})du \qquad (2\text{-}5)$$

6.1.2 متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل Mean Time to Failure (MTTF)

(Zio, 2007)

عندما يكون T هو وقت الفشل ، فإن القيمة المتوقعة تمثل متوسط فترة البقاء لحين وقوع الحدث (الفشل) ويرمز لها رياضياً (MTTF) وتحسب كالاتي:

$$MTTF=E(T)=\int_{0}^{\infty}tf(t)dt=\int_{0}^{\infty}S(t)dt \qquad (2\text{-}6)$$

2.2 التوزيعات الاحتمالية للبقاء Survival probability distributions (هرمز، 1990) (Anderson, 2010)

سيتم في هذه الفقرة عرض لبعض التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في دراسة البقاء في هذه الرسالة مثل توزيع Xgamma والتوزيعات المشتقة منه وتوزيع لندلي بالمعلمة الواحدة والتوزيع الاسي.

1.2.2 توزيع Xgamma (XG)

(Elshahhat & Elemary, 2021) (Demirci Biçer, 2019) (Sen et al., 2016) (Yadav, Saha, et al., 2019) (Sen et al., 2018b)

تم اشتقاق هذا التوزيع من قبل (Sen et al.) في سنة (2016) من خلط كل من التوزيع الأسي (The Exponential distribution) وتوزيع كاما (Gamma distribution) باوزان محددة للحصول على شكل التوزيع الجديد، واقترح له اسم (Xgamma distribution) وذلك من خلال معادلة خلط التوزيعات الاتية:

$$f(\mathrm{t})=\pi_1 f_1(t;\theta)+\pi_2 f_2(t;\theta) \qquad (2\text{-}7)$$

افرض أن $f_1(t)$ تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة θ، و $f_2(t)$ تتبع توزيع كاما بمعلمتي القياس θ ومعلمة الشكل 3، اي $f_1(t) \sim \exp(\theta) \quad and \quad f_2(t) \sim gamma(3,\theta)$ وبافتراض ان معلمتي الخلط هما $\pi_1 = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad \pi_2 = 1-\pi_1 = \frac{1}{1+\theta}$ وبتطبيق معادلة (2-7) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية pdf للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع Xgamma، والمعرف بالصيغة الاتية:

$$f(t) = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\theta e^{-\theta t}\right) + \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta^3 t^2}{\Gamma 3} e^{-\theta t}\right)$$

$$f(t) = \frac{\theta^2}{1+\theta} e^{-\theta t}\left(1 + \frac{\theta t^2}{2}\right), \quad t > 0, \quad \theta > 0 \qquad (2\text{-}8)$$

ولاثبات ان دالة التوزيع هي دالة احنمالية يجب ان نحصل على النتيجة التالية $\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$ وكالاتي:

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty \frac{\theta^2}{1+\theta} e^{-\theta t}\left(1 + \frac{\theta t^2}{2}\right) dt$$

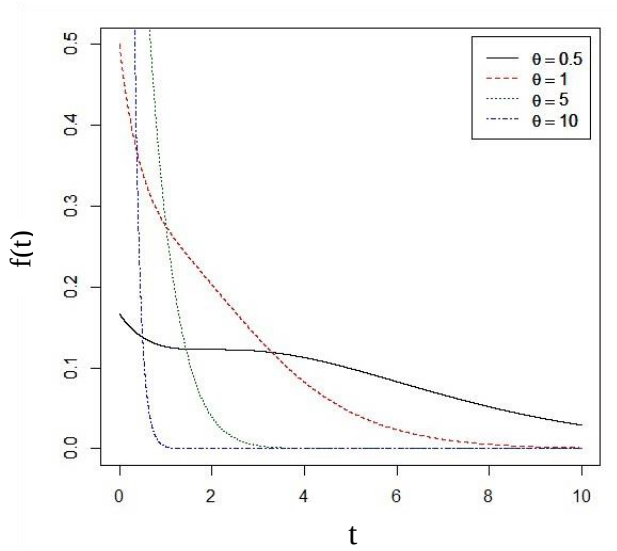
$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\int_0^\infty e^{-\theta t} dt + \frac{\theta}{2}\int_0^\infty t^2 e^{-\theta t} dt\right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\frac{\Gamma(1)}{\theta} + \frac{\theta}{2}\frac{\Gamma(3)}{\theta^3}\right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\frac{\theta+1}{\theta^2}\right] = 1$$

أذن الدالة لمعرفة في المعادلة (2-8) هي دالة احتمالية pdf.

ويوضح الشكل (2-2) مخطط دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع Xgamma لبعض قيم θ المختارة.



الشكل (2-2) : يوضح منحنيات الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma لبعض قيم θ. (الرسم من عمل الباحث)

يمكن ايجاد دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع Xgamma وكما يأتي:

$$F(\mathrm{t}) = \Pr(\mathrm{T} < t) = \int_0^t f\ (\mathrm{x})dx$$

$$F(\mathrm{t}) = \int_0^t \frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+\frac{\theta x^2}{2})e^{-\theta x}dx$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\int_0^t e^{-\theta x}dx + \frac{\theta}{2}\int_0^t x^2 e^{-\theta x}dx\right]$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة مرتين لإيجاد نتيجة التكامل للحد الثاني نحصل على

$$\int_0^t x^2 e^{-\theta x}dx = \frac{-t^2 e^{-\theta t}}{\theta} + \frac{2}{\theta}\left[\frac{-te^{-\theta t}}{\theta} - \frac{e^{-\theta t}+1}{\theta^2}\right]$$

وبتعويض نتيجة التكامل نحصل على:

$$F(\mathrm{t}) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{-e^{-\theta x}}{\theta}\Big|_0^t + \frac{\theta}{2}\left(\frac{-t^2 e^{-\theta t}}{\theta} + \frac{2}{\theta}\left[\frac{-te^{-\theta t}}{\theta} - \frac{e^{-\theta t}+1}{\theta^2}\right]\right)\right]$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{-e^{-\theta t}+1}{\theta} + \frac{\theta}{2}\left(\frac{-t^2 e^{-\theta t}}{\theta} + \frac{2}{\theta}\left[\frac{-te^{-\theta t}}{\theta} - \frac{e^{-\theta t}+1}{\theta^2}\right]\right)\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{-e^{-\theta t}+1}{\theta}-\frac{t^2e^{-\theta t}}{2}-\frac{te^{-\theta t}}{\theta}-\frac{e^{-\theta t}+1}{\theta^2}\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{-\theta e^{-\theta t}+\theta-\frac{\theta^2t^2}{2}e^{-\theta t}-t\theta e^{-\theta t}-e^{-\theta t}+1}{\theta^2}\right]$$

$$=\frac{-\theta e^{-\theta t}-\frac{\theta^2t^2}{2}e^{-\theta t}-t\theta e^{-\theta t}-e^{-\theta t}+1+\theta}{(1+\theta)}$$

$$=\frac{-e^{-\theta t}}{(1+\theta)}(\theta+\frac{\theta^2t^2}{2}+t\theta+1)+1$$

$$\therefore F(\mathrm{t})=1-\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}(\theta+\frac{\theta^2t^2}{2}+t\theta+1),\quad t>0,\quad \theta>0 \qquad (2\text{-}9)$$

1.1.2.2 العزوم اللامركزية Non-central moments

يمكن ايجاد العزوم اللامركزية لتوزيع Xgamma كالاتي:

$$\mu'_r=E(T^r)=\int_0^\infty t^r f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty t^r\frac{\theta^2}{1+\theta}\left(1+\frac{\theta}{2}t^2\right)e^{-\theta t}dt$$

$$=\frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\int_0^\infty t^re^{-\theta t}dt+\frac{\theta}{2}\int_0^\infty t^{r+2}e^{-\theta t}dt\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\frac{\Gamma(r+1)}{\theta^{r+1}}+\frac{\theta}{2}\frac{\Gamma(r+3)}{\theta^{r+3}}\right]$$

$$=\frac{r![2\theta+(\mathrm{r}+1)(\mathrm{r}+2)]}{2\theta^r(1+\theta)}\qquad for\quad r=1,2,3,... \qquad (2\text{-}10)$$

ومن المعادلة (2-10) يمكننا استخراج العزوم كما في ادناه:

$$\mu'_1 = \frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)} = Mean \qquad (2\text{-}11)$$

$$\mu'_2 = \frac{2(\theta+6)}{\theta^2(1+\theta)}; \quad \mu'_3 = \frac{6(\theta+10)}{\theta^3(1+\theta)}; \quad \mu'_4 = \frac{24(\theta+15)}{\theta^4(1+\theta)}$$

$$\text{var}(T) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$= \frac{2(\theta+6)}{\theta^2(1+\theta)} - \frac{(\theta+3)^2}{\theta^2(1+\theta)^2}$$

$$\text{var}(T) = \frac{\theta^2+8\theta+3}{\theta^2(1+\theta)^2} \qquad (2\text{-}12)$$

2.1.2.2 العزوم المركزية لتوزيع Xgamma Central Moments

يمكن ايجاد العزم المركزي للتوزيع وبالاعتماد على العزوم اللامركزية وكما في ادناه:

$$\mu_r = E(T-\mu')^r$$

$$= E\sum_{j=0}^{r} C_j^r(-\mu'_1)[E(\mathrm{t}^{r-j})]$$

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r(-\mu'_1)^j(\mu'_{r-j}) \qquad (2\text{-}13)$$

ومن معادلة (2-13) يمكن حساب العزوم المركزية

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{1} C_j^1(-\mu'_1)^j(\mu'_{1-j})$$

$$= (\mu'_1) + (-\mu'_1) = 0$$

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} C_j^2(-\mu'_1)^j(\mu'_{2-j})$$

$$= C_0^2(-\mu'_1)^0(\mu'_2) + C_1^2(-\mu'_1)^1(\mu'_1) + C_2^2(-\mu'_1)^2(\mu'_0)$$

$$= \mu'_2 + 2(-\mu'_1)(\mu'_1) + (-\mu'_1)^2$$

$$= \mu'_2 - 2(\mu'_1)^2 + (\mu'_1)^2$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \text{var(t)}$$

وأن الانحراف المعياري Standard Deviation(SD) للتوزيع هو

$$SD = \sqrt{\mathrm{var}(T)} = \frac{\sqrt{\theta^2 + 8\theta + 3}}{\theta(1+\theta)} \qquad (2\text{-}14)$$

3.1.2.2 المنوال Mode

وهي قيمة t التي تجعل الدالة f(t) في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليها من خلال إيجاد قيمة t التي تحقق المعادلة الآتية:

$$f'(\mathrm{t}) = \frac{df(\mathrm{t})}{dt} = 0$$

$$f''(\mathrm{t}) = \frac{d^2 f(\mathrm{t})}{dt^2} < 0$$

ويمكن إيجاد منوال توزيع Xgamma كما يأتي:

$$\frac{df(\mathrm{t})}{dt} = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\theta t - \theta - \frac{\theta^2 t^2}{2}\right)e^{-\theta t} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\frac{d^2 f(\mathrm{t})}{dt^2} = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\left(\theta - \theta^2 t\right)e^{-\theta t} - \left(\theta t - \theta - \frac{\theta^2 t^2}{2}\right)\theta e^{-\theta t}\right] \qquad (2\text{-}16)$$

عندما تكون المشتقة في معادلة (2-15) تساوي (0) و $0 < \theta \le 0.5$، وتكون المشتقة في معادلة (2-16) سالبة، عندها تكون قيمة $t = \frac{1+\sqrt{1-2\theta}}{\theta}$ (اما في حالة $t = \frac{1-\sqrt{1-2\theta}}{\theta}$ تكون قيمة المشتقة الثانية في معادلة (2-16) موجبة) مما يعني:

1- عندما $\theta \le 0.5$، f '(t)=0 يعني ان $\frac{1+\sqrt{1-2\theta}}{\theta}$ هي النقطة الحرجة الوحيدة التي يتم فيها تعظيم الدالة.
2- عندما $\theta > 0.5$ تكون $f'(\mathrm{t}) \le 0$ أي انه f(t) تكون متناقصة في T.

وعليه فان المنوال لتوزيع Xgamma يكون كما يأتي:

$$Mode = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-2\theta}}{\theta}, & 0 < \theta \le 0.5 \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad (2\text{-}17)$$

4.1.2.2 معامل الاختلاف The coefficients of variation(CV)

يمكن ايجاد معامل الاختلاف (CV) لتوزيع Xgamma كالاتي:

$$CV = \frac{SD}{\mu}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{\theta^2+8\theta+3}}{\theta(1+\theta)}}{\dfrac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}} = \frac{\sqrt{\theta^2+8\theta+3}}{(\theta+3)} \qquad (2\text{-}18)$$

5.1.2.2 معامل الالتواء skewness(ϒ1)

لنفرض ان T متغير عشوائي بمتوسط μ وتباين σ^2 يعرف معامل فيشر للالتواء للمتغير T بانه العزم من الرتبة الثالثة للتحويلة القياسية ل T وكالاتي:

$$\Upsilon_1 = E\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^3$$

$$= \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$$

$$= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

ومن معادلة (2-13) نجد قيمة μ3 وكما يأتي:

$$\mu_3 = E\,(\mathrm{T}-\mu)^3$$

$$\mu_3 = \sum_{j=0}^{3} C_j^3 (-\mu_1')^j\,(\mu_{3-j}')$$

$$= C_0^3(-\mu_1')^0(\mu_3') - C_1^3(\mu_1')^1(\mu_2') + C_2^3(-\mu_1')^2(\mu_1') + C_3^3(-\mu_1')^3(\mu_0')$$

$$= (\mu_3') - 3(\mu_1')(\mu_2') + 2(\mu_1')^3$$

$$= \frac{6(\theta+10)}{\theta^3(1+\theta)} - 3\left[\left(\frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}\right)\left(\frac{2(\theta+6)}{\theta^2(1+\theta)}\right)\right] + 2\left(\frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}\right)^3$$

$$\therefore \mu_3 = \frac{2(\theta^3+15\theta^3+9\theta+3)}{\theta^3(1+\theta)^3}$$

$$\sigma^3=\left(\frac{\sqrt{\theta^2+8\theta+3}}{\theta(1+\theta)}\right)^3=\frac{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^{3/2}}{\theta^3(1+\theta)^3}$$

$$\Upsilon_1=\frac{\dfrac{2(\theta^3+15\theta^3+9\theta+3)}{\theta^3(1+\theta)^3}}{\dfrac{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^{3/2}}{\theta^3(1+\theta)^3}}=\frac{2(\theta^3+15\theta^3+9\theta+3)}{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^{3/2}} \qquad (2\text{-}19)$$

6.1.2.2 معامل التفرطح kurtosis

نقوم باحتساب معامل التفرطح $\Upsilon 2$ من خلال القانون الآتي:

$$\Upsilon_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

ومن معادلة (2-13) نجد قيمة $\boldsymbol{\mu_4}$ وكما يأتي:

$$\mu_4=E\,(\mathrm{T}-\mu)^4$$

$$\mu_4=\sum_{j=0}^{4}C_j^4(-\mu_1')^j\,(\mu_{4-j}')$$

$$=C_0^4(-\mu_1')^0(\mu_4')+C_1^4(-\mu_1')^1(\mu_3')+C_2^4(-\mu_1')^2(\mu_2')+C_3^4(-\mu_1')^3(\mu_1')+C_4^4(-\mu_1')^4(\mu_0')$$

$$=(\mu_4')-4(\mu_1')(\mu_3')+6(\mu_1')^2(\mu_2')-4(\mu_1')^4+(\mu_1')^4$$

$$\mu_4=(\mu'_4-4\mu'_1\mu'_3+6\mu'^2_1\mu'_2-3\mu_1'^4)$$

$$\mu_4=\frac{24(\theta+15)}{\theta^4(1+\theta)}-4\left[\left(\frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}\right)\left(\frac{6(\theta+10)}{\theta^3(1+\theta)}\right)\right]+6\left[\left(\frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}\right)^2\left(\frac{2(\theta+6)}{\theta^2(1+\theta)}\right)\right]-3\left(\frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}\right)^4$$

$$\mu_4=\frac{3(3\theta^4+64\theta^3+102\theta^2+72\theta+15)}{\theta^4(1+\theta)^4}$$

$$\Upsilon_2=\frac{\dfrac{3(3\theta^4+64\theta^3+102\theta^2+72\theta+15)}{\theta^4(1+\theta)^4}}{\left(\dfrac{\left(\theta^2+8\theta+3\right)}{\theta^2(1+\theta)^2}\right)^2}$$

$$\Upsilon_2=\frac{3(3\theta^4+64\theta^3+102\theta^2+72\theta+15)}{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^2} \qquad (2\text{-}20)$$

7.1.2.2 الدالة المولدة للعزوم The moment generating function (MGF)

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+\frac{\theta x^2}{2})e^{-\theta x}dx$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty e^{-x(\theta-t)}dx + \frac{\theta}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x(\theta-t)}dx\right)$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\frac{-e^{-x(\theta-t)}}{(\theta-t)}\Bigg|_0^\infty + \frac{\theta}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\theta-t)^3}\right)$$

$$\therefore M_x(t) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{(\theta-t)} + \frac{\theta}{(\theta-t)^3}\right); t \in R \qquad (2\text{-}21)$$

8.1.2.2 الدالة المميزة` The characteristic function (CF)

$$\phi_x(t) = Ee^{itx}$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+\frac{\theta x^2}{2})e^{-\theta x}dx$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty e^{-x(\theta-it)}dx + \frac{\theta}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x(\theta-it)}dx\right)$$

$$= \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\frac{-e^{-x(\theta-it)}}{(\theta-it)}\Bigg|_0^\infty + \frac{\theta}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\theta-it)^3}\right)$$

$$\therefore \phi_x(t) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{(\theta-it)} + \frac{\theta}{(\theta-it)^3}\right); t \in R, i = \sqrt{-1} \qquad (2\text{-}22)$$

9.1.2.2 الاحصائات المرتبة Order statistics

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = n[1-F(t_1)]^{n-1} f\,(t_1)$$

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = \frac{n\theta^2}{(1+\theta)^n}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)^{n-1}(1+\frac{\theta t^2}{2})e^{-n\theta t}\,;\mathrm{t}>0 \qquad (2\text{-}23)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = n[F(t_n)]^{n-1} f\,(t_n)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = \frac{n\theta^2}{(1+\theta)}\left[1-\frac{\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\right]^{n-1}(1+\frac{\theta t^2}{2})e^{-\theta t}\,;\mathrm{t}>0 \qquad (2\text{-}24)$$

10.1.2.2 دالة البقاء The survival function (SF)

يمكن ايجاد دالة البقاء لتوزيع Xgamma باستخدام الصيغة في المعادلة (2-3) في الفقرة (3.1.2) والمعادلة (2-9) في الفقرة (1.2.2) وكالاتي:

$$S(t) = 1-F(t)$$

$$= 1-\left[1-\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)\right]$$

$$S(t) = \frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right) \quad ;0<t<\infty,\theta>\infty \qquad (2\text{-}25)$$

11.1.2.2 دالة المخاطرة The Hazard function

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع Xgamma باستخدام الصيغة في المعادلة (2-4) في الفقرة (4.1.2) والمعادلة (2-25) في الفقرة (10.1.2.2) وكالاتي:

$$h(t) = \frac{f\,(t)}{S\,(t)}$$

$$= \frac{\frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+\frac{\theta t^2}{2})e^{-\theta t}}{\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}$$

$$h(t)=\frac{\theta^2(1+\frac{\theta t^2}{2})}{\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)},\qquad \frac{\theta^2}{1+\theta}<h(t)<\theta \tag{2-26}$$

12.1.2.2 دالة متوسط الحياة المتبقية Mean residual life function (mrl)

يمكن الحصول على دالة متوسط الحياة المتبقية لتوزيع Xgamma باستخدام الصيغة في المعادلة (2-5) في الفقرة (5.1.2) وكالاتي:

$$mrl(t)=E\left[T-t\,|\,T>t\right]=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^\infty S(\mathrm{u})du$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^\infty \frac{e^{-\theta u}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta u+\frac{\theta^2 u^2}{2}\right)du$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{(1+\theta)S(\mathrm{t})}\left(\int_t^\infty e^{-\theta u}du+\theta\int_t^\infty e^{-\theta u}du+\theta\int_t^\infty u\,e^{-\theta u}du+\frac{\theta^2}{2}\int_t^\infty u^2e^{-\theta u}du\right)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{(1+\theta)S(\mathrm{t})}\left(\left.\frac{-e^{-\theta u}}{\theta}\right|_t^\infty+\theta\left(\left.\frac{-e^{-\theta u}}{\theta}\right|_t^\infty\right)+\theta\int_t^\infty u\,e^{-\theta u}du+\frac{\theta^2}{2}\int_t^\infty u^2e^{-\theta u}du\right)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{e^{-\theta t}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}\left(\begin{array}{l}\frac{e^{-\theta t}}{\theta}+e^{-\theta t}+t\,e^{-\theta t}+\frac{e^{-\theta t}}{\theta}\\+\frac{\theta t^2e^{-\theta t}}{2}+t\,e^{-\theta t}+\frac{e^{-\theta t}}{\theta}\end{array}\right)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{e^{-\theta t}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}\left(\frac{3+\theta+2\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}}{\theta}\right)e^{-\theta t}$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)+(2+\theta t)}{\theta\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}$$

$$\therefore mrl\,(\mathrm{t}) = \frac{1}{\theta} + \frac{(2+\theta t)}{\theta\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}27)$$

ومن خصائص هذه الدالة هي:

$$mrl\,(0) = \mu = \frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}$$

وهي دالة متناقصة وتكون قيمتها كما يأتي:

$$\frac{1}{\theta} < mrl\,(t) < \frac{(\theta+3)}{\theta(1+\theta)}$$

13.1.2.2 **متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل** The mean time to failure (MTTF)

يمكن الحصول على متوسط وقت الفشل لتوزيع Xgamma باستخدام الصيغة في المعادلة (2-6) في الفقرة (6.1.2) ومعادلة (2-25) في الفقرة (10.1.2.2) وكالاتي:

$$MTTF = \int_0^\infty S\,(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty e^{-\theta t}dt + \theta\int_0^\infty e^{-\theta t}dt + \theta\int_0^\infty t\,e^{-\theta t}dt + \frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty t^2 e^{-\theta t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\left.\frac{-e^{-\theta t}}{\theta}\right|_0^\infty + \left.-e^{-\theta t}\right|_0^\infty dt + \theta\frac{\Gamma(2)}{\theta^2} + \frac{\theta^2}{2}\frac{\Gamma(3)}{\theta^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{\theta}+1+\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\right)$$

$$\therefore MTTF = \frac{(3+\theta)}{\theta(1+\theta)} \qquad (2\text{-}28)$$

14.1.2.2 خاصية فقدان الذاكرة Memorylessness property

بافتراض ان مدة البقاء تتوزع بتوزيع Xgamma، فان احتمال البقاء في الزمن القادم $(t+\delta)$ على افتراض بقاء الشخص في العمر t وأن δ هي مقدار التغير بالزمن ويمكن ان يعبر عنه رياضيا بما يأتي:

$$\Pr[T>t+\delta / T>t]=\frac{S(t+\delta)}{S(T>t)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-\theta(t+\delta)}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta(t+\delta)+\frac{\theta^2(t+\delta)^2}{2}\right)}{\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\theta+\theta(t+\delta)+\frac{\theta^2(t+\delta)^2}{2}\right)}{\left(1+\theta+\theta t+\frac{\theta^2 t^2}{2}\right)}e^{-\theta\delta} \qquad (2\text{-}29)$$

لاحظ ان التوزيع الاحتمالي الشرطي المعرف في المعادلة (2-29) لا يشبه شكل دالة البقاء لتوزيع Xgamma مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة لا يتوزع توزيع Xgamma أي ان توزيع Xgamma لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

2.2.2 توزيع Xgamma1 (XG1D)

تم اقتراح صيغة بديلة لتوزيع Xgamma، وذلك من خلال خلط التوزيع الاسي بالمعلمة $\left(\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ وتوزيع كاما بالمعلمتين $\left(3,\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ بنفس الاوزان المستخدمة في اشتقاق توزيع Xgamma بالمعادلة (2-7)، واطلق على التوزيع المقترح Xgamma1 distribution (XG1D).

اي بافتراض ان $f_2(\mathrm{t})\sim gamma\left(3,\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ & $f_1(t)\sim \exp\left(\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ ومعلمتي الخلط $\pi_1=\frac{\theta}{1+\theta}$ و $\pi_2=1-\pi_1$ فان دالة الكثافة الاحتمالية pdf للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع Xgamma1 هي:

$$f(\mathrm{t})=\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)+\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{t^2}{\theta^3\Gamma 3}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \left(1 + \frac{t^2}{2\theta^3}\right), \quad t > 0, \quad \theta > 0 \qquad (2\text{-}30)$$

ولاثبات ان دالة التوزيع هي دالة احنمالية يجب ان نحصل على النتيجة التالية $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt} = 1$ وكالاتي:

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \left(1 + \frac{t^2}{2\theta^3}\right) dt$$

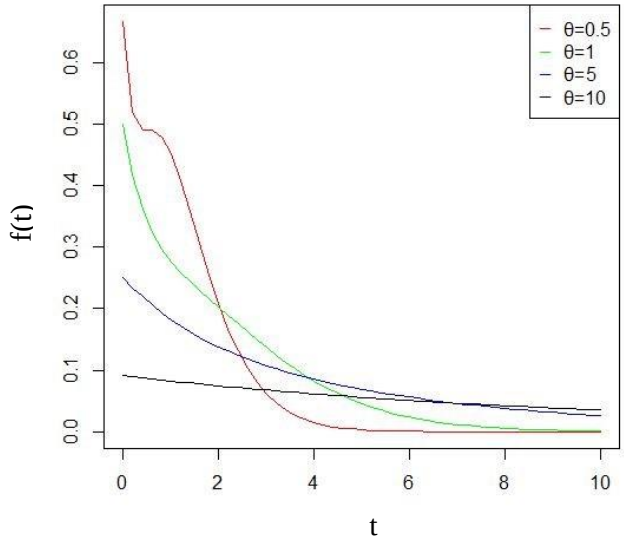
$$\int_0^\infty f(t) = \frac{1}{1+\theta} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\theta}} dt + \frac{1}{2\theta^3} \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t}{\theta}} dt \right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{1}{1+\theta} \left[\theta\,\Gamma(1) + \frac{1}{2\theta^3} \theta^3 \Gamma(3) \right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{1}{1+\theta} [\theta + 1] = 1$$

أذن الدالة لمعرفة في المعادلة (2-30) هي دالة احتمالية pdf.

ويوضح الشكل (2-3) مخطط دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع Xgamma1 لبعض قيم θ.



الشكل (2-3) :منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Xgamma1 لبعض القيم θ

ويمكن احتساب دالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع Xgamma1 وكما يأتي:

$$F(\mathrm{t}) = \Pr(T \le t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(1+\theta)}(1+\frac{x^2}{2\theta^3})e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left[\int_0^t e^{\frac{-x}{\theta}}dx + \frac{1}{2\theta^3}\int_0^t x^2 e^{\frac{-x}{\theta}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left[-\theta e^{\frac{-t}{\theta}} + \theta + \frac{1}{2\theta^3}\left(-t^2\theta e^{\frac{-t}{\theta}} + 2\theta\left[-t\theta e^{\frac{-t}{\theta}} - \theta^2 e^{\frac{-t}{\theta}} + \theta^2\right]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left[-(1+\theta)e^{\frac{-t}{\theta}} - \left(1+\frac{t}{2\theta}\right)\frac{1}{\theta}te^{\frac{-t}{\theta}} + (1+\theta)\right]$$

$$= -e^{\frac{-t}{\theta}} - \frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(1+\frac{t}{2\theta}\right)te^{\frac{-t}{\theta}} + 1$$

$$\therefore F(\mathrm{t}) = 1 - e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right) \qquad (2\text{-}31)$$

1.2.2.2 العزوم اللامركزية لتوزيع Xgamma1 Non-central moments

$$\mu_r' = E(T^r) = \int_0^\infty t^r \frac{1}{(1+\theta)}(1+\frac{t^2}{2\theta^3})e^{\frac{-t}{\theta}}dt$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty t^r e^{\frac{-t}{\theta}}dt + \frac{1}{2\theta^3}\int_0^\infty t^{r+2}e^{\frac{-t}{\theta}}dt\right)$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\Gamma(r+1)\theta^{r+1} + \frac{1}{2\theta^3}\Gamma(r+3)\theta^{r+3}\right)$$

$$= \frac{r!\theta^r}{(1+\theta)}\left(\theta + \frac{(r+2)(r+1)}{2}\right) \quad for\ r = 1,2,\ldots \qquad (2\text{-}32)$$

ومن المعادلة (2-32) يمكننا استخراج العزوم كما في ادناه:

$$\mu_1' = \frac{\theta(3+\theta)}{(1+\theta)} = Mean(t) \qquad (2\text{-}33)$$

$$\mu_2' = \frac{2\theta^2(6+\theta)}{(1+\theta)}, \quad \mu_3' = \frac{6\theta^3(10+\theta)}{(1+\theta)}, \quad \mu_4' = \frac{24\theta^4(15+\theta)}{(1+\theta)}$$

$$\mathrm{var}(T) = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= \frac{2\theta^2(6+\theta)}{(1+\theta)} - \left(\frac{\theta(3+\theta)}{(1+\theta)}\right)^2$$

$$\mathrm{var}(T) = \frac{\theta^2(\theta^2+8\theta+3)}{(1+\theta)^2} \qquad (2\text{-}34)$$

2.2.2.2 العزوم المركزية لتوزيع Xgamma1 Central moments

يمكن ايجاد العزم المركزي لتوزيع Xgamma1 بالاعتماد على العلاقة بين العزوم المركزية و العزوم اللامركزية وكما يأتي:

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r (-\mu_1')^j (\mu_{r-j}')$$

والذي منها نجد العزم المركزي الأول عندما r=1 ومن ثم العزم المركزي الثاني عندما r=2 وهكذا

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{1} C_j^1 (-\mu_1')^j (\mu_{1-j}')$$

$$= (\mu_1') + (-\mu_1') = 0$$

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} C_j^2 (-\mu_1')^j (\mu_{2-j}')$$

$$= C_0^2(-\mu_1')^0(\mu_2') + C_1^2(-\mu_1')^1(\mu_1') + C_2^2(-\mu_1')^2(\mu_0')$$

$$= \mu_2' + 2(-\mu_1')(\mu_1') + (-\mu_1')^2$$

$$= \mu_2' - 2(\mu_1')^2 + (\mu_1')^2$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mathrm{var}(t)$$

وأن الانحراف المعياري Standard Deviation(SD) للتوزيع هو

$$SD = \sqrt{\mathrm{var(T)}} = \frac{\theta\sqrt{\theta^2+8\theta+3}}{(1+\theta)} \qquad (2\text{-}35)$$

3.2.2.2 المنوال Mode

يمكن حساب المنوال لتوزيع Xgamma1 كما تم ذكره في الفقرة (3.1.2.2) وكما يأتي:

$$\frac{df\ (\mathrm{t})}{dt}=\frac{1}{2\theta^{4}(1+\theta)}\left(2\theta t-2\theta^{3}-t^{2}\right)e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (2\text{-}36)$$

$$\frac{d^{2}f\ (\mathrm{t})}{dt^{2}}=\frac{1}{4\theta^{5}(1+\theta)}\left(2\theta^{2}-4\theta t+2\theta^{3}+t^{2}\right)e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (2\text{-}37)$$

عندما (2-36) تساوي (0) و $0<\theta<0.5$، تكون المشتقة الثانية في (2-37) سالبة، عندها تكون قيمة $t=\theta+\theta\sqrt{1-2\theta}$ (اما في حالة $t=\theta-\theta\sqrt{1-2\theta}$ تكون قيمة المشتقة الثانية في معادلة (2-37) موجبة) مما يعني:

عندما $0<\theta<0.5$، f '(t)=0 يعني ان $\theta+\theta\sqrt{1-2\theta}$ هي النقطة الحرجة الوحيدة التي يتم تعظيم الدالة عندها.

وعليه فان المنوال لتوزيع Xgamma1 يكون كما يأتي:

$$Mode=\begin{cases}\theta+\theta\sqrt{1-2\theta}, & 0<\theta<0.5\\ 0, & otherwise\end{cases} \qquad (2\text{-}38)$$

4.2.2.2 معامل الاختلاف The coefficients of variation(CV)

يمكن ايجاد معامل الاختلاف (CV) لتوزيع Xgamma1 كالاتي:

$$CV=\frac{SD}{\mu}$$

$$=\frac{\dfrac{\theta\sqrt{\theta^{2}+8\theta+3}}{(1+\theta)}}{\dfrac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}}=\frac{\sqrt{\theta^{2}+8\theta+3}}{(\theta+3)} \qquad (2\text{-}39)$$

5.2.2.2 معامل الالتواء skewness(ϒ1)

نحسب معامل الالتواء ϒ1 لتوزيع Xgamma1 كالاتي:

$$\Upsilon_{1}=E\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^{3}$$

$$= \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$$

$$= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$\mu_3 = E\,(\mathrm{T} - \mu)^3$$

$$\mu_3 = \sum_{j=0}^{3} C_j^3 (-\mu_1')^j\,(\mu_{3-j}')$$

$$= C_0^3(-\mu_1')^0(\mu_3') - C_1^3(\mu_1')^1(\mu_2') + C_2^3(-\mu_1')^2(\mu_1') + C_3^3(-\mu_1')^3(\mu_0')$$

$$= (\mu_3') - 3(\mu_1')(\mu_2') + 2(\mu_1')^3$$

$$= \frac{6\theta^3(\theta+10)}{(1+\theta)} - 3\left[\left(\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}\right)\left(\frac{2\theta^2(\theta+6)}{(1+\theta)}\right)\right] + 2\left(\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}\right)^3$$

$$\therefore \mu_3 = \frac{2\theta^3(\theta^3 + 15\theta^3 + 9\theta + 3)}{(1+\theta)^3}$$

$$\sigma^3 = \left(\frac{\theta\sqrt{\theta^2 + 8\theta + 3}}{(1+\theta)}\right)^3 = \frac{\theta^3\left(\theta^2 + 8\theta + 3\right)^{2/3}}{(1+\theta)^3}$$

$$\Upsilon_1 = \frac{\dfrac{2\theta^3(\theta^3 + 15\theta^3 + 9\theta + 3)}{(1+\theta)^3}}{\dfrac{\theta^3\left(\theta^2 + 8\theta + 3\right)^{2/3}}{(1+\theta)^3}} = \frac{2(\theta^3 + 15\theta^3 + 9\theta + 3)}{\left(\theta^2 + 8\theta + 3\right)^{2/3}} \qquad (2\text{-}40)$$

6.2.2.2 معامل التفرطح kurtosis

نقوم باحتساب التفرطح $\Upsilon 2$ من خلال الصيغة الآتية:

$$\Upsilon_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$\mu_4 = E\,(\mathrm{T} - \mu)^4$$

$$\mu_4 = \sum_{j=0}^{4} C_j^4 (-\mu_1')^j\,(\mu_{4-j}')$$

$$= C_0^4(-\mu_1')^0(\mu_4') + C_1^4(-\mu_1')^1(\mu_3') + C_2^4(-\mu_1')^2(\mu_2') + C_3^4(-\mu_1')^3(\mu_1') + C_4^4(-\mu_1')^4(\mu_0')$$

$$=(\mu_4')-4(\mu_1')(\mu_3')+6(\mu_1')^2(\mu_2')-4(\mu_1')^4+(\mu_1')^4$$

$$\mu_4=(\mu'_4-4\mu'_1\mu'_3+6\mu'^2_1\mu'_2-3\mu_1'^4)$$

$$\mu_4=\frac{24\theta^4(\theta+15)}{(1+\theta)}-3\left[\left(\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}\right)\left(\frac{6\theta^3(\theta+10)}{(1+\theta)}\right)\right]+6\left[\left(\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}\right)^2\left(\frac{2\theta^2(\theta+6)}{(1+\theta)}\right)\right]-3\left(\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}\right)^4$$

$$\mu_4=\frac{3\theta^4(5\theta^4+94\theta^3+216\theta^2+218\theta+75)}{(1+\theta)^4}$$

$$\Upsilon_2=\frac{3(5\theta^4+94\theta^3+216\theta^2+218\theta+75)}{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^2} \qquad (2\text{-}41)$$

7.2.2.2 الدالة المولدة للعزوم The moment generating function (MGF)

$$M_x(t)=Ee^{tx}$$

$$=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx$$

$$=\int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{(1+\theta)}(1+\frac{x^2}{2\theta^3})e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{(1+\theta)}\left(\left.\frac{e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)}}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)}\right|_0^\infty+\frac{1}{2\theta^3}\frac{\Gamma(3)}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{(\frac{1}{\theta}-t)}+\frac{1}{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right)$$

$$\therefore M_x(t)=\frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^2+1}{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right);t\in R \qquad (2\text{-}42)$$

8.2.2.2 الدالة المميزة`The characteristic function (CF)

$$\phi_x(t) = Ee^{itx}$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{(1+\theta)}(1+\frac{x^2}{2\theta^3})e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\left.\frac{e^{-x\left(\frac{1}{\theta}-it\right)}}{\left(\frac{1}{\theta}-it\right)}\right|_0^\infty + \frac{1}{2\theta^3}\frac{\Gamma(3)}{\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-it\right)} + \frac{1}{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^3}\right)$$

$$\therefore \phi_x(t) = \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^2+1}{\theta^3\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^3}\right); t \in R, i = \sqrt{-1} \qquad (2\text{-}43)$$

9.2.2.2 الاحصائات المرتبة Order statistics

$$f_{T\,1:n}(t) = n[1-F(t_1)]^{n-1} f(t_1)$$

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = \frac{n}{(1+\theta)}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)^{n-1}(1+\frac{t^2}{2\theta^3})e^{\frac{-nt}{\theta}}; \mathrm{t} > 0 \qquad (2\text{-}44)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = n[F(t_n)]^{n-1} f(t_n)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = \frac{n}{(1+\theta)}\left[1-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]^{n-1}(1+\frac{t^2}{2\theta^3})e^{\frac{-t}{\theta}} \qquad (2\text{-}45)$$

10.2.2.2 دالة البقاء The survival function (SF)

يمكن ايجاد دالة البقاء لتوزيع Xgamma1 كالاتي:

$$S(t)=1-F(t)$$
$$=1-\left[1-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]$$
$$S(t)=e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\quad ;0<x<\infty,\theta>\infty \qquad (2\text{-}46)$$

11.2.2.2 دالة المخاطرة The Hazard function

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع Xgamma1 باستخدام الصيغة الاتية:

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}$$
$$=\frac{\frac{1}{(1+\theta)}(1+\frac{t^2}{2\theta^3})e^{\frac{-t}{\theta}}}{e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}$$
$$\therefore h(t)=\frac{2\theta^3+t^2}{2\theta^3(1+\theta)+(2\theta+t)\theta t} \qquad (2\text{-}47)$$

12.2.2.2 دالة متوسط الحياة المتبقية Mean residual life function (mrl)

يمكن الحصول على دالة متوسط الحياة المتبقية لتوزيع Xgamma1 وكالاتي:

$$mrl(t)=E\left[T-t\,|T>t\right]=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^\infty S(\mathrm{u})du$$
$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^\infty e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+u)u}{2\theta^2(1+\theta)}\right)du$$
$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{S(\mathrm{t})}\left[\int_x^\infty e^{\frac{-u}{\theta}}du+\frac{1}{2\theta^2(1+\theta)}\left(2\theta\int_x^\infty ue^{\frac{-u}{\theta}}du+\int_x^\infty u^2e^{\frac{-u}{\theta}}du\right)\right]$$

$$mrl(t)=\frac{1}{e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}\left(\theta e^{\frac{-t}{\theta}}+\frac{e^{\frac{-t}{\theta}}}{2\theta^2(1+\theta)}\left(4\theta^2t+4\theta^3+t^2\theta\right)\right)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{2\theta^3+2\theta^4+4\theta^2t+4\theta^3+t^2\theta}{2\theta^2(1+\theta)+(2\theta+t)t}$$

$$\therefore mrl(\mathrm{t})=\theta+\frac{t+2\theta}{1+\theta+\frac{t}{\theta}+\frac{t^2}{2\theta^2}} \qquad (2\text{-}48)$$

ومن خصائص هذه الدالة هي:

$$mrl(0)=\mu=\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}$$

وهي دالة متناقصة وتكون قيمتها كما يأتي:

$$\theta<mrl(t)<\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)}$$

13.2.2.2 **متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل** The mean time to failure (MTTF)

يمكن الحصول على متوسط وقت الفشل لتوزيع Xgamma1 وكالاتي:

$$MTTF=\int_0^\infty S(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{\frac{-t}{\theta}}dt+\frac{1}{2\theta^2(1+\theta)}\left(2\theta\int_0^\infty te^{\frac{-t}{\theta}}dt+\int_0^\infty t^2e^{\frac{-t}{\theta}}dt\right)$$

$$\therefore MTTF=\frac{\theta(\theta+3)}{(1+\theta)} \qquad (2\text{-}49)$$

14.2.2.2 خاصية فقدان الذاكرة Memorylessness property

بافتراض ان مدة البقاء تتوزع بتوزيع Xgamma1، فان احتمال البقاء في الزمن القادم $(t+\delta)$ على افتراض بقاء الشخص في العمر t وδ هي مقدار التغير في الزمن ويمكن ان يعبر عنه رياضيا بما يأتي:

$$\Pr[T>t+\delta / T>t]=\frac{S(t+\delta)}{S(T>t)}$$

$$=\frac{e^{\frac{-(t+\delta)}{\theta}}\left(1+\frac{\left(2\theta+(t+\delta)\right)(t+\delta)}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}{e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{\left(2\theta+t\right)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\left(2\theta+(t+\delta)\right)(t+\delta)}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}{\left(1+\frac{\left(2\theta+t\right)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}e^{\frac{-\delta}{\theta}} \qquad (2\text{-}50)$$

لاحظ ان التوزيع الاحتمالي الشرطي المعرف في المعادلة (2-50) لا يشبه شكل دالة البقاء لتوزيع Xgamma1 مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة لا يتوزع توزيع Xgamma1 أي ان توزيع Xgamma1 لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

3.2.2 توزيع Xgamma2 (XG2D)

قمنا باقتراح صيغة جديدة اخرى لتوزيع xgamma، وذلك من خلط التوزيع الاسي بالمعلمة (θ) وتوزيع كاما بالمعلمتين (3,θ) بافتراض ان اوزان معادلة الخلط كالاتي: $\pi_1=\frac{1}{1+\theta}$ $\pi_2=1-\pi_1=\frac{\theta}{1+\theta}$

وبتطبيق معادلة الخلط في (2-7) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T الذي سوف يتبع التوزيع المقترح Xgamma2 وبالشكل الاتي:

$$f(\mathrm{t})=\frac{1}{1+\theta}\left(\theta e^{-\theta t}\right)+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\theta^3 t^2}{\sqrt{3}}e^{-\theta t}\right)$$

$$f(\mathrm{t})=\frac{\theta}{1+\theta}e^{-\theta t}\left(1+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right),\quad t>0,\quad \theta>0 \qquad (2\text{-}51)$$

ولاثبات ان دالة التوزيع هي دالة احتمالية يجب ان نحصل على النتيجة التالية $\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$ وكالاتي:

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\theta t}\left(1+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)dt$$

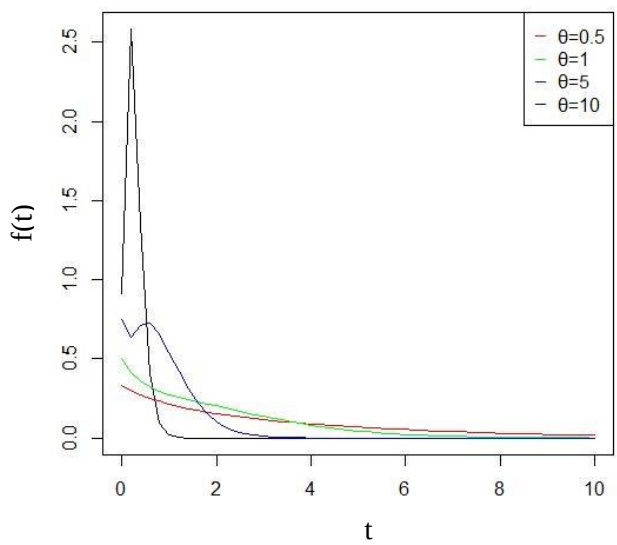
$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[\int_0^\infty e^{-\theta t}dt + \frac{\theta^3}{2}\int_0^\infty t^2 e^{-\theta t}dt\right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[\frac{\Gamma(1)}{\theta} + \frac{\theta^3}{2}\frac{\Gamma(3)}{\theta^3}\right]$$

$$\int_0^\infty f(t) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[\frac{1+\theta}{\theta}\right] = 1$$

أذن الدالة لمعرفة في المعادلة (2-51) هي دالة احتمالية pdf.

ويوضح الشكل (2-4) مخطط دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع Xgamma2 لبعض قيم θ.



الشكل (2-4) :منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Xgamma2 لبعض القيم θ

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع Xgamma1 وكما يأتي:

$$F(t) = \Pr(T < t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$=\int_0^t \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\theta x}\left(1+\frac{\theta^3 x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\theta}{(1+\theta)}\left[\int_0^t e^{-\theta x}dx+\frac{\theta^3}{2}\int_0^t x^2 e^{-\theta x}dx\right]$$

$$=\frac{\theta}{(1+\theta)}\left[-\frac{e^{-\theta x}}{\theta}+\frac{1}{\theta}-\frac{x^2\theta^2}{2}e^{-\theta x}-x\theta e^{-\theta x}-e^{-\theta x}+1\right]$$

$$=\frac{\theta}{(1+\theta)}\left[-e^{-\theta t}\left(\frac{1}{\theta}+\frac{t^2\theta^2}{2}+t\theta+1\right)+\frac{(1+\theta)}{\theta}\right]$$

$$\therefore F(t)=1-\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left[1+\frac{t^2\theta^3}{2}+t\theta^2+\theta\right] \qquad (2\text{-}52)$$

1.3.2.2 العزوم اللامركزية لتوزيع Xgamma2 Non-central moments

$$\mu_r^{'}=E(T^r)=\int_0^\infty t^r f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty t^r \frac{\theta}{1+\theta}e^{-\theta t}\left(1+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)dt$$

$$=\frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty t^r e^{-\theta t}dt+\frac{\theta^3}{2}\int_0^\infty t^{r+2}e^{-\theta t}dt\right)$$

$$=\frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\frac{\Gamma(r+1)}{\theta^{r+1}}+\frac{\theta^3}{2}\frac{\Gamma(r+3)}{\theta^{r+3}}\right)$$

$$\mu_r^{'}=\frac{r!}{(1+\theta)\theta^r}\left(1+\frac{\theta(r+2)(r+1)}{2}\right) \quad for\ r=1,2,... \qquad (2\text{-}53)$$

ومن المعادلة (2-53) يمكننا استخراج العزوم كما في ادناه:

$$\mu_1^{'}=\frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)}=Mean(t) \qquad (2\text{-}54)$$

$$\mu_2^{'} = \frac{2(1+6\theta)}{\theta^2(1+\theta)}, \quad \mu_3^{'} = \frac{6(1+10\theta)}{\theta^3(1+\theta)}, \quad \mu_4^{'} = \frac{24(1+15\theta)}{\theta^4(1+\theta)}$$

$$\mathrm{var}(T) = \mu_2^{'} - (\mu_1^{'})^2$$

$$= \frac{2(1+6\theta)}{\theta^2(1+\theta)} - \left(\frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)}\right)^2$$

$$\mathrm{var}(T) = \frac{(3\theta^2+8\theta+1)}{\theta^2(1+\theta)^2} \qquad (2\text{-}55)$$

2.3.2.2 العزوم المركزية لتوزيع Xgamma2 central moments

يمكن ايجاد العزم المركزي للتوزيع كما في المعادلة (2-13) الفقرة (4.1.8.2) وبالاعتماد على العزوم اللامركزية وكما يأتي:

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r (-\mu_1')^j (\mu_{r-j}')$$

ويتم منها حساب العزوم

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{1} C_j^1 (-\mu_1')^j (\mu_{1-j}')$$

$$= (\mu_1') + (-\mu_1') = 0$$

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} C_j^2 (-\mu_1')^j (\mu_{2-j}')$$

$$= C_0^2(-\mu_1')^0(\mu_2') + C_1^2(-\mu_1')^1(\mu_1') + C_2^2(-\mu_1')^2(\mu_0')$$

$$= \mu_2' + 2(-\mu_1')(\mu_1') + (-\mu_1')^2$$

$$= \mu_2' - 2(\mu_1')^2 + (\mu_1')^2$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mathrm{var(t)}$$

وأن الانحراف المعياري standard deviation(SD) للتوزيع هو

$$SD = \sqrt{\mathrm{var}(T)} = \frac{\sqrt{3\theta^2+8\theta+1}}{\theta(1+\theta)} \qquad (2\text{-}56)$$

3.3.2.2 المنوال Mode

يمكن حساب المنوال لتوزيع Xgamma2 كما يأتي:

$$\frac{df\ (t)}{dt}=\frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left(\theta^2 t-1-\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)e^{-t\theta} \qquad (2\text{-}57)$$

$$\frac{d^2 f\ (t)}{dt^2}=\frac{\theta^3}{(1+\theta)}\left(\theta-2\theta^2 t-\frac{\theta^3 t^2}{2}+1\right)e^{-\theta t} \qquad (2\text{-}58)$$

عندما (2-57) تساوي (0) و $2\le\theta<\infty$ ، تكون قيمة (2-58) سالبة، عندها تكون قيمة $t=\frac{\theta+\sqrt{\theta(\theta-2)}}{\theta^2}$ (اما في حالة $t=\frac{\theta-\sqrt{\theta(\theta-2)}}{\theta^2}$ تكون قيمة المشتقة الثانية في معادلة (2-37) موجبة) مما يعني:

عندما $\theta\ge 2$، f '(x)=0 يعني ان $\frac{\theta+\sqrt{\theta(\theta-2)}}{\theta^2}$ هي النقطة الحرجة الوحيدة التي يتم تعظيم الدالة عندها.

وعليه فان المنوال لتوزيع Xgamma2 يكون كما يأتي:

$$Mode=\begin{cases}\frac{\theta+\sqrt{\theta(\theta-2)}}{\theta^2}, & 2\le\theta<\infty\\ 0, & otherwise\end{cases} \qquad (22\text{-}59)$$

4.3.2.2 معامل الاختلاف The coefficients of variation(CV)

يمكن ايجاد معامل الاختلاف (CV) لتوزيع Xgamma2 كالاتي:

$$CV=\frac{SD}{\mu}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3\theta^2+8\theta+1}}{\theta(1+\theta)}}{\frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)}}=\frac{\sqrt{\theta^2+8\theta+3}}{(1+3\theta)} \qquad (2\text{-}60)$$

5.3.2.2 **معامل الالتواء** skewness($\Upsilon 1$)

يمكن احتساب معامل الالتواء $\Upsilon 1$ لتوزيع xgamma2 كالاتي:

$$\Upsilon_1 = E\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^3$$

$$= \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$$

$$= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$\mu_3 = E\,(\mathrm{T}-\mu)^3$$

$$\mu_3 = \sum_{j=0}^{3} C_j^3 (-\mu_1')^j\,(\mu_{3-j}')$$

$$= C_0^3(-\mu_1')^0(\mu_3') - C_1^3(\mu_1')^1(\mu_2') + C_2^3(-\mu_1')^2(\mu_1') + C_3^3(-\mu_1')^3(\mu_0')$$

$$= (\mu_3') - 3(\mu_1')(\mu_2') + 2(\mu_1')^3$$

$$\therefore \mu_3 = \frac{2(3\theta^3 + 9\theta^3 + 15\theta + 1)}{\theta^3(1+\theta)^3}$$

$$\sigma^3 = \left(\frac{\sqrt{3\theta^2 + 8\theta + 1}}{\theta(1+\theta)}\right)^3 = \frac{\left(3\theta^2 + 8\theta + 1\right)^{2/3}}{\theta^3(1+\theta)^3}$$

$$S_k = \frac{\dfrac{2(3\theta^3 + 9\theta^3 + 15\theta + 1)}{\theta^3(1+\theta)^3}}{\dfrac{\left(3\theta^2 + 8\theta + 1\right)^{2/3}}{\theta^3(1+\theta)^3}} = \frac{2(3\theta^3 + 9\theta^3 + 15\theta + 1)}{\left(3\theta^2 + 8\theta + 1\right)^{2/3}} \qquad (2\text{-}61)$$

6.3.2.2 **معامل التفرطح** kurtosis

نقوم باحتساب التفرطح $\Upsilon 2$ من خلال القانون الآتي:

$$\Upsilon_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$\mu_4 = E\,(\mathrm{T}-\mu)^4$$

$$\mu_4 = \sum_{j=0}^{4} C_j^4 (-\mu_1')^j (\mu_{4-j}')$$

$$= C_0^4(-\mu_1')^0(\mu_4') + C_1^4(-\mu_1')^1(\mu_3') + C_2^4(-\mu_1')^2(\mu_2') + C_3^4(-\mu_1')^3(\mu_1') + C_4^4(-\mu_1')^4(\mu_0')$$

$$= (\mu_4') - 4(\mu_1')(\mu_3') + 6(\mu_1')^2(\mu_2') - 4(\mu_1')^4 + (\mu_1')^4$$

$$\mu_4 = (\mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu_1'^4)$$

$$\mu_4 = \frac{3(15\theta^4 + 72\theta^3 + 102\theta^2 + 64\theta + 3)}{\theta^4(1+\theta)^4}$$

$$\Upsilon_2 = \frac{3(15\theta^4 + 72\theta^3 + 102\theta^2 + 64\theta + 3)}{\left(3\theta^2 + 8\theta + 1\right)^2} \qquad (2\text{-}62)$$

7.3.2.2 الدالة المولدة للعزوم The moment generating function (MGF)

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\theta x}\left(1 + \frac{\theta^3 x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\left.\frac{e^{-x(\theta-t)}}{(\theta-t)}\right|_0^\infty + \frac{\theta^3}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\theta-t)^3}\right)$$

$$\therefore M_x(t) = \frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{(\theta-t)} + \frac{\theta^3}{(\theta-t)^3}\right); t \in R \qquad (2\text{-}63)$$

8.3.2.2 الدالة المميزة` The characteristic function (CF)

$$\phi_x(t) = Ee^{itx}$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\theta x}\left(1 + \frac{\theta^3 x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\left. \frac{e^{-x(\theta-it)}}{(\theta-it)} \right|_0^{\infty} + \frac{\theta^3}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\theta-it)^3} \right)$$

$$\therefore \phi_x(t) = \frac{\theta}{(1+\theta)}\left(\frac{1}{(\theta-it)} + \frac{\theta^3}{(\theta-it)^3} \right); t \in R, i = \sqrt{-1} \qquad (2\text{-}64)$$

9.3.2.2 الاحصائات المرتبة Order statistics

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = n[1-F(t_1)]^{n-1} f(t_1)$$

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = \frac{n\theta}{(1+\theta)^n}\left(1+\frac{t^2\theta^3}{2}+t\theta^2+\theta\right)^{n-1}(1+\frac{\theta^3 t^2}{2})e^{-n\theta t}; \mathrm{t} > 0 \qquad (2\text{-}65)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = n[F(t_n)]^{n-1} f(t_n)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = \frac{n\theta}{(1+\theta)}\left[1-\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left[1+\frac{t^2\theta^3}{2}+t\theta^2+\theta\right]\right]^{n-1}(1+\frac{\theta^3 t^2}{2})e^{-\theta t} \qquad (2\text{-}66)$$

10.3.2.2 دالة البقاء The survival function (SF)

يمكن ايجاد دالة البقاء لتوزيع xgamma2 باستخدام الصيغة في المعادلة (2-3) في الفقرة , (3.1.2) وكالاتي:

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left[1+\frac{t^2\theta^3}{2}+t\theta^2+\theta\right]\right]$$

$$S(t) = \frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}67)$$

11.3.2.2 دالة المخاطرة The Hazard function

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع Xgamma2 باستخدام الصيغة في المعادلة (2-4) في الفقرة (4.1.2) وكالاتي:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$= \frac{\frac{\theta}{(1+\theta)}(1+\frac{\theta^3 x^2}{2})e^{-\theta x}}{\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)}$$

$$h(t) = \frac{\theta(1+\frac{\theta^3 t^2}{2})}{1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}} \qquad (2\text{-}68)$$

12.3.2.2 دالة متوسط الحياة المتبقية Mean residual life function (mrl)

يمكن الحصول على دالة متوسط الحياة المتبقية لتوزيع xgamma2 باستخدام المعادلة (2-5) وكالاتي:

$$mrl(t) = E\left[T-t \mid T>t\right] = \frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^\infty S(\mathrm{u})du$$

$$mrl(t) = \frac{1}{S(t)}\int_t^\infty \frac{e^{-\theta u}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2 u+\frac{\theta^3 u^2}{2}\right)du$$

$$mrl(t) = \frac{1}{(1+\theta)S(t)}\left(\int_t^\infty e^{-\theta u}du+\theta\int_t^\infty e^{-\theta u}du+\theta^2\int_t^\infty ue^{-\theta u}du+\frac{\theta^3}{2}\int_t^\infty u^2 e^{-\theta u}du\right)$$

$$mrl(t) = \frac{1}{e^{-\theta t}\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)}\left(\frac{e^{-\theta t}}{\theta}+e^{-\theta t}+x\,\theta e^{-\theta t}+e^{-\theta t}+\frac{\theta^2 x^2 e^{-\theta t}}{2}+t\,\theta e^{-\theta t}+e^{-\theta t}\right)$$

$$\therefore mrl(t) = \frac{1}{\theta}+\frac{(2+\theta t)}{\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}69)$$

ومن خصائص هذه الدالة هي:

$$mrl(0) = \mu = \frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)}$$

وهي دالة متناقصة وتكون قيمتها كما يأتي:

$$\frac{1}{\theta} < mrl(t) < \frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)}$$

13.3.2.2 متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل The mean time to failure (MTTF)

يمكن الحصول على متوسط وقت الفشل لتوزيع Xgamma2 باستخدام المعادلة (2-6) وكالاتي:

$$MTTF = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\int_0^\infty e^{-\theta t}dt+\theta\int_0^\infty e^{-\theta t}dt+\theta^2\int_0^\infty te^{-\theta t}dt+\frac{\theta^3}{2}\int_0^\infty t^2 e^{-\theta t}dt\right)$$

$$\therefore MTTF = \frac{(1+3\theta)}{\theta(1+\theta)} \qquad (2\text{-}70)$$

14.3.2.2 خاصية فقدان الذاكرة Memorylessness property

بافتراض ان مدة البقاء تتوزع بتوزيع Xgamma2، فان احتمال البقاء في الزمن القادم $(t+\delta)$ على افتراض بقاء الشخص في العمر t و δ هي مقدار التغير في الزمن ويمكن ان يعبر عنه رياضيا بما يأتي:

$$\Pr[T>t+\delta / T>t] = \frac{S(t+\delta)}{S(T>t)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\theta(t+\delta)}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2(t+\delta)+\frac{\theta^3(t+\delta)^2}{2}\right)}{\frac{e^{-\theta t}}{(1+\theta)}\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(1+\theta+\theta^2(t+\delta)+\frac{\theta^3(t+\delta)^2}{2}\right)}{\left(1+\theta+\theta^2 t+\frac{\theta^3 t^2}{2}\right)}e^{-\delta\theta} \qquad (2\text{-}71)$$

لاحظ ان التوزيع الاحتمالي الشرطي المعرف في المعادلة (2-71) لا يشبه شكل دالة البقاء لتوزيع Xgamma2 مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة لا يتوزع توزيع Xgamma2 أي ان توزيع Xgamma2 لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

4.2.2 توزيع Xgamma3 (XGS3)

بعد اقتراح الصيغتين السابقتين قمنا باقتراح صيغة اخرى جديدة لتوزيع Xgamma من خلال دمج الصيغتين المقترحتين السابقتين، حيث تم خلط التوزيع الأسي بالمعلمة $\left(\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ وتوزيع كاما بالمعلمتي $\left(3,\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ أي بافتراض أن $f_1(t)\sim \exp\left(\lambda=\frac{1}{\theta}\right)$ و $f_2(t)\sim gamma\left(3,\beta=\frac{1}{\theta}\right)$

وافتراض ان معلمتي الخلط $\pi_1=\frac{1}{1+\theta}$ و $\pi_2=1-\pi_1=\frac{\theta}{1+\theta}$ فأن دالة الكثافة الاحتمالية pdf للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع Xgamma3، هي:

$$f(\mathrm{t})=\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{t^2}{\theta^3\Gamma(3)}e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$$

$$f(\mathrm{t})=\frac{1}{\theta(1+\theta)}e^{-\frac{t}{\theta}}\left(1+\frac{t^2}{2\theta}\right),\quad t>0,\quad \theta>0 \qquad (2\text{-}72)$$

ولاثبات ان دالة التوزيع هي دالة احنمالية يجب ان نحصل على النتيجة التالية $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt}=1$ وكالاتي:

$$\int_0^\infty f(t)=\int_0^\infty \frac{1}{\theta(1+\theta)}e^{-\frac{t}{\theta}}\left(1+\frac{t^2}{2\theta}\right)dt$$

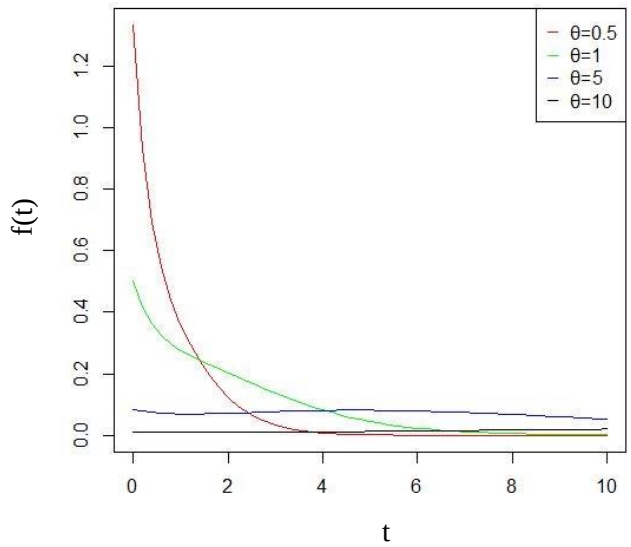
$$\int_0^\infty f(t)=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\theta}}dt+\frac{1}{2\theta}\int_0^\infty t^2e^{-\frac{t}{\theta}}dt\right]$$

$$\int_0^\infty f(t)=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[\theta\Gamma(1)+\frac{1}{2\theta}\theta^3\Gamma(3)\right]$$

$$\int_0^\infty f(t)=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[\theta(1+\theta)\right]=1$$

أذن الدالة لمعرفة في المعادلة (2-72) هي دالة احتمالية pdf.

ويوضح الشكل (2-5) مخطط دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع xgamma3 لبعض قيم θ.



الشكل (2-5): منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع xgamma3 لبعض القيم θ

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع Xgamma3 وكالاتي:

$$F(t)=\Pr(T\le t)=\int_0^t f(x)dx$$

$$=\int_0^t \frac{1}{\theta(1+\theta)}(1+\frac{x^2}{2\theta})e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[\int_0^t e^{\frac{-x}{\theta}}dx+\frac{1}{2\theta}\int_0^t x^2e^{\frac{-x}{\theta}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[-\theta e^{\frac{-t}{\theta}}+\theta+\frac{1}{2\theta}\left(-t^2\theta e^{\frac{-t}{\theta}}+2\theta\left[-\theta te^{\frac{-t}{\theta}}-\theta^2e^{\frac{-t}{\theta}}+\theta^2\right]\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[-\theta e^{\frac{-t}{\theta}}+\theta-\frac{t^2}{2}e^{\frac{-t}{\theta}}-t\theta e^{\frac{-t}{\theta}}-\theta^2e^{\frac{-t}{\theta}}+\theta^2\right]$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left[\left(-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(\theta+\frac{t^2}{2}+t\theta+\theta^2\right)\right)+\theta(1+\theta)\right]$$

$$\therefore F(\mathrm{t})=1-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right) \qquad (2\text{-}73)$$

1.4.2.2 العزوم اللامركزية لتوزيع Xgamma3 Non-central moments

$$\mu_r^{'} = E(T^r) = \int_0^{\infty} t^r \frac{1}{\theta(1+\theta)}(1+\frac{t^2}{2\theta})e^{\frac{-t}{\theta}}dt$$

$$= \frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\int_0^{\infty} t^r e^{\frac{-t}{\theta}}dt + \frac{1}{2\theta}\int_0^{\infty} t^{r+2}e^{\frac{-t}{\theta}}dt\right)$$

$$= \frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\Gamma(r+1)\theta^{r+1} + \frac{1}{2\theta}\Gamma(r+3)\theta^{r+3}\right)$$

$$\mu_r^{'} = \frac{r!\theta^r}{(1+\theta)}\left(1+\frac{\theta(r+2)(r+1)}{2}\right) \quad for\ r=1,2,... \qquad (2\text{-}74)$$

ومن المعادلة (2-74) يمكننا استخراج العزوم كما في ادناه:

$$\mu_1^{'} = \frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)} = Mean \qquad (2\text{-}75)$$

$$\mu_2^{'} = \frac{2\theta^2(1+6\theta)}{(1+\theta)}, \quad \mu_3^{'} = \frac{6\theta^3(1+10\theta)}{(1+\theta)}, \quad \mu_4^{'} = \frac{24\theta^4(1+15\theta)}{(1+\theta)}$$

$$\text{var}(T) = \mu_2^{'} - (\mu_1^{'})^2$$

$$= \frac{2\theta^2(1+6\theta)}{(1+\theta)} - \left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)^2$$

$$\text{var(T)} = \frac{\theta^2(3\theta^2+8\theta+1)}{(1+\theta)^2} \qquad (2\text{-}76)$$

2.4.2.2 العزوم المركزية لتوزيع Xgamma3 central moments

يمكن ايجاد العزم المركزي للتوزيع بالاعتماد على العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم اللامركزية وكما يأتي:

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r (-\mu_1')^j (\mu_{r-j}')$$

ثم نجد كمها العزوم بالتعويض عن r=1, r=2, r=3, … .

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{1} C_j^1 (-\mu_1')^j (\mu_{1-j}')$$
$$= (\mu_1') + (-\mu_1') = 0$$
$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} C_j^2 (-\mu_1')^j (\mu_{2-j}')$$
$$= C_0^2 (-\mu_1')^0 (\mu_2') + C_1^2 (-\mu_1')^1 (\mu_1') + C_2^2 (-\mu_1')^2 (\mu_0')$$
$$= \mu_2' + 2(-\mu_1')(\mu_1') + (-\mu_1')^2$$
$$= \mu_2' - 2(\mu_1')^2 + (\mu_1')^2$$
$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mathrm{var(t)}$$

وأن الانحراف المعياري standard deviation(SD) للتوزيع هو

$$SD = \sqrt{\mathrm{var}(T)} = \frac{\theta\sqrt{3\theta^2 + 8\theta + 1}}{(1+\theta)} \qquad (2\text{-}77)$$

3.4.2.2 المنوال Mode

يمكن حساب المنوال لتوزيع Xgamma3 وكما يأتي:

$$\frac{df\ (\mathrm{t})}{dt} = \frac{1}{2\theta^5(1+\theta)}\left(2\theta t - 2\theta^3 - t^2\right)e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (2\text{-}78)$$

$$\frac{d^2 f\ (\mathrm{t})}{dt^2} = \frac{1}{2\theta^6(1+\theta)}\left(2\theta^3 - 4t\theta + 2\theta^2 + t^2\right)e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (2\text{-}79)$$

عندما (2-78) تساوي (0) و $0<\theta<0.5$ ، تكون قيمة (2-79) سالبة، عندها تكون قيمة $t=\theta+\theta\sqrt{1-2\theta}$ (اما في حالة $t=\theta-\theta\sqrt{1-2\theta}$ تكون قيمة المشتقة الثانية في معادلة (2-37) موجبة) مما يعني:

عندما $0<\theta<0.5$ ، f '(t)=0 يعني ان $\theta+\theta\sqrt{1-2\theta}$ هي النقطة الحرجة الوحيدة التي يتم تعظيم الدالة عندها.

وعليه فان المنوال لتوزيع Xgamma3 يكون كما يأتي:

$$Mode = \begin{cases} \theta+\theta\sqrt{1-2\theta}, & 0<\theta<0.5 \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad (2\text{-}80)$$

4.4.2.2 معامل الاختلاف The coefficients of variation(CV)

يمكن ايجاد معامل الاختلاف (CV) لتوزيع Xgamma3 كالاتي:

$$CV = \frac{SD}{\mu}$$

$$= \frac{\dfrac{\theta\sqrt{3\theta^2 + 8\theta + 1}}{(1+\theta)}}{\dfrac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}} = \frac{\sqrt{\theta^2 + 8\theta + 3}}{(1+3\theta)} \qquad (2\text{-}81)$$

5.4.2.2 معامل الالتواء لتوزيع Xgamma3 skewness(ϒ1)

يمكن احتساب معامل الالتواء ϒ1 معامل الالتواء لتوزيع Xgamma3 كالاتي:

$$\Upsilon_1 = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3$$

$$= \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}$$

$$= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$\mu_3 = E\,(\mathrm{T}-\mu)^3$$

$$\mu_3 = \sum_{j=0}^{3} C_j^3 (-\mu_1')^j\,(\mu_{3-j}')$$

$$= C_0^3(-\mu_1')^0(\mu_3') - C_1^3(\mu_1')^1(\mu_2') + C_2^3(-\mu_1')^2(\mu_1') + C_3^3(-\mu_1')^3(\mu_0')$$

$$= (\mu_3') - 3(\mu_1')(\mu_2') + 2(\mu_1')^3$$

$$= \frac{6\theta^3(1+10\theta)}{(1+\theta)} - 3\left[\left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)\left(\frac{2\theta^2(1+6\theta)}{(1+\theta)}\right)\right] + 2\left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)^3$$

$$\therefore \mu_3 = \frac{2\theta^3(3\theta^3 + 9\theta^2 + 15\theta + 1)}{(1+\theta)^3}$$

$$\sigma^3 = \left(\frac{\theta\sqrt{3\theta^2 + 8\theta + 1}}{(1+\theta)}\right)^3 = \frac{\theta^3\left(3\theta^2 + 8\theta + 1\right)^{2/3}}{(1+\theta)^3}$$

$$S_k = \frac{\dfrac{2\theta^3(3\theta^3+9\theta^2+15\theta+1)}{(1+\theta)^3}}{\dfrac{\theta^3\left(3\theta^2+8\theta+1\right)^{2/3}}{(1+\theta)^3}} = \frac{2(3\theta^3+9\theta^2+15\theta+1)}{\left(3\theta^2+8\theta+1\right)^{2/3}} \qquad (2\text{-}82)$$

6.4.2.2 معامل التفرطح لتوزيع Xgamma3 kurtosis

نقوم باحتساب معامل التفرطح $\Upsilon 2$ كالاتي:

$$\Upsilon_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$\mu_4 = E(T-\mu)^4$$

$$\mu_4 = \sum_{j=0}^{4} C_j^4(-\mu_1')^j(\mu_{4-j}')$$

$$= C_0^4(-\mu_1')^0(\mu_4') + C_1^4(-\mu_1')^1(\mu_3') + C_2^4(-\mu_1')^2(\mu_2') + C_3^4(-\mu_1')^3(\mu_1') + C_4^4(-\mu_1')^4(\mu_0')$$

$$= (\mu_4') - 4(\mu_1')(\mu_3') + 6(\mu_1')^2(\mu_2') - 4(\mu_1')^4 + (\mu_1')^4$$

$$\mu_4 = (\mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu_1'^4)$$

$$\mu_4 = \frac{24\theta^4(1+15\theta)}{(1+\theta)} - 3\left[\left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)\left(\frac{6\theta^3(1+10\theta)}{(1+\theta)}\right)\right] + 6\left[\left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)^2\left(\frac{2\theta^2(1+6\theta)}{(1+\theta)}\right)\right] - 3\left(\frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}\right)^4$$

$$\mu_4 = \frac{3\theta^4(75\theta^4+218\theta^3+216\theta^2+94\theta+5)}{(1+\theta)^4}$$

$$\Upsilon_2 = \frac{3\theta^4(75\theta^4+218\theta^3+216\theta^2+94\theta+5)}{\left(\theta^2+8\theta+3\right)^2} \qquad (2\text{-}83)$$

7.4.2.2 الدالة المولدة للعزوم The moment generating function (MGF)

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(1+\frac{x^2}{2\theta}\right)e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\left.\frac{e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)}}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)}\right|_0^\infty+\frac{1}{2\theta}\frac{\Gamma(3)}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right)$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)}+\frac{1}{\theta\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right)$$

$$\therefore M_x(t)=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\frac{\theta\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^2+1}{\theta\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^3}\right);t\in R \qquad (2\text{-}84)$$

8.4.2.2 الدالة المميزة` The characteristic function (CF)

$$\phi_x(t)=Ee^{itx}$$

$$=\int_0^\infty e^{itx}f(x)dx$$

$$=\int_0^\infty e^{itx}\frac{1}{\theta(1+\theta)}(1+\frac{x^2}{2\theta})e^{\frac{-x}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\theta}-it\right)}dx+\frac{1}{2\theta}\int_0^\infty x^2e^{-x(\frac{1}{\theta}-\mathrm{it})}dx\right)$$

$$=\frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-it\right)}+\frac{1}{\theta\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^3}\right)$$

$$\therefore \phi_x(t) = \frac{1}{\theta(1+\theta)}\left(\frac{\theta\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^2+1}{\theta\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^3}\right); t \in R, i = \sqrt{-1} \qquad (2\text{-}85)$$

9.4.2.2 الاحصائات المرتبة order statistics

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = n[1-F(t_1)]^{n-1} f(t_1)$$

$$f_{T\,1:n}(\mathrm{t}) = \frac{n}{\theta(1+\theta)}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)^{n-1}(1+\frac{t^2}{2\theta})e^{\frac{-nt}{\theta}}; \mathrm{t} > 0 \qquad (2\text{-}86)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = n[F(t_n)]^{n-1} f(t_n)$$

$$f_{Tn:n}(\mathrm{t}) = \frac{n}{\theta(1+\theta)}\left[1-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)\right]^{n-1}(1+\frac{t^2}{2\theta})e^{\frac{-t}{\theta}} \qquad (2\text{-}87)$$

10.4.2.2 دالة البقاء The survival function (SF)

يمكن ايجاد دالة البقاء لتوزيع Xgamma3 باستخدام الصيغة في المعادلة (2-3) في الفقرة (3.1.2) وكالاتي:

$$\begin{aligned} S(t) &= 1-F(t) \\ &= 1-\left[1-e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)\right] \\ &= e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right) \end{aligned} \qquad (2\text{-}88)$$

11.4.2.2 دالة المخاطرة The Hazard function

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع Xgamma3 وكالاتي:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\theta(1+\theta)}(1+\frac{t^2}{2\theta})e^{\frac{-t}{\theta}}}{e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)}$$

$$\therefore h(t) = \frac{(2+\frac{t^2}{\theta})}{2\theta(1+\theta)+(2\theta+t)t} \qquad (2\text{-}89)$$

12.4.2.2 دالة متوسط الحياة المتبقية Mean residual life function (mrl)

يمكن الحصول على دالة متوسط الحياة المتبقية لتوزيع Xgamma3 وكالاتي:

$$mrl(t) = E\left[T-t \mid T>t\right] = \frac{1}{S(\mathrm{t})}\int_t^{\infty} S(\mathrm{u})du$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{S(t)}\int_t^{\infty} e^{\frac{-u}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+u)u}{2\theta(1+\theta)}\right)du$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{S(t)}\left[\int_t^{\infty} e^{\frac{-u}{\theta}}du + \frac{1}{2\theta(1+\theta)}\left(2\theta\int_t^{\infty} ue^{\frac{-u}{\theta}}du + \int_t^{\infty} u^2 e^{\frac{-u}{\theta}}du\right)\right]$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1+\frac{(2\theta+x)t}{2\theta(1+\theta)}\right)}\left(\theta e^{\frac{-t}{\theta}} + \frac{e^{\frac{-t}{\theta}}}{2\theta(1+\theta)}\left(\begin{matrix}(2\theta^2 t + 2\theta^3 + \\ t^2\theta + 2\theta^2 t + 2\theta^3\end{matrix}\right)\right)$$

$$\therefore mrl(\mathrm{t}) = \theta + \frac{\theta(t+2\theta)}{1+\theta+t+\frac{t^2}{2\theta}} \qquad (2\text{-}90)$$

ومن خصائص هذه الدالة هي:

$$mrl(0) = \mu = \frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}$$

وهي دالة متناقصة وتكون قيمتها كما يأتي:

$$\theta < mrl(t) < \frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)}$$

13.4.2.2 متوسط الوقت اللازم لحين حدوث الفشل The mean time to failure (MTTF)

يمكن الحصول على متوسط وقت الفشل لتوزيع Xgamma3 باستخدام الصيغة في المعادلة (2-6) وكالاتي:

$$MTTF = \int_0^\infty S(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\frac{-t}{\theta}} \left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\frac{-t}{\theta}} dt + \frac{1}{2\theta(1+\theta)} \left(2\theta \int_0^\infty te^{\frac{-t}{\theta}} dt + \int_0^\infty t^2 e^{\frac{-t}{\theta}} dt\right)$$

$$\therefore MTTF = \frac{\theta(1+3\theta)}{(1+\theta)} \qquad (2\text{-}91)$$

14.4.2.2 خاصية فقدان الذاكرة Memorylessness property

بافتراض ان مدة البقاء تتوزع بتوزيع Xgamma3، فان احتمال البقاء في الزمن القادم $(t+\delta)$ على افتراض بقاء الشخص في الزمن t و δ هي مقدار التغير في الزمن ويمكن ان يعبر عنه رياضيا بما يأتي:

$$\Pr[T > t + \delta / T > t] = \frac{S(t+\delta)}{S(T > t)}$$

$$= \frac{e^{\frac{-(t+\delta)}{\theta}} \left(1 + \frac{(2\theta + (t+\delta))(t+\delta)}{2\theta(1+\theta)}\right)}{e^{\frac{-t}{\theta}} \left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{(2\theta + (t+\delta))(t+\delta)}{2\theta(1+\theta)}\right)}{\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)} e^{\frac{-\delta}{\theta}} \qquad (2\text{-}92)$$

لاحظ ان الدالة الناتجة لا تشبه دالة البقاء لتوزيع Xgamma3 مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة ليس توزيع Xgamma3 أي انه لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

5.2.2 توزيع لندلي بمعلمة واحدة Lindley distribution (LD)

(Ghitany et al., 2008) (Lindley, 1958) (العابدي، 2021)

وهو احد التوزيعات المستمرة المستخدمة في دراسة دوال البقاء، والذي يتميز بمقدرته الكبيرة في عكس صورة مجتمعات ببيانات غير متجانسة (مركبة). وقد قدم هذا التوزيع من قبل (Lindley) وذلك في عام (1958).

ويمكن الحصول عليه من مزج التوزيع الاسي بالمعلمة θ، و توزيع كاما بمعلمة القياس θ ومعلمة الشكل 2 وباوزان محددة هي $\pi_1 = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad \pi_2 = 1-\pi_1 = \frac{1}{1+\theta}$ لينتج دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة المبينة في معادلة (2-93).

$$f(\mathrm{t}) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+t)e^{-\theta t}, \quad t>0, \quad \theta>0 \qquad (2\text{-}93)$$

وان دالة التوزيع التراكمية لهذا التوزيع هي:

$$F(\mathrm{t}) = 1-\frac{(\theta+t\theta+1)}{(1+\theta)}e^{-\theta t} \quad , \quad t>0, \quad \theta>0 \qquad (2\text{-}94)$$

ويمكن تلخيص خصائص التوزيع كالاتي:

i. $$\mu'_r = \frac{r!(\theta+\mathrm{r}+1)}{\theta^r(1+\theta)} \qquad for \quad r=1,2,3,\ldots$$

$$\mu'_1 = \frac{(\theta+2)}{\theta(1+\theta)}; \quad \mu'_2 = \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(1+\theta)}$$

$$\mu'_3 = \frac{6(\theta+4)}{\theta^3(1+\theta)}; \quad \mu'_4 = \frac{24(\theta+5)}{\theta^4(1+\theta)}$$

$$\mathrm{var(t)} = \frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2(1+\theta)^2}$$

ii. $$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r(-\mu'_r)^j(\mu'_{r-j})$$

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{1} C_j^1(-\mu'_1)^j(\mu'_{1-j})$$

$$=(\mu_1')+(-\mu_1')=0$$

$$\mu_2=\sum_{j=0}^{2}C_j^2(-\mu_1')^j(\mu_{2-j}')$$

$$\mu_2=\mu_2'-(\mu_1')^2=\text{var(t)}$$

$$\mu_3=\frac{2(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2)}{\theta^3(1+\theta)^3}$$

$$\mu_4=\frac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8)}{\theta^4(1+\theta)^4}$$

iii. $\text{mod}e=\dfrac{1-\theta}{\theta},\quad \theta<1$

iv. $CV=\dfrac{\sqrt{\theta^2+4\theta+2}}{(\theta+2)}$

v. $\Upsilon_1=\dfrac{2(\theta^3+6\theta^3+6\theta+2)}{\left(\theta^2+4\theta+2\right)^{3/2}}$

vi. $\Upsilon_2=\dfrac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^3+32\theta+8)}{\left(\theta^2+4\theta+2\right)^2}$

vii. $M_x(t)=\dfrac{\theta^2(\theta-t+1)}{(1+\theta)(\theta-t)^2}\quad ;t\in R$

viii. $\phi_x(t)=\dfrac{\theta^2(\theta-it+1)}{(1+\theta)(\theta-it)^2}\quad ;t\in R, i=\sqrt{-1}$

ix. $S(t)=\dfrac{(1+\theta+\theta t)}{(1+\theta)}e^{-\theta t}\quad ;0<t<\infty,\theta>0$

x. $h(t)=\dfrac{\theta^2(1+t)}{(1+\theta+\theta t)}$

xi. $$mrl(\mathrm{t}) = \frac{\theta + 2 + \theta t}{\theta\left(1 + \theta + \theta t\right)}$$

xii. $$MTTF = \frac{\left(2 + \theta\right)}{\theta(1 + \theta)}$$

xiii. خاصية فقدان الذاكرة

$$\Pr[T > t + \delta / T > t] = \frac{S(t + \delta)}{S(T > t)}$$

$$= \frac{\dfrac{\left(1 + \theta + \theta(t + \delta)\right)}{(1 + \theta)} e^{-\theta(t + \delta)}}{\dfrac{\left(1 + \theta + \theta t\right)}{(1 + \theta)} e^{-\theta t}}$$

$$= \frac{\left(1 + \theta + \theta(t + \delta)\right)}{\left(1 + \theta + \theta t\right)} e^{-\delta\theta}$$

إذ يتبين ان الاحتمال الشرطي لا يشبه دالة البقاء لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة ليس توزيع ليندلي بمعلمة واحدة أي انه لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

6.2.2 **التوزيع الأسي** **Exponential Distribution (Exp)**

(Gu, 2014) (Triana & Purwadi, 2019) (Okoli et al., 2016)

لقد أثبت التوزيع الأسي أنه واحد من التوزيعات المستمرة المتميزة بمرور الوقت ، وربما يرجع ذلك إلى طبيعته البسيطة والمفيدة في نمذجة بيانات وقت الحياة والمشكلات المختلفة المتعلقة بأحداث وقت الانتظار.

$$f(\mathrm{t}) = \theta e^{-\theta t}, \quad t > 0, \quad \theta > 0 \qquad (2\text{-}95)$$

$$F(\mathrm{t}) = 1 - e^{-\theta t} \quad , \quad t > 0, \quad \theta > 0 \qquad (2\text{-}96)$$

$$\mu'_1 = \frac{1}{\theta}$$

$$\mathrm{var}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$S(t) = e^{-\theta t} \quad ; 0 < t < \infty, \theta > 0$$

$$h(t) = \theta$$

خاصية فقدان الذاكرة:

$$\Pr[T > t + \delta / T > t] = \frac{S(t+\delta)}{S(T > t)}$$

$$= \frac{e^{-\theta(t+\delta)}}{e^{-\theta t}}$$

$$= e^{-\delta\theta}$$

يتبين ان الدالة الناتجة نفسها دالة البقاء للتوزيع الاسي مما يعني ان التوزيع للفترة القادمة هو التوزيع الاسي أي انه يمتلك خاصية فقدان الذاكرة.

7.2.2 **تقدير دالة البقاء**

(Casella & Berger, 2021)

لنتمكن من تقدير دالة البقاء ودالة المخاطرة وباقي المؤشرات باستعمال التوزيعات التي تمت دراستها لابد من تقدير معلمات التوزيعات اولا وهناك عدة طرق لتقدير معلمة التوزيع وسنركز على اربع طرق منها وهي:

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

تعد طريقة الإمكان الأعظم احدى اهم طرق التقدير، لنفرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع بدالة كثافة احتمالية $f(t;\theta)$ فان التوزيع المشترك لمشاهدات العينة يعرف بدالة الإمكان لتلك المشاهدات، فلو رمزنا لدالة الإمكان بالرمز L فيمكن كتباتها رياضيا بالشكل ادناه (هرمز، 1990):

$$L = f(t_1,t_2,\ldots,t_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta)$$

وان مبدأ هذه الطريقة يكون في إيجاد التقدير الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى .

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

تستند هذه الطريقة الى إيجاد N من عزوم المجتمع ومساواته مع n من عزوم العينة لنحصل على عدد من المعادلات مساوٍ لعدد المعلمات المراد تقديرها وبحلها نحصل على المقدرات (نعمه & حافظ، 2021).

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

اقترح هذه الطريق الباحث (Kao) في عام 1959. أذ تستند الى دالة التوزع التجميعية (Cumulative distribution function) بافتراض ان P_i هو مقدر دالة التوزيع التجميعية $F(t_i)$، و إيجاد المقدر الذي يجعل $\sum_{i=1}^{n}[P_i - F(x_i)]^2$ اصغر مايمكن وان P_i هي مقدر

لامعلمي لدالة الكثافة الاحتمالية التجميعية تأخذ عدة صيغ مقترحة منها $\left(\frac{i-0.3}{n+0.25},\frac{i}{n+1},\frac{i-3/8}{n+1/4}\right)$ (نعمه & حافظ، 2021) (Kao & McGavack, 1959).

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

وهي أحدى اهم الأساليب البيزية وتعد من اكثر الطرق شيوعا واستعمالا، إذ تعتمد هذه الطريقة على تحديد دالة التوزيع السابق (Prior Distribution) للحصول على توزيع لاحق (Posterior Distribution) ومنه يتم حساب مقدرات بيز باستعمال دالة الخسارة (Loss Function) ويمكن ان نحصل على هذه المقدرات عن طريق تقليل دالة الخسارة (Risk Function) الى أقل حد ممكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة إذ ان هذه الطريقة تستند الى حساب المقدر الذي يمتلك أقل ما يمكن من المخاطرة البيزية (لازم، 2011).

وفي ادناه تطبيق الطرائق الأربعة أعلاه على التوزيعات.

1.7.2.2 توزيع Xgamma (XG) (Sen et al., 2016) (Demirci Biçer, 2019) (Elshahhat & Elemary, 2021) (Sen et al., 2018b) (Yadav, Saha, et al., 2019)

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{1+\theta}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)e^{-\theta t_i}$$

$$LnL(\theta;t)=2n\ln\theta-n\ln(1+\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{2n}{\theta}-\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{t_i^2}{2}}{\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)}-\sum_{i=1}^{n}t_i=0 \qquad (2\text{-}97)$$

ولعدم امكانية حل المعادلة (2-97) جبرياً نلجأ الى احدى طرق الحل العددية مثل "طريقة نيوتن رافسون" على افتراض ان القيمة الاولية للحل هي $\theta_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$ وباستخدام تكرار صيغة $\theta^{i} = \theta^{i-1} - \frac{l(\theta^{i-1};t)}{l'(\theta^{i-1};t)}$ لحين الحصول على $\theta^{(i)}$ التي تحقق القيمة $\theta^{i} \cong \theta^{i-1}$ التي ستعد هي $\hat{\theta}_{MLE}$ القيمة المقدرة للمعلمة θ بطريقة الإمكان الأعظم.

إذ ان $l(\theta^{i-1};t)$ هي المعادلة (2-95) و $l'(\theta^{i-1};t)$ هي مشتقة الدالة (2-95).

وباستخدام خاصية عدم التغير (Invariance Property) يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأعظم لكل من S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t) = \frac{e^{-t\,\hat{\theta}_{MLE}}}{(1+\hat{\theta}_{MLE})}\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\,\hat{\theta}_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}_{MLE}^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}98)$$

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{\theta}_{MLE}^2\,(1+\frac{t^2\hat{\theta}_{MLE}}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\,\hat{\theta}_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}_{MLE}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}99)$$

$$mrl(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}} + \frac{(2+t\,\hat{\theta}_{MLE})}{\hat{\theta}_{MLE}\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\,\hat{\theta}_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}_{MLE}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}100)$$

$$MTTF = \frac{\left(3+\hat{\theta}_{MLE}\right)}{\hat{\theta}_{MLE}\,(1+\hat{\theta}_{MLE})} \qquad (2\text{-}101)$$

2- طريقة العزوم Method of moments (MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من توزيع Xgamma لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل لتوزيع (Xgamma) لنجد مقدر المعلمة.

$$E(T) = \frac{(\theta+3)}{\theta(\theta+1)}$$

$$\bar{t} = \frac{(\hat{\theta}+3)}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+1)}$$

$$\hat{\theta}^2 \bar{t} + \hat{\theta}\bar{t} = \hat{\theta}+3$$

$$\hat{\theta}^2 \bar{t} + \hat{\theta}(\bar{t}-1) - 3 = 0$$

$$a = \bar{t}, \quad b = (\bar{t}-1), \quad c = -3$$

$$\hat{\theta} = \frac{-(\bar{t}-1) \pm \sqrt{(\bar{t}-1)^2 + 12\bar{t}}}{2\bar{t}}$$

$$either \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t}+\sqrt{\bar{t}^2+10\bar{t}+1}}{2\bar{t}}$$

$$or \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t}-\sqrt{\bar{t}^2+10\bar{t}+1}}{2\bar{t}}$$ يهمل (سالب)

وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$\therefore \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t}+\sqrt{\bar{t}^2+10\bar{t}+1}}{2\bar{t}} \qquad (2\text{-}102)$$

ويمكن إيجاد تقدير طريقة العزوم للدوال S(t), h(t) , mrl(t), MTTF كالاتي:

$$S(t) = \frac{e^{-t\,\hat{\theta}_{mom}}}{(1+\hat{\theta}_{mom})}\left(1+\hat{\theta}_{mom} + t\,\hat{\theta}_{mom} + \frac{t^2\,\hat{\theta}_{mom}^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}103)$$

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{\theta}_{mom}^2\,(1+\frac{t^2\,\hat{\theta}_{mom}}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{mom} + t\,\hat{\theta}_{mom} + \frac{t^2\,\hat{\theta}_{mom}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}104)$$

$$mrl(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_{mom}} + \frac{(2 + t\,\hat{\theta}_{mom})}{\hat{\theta}_{mom}\left(1 + \hat{\theta}_{mom} + t\,\hat{\theta}_{mom} + \frac{t^2\,\hat{\theta}^2_{mom}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}105)$$

$$MTTF = \frac{\left(3 + \hat{\theta}_{mom}\right)}{\hat{\theta}_{mom}(1 + \hat{\theta}_{mom})} \qquad (2\text{-}106)$$

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(t_i) = 1 - \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \theta t_i + \frac{\theta^2 t_i^2}{2}\right)$$

$$1 - p_i = \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \theta t_i + \frac{\theta^2 t_i^2}{2}\right)$$

$$\ln(1 - p_i) = -\theta t_i - \ln(1+\theta) + \ln\left(1 + \theta + \theta t_i + \frac{\theta^2 t_i^2}{2}\right)$$

وبالتربيع وإدخال المجموع على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \theta t_i + \ln(1+\theta) - \ln\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i + \frac{\theta^2 t_i^2}{2}\right)\right]^2 = 0$$

وباشتقاق معادلة المجموع بالنسبة الى المعلمة θ والقسمة على 2 نحصل

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \hat{\theta}\, t_i + \ln(1+\hat{\theta}) - \ln\left(1 + \hat{\theta} + \hat{\theta}\, t_i + \frac{\hat{\theta}^2 t_i^2}{2}\right)\right] * \left[t_i + \frac{1}{(1+\hat{\theta})} - \frac{1 + t_i + \theta t_i^2}{\left(1 + \hat{\theta} + \hat{\theta}\, t_i + \frac{\hat{\theta}^2 t_i^2}{2}\right)}\right] = 0$$

$$let \quad k = \left[t_i + \frac{1}{(1+\theta)} - \frac{1 + t_i + \theta t_i^2}{\left(1 + \theta + t_i + \frac{\theta^2 t_i^2}{2}\right)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)k+\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}\,t_i\,k+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\hat{\theta})k-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\begin{matrix}1+\hat{\theta}+t_i\\+\dfrac{\hat{\theta}^2\,t_i^2}{2}\end{matrix}\right)k=0 \qquad (2\text{-}107)$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i=\dfrac{i-0.3}{n+0.25}$

وباستخدام الحل العددي باستخدام "طريقة نيوتن رافسون" نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومقدرات الدوال S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t)=\frac{e^{-t\hat{\theta}_{per}}}{(1+\hat{\theta}_{per})}\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\hat{\theta}_{per}+\frac{t^2\hat{\theta}_{per}^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}108)$$

$$\hat{h}(t)=\frac{\hat{\theta}_{per}^2\,(1+\dfrac{t^2\hat{\theta}_{per}}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\hat{\theta}_{per}+\dfrac{t^2\hat{\theta}_{per}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}109)$$

$$mrl(t)=\frac{1}{\hat{\theta}_{per}}+\frac{(2+t\,\hat{\theta}_{per})}{\hat{\theta}_{per}\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\,\hat{\theta}_{per}+\dfrac{t^2\hat{\theta}_{per}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}110)$$

$$MTTF=\frac{\left(3+\hat{\theta}_{per}\right)}{\hat{\theta}_{per}\,(1+\hat{\theta}_{per})} \qquad (2\text{-}111)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من توزيع Xgamma بالمعلمة θ وعلى افتراض ان التوزيع السابق للمعلمة θ يتبع توزيع $Gamma(\alpha,\beta)$. وافرض ان دالة الخسارة هي دالة تربيعية فيمكن إيجاد مقدر بيز للمعلمة θ كالاتي:

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta} \quad ;\alpha,\beta>0$$

$$L(t_1,t_2,\ldots,t_n/\theta)=\prod_{i=1}^{n}f\,(t_i;\theta)$$

$$L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)=\frac{\theta^{2n}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)f(\theta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)f(\theta)d\theta}$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\frac{\theta^{2n}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}}{\int_0^\infty\frac{\theta^{2n}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}d\theta}$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\frac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)}{\int_0^\infty\frac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)d\theta}$$

$$Risk=E(\hat\theta-\theta)^2$$

$$=\int_0^\infty(\hat\theta-\theta)^2f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)d\theta$$

$$=\int_0^\infty(\hat\theta^2-2\theta\hat\theta+\theta^2)f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)d\theta$$

$$=\int_0^\infty(\hat\theta^2-2\hat\theta E(\theta/t_1,t_2,...,t_n)+E(\theta^2/t_1,t_2,...,t_n))d\theta$$

$$\frac{\partial E(\hat\theta-\theta)^2}{\partial\hat\theta}=0$$

$$2\hat\theta-2E(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=0\quad\div 2$$

$$\hat\theta_{Bayes}=E(\theta/t_1,t_2,...,t_n)$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=\frac{\frac{\theta^{(2n+\alpha)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)}{\int_0^\infty\frac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta}{2}t_i^2\right)d\theta} \qquad (2\text{-}112)$$

ونظرا لعدم إمكانية حل المعادلة (2-112) بالطرق التكاملية الاعتيادية لذا نلجأ لحلها بالطرق العددية مثل طريقة تقريب لندلي (التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل) لايجاد مقدر بيز للمعلمة θ.
بعدها نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها وكما يأتي:

$$S(t)=\frac{e^{-t\hat{\theta}_{Bayes}}}{(1+\hat{\theta}_{Bayes})}\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}+t\hat{\theta}_{Bayes}+\frac{t^2\hat{\theta}_{Bayes}^2}{2}\right) \qquad (2\text{-}113)$$

$$\hat{h}(t)=\frac{\hat{\theta}_{Bayes}^2(1+\frac{t^2\hat{\theta}_{Bayes}}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}+t\hat{\theta}_{Bayes}+\frac{t^2\hat{\theta}_{Bayes}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}114)$$

$$mrl(t)=\frac{1}{\hat{\theta}_{Bayes}}+\frac{(2+t\,\hat{\theta}_{Bayes})}{\hat{\theta}_{Bayes}\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}+t\,\hat{\theta}_{Bayes}+\frac{t^2\hat{\theta}_{Bayes}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}115)$$

$$MTTF=\frac{\left(3+\hat{\theta}_{Bayes}\right)}{\hat{\theta}_{Bayes}(1+\hat{\theta}_{Bayes})} \qquad (2\text{-}116)$$

2.7.2.2 توزيع Xgamma1 (XG1D)

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma1 فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{t_i}{\theta}}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)$$

$$LnL(\theta;t)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)-n\ln(1+\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-3t_i^2}{\theta\left(2\theta^3+t_i^2\right)}-\frac{n}{1+\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}t_i=0 \qquad (2\text{-}117)$$

ولعدم امكانية حل المعادلة (2-117) جبرياً نلجأ الى احدى طرق الحل العددية مثل "طريقة نيوتن رافسون" على افتراض ان القيمة الاولية للحل هي $\theta_0=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}t_i}$ وباستخدام تكرار صيغة $\theta^{i}=\theta^{i-1}-\frac{l(\theta^{i-1};t)}{l'(\theta^{i-1};t)}$ لحين الحصول على $\theta^{(i)}$ التي تحقق القيمة $\theta^{i}\cong\theta^{i-1}$ التي تعد هي $\hat{\theta}_{MLE}$ القيمة المقدرة للمعلمة θ بطريقة الإمكان الأعظم.

إذ ان $l(\theta^{i-1};t)$ هي المعادلة (2-117) و $l'(\theta^{i-1};t)$ هي مشتقة الدالة (2-117).

وباستخدام خاصية عدم التغير (Invariance Property) يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأعظم لكل من S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t)=e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{MLE}}}\left(1+\frac{\left(2\hat{\theta}_{MLE}+t\right)t}{2\hat{\theta}_{MLE}^2(1+\hat{\theta}_{MLE})}\right) \qquad (2\text{-}118)$$

$$h(t)=\frac{2\hat{\theta}_{MLE}^3+t^2}{2\hat{\theta}_{MLE}^3(1+\hat{\theta}_{MLE})+\left(2\hat{\theta}_{MLE}+t\right)\hat{\theta}_{MLE}t} \qquad (2\text{-}119)$$

$$m(x)=\hat{\theta}_{mom}+\frac{x+2\hat{\theta}_{MLE}}{1+\hat{\theta}_{MLE}+\frac{x}{\hat{\theta}_{MLE}}+\frac{x^2}{2\hat{\theta}_{MLE}^2}} \qquad (2\text{-}120)$$

$$MTTF=\frac{\hat{\theta}_{MLE}\left(\hat{\theta}_{MLE}+3\right)}{(1+\hat{\theta}_{MLE})} \qquad (2\text{-}121)$$

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من توزيع Xgamma1 لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل لتوزيع (Xgamma1) لنجد مقدر المعلمة.

$$E(T)=\frac{\theta(\theta+3)}{(\theta+1)}$$

$$\bar{t}=\frac{\hat{\theta}(\hat{\theta}+3)}{(\hat{\theta}+1)}$$

$$\hat{\theta}\bar{t}+\bar{t}=\hat{\theta}^2+3\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta}^2+\hat{\theta}(3-\bar{t})-\bar{t}=0$$

$$a=1,\quad b=(3-\bar{t}),\quad c=-\bar{t}$$

$$either\quad \hat{\theta}_{mom}=\frac{\bar{t}-3+\sqrt{(3-\bar{t})^2+4\bar{t}}}{2}$$

$$or\quad \hat{\theta}_{mom}=\frac{\bar{t}-3-\sqrt{(3-\bar{t})^2+4\bar{t}}}{2}$$ سالب يهمل

وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$\therefore \hat{\theta}_{mom}=\frac{\bar{t}-3+\sqrt{\bar{t}^2-2\bar{t}+9}}{2} \qquad (2\text{-}122)$$

ويمكن إيجاد تقدير طريقة العزوم للدوال S(t), h(t) , mrl(t), MTTF كالاتي:

$$s(t)=e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{mom}}}\left(1+\frac{\left(2\hat{\theta}_{mom}+t\right)t}{2\hat{\theta}_{mom}^2(1+\hat{\theta}_{mom})}\right) \qquad (2\text{-}123)$$

$$h(t)=\frac{2\hat{\theta}_{mom}^3+t^2}{2\hat{\theta}_{mom}^3(1+\hat{\theta}_{mom})+\left(2\hat{\theta}_{mom}+t\right)\hat{\theta}_{mom}t} \qquad (2\text{-}124)$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \hat{\theta}_{mom} + \frac{t + 2\hat{\theta}_{mom}}{1 + \hat{\theta}_{mom} + \frac{t}{\hat{\theta}_{mom}} + \frac{t^2}{2\hat{\theta}_{mom}^2}} \qquad (2\text{-}125)$$

$$MTTF = \frac{\hat{\theta}_{mom}\left(\hat{\theta}_{mom} + 3\right)}{(1 + \hat{\theta}_{mom})} \qquad (2\text{-}126)$$

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma1 لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(\mathrm{t}_i) = 1 - e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)$$

$$1 - p_i = e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)$$

$$\ln(1 - p_i) = \frac{-t_i}{\theta} + \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)$$

وبالتربيع وإدخال المجموع على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]^2 = 0$$

وباشتقاق معادلة المجموع بالنسبة الى المعلمة θ والقسمة على 2 نحصل

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]\left[-\frac{t_i}{\theta^2} + \frac{\frac{t_i(2\theta + 4\theta^2 + 2t + 3t\theta)}{3\theta^3(1+\theta)^2}}{\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t_i)t_i}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]\left[-\frac{t_i}{\theta^2} + \frac{t_i(2\theta + 4\theta^2 + 2t_i + 3t_i\theta)}{\theta(4\theta^3 + 2\theta^4 + 2\theta^2 + 2\theta t_i + 2\theta^2 t_i + t_i^2 + \theta t^2)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]\left[-\frac{t_i}{\theta^2} + \frac{t_i(2\theta + 4\theta^2 + 2t_i + 3t_i\theta)}{\theta(2\theta^3 + 2\theta^4 + 2\theta^2 t_i + \theta t_i^2 + 2\theta^2 + 2\theta^3 + 2\theta t_i + t_i^2)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i)+\frac{t_i}{\theta}-\ln\left(1+\frac{(2\theta+t)t}{2\theta^2(1+\theta)}\right)\right]\left[-\frac{t_i}{\theta^2}+\frac{t_i(2\theta+4\theta^2+2t+3t\theta)}{\theta(\theta+1)\left(2\theta^2(1+\theta)+(2\theta+t)t\right)}\right]=0$$

$$let \quad k=\left[-\frac{t_i}{\theta^2}+\frac{t_i(2\theta+4\theta^2+2t+3t\theta)}{\theta(\theta+1)\left(2\theta^2(1+\theta)+(2\theta+t)t\right)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)k+\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\hat{\theta}}k-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{(2\hat{\theta}+t)t}{2\hat{\theta}^2(1+\hat{\theta})}\right)k=0 \qquad (2\text{-}127)$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i=\frac{i-0.3}{n+0.25}$

وباستخدام الحل العددي باستخدام "طريقة نيوتن رافسون" نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومقدرات الدوال S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$s(t)=e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{per}}}\left(1+\frac{(2\hat{\theta}_{per}+t)t}{2\hat{\theta}_{per}^2(1+\hat{\theta}_{per})}\right) \qquad (2\text{-}128)$$

$$h(t)=\frac{2\hat{\theta}_{per}^3+t^2}{2\hat{\theta}_{per}^3(1+\hat{\theta}_{per})+(2\hat{\theta}_{per}+t)\hat{\theta}_{per}t} \qquad (2\text{-}129)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\hat{\theta}_{per}+\frac{x+2\hat{\theta}_{per}}{1+\hat{\theta}_{per}+\frac{x}{\hat{\theta}_{per}}+\frac{x^2}{2\hat{\theta}_{per}^2}} \qquad (2\text{-}130)$$

$$MTTF=\frac{\hat{\theta}_{per}\left(\hat{\theta}_{per}+3\right)}{(1+\hat{\theta}_{per})} \qquad (2\text{-}131)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من توزيع Xgamma1 بالمعلمة θ وعلى افتراض ان التوزيع السابق للمعلمة θ يتبع توزيع $Gamma(\alpha,\mathrm{a}=\frac{1}{\beta})$. وافرض ان دالة الخسارة هي دالة تربيعية فيمكن إيجاد مقدر بيز للمعلمة θ كالاتي:

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}} \quad ;\alpha,\beta>0$$

$$L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i;\theta)$$

$$L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)=\frac{1}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)f(\theta)}{\int_0^{\infty}L(t_1,t_2,...,t_n/\theta)f(\theta)d\theta}$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\frac{1}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}e^{-\frac{\theta}{\beta}}\theta^{\alpha-1}}{\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}e^{-\frac{\theta}{\beta}}\theta^{\alpha-1}d\theta}$$

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\frac{\theta^{\alpha-1}}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)}{\int_0^{\infty}\frac{\theta^{\alpha-1}}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)d\theta}$$

$$Risk=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=E(\theta/t_1,t_2,...,t_n)$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=\frac{\frac{\theta^{\alpha}}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)}{\int_0^{\infty}\frac{\theta^{\alpha-1}}{(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta^3}\right)d\theta} \qquad (2\text{-}132)$$

ونظرا لعدم إمكانية حل المعادلة (2-132) بالطرق التكاملية الاعتيادية لذا نلجأ لحلها بالطرق العددية مثل طريقة تقريب لندلي (التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل) لايجاد مقدر بيز للمعلمة θ.

بعدها نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها وكما يأتي:

$$s(t)=e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{Bayes}}}\left(1+\frac{\left(2\hat{\theta}_{Bayes}+t\right)t}{2\hat{\theta}_{Bayes}^{2}(1+\hat{\theta}_{Bayes})}\right) \tag{2-133}$$

$$h(t)=\frac{2\hat{\theta}_{Bayes}^{3}+t^{2}}{2\hat{\theta}_{Bayes}^{3}(1+\hat{\theta}_{Bayes})+\left(2\hat{\theta}_{Bayes}+t\right)\hat{\theta}_{Bayes}t} \tag{2-134}$$

$$mrl(\mathrm{t})=\hat{\theta}_{per}+\frac{x+2\hat{\theta}_{Bayes}}{1+\hat{\theta}_{Bayes}+\frac{x}{\hat{\theta}_{Bayes}}+\frac{x^{2}}{2\hat{\theta}_{Bayes}^{2}}} \tag{2-135}$$

$$MTTF=\frac{\hat{\theta}_{Bayes}\left(\hat{\theta}_{Bayes}+3\right)}{(1+\hat{\theta}_{Bayes})} \tag{2-136}$$

3.7.2.2 توزيع Xgamma2 (XG2D)

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma2 فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;\mathrm{t})=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{1+\theta}\left(1+\frac{\theta^{3}}{2}t_i^{2}\right)e^{-\theta t_i}$$

$$LnL(\theta;\mathrm{t})=n\ln\theta-n\ln(1+\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\theta^{3}}{2}t_i^{2}\right)-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{n}{\theta}-\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\theta^{2}t_i^{2}}{\left(2+\theta^{3}t_i^{2}\right)}-\sum_{i=1}^{n}t_i=0 \tag{2-137}$$

ولعدم امكانية حل المعادلة (2-137) جبرياً نلجأ الى احدى طرق الحل العددية مثل "طريقة نيوتن رافسون" على افتراض ان القيمة الاولية للحل هي $\theta_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$ وباستخدام تكرار صيغة $\theta^{i} = \theta^{i-1} - \frac{l(\theta^{i-1};t)}{l'(\theta^{i-1};t)}$ لحين الحصول على $\theta^{(i)}$ التي تحقق القيمة $\theta^{i} \cong \theta^{i-1}$ التي تعد هي $\hat{\theta}_{MLE}$ القيمة المقدرة للمعلمة θ بطريقة الإمكان الأعظم.

إذ ان $l(\theta^{i-1};t)$ هي المعادلة (13-72) و $l'(\theta^{i-1};t)$ هي مشتقة الدالة (2-137).

وباستخدام خاصية عدم التغير (Invariance Property) يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأعظم لكل منS(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t) = \frac{e^{-t\hat{\theta}_{MLE}}}{(1+\hat{\theta}_{MLE})}\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\hat{\theta}^2_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}^3_{MLE}}{2}\right) \qquad (2\text{-}138)$$

$$h(t) = \frac{\hat{\theta}_{MLE}\left(1+\frac{t^2\hat{\theta}^3_{MLE}}{2}\right)}{\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\hat{\theta}^2_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}^3_{MLE}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}139)$$

$$mrl(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}} + \frac{(2+t\hat{\theta}_{MLE})}{\hat{\theta}_{MLE}\left(1+\hat{\theta}_{MLE} + t\hat{\theta}^2_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}^3_{MLE}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}140)$$

$$MTTF = \frac{\left(2+2\hat{\theta}_{MLE}\right)}{\hat{\theta}_{MLE}(1+\hat{\theta}_{MLE})} \qquad (2\text{-}141)$$

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من توزيع Xgamma2 لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل لتوزيع (Xgamma2) لنجد مقدر المعلمة.

$$E(t) = \frac{(1+3\theta)}{\theta(\theta+1)}$$

$$\bar{t} = \frac{(1+3\hat{\theta})}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+1)}$$

$$\hat{\theta}^2\bar{t} + \hat{\theta}\bar{t} = 3\hat{\theta}+1$$

$$\hat{\theta}^2\bar{t} + \hat{\theta}(\bar{t}-3) - 1 = 0$$

$$a = \bar{t}, \quad b = (\bar{t}-3), \quad c = -1$$

$$either \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{-(\bar{t}-3) + \sqrt{(\bar{t}-3)^2 + 4\bar{t}}}{2\bar{t}}$$

$$or \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{-(\bar{t}-3) - \sqrt{(\bar{t}-3)^2 + 4\bar{t}}}{2\bar{t}}$$ سالب يهمل

وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$\therefore \hat{\theta}_{mom} = \frac{3 - \bar{t} - \sqrt{\bar{t}^2 - 2\bar{t} + 9}}{2\bar{t}} \qquad (2\text{-}142)$$

ويمكن إيجاد تقدير طريقة العزوم للدوال S(t), h(t) , mrl(t), MTTF كالاتي:

$$S(t) = \frac{e^{-t\hat{\theta}_{mom}}}{(1+\hat{\theta}_{mom})}\left(1 + \hat{\theta}_{mom} + t\hat{\theta}_{mom}^2 + \frac{t^2\hat{\theta}_{mom}^3}{2}\right) \qquad (2\text{-}143)$$

$$h(t) = \frac{\hat{\theta}_{mom}(1 + \frac{t^2\hat{\theta}_{mom}^3}{2})}{\left(1 + \hat{\theta}_{mom} + t\hat{\theta}_{mom}^2 + \frac{t^2\hat{\theta}_{mom}^3}{2}\right)} \qquad (2\text{-}144)$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{\hat{\theta}_{mom}} + \frac{(2 + t\hat{\theta}_{mom})}{\hat{\theta}_{mom}\left(1 + \hat{\theta}_{mom} + t\hat{\theta}_{mom}^2 + \frac{t^2\hat{\theta}_{mom}^3}{2}\right)} \qquad (2\text{-}145)$$

$$MTTF = \frac{\left(2 + 2\hat{\theta}_{mom}\right)}{\hat{\theta}_{mom}(1 + \hat{\theta}_{mom})} \qquad (2\text{-}146)$$

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma2 لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(t_i) = 1 - \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \theta^2 t_i + \frac{\theta^3 t_i^2}{2}\right)$$

$$1 - p_i = \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \theta^2 t_i + \frac{\theta^3 t_i^2}{2}\right)$$

$$\ln(1 - p_i) = -\theta t_i - \ln(1+\theta) + \ln\left(1 + \theta + \theta^2 t_i + \frac{\theta^3 t_i^2}{2}\right)$$

وبالتربيع وإدخال المجموع على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \theta t_i + \ln(1+\theta) - \ln\left(1 + \theta + \theta^2 t_i + \frac{\theta^3 t_i^2}{2}\right)\right]^2 = 0$$

وباشتقاق معادلة المجموع بالنسبة الى المعلمة θ والقسمة على 2 نحصل

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \hat{\theta} t_i + \ln(1+\hat{\theta}) - \ln\left(1 + \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 t_i + \frac{\hat{\theta}^3 t_i^2}{2}\right)\right]\left[t_i + \frac{1}{(1+\hat{\theta})} - \frac{1 + 2\hat{\theta} t_i + \frac{3\hat{\theta}^2 t_i^2}{2}}{\left(1 + \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 t_i + \frac{\hat{\theta}^3 t_i^2}{2}\right)}\right] = 0$$

$$let \quad k = \left[t_i + \frac{1}{(1+\hat{\theta})} - \frac{1 + 2\hat{\theta} t_i + \frac{3\hat{\theta}^2 t_i^2}{2}}{\left(1 + \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 t_i + \frac{\hat{\theta}^3 t_i^2}{2}\right)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)k+\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}t_i k+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\hat{\theta})k-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\hat{\theta}+t_i+\frac{\hat{\theta}^2 t_i^2}{2}\right)k=0 \qquad (2\text{-}147)$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i=\dfrac{i-0.3}{n+0.25}$

وباستخدام الحل العددي باستخدام "طريقة نيوتن رافسون" نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومقدرات الدوال S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t)=\frac{e^{-t\hat{\theta}_{per}}}{(1+\hat{\theta}_{per})}\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\hat{\theta}_{per}^2+\frac{t^2\hat{\theta}_{per}^3}{2}\right) \qquad (2\text{-}148)$$

$$h(t)=\frac{\hat{\theta}_{per}(1+\frac{t^2\hat{\theta}_{per}^3}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\hat{\theta}_{per}^2+\frac{t^2\hat{\theta}_{per}^3}{2}\right)} \qquad (2\text{-}149)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{\hat{\theta}_{per}}+\frac{(2+x\hat{\theta}_{per})}{\hat{\theta}_{per}\left(1+\hat{\theta}_{per}+x\hat{\theta}_{per}^2+\frac{x^2\hat{\theta}_{per}^3}{2}\right)} \qquad (2\text{-}150)$$

$$MTTF=\frac{\left(2+2\hat{\theta}_{per}\right)}{\hat{\theta}_{per}(1+\hat{\theta}_{per})} \qquad (2\text{-}151)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من توزيع Xgamma2 بالمعلمة θ وعلى افتراض ان التوزيع السابق للمعلمة θ يتبع توزيع $Gamma(\alpha,\beta)$. وافرض ان دالة الخسارة هي دالة تربيعية فيمكن إيجاد مقدر بيز للمعلمة θ كالاتي:

$$f(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta} \quad ;\alpha,\beta>0$$

$$L(t_1,t_2,\ldots,t_n/\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i;\theta)$$

$$L(t_1,t_2,...,t_n\ /\ \theta)=\frac{\theta^n}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)$$

$$f\ (\theta\ /\ t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n\ /\ \theta)f\ (\theta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n\ /\ \theta)f\ (\theta)d\theta}$$

$$f\ (\theta\ /\ t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\frac{\theta^n}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}}{\int_0^\infty\frac{\theta^n}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}d\theta}$$

$$f\ (\theta\ /\ \mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2,...,\mathrm{t}_n)=\frac{\frac{\theta^{(n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)}{\int_0^\infty\frac{\theta^{(n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)d\theta}$$

$$Risk\ =E\,(\hat{\theta}-\theta)^2$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=E\,(\theta\ /\ \mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2,...,\mathrm{t}_n)$$

$$\hat{\theta}_{Bayes}=\frac{\frac{\theta^{(n+\alpha)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)}{\int_0^\infty\frac{\theta^{(n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\theta^3}{2}t_i^2\right)d\theta} \qquad (2\text{-}152)$$

ونظرا لعدم إمكانية حل المعادلة (2-152) بالطرق التكاملية الاعتيادية لذا نلجأ لحلها بالطرق العددية مثل طريقة تقريب لندلي (التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل) لايجاد مقدر بيز للمعلمة θ.
بعدها نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها وكما يأتي:

$$S\,(t)=\frac{e^{-t\,\hat{\theta}_{Bayes}}}{(1+\hat{\theta}_{Bayes})}\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}\ +t\,\hat{\theta}_{Bayes}^2\ +\frac{t^2\hat{\theta}_{Bayes}^3}{2}\right) \qquad (2\text{-}153)$$

$$h(t)=\frac{\hat{\theta}_{Bayes}(1+\frac{t^2\hat{\theta}^3_{Bayes}}{2})}{\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}+t\hat{\theta}^2_{Bayes}+\frac{t^2\hat{\theta}^3_{Bayes}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}154)$$

$$mrl(t)=\frac{1}{\hat{\theta}_{Bayes}}+\frac{(2+t\hat{\theta}_{Bayes})}{\hat{\theta}_{Bayes}\left(1+\hat{\theta}_{Bayes}+t\hat{\theta}^2_{Bayes}+\frac{t^2\hat{\theta}^3_{Bayes}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}155)$$

$$MTTF=\frac{\left(2+2\hat{\theta}_{Bayes}\right)}{\hat{\theta}_{Bayes}(1+\hat{\theta}_{Bayes})} \qquad (2\text{-}156)$$

4.7.2.2 توزيع Xgamma3 (XG3D)

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma3 فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta(1+\theta)}e^{-\frac{t_i}{\theta}}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right)$$

$$LnL(\theta;t)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right)-n\ln(1+\theta)-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-t_i^2}{\theta\left(2\theta+t_i^2\right)}-\frac{n}{1+\theta}-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}t_i=0 \qquad (2\text{-}157)$$

ولعدم امكانية حل المعادلة (2-157) جبرياً نلجأ الى احدى طرق الحل العددية مثل "طريقة نيوتن رافسون" على افتراض ان القيمة الاولية للحل هي $\theta_0=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}t_i}$ وباستخدام تكرار صيغة

$\theta^{i} = \theta^{i-1} - \frac{l(\theta^{i-1};t)}{l'(\theta^{i-1};t)}$ لحين الحصول على $\theta^{(i)}$ التي تحقق القيمة $\theta^{i} \cong \theta^{i-1}$ التي تعد هي $\hat{\theta}_{MLE}$ القيمة المقدرة للمعلمة θ بطريقة الإمكان الأعظم.

إذ ان $l(\theta^{i-1};t)$ هي المعادلة (2-157) و $l'(\theta^{i-1};t)$ هي مشتقة الدالة (2-157).

وباستخدام خاصية عدم التغير (Invariance Property) يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأعظم لكل من S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t) = e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{MLE}}}\left(1 + \frac{\left(2\hat{\theta}_{MLE} + t\right)t}{2\hat{\theta}_{MLE}(1+\hat{\theta}_{MLE})}\right) \qquad (2\text{-}158)$$

$$h(t) = \frac{(2 + \frac{t^2}{\hat{\theta}_{MLE}})}{2\hat{\theta}_{MLE}(1+\hat{\theta}_{MLE}) + \left(2\hat{\theta}_{MLE} + t\right)t} \qquad (2\text{-}159)$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}} + \frac{(2 + t\hat{\theta}_{MLE})}{\hat{\theta}_{MLE}\left(1 + \hat{\theta}_{MLE} + t\hat{\theta}_{MLE} + \frac{t^2\hat{\theta}_{MLE}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}160)$$

$$MTTF = \frac{\hat{\theta}_{MLE}\left(1 + 3\hat{\theta}_{MLE}\right)}{(1+\hat{\theta}_{MLE})} \qquad (2\text{-}161)$$

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من توزيع Xgamma3 لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل لتوزيع (Xgamma3) لنجد مقدر المعلمة.

وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$E(\mathrm{T}) = \frac{\theta(1+3\theta)}{(\theta+1)}$$

$$\bar{t} = \frac{\hat{\theta}\left(1+3\hat{\theta}\right)}{\left(\hat{\theta}+1\right)}$$

$$\hat{\theta}\bar{t} + \bar{t} = \hat{\theta} + 3\hat{\theta}^2$$

$$3\hat{\theta}^2 + \hat{\theta}(1-\bar{t}) - \bar{t} = 0$$

$$a = 3, \quad b = (1-\bar{t}), \quad c = -\bar{t}$$

$$either \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{-(1-\bar{t}) + \sqrt{(1-\bar{t})^2 + 12\bar{t}}}{6}$$

$$or \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{-(1-\bar{t}) - \sqrt{(1-\bar{t})^2 + 12\bar{t}}}{6}$$ سالب يهمل

$$\therefore \hat{\theta}_{mom} = \frac{\bar{t} - 1 - \sqrt{\bar{t}^2 - 10\bar{t} + 1}}{6} \qquad (2\text{-}162)$$

ويمكن إيجاد تقدير طريقة العزوم للدوال S(t), h(t) , mrl(t), MTTF كالاتي:

$$S(t) = e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{mom}}}\left(1 + \frac{\left(2\hat{\theta}_{mom} + t\right)t}{2\hat{\theta}_{mom}(1+\hat{\theta}_{mom})}\right) \qquad (2\text{-}163)$$

$$h(t) = \frac{(2 + \frac{t^2}{\hat{\theta}_{mom}})}{2\hat{\theta}_{mom}(1+\hat{\theta}_{mom}) + \left(2\hat{\theta}_{mom} + t\right)t} \qquad (2\text{-}164)$$

$$mrl(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_{mom}} + \frac{(2 + t\hat{\theta}_{mom})}{\hat{\theta}_{mom}\left(1 + \hat{\theta}_{mom} + t\hat{\theta}_{mom} + \frac{t^2\hat{\theta}_{mom}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}165)$$

$$MTTF = \frac{\hat{\theta}_{mom}\left(1 + 3\hat{\theta}_{mom}\right)}{(1+\hat{\theta}_{mom})} \qquad (2\text{-}166)$$

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Xgamma3 لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(t_i) = 1 - e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)$$

$$1 - p_i = e^{\frac{-t}{\theta}}\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)$$

$$\ln(1 - p_i) = \frac{-t_i}{\theta} + \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1 - p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta + t_i)t_i}{2\theta(1+\theta)}\right)\right]^2 = 0$$

وباشتقاق معادلة المجموع بالنسبة الى المعلمة θ والقسمة على 2 نحصل

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta+t_i)t_i}{2\theta(1+\theta)}\right)\right] * \left[-\frac{t_i}{\theta^2} - \frac{\frac{t_i(2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i)}{2\theta^2(1+\theta)^2}}{\left(1 + \frac{(2\theta+t_i)t_i}{2\theta(1+\theta)}\right)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta+t_i)t_i}{2\theta(1+\theta)}\right)\right] * \left[-\frac{t_i}{\theta^2} - \frac{t_i(2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i)}{\theta(\theta+1)\left(2\theta + 2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i^2\right)}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i) + \frac{t_i}{\theta} - \ln\left(1 + \frac{(2\theta+t_i)t_i}{2\theta(1+\theta)}\right)\right] * \left[-\frac{t_i}{\theta^2} - \frac{t_i(2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i)}{\theta\left(4\theta^2 + 2\theta^3 + 2t_i\theta^2 + t_i^2\theta + 2\theta + 2t_i\theta + t_i^2\right)}\right] = 0$$

$$let \quad k = \left[-\frac{t_i}{\theta^2} - \frac{t_i(2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i)}{\theta(\theta+1)\left(2\theta + 2\theta^2 + 2t_i\theta + t_i^2\right)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)k + \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\theta}k - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{(2\theta+t)t}{2\theta(1+\theta)}\right)k = 0 \qquad (2\text{-}167)$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i = \frac{i - 0.3}{n + 0.25}$

وباستخدام الحل العددي باستخدام "طريقة نيوتن رافسون" نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومقدرات الدوال S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t) = e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{per}}}\left(1 + \frac{(2\hat{\theta}_{per} + t)t}{2\hat{\theta}_{per}(1+\hat{\theta}_{per})}\right) \qquad (2\text{-}168)$$

$$h(t)=\frac{(2+\frac{t^2}{\hat{\theta}_{per}})}{2\hat{\theta}_{per}(1+\hat{\theta}_{per})+\left(2\hat{\theta}_{per}+t\right)t} \qquad (2\text{-}169)$$

$$mrl(\mathrm{t})=\frac{1}{\hat{\theta}_{per}}+\frac{(2+t\hat{\theta}_{per})}{\hat{\theta}_{per}\left(1+\hat{\theta}_{per}+t\hat{\theta}_{per}+\frac{t^2\hat{\theta}_{per}^2}{2}\right)} \qquad (2\text{-}170)$$

$$MTTF=\frac{\hat{\theta}_{per}\left(1+3\hat{\theta}_{per}\right)}{(1+\hat{\theta}_{per})} \qquad (2\text{-}171)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من توزيع Xgamma3 بالمعلمة θ وعلى افتراض ان التوزيع السابق للمعلمة θ يتبع توزيع $Gamma(\alpha,\frac{1}{\beta})$. وافرض ان دالة الخسارة هي دالة تربيعية فيمكن إيجاد مقدر بيز للمعلمة θ كالاتي:

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}} \quad ;\alpha,\beta>0$$

$$L(t_1,t_2,\ldots,t_n\ /\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}f\ (t_i;\theta)$$

$$L(t_1,t_2,\ldots,t_n\ /\ \theta)=\frac{1}{\theta^n(1+\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right)$$

$$f\ (\theta\ /\ t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,\ldots,t_n\ /\ \theta)f\ (\theta)}{\int_0^{\infty}L(t_1,t_2,\ldots,t_n\ /\ \theta)f\ (\theta)d\theta}$$

$$f\ (\theta / t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\frac{1}{\theta^n (1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} t_i} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right) \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} e^{-\frac{\theta}{\beta}} \theta^{\alpha-1}}{\int_0^\infty \frac{1}{\theta^n (1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} t_i} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right) \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} e^{-\frac{\theta}{\beta}} \theta^{\alpha-1} d\theta}$$

$$f\ (\theta / t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\frac{\theta^{\alpha-1-n}}{(1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right)}{\int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha-1-n}}{(1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right) d\theta}$$

$$Risk = E\,(\hat{\theta}-\theta)^2$$

$$\hat{\theta}_{Bayes} = E\,(\theta / \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, ..., \mathrm{t}_n)$$

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\frac{\theta^{\alpha-n}}{(1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right)}{\int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha-1-n}}{(1+\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{\beta}+\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{t_i^2}{2\theta}\right) d\theta} \qquad (2\text{-}172)$$

ونظرا لعدم إمكانية حل المعادلة (2-172) بالطرق التكاملية الاعتيادية لذا نلجأ لحلها بالطرق العددية مثل طريقة تقريب لندلي (التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل) لايجاد مقدر بيز للمعلمة θ.
بعدها نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها وكما يأتي:

$$s(t) = e^{\frac{-t}{\hat{\theta}_{Bayes}}} \left(1 + \frac{\left(2\hat{\theta}_{Bayes} + t\right)t}{2\hat{\theta}_{Bayes}(1+\hat{\theta}_{Bayes})}\right) \qquad (2\text{-}173)$$

$$h(t) = \frac{(2 + \frac{t^2}{\hat{\theta}_{Bayes}})}{2\hat{\theta}_{Bayes}(1+\hat{\theta}_{Bayes}) + \left(2\hat{\theta}_{Bayes} + t\right)t} \qquad (2\text{-}174)$$

$$mrl(\mathrm{t}) = \frac{1}{\hat{\theta}_{Bayes}} + \frac{(2 + t\hat{\theta}_{Bayes})}{\hat{\theta}_{Bayes}\left(1 + \hat{\theta}_{Bayes} + t\hat{\theta}_{Bayes} + \frac{t^2\hat{\theta}^2_{Bayes}}{2}\right)} \qquad (2\text{-}175)$$

$$MTTF = \frac{\hat{\theta}_{Bayes}\left(1 + 3\hat{\theta}_{Bayes}\right)}{(1 + \hat{\theta}_{Bayes})} \qquad (2\text{-}176)$$

5.7.2.2 **توزيع لندلي بمعلمة واحدة** Lindley distribution (LD) (Ghitany et al., 2008) (Lindley, 1958) **(العابدي، 2021)**

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Lindley ذو المعلمة الواحدة فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;\mathrm{t}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+t_i)e^{-\theta t_i}$$

$$LnL(\theta;\mathrm{t}) = 2n\ln\theta - n\ln(1+\theta) + \sum_{i=1}^{n}\ln(1+t_i) - \theta\sum_{i=1}^{n}t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{2n}{\theta} - \frac{n}{1+\theta} - \sum_{i=1}^{n}t_i = 0 \qquad (2\text{-}177)$$

وبحل المعادلة (2-177) جبرياً عن طريق الدستور نحصل على الاتي:

$$either \quad \hat{\theta}_{mle} = \frac{1-\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}}$$

$$or \quad \hat{\theta}_{mle} = \frac{1-\bar{t} - \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}}$$ سالب يهمل

$$\hat{\theta}_{mle} = \frac{1-\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}} \qquad (2\text{-}178)$$

وباستخدام خاصية عدم التغير (Invariance Property) يمكن إيجاد تقدير الإمكان الأعظم لكل منS(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي

$$S(t)=\frac{\left(1+\hat{\theta}_{mle}+\hat{\theta}_{mle}\,t\right)}{(1+\hat{\theta}_{mle})}e^{-\hat{\theta}_{mle}\,t} \qquad (2\text{-}179)$$

$$h(t)=\frac{\hat{\theta}_{mle}^{2}(1+t)}{\left(1+\hat{\theta}_{mle}+\hat{\theta}_{mle}\,t\right)} \qquad (2\text{-}180)$$

$$mrl(t)=\frac{\hat{\theta}_{mle}+2+\hat{\theta}_{mle}\,t}{\hat{\theta}_{mle}\left(1+\hat{\theta}_{mle}+\hat{\theta}_{mle}\,t\right)} \qquad (2\text{-}181)$$

$$MTTF=\frac{\left(2+\hat{\theta}_{mle}\right)}{\hat{\theta}_{mle}(1+\hat{\theta}_{mle})} \qquad (2\text{-}182)$$

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من توزيع Lindley لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل لتوزيع (Lindley)) لنجد مقدر المعلمة.
وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$E(\mathrm{T})=\frac{(\theta+2)}{\theta(1+\theta)}$$

$$\bar{t}=\frac{(\hat{\theta}+2)}{\hat{\theta}(1+\hat{\theta})}$$

$$\hat{\theta}\bar{t}+\bar{t}\hat{\theta}^{2}=\hat{\theta}+2$$

$$\bar{t}\hat{\theta}^{2}+\hat{\theta}(\bar{t}-1)-2=0$$

$$a=\bar{t},\quad b=(\bar{t}-1),\quad c=-2$$

$$either \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}}$$

$$or \quad \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t} - \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}}$$ سالب يهمل

$$\therefore \hat{\theta}_{mom} = \frac{1-\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 6\bar{t} + 1}}{2\bar{t}} \qquad (2\text{-}183)$$

ومن الواضح ان تقدير المعلمة بطريقة الإمكان الأعظم وتقديرها بطريقة العزوم متساويان.

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع ليندلي لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(t_i) = 1 - \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i\right)$$

$$1 - p_i = \frac{e^{-\theta t_i}}{(1+\theta)}\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i\right)$$

$$\ln(1-p_i) = -\theta t_i - \ln(1+\theta) + \ln\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i\right)$$

وبالتربيع وإدخال المجموع على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i) + \theta t_i + \ln(1+\theta) - \ln\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i\right)\right]^2 = 0$$

بالاشتقاق للمعلمة θ والقسمة على 2

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i) + \theta t_i + \ln(1+\theta) - \ln\left(1 + \theta + \hat{\theta}\, t_i\right)\right]\left[t_i + \frac{1}{(1+\theta)} - \frac{1+t_i}{(1+\theta+t_i)}\right] = 0$$

$$let \quad k = \left[t_i + \frac{1}{(1+\theta)} - \frac{1+t_i}{(1+\theta+t_i)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)k+\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}\,t_i\,k+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\hat{\theta})k-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\hat{\theta}+t_i\right)k=0 \qquad (2\text{-}184)$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i=\dfrac{i-0.3}{n+0.25}$
وباستخدام الحل العددي باستخدام "طريقة نيوتن رافسون" نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومقدرات الدوال S(t), h(t), mrl(t), MTTF وكالاتي:

$$S(t)=\frac{\left(1+\hat{\theta}_{per}+\hat{\theta}_{per}\,t\right)}{(1+\hat{\theta}_{per})}e^{-\hat{\theta}_{per}\,t} \qquad (2\text{-}185)$$

$$h(t)=\frac{\hat{\theta}_{per}^{2}(1+t)}{\left(1+\hat{\theta}_{per}+\hat{\theta}_{per}\,t\right)} \qquad (2\text{-}186)$$

$$mrl(t)=\frac{\hat{\theta}_{per}+2+\hat{\theta}_{per}\,t}{\hat{\theta}_{per}\left(1+\hat{\theta}_{per}+\hat{\theta}_{per}\,t\right)} \qquad (2\text{-}187)$$

$$MTTF=\frac{\left(2+\hat{\theta}_{per}\right)}{\hat{\theta}_{per}(1+\hat{\theta}_{per})} \qquad (2\text{-}188)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من توزيع Lindley بالمعلمة θ وعلى افتراض ان التوزيع الاولي للمعلمة θ هو $Gamma(\alpha,\beta)$. وافرض ان دالة الخسارة هي دالة تربيعية فيمكن إيجاد مقدر بيز للمعلمة θ كالاتي:

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta} \quad ;\alpha,\beta>0$$

$$f(\theta/t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{\dfrac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}}{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i+\beta\right)}d\theta}, \quad \theta>0$$

وتحت دالة الخسارة التربيعية نحصل على تقدير المعلمة:

$$\hat{\theta}_{Bay} = \frac{\int_0^\infty \frac{\theta^{(2n+\alpha)}}{(1+\theta)^n} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + \beta\right)} d\theta}{\int_0^\infty \frac{\theta^{(2n+\alpha-1)}}{(1+\theta)^n} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + \beta\right)} d\theta}, \quad \theta > 0 \qquad (2\text{-}189)$$

ونظرا لعدم إمكانية حل المعادلة (2-189) بالطرق التكاملية الاعتيادية لذا نلجأ لحلها بالطرق العددية مثل طريقة تقريب لندلي (التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل) لايجاد مقدر بيز للمعلمة θ.
بعدها نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها وكما يأتي:

$$S(t) = \frac{\left(1+\hat{\theta}_{Bay} + \hat{\theta}_{Bay}\, t\right)}{(1+\hat{\theta}_{Bay})} e^{-\hat{\theta}_{Bay}\, t} \qquad (2\text{-}190)$$

$$h(t) = \frac{\hat{\theta}_{Bay}^2 (1+t)}{\left(1+\hat{\theta}_{Bay} + \hat{\theta}_{Bay}\, t\right)} \qquad (2\text{-}191)$$

$$mrl(t) = \frac{\hat{\theta}_{Bay} + 2 + \hat{\theta}_{Bay}\, t}{\hat{\theta}_{Bay}\left(1+\hat{\theta}_{Bay} + \hat{\theta}_{Bay}\, t\right)} \qquad (2\text{-}192)$$

$$MTTF = \frac{\left(2+\hat{\theta}_{Bay}\right)}{\hat{\theta}_{Bay}(1+\hat{\theta}_{Bay})} \qquad (2\text{-}193)$$

6.7.2.2 التوزيع الاسي Exponential Distribution (Exp) (Okoli et al., 2016) (Triana (Gu, 2014) (& Purwadi, 2019

1- طريقة الامكان الأعظم Method of maximum likelihood(MLE)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع Exponential فيمكن إيجاد تقدير المعلمة θ بطريقة الامكان الأعظم كالاتي:

$$L(\theta;\mathrm{t}) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta t_i}$$

$$LnL(\theta;\mathrm{t}) = n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{\partial LnL(\theta;t)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

وبحل المعادلة جبرياً نحصل على الاتي:

$$\hat{\theta}_{Mle} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \qquad (2\text{-}194)$$

ومن معادلة (2-194) نجد تقدير دالة البقاء والدوال الملحقة بها للتوزيع الاسي بتقدير الإمكان الأعظم وكما يأتي:

$$S(t) = e^{-\hat{\theta}_{Mle}\, t} \qquad (2\text{-}195)$$

$$h(t) = \hat{\theta}_{Mle} \qquad (2\text{-}196)$$

2- طريقة العزوم Method of moments(MoM)

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n سحبت من التوزيع الاسي لتقدير المعلمة θ بطريقة العزوم.

نقوم بمساواة متوسط العينة $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ مع متوسط المجتمع الاصلي (العزم الاول حول نقطة الاصل للتوزيع الاسي) لنجد مقدر المعلمة.
وعليه فان تقدير طريقة العزوم للمعلمة θ هو:

$$E(\mathrm{T}) = \frac{1}{\theta}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\theta}$$

$$\therefore \hat{\theta}_{mom} = \frac{1}{\bar{t}} \qquad (2\text{-}197)$$

وبالتالي فهو مساوٍ لتقدير المعلمة بطريقة الإمكان الأعظم.

3- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators Method

على فرض ان $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بحجم n من التوزيع الاسي لتقدير المعلمة θ بطريقة المقدرات التجزيئية. نفررض ان:

$$F(t_i)=1-e^{-\theta t_i}$$

$$1-p_i=e^{-\theta t_i}$$

$$\ln(1-p_i)=-\theta t_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i)+\theta t_i\right]^2=0$$

بالاشتقاق للمعلمة θ والقسمة على 2

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1-p_i)+\theta t_i\right]\left[t_i\right]=0$$

إذ ان ti تمثل الاحصائات المرتبة وpi هي قيمة احتمالية تاخذ الصيغة الآتية $p_i=\dfrac{i-0.3}{n+0.25}$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)t_i+\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}\,t_i^{\,2}=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)t_i}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,2}} \qquad (2\text{-}198)$$

وباستخدام الحل الجبري نحصل على مقدر الطريقة التجزيئية ومنه على مقدرات دالة البقاء S(t) ودالة المخاطرة h(t) وكالاتي:

$$S(t)=e^{-\hat{\theta}_{Per}\,t} \qquad (2\text{-}199)$$

$$h(t)=\hat{\theta}_{Per} \qquad (2\text{-}200)$$

4- طريقة بيز القياسية Standard Bayesian method.

يتم احتساب تقدير بيز بأفتراض ان التوزيع السابق للمعلمة θ هو $Gamma(\alpha,\beta)$ وكما يأتي:

$$f(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1} \quad ;\alpha,\beta>0$$

وان التوزيع اللاحق للمعلمة θ هو

$$f(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=Gamma(\theta;\alpha+n,\beta+n\bar{t}) \quad \theta,\alpha,\beta>0$$

وتحت دالة الخسارة التربيعية نحصل على تقدير المعلمة:

$$\hat{\theta}_{Bay}=E(\theta)=\frac{\alpha+n}{\beta+n\bar{t}}, \quad \theta,\alpha,\beta>0 \qquad (2\text{-}201)$$

ويتم تقدير دالة البقاء S(t) ودالة المخاطرة h(t) للتوزيع الاسي بهذه الطريقة وكالاتي:

$$S(t)=e^{-\hat{\theta}_{Bay}\,t} \qquad (2\text{-}202)$$

$$h(t)=\hat{\theta}_{Bay} \qquad (2\text{-}203)$$

8.2.2 معايير المقارنة Comparison Criteria

لغرض المقارنة بين طرق التقدير والتوزيعات لبيان ايهم افضل تم استعمال المعايير الاتية:

1.8.2.2 متوسط مربعات الخطأ التكاملي Integrated Mean square Error

تتم المقارنة بين طرق التقدير في كل توزيع من التوزيعات المذكورة سابقا بواسطة هذا المعيار والذي كلما صغرت قيمته انحازت الأفضلية له، وتكون صيغته الرياضية كما يأتي:

$$IMSE\left(\hat{S}(t)\right)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_j}\left(\hat{S}_j(t_i)-S_j(t_i)\right)^2}{n_j}\right] \qquad \mathbf{(2\text{-}204)}$$

حيث ان

m: عدد التجارب.

n_j: حجم العينة j.

t_i: المشاهدة رقم i.

$\widehat{S}_j(t_i)$: دالة البقاء المقدرة للمشاهدة رقم i في التجربة رقم j.

$S_j(t_i)$: دالة البقاء الحقيقية للمشاهدة رقم i في التجربة رقم j.

2.8.2.2 **معيار معلومات اكايكي** Akaike Information Criterion (AIC) (Snipes & Taylor, 2014)

هو مقدر لخطأ التنبؤ في النماذج الإحصائية والذي يحدد جودة كل نموذج مطبق على مجموعة بيانات معينة، وعليه يمكن استخدامه لاختيار النموذج الافضل. تم تسمية هذا معيارعلى اسم الذي قام باشتقاقه الإحصائي الياباني Hirotugu Akaike سنة 1971.

نفترض أن لدينا نموذجاً إحصائياً مطبقاً على عينة من المشاهدات، وعلى افتراض ان عدد المعلمات المقدرة في هذا النموذج مساوٍ الى **p**، وان $L(\widehat{\theta}/t)$ هو لوغاريتم دالة الإمكان (Log Likelihood) لمشاهدات بيانات العينة، وتكون صيغته الرياضية كما يأتي:

$$AIC = -2L(\widehat{\theta}/t) + 2\mathrm{p} \qquad (2\text{-}205)$$

إذ ان النموذج الذي يملك اقل قيمة لمعيار (AIC) يكون هو النموذج الأفضل. وسوف يتم تطبيق هذا المعيار في الجانب التطبيقي للمقارنة بين التوزيعات المدروسة في هذا الفصل.

3.8.2.2 **معيار اكايكي المتسق** Consistent Akaike Information Criterion (AICc)(Lancelot et al., 2002)

تم اقتراح **AICc** من قبل Sugiura سنة 1978 تتمتع **AICc** بميزة أنها تميل إلى أن تكون أكثر دقة من **AIC** (خاصة للعينات الصغيرة)، فعندما يكون حجم العينة صغيرًا ، فهناك احتمال كبير أن تختار **AIC** النماذج التي تحتوي على عدد كبير جدًا من المعلمات.و لمعالجة هذا التجاوز المحتمل ، تم تطوير المعيار مع تصحيح لأحجام العينات الصغيرة. وصيغته الرياضية هي:

$$AICc = -2L(\widehat{\theta}/t) + \frac{2\mathrm{p}}{n-p-1} \qquad (2\text{-}206)$$

إذ تشير **n** إلى حجم العينة وتشير **p** إلى عدد المعلمات. لاحظ أنه كلما قتربت قيمة **n** من ∞، تقارب **AICc** مع **AIC**. وكلما كان حجم **n** اكبر من **p** كانت المشكلة في معيار **AIC** قليلة. وسوف يتم تطبيق هذا المعيار في الجانب التطبيقي للمقارنة بين التوزيعات المدروسة في هذا الفصل.

4.8.2.2 **معيار معلومات بيز** Bayesian information criterion (BIC) (Vrieze, 2012)

تم تطوير BIC بواسطة Gideon E. Schwarz في سنة 1978. وتم تسميته ايضاً Schwarz information criterion ويرمز لها بالرموز (SIC, SBC, SBIC) وهو معيار لاختيار النموذج الافضل بين مجموعة من النماذج، ويتم اختيار النموذج الذي يمتلك اقل قيمة لهذا المعيار.

وتكون صيغته الرياضية كما يأتي:

$$BIC = -2L(\hat{\theta} / t) + p\log(n) \qquad (2\text{-}207)$$

إذ ان

p: عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية.

$L(\hat{\theta} / t)$: لوغاريتم دالة الإمكان (Log Likelihood) لمشاهدات بيانات العينة.

n: حجم العينة.

وسوف يتم تطبيق هذا المعيار في الجانب التطبيقي للمقارنة بين التوزيعات المدروسة في هذا الفصل.

9.2.2 اختبار مربع كاي لحسن المطابقة Chi-Square test for goodness of fit (x^2) (Chin et al.)

وهو احد اختبارات حسن المطابقة لمعرفة مدى مطابقة البيانات الحقيقية المستخدمة لتوزيع معين، وتكون صيغته الرياضية كما يأتي:

$$X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(o_i - e_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i} \qquad (2\text{-}208)$$

إذ ان

o_i: هي التكرارات المشاهدة (الحقيقية).

e_i: هي التكرارات المتوقعة.

من ثم يتم مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية من جداول اختبار مربع كاي.

10.2.2 تقريب ليندلي Lindley Approximation (Metiri et al., 2016)

فرض الباحث Lindley عام (1958) حل تقريبي للتكامل الناتج من تقدير بيز وحسب الدالة الآتية:

$$l(y) = E\left[u(\theta)/t\right] = \frac{\int_{\Omega} u(\theta)\, e^{L(\theta)+p(\theta)}\, d\theta}{\int_{\Omega} e^{L(\theta)+p(\theta)}\, d\theta} \qquad (2\text{-}209)$$

إذ ان

$L(\theta)$: لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم.

$p(\theta)$: لوغارتيم التوزيع السابق للمعلمة θ.

$u(\theta)$: دالة المعلمة θ.

وقد اقترح الباحث ليندلي الصيغة الاتية لحل التكاملات الناتجة من تقدير بيز:

$$l(y) = \mu(\hat{\theta}) + 0.5\left[(\hat{\mu}_{\theta\theta} + 2\hat{\mu}_{\theta}\hat{p}_{\theta})\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right] + 0.5\left[(\hat{\mu}_{\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta})(\hat{L}_{\theta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta})\right] \qquad (2\text{-}210)$$

إذ ان

$\mu(\hat{\theta})$ تقدير المعلمة θ بطريقة MLE.

$$\hat{\mu}_{\theta} = \frac{\partial u(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}$$

$$\hat{\mu}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u(\hat{\theta})}{\partial^2 \hat{\theta}}$$

$$\hat{p}_{\theta} = \frac{\partial p(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}$$

$$\hat{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 L(\hat{\theta})}{\partial^2 \hat{\theta}}$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{\hat{L}_{\theta\theta}}$$

$$\hat{L}_{\theta\theta\theta} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta})}{\partial^3 \hat{\theta}}$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

(المحاكاة)

المبحث الأول – مفهوم المحاكاة.

المبحث الثاني – تجارب المحاكاة.

المبحث الثالث – مناقشة نتائج تجربة المحاكاة.

سيتضمن هذا الفصل وصفاً للتجارب التي تم تنفيذها بأسلوب محاكاة مونتي-كارلو Monte-Carlo Simulation وعرض اهم نتائج هذه التجارب لاختيار أفضل طريقة تقدير لمعلمات نماذج التوزيعات والتي تم عرضها في الجانب النظري من الرسالة وباستعمال متوسط مربعات الخطأ التكاملي Integrated Mean Square Error (IMSE) عند احجام عينات معينة وقيم افتراضية للمعلمات.

1.3 مفهوم المحاكاة Simulation Concept

طريقة تستخدم لتمثيل الاجزاء العملية في دراسة سلوك مقدرات او احصاءات او توزيعات إحصائية، وذلك لعدم سهولة معرفة سلوكها نظريا؛ وتكون المحاكاة عن طريق تشبيه او عكس الواقع عن طريق نموذج يتم تصميمه بشكل معين ليشابه النظام الحقيقي والاستمرار بمتابعة تنفيذ هذا النظام للتعرف على المخرجات لدراستها والاستفادة منها.

ومن اهم طرق المحاكاة هي طريقة محاكاة مونتي-كارلو Monte-Carlo Simulation وهي سلسلة من الخوارزميات الحسابية التي تستند الى إعادة التجربة عدد محدد من المرات بقيم ابتدائية عشوائية حيث يكثر استخدام هذه الطريقة في أنظمة المحاكاة الرياضية والهندسية (حسن، 2019)

2.3 تجارب المحاكاة

وتتضمن تجارب المحاكاة المراحل الآتية:

1.2.3 مرحلة اختيار القيم الافتراضية

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل إذ تكون اعتمادية باقي المراحل عليها، ويتم فيها افتراض القيم الافتراضية وكما يأتي:

1- اختيار القيم الافتراضية لحجوم العينات التي سيتم العمل عليها، حيث سنفترض حجوم العينات للتجارب كالاتي:

$n=10, 20, 50, 80, 100$

2-اختيار قيم افتراضية لمعلمة التوزيعات قيد الدراسة، وكما يأتي:

$\theta=0.5, 1, 5, 10$

3- تم افتراض توزيع كاما بالمعلمتين $(\alpha=1, \beta=2)$ (بعد افتراض عدة قيم واختيار القيم التي اعطتنا افضل تقدير) كتوزيع سابق في طريقة تقدير بيز القياسي.

4- افتراض عدد مرات تكرار تجارب المحاكاة مساوياً الى $(r=1000)$ لكل تجربة.

2.2.3 مرحلة توليد البيانات

1.2.2.3 توليد بيانات توزيع Xgamma(XG):

يتم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) لتوزيع XGD المعرف بالمعادلة (8-2) وفقا لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept)(Lehmann & Casella, 2006) وكما يأتي:

1) توليد متغير عشوائي مستمر A_i يتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1) باستخدام لغة البرمجة R:

$A_i \sim U(0,1)$ i=1, 2, 3,…, n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

2) توليد متغير عشوائي مستمر V_i يتبع التوزيع الاسي Exponential Distribution بالمعلمة θ باستخدام لغة البرمجة R:

$V_i \sim EXP(\theta)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

3) توليد متغير عشوائي مستمر W_i يتبع توزيع كاما Gamma Distribution بالمعلمتين (3,θ) باستخدام لغة البرمجة R:

$W_i \sim gamma(3,\theta)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

4) توليد متغير عشوائي مستمر T_i يتبع توزيع XG بالمعلمة θ باستخدام لغة R البرمجية وكما يأتي:

اذا كان $A_i \leq \frac{\theta}{(\theta+1)}$ فأن $T_i = V_i$، والا فأن $T_i = W_i$.

<u>2.2.2.3 توليد بيانات توزيع Xgamma1(XG1D) :</u>

تم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) لتوزيع XG1D المعرف بالمعادلة (2-30) وفقا لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept) كما يأتي:

1) توليد متغير عشوائي مستمر A_i يتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1) بأستخدام لغة البرمجة R:

$A_i \sim U(0,1)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

2) توليد متغير عشوائي مستمر V_i يتبع التوزيع الاسي Exponential Distribution بالمعلمة (λ=1/θ) بأستخدام لغة البرمجة R:

$V_i \sim EXP(\lambda = 1/\theta)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

3) توليد متغير عشوائي مستمر W_i يتبع توزيع كاما Gamma Distribution بالمعلمتين (3, λ=1/θ) بأستخدام لغة البرمجة R:

$$W_i \sim gamma(3, (\lambda = 1/\theta)) \qquad ,i=1,2,3,\ldots,n$$

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

4) توليد متغير عشوائي مستمر T_i يتبع توزيع XG1D بالمعلمة θ باستخدام لغة R البرمجية وكما يأتي:

اذا كان $A_i \leq \frac{\theta}{(\theta+1)}$ فأن $T_i = V_i$، والا فأن $T_i = W_i$.

3.2.2.3 توليد بيانات توزيع Xgamma2(XG2D) :

تم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) للتوزيع (XG2D) المعرف بالمعادلة (2-51) وفقا لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept) بنفس طريقة توليد مشاهدات توزيع XGD في الفقرة (3-2-2-1) مع تغيير الفقرة (4) منها لتكون بالشكل الاتي:

4) توليد متغير عشوائي مستمر T_i يتبع توزيع XG2D بالمعلمة θ باستخدام لغة R البرمجية وكما يأتي:

اذا كان $A_i \leq \frac{1}{(\theta+1)}$ فأن $T_i = V_i$، والا فأن $T_i = W_i$.

4.2.2.3 توليد بيانات توزيع Xgamma3(XG3D) :

تم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) للتوزيع (XG3D) المعرف بالمعادلة (2-72) وفقا لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept) بنفس طريقة توليد مشاهدات توزيع XG1D في الفقرة (3-2-2-2) مع تغيير الفقرة (4) منها لتكون بالشكل الاتي:

4) توليد متغير عشوائي مستمر T_i يتبع توزيع XG3D بالمعلمة θ باستخدام لغة R البرمجية وكما يأتي:

اذا كان $A_i \leq \frac{1}{(\theta+1)}$ فأن $T_i = V_i$، والا فأن $T_i = W_i$.

5.2.2.3 توليد بيانات توزيع Lindley(LD) :

تم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) للتوزيع (LD) المعرف بالمعادلة (2-93) وفقا لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept) وكما يأتي:

1) توليد متغير عشوائي مستمر A_i يتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1) باستخدام لغة R البرمجية:

$A_i \sim U(0,1)$ i=1, 2, 3,…, n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

2) توليد متغير عشوائي مستمر V_i يتبع التوزيع الاسي Exponential Distribution بالمعلمة θ باستخدام لغة البرمجة R:

$V_i \sim EXP(\theta)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

3) توليد متغير عشوائي مستمر W_i يتبع توزيع كاما Gamma Distribution بالمعلمتين (3,θ) باستخدام لغة البرمجة R:

$W_i \sim gamma(2,\theta)$,i=1,2,3,…,n

n: حجم العينة المراد توليد بياناتها.

4) توليد متغير عشوائي مستمر T_i يتبع توزيع LD بالمعلمة θ باستخدام لغة R البرمجية وكما يأتي:

اذا كان $A_i \leq \frac{\theta}{(\theta+1)}$ فأن $T_i = V_i$، والا فأن $T_i = W_i$.

6.2.2.3 توليد بيانات التوزيع الاسي Exponential (EXP) :

تم توليد المشاهدات العشوائية المستمرة (T) للتوزيع (EXP) المعرف بالمعادلة (2-95) باستخدام لغة البرمجة R:

$T_i \sim \mathrm{EXP}(\theta)$

3.2.3 مرحلة التقدير

في هذه المرحلة سيتم تطبيق طرائق التقدير المعروضة في الجانب النظري لايجاد مقدرات المعلمة $(\hat{\theta})$ و دالة البقاء $\widehat{S(t)}$ للتوزيع Xgamma(XG) وتوزيع Xgamma1(XG1D) وتوزيع Xgamma2(XG2D) وتوزيع Xgamma3(XG3D) وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة Lindley(LD) والتوزيع الاسي Exponential (EXP) وكالاتي:

1- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method (MLE)
إذ يتم حساب مقدرات المعلمة وتقدير دالة البقاء حسب الصيغ المذكورة في الجانب النظري، ضمن طرائق عددية تكرارية.

2- طريقة العزوم Moments Method (MOM)

3- إذ يتم حساب مقدرات المعلمة وتقدير دالة البقاء حسب الصيغ المذكورة في الجانب النظري على التوالي.

4- طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Methods (PER)

إذ يتم حساب مقدرات المعلمة وتقدير دالة البقاء حسب الصيغ المذكورة في الجانب النظري، ضمن طرائق عددية تكرارية.

5- طريقة بيز القياسية Standard Bayes method

إذ يتم حساب مقدرات المعلمة حسب الصيغ وتقدير دالة البقاء حسب الصيغ المذكورة في الجانب النظري، باستعمال تقريب ليندلي (Lindley approximation).

4.2.3 مرحلة المقارنة بين المقدرات:

تمت في هذه المرحلة المقارنة بين طرائق التقدير المختلفة لدالة البقاء للتوزيعات المستخدمة للوصول لأفضل المقدرات بأستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة وكما مبين في الفقرة (1.8.2.2) في الجانب النظري.

3.3 مناقشة نتائج تجربة المحاكاة

هنا سيتم عرض نتائج تجارب المحاكاة لتقدير دالة البقاء للنماذج المدروسة حسب الطرائق المبينة في الجانب النظري وتحليلها. إذ تم الحصول على هذه النتائج بالاعتماد على كود برمجي كتب بلغة R، وتم عرض النتائج في الجداول من (3-2) الى (3-5) والتي تضمنت مختصرات للمعلمات الحقيقية والمقدرة وكما موضح في الجدول رقم (3-1) ادناه:

جدول رقم (3-1) مقدرات الطرائق المستخدمة في الدراسة

المختصر	المعنى
θ	قيمة المعلمة الحقيقية (المفترضة)
$\hat{\theta}$mle	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة الإمكان الاعظم
$\hat{\theta}$mom	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة العزوم
$\hat{\theta}$per	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة المقدرات التجزيئية
$\hat{\theta}$Bay	قيمة المعلمة المقدرة بطريقة بيز القياسية
S	دالة البقاء الحقيقية (المفترضة)
$\hat{S}$ mle	دالة البقاء بمقدر الإمكان الاعظم
$\hat{S}$ mom	دالة البقاء بمقدر العزوم
$\hat{S}$ per	دالة البقاء بمقدر المقدرات التجزيئية
$\hat{S}$ Bay	دالة البقاء بمقدر بيز
IMSE	متوسط مربعات الخطأ التكاملي عند طرائق التقدير

وفيما يأتي نتائج تجارب المحاكاة في الجداول التي سيتم تحليلها وستنقسم الى اربع تجارب استنادا الى قيمة المعلمات المفترضة:

1- التجربة الأولى: في هذه التجربة يتم افتراض قيمة المعلمة θ=0.5 للنماذج المدروسة، وكما مبين في الجدول (3-2)

جدول (3-2) مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=0.5

n	Model	θ	$\hat{\theta}$mle	$\hat{\theta}$mom	$\hat{\theta}$per	$\hat{\theta}$Bay	Best Method
10	XG	0.5	0.5273871	0.5251378	0.5098092	0.5249015	$\hat{S}$ BAY
		S	$\hat{S}$ mle	$\hat{S}$ mom	$\hat{S}$ per	$\hat{S}$ BAY	
		0.5009148	0.4894253	0.4926569	0.5008743	0.4904404	
		IMSE	0.008186946	0.008259633	0.009139453	0.007456009	
	XG1D	0.5	0.5067985	0.5183483	0.6581656	0.5314926	$\hat{S}$ BAY
		0.4930702	0.4861079	0.4941075	0.5502264	0.4983371	
		IMSE	0.004448877	0.006003576	0.006433832	0.003811767	
	XG2D	0.5	0.6247297	0.6178786	0.571458	0.6053739	$\hat{S}$ PER
		0.5128728	0.487079	0.4953837	0.5026487	0.5076582	
		IMSE	0.005464614	0.005670763	0.005083908	0.006903693	
	XG3D	0.5	0.4730398	0.4748346	0.942479	0.5116346	$\hat{S}$ BAY
		0.4902308	0.4698789	0.4712673	0.7684246	0.4986885	
		IMSE	0.004919634	0.004610523	0.0875765	0.004566246	
	LD	0.5	0.5274325	0.5274325	0.5896516	0.5251973	$\hat{S}$ BAY
		0.4981751	0.489379	0.489379	0.4425788	0.4897029	
		IMSE	0.008136991	0.008136991	0.009307806	0.007248515	
	EXP	0.5	0.5549105	0.5549105	0.5243412	0.5437004	$\hat{S}$ BAY
		0.5004917	0.4876831	0.4876831	0.5003666	0.4900793	
		IMSE	0.007770568	0.007770568	0.00855875	0.006220486	
20	XG	0.5	0.5117965	0.5110901	0.4996898	0.5112623	$\hat{S}$ BAY
		0.5002135	0.4955356	0.4968083	0.5041923	0.4957594	
		IMSE	0.003865545	0.003915038	0.004621608	0.00370174	
	XG1D	0.5	0.4890245	0.5025194	0.635466	0.5011416	$\hat{S}$ BAY
		0.4960061	0.4859764	0.4934346	0.5489351	0.4922734	
		IMSE	0.002835333	0.003881753	0.005151933	0.002506078	
	XG2D	0.5	0.5505061	0.5448079	0.5176362	0.5220795	$\hat{S}$ PER
		0.5022783	0.4956097	0.4965189	0.502568	0.5034481	
		IMSE	0.02684996	0.002675618	0.002535236	0.0251727	
	XG3D	0.5	0.5075526	0.5128418	1.203992	0.52693	$\hat{S}$ MLE
		0.4722976	0.4774799	0.4810734	0.7656491	0.4905018	
		IMSE	0.00317844	0.00911079	0.1033806	0.00391633	
	LD	0.5	0.5102533	0.5102533	0.5776129	0.5100982	$\hat{S}$ BAY
		0.4965701	0.494469	0.494469	0.4467255	0.494293	
		IMSE	0.004120168	0.004120168	0.005955598	0.00390358	

	EXP	0.5	0.5251436	0.5251436	0.5071348	0.5225034	$\hat{S}$ BAY
		0.4995801	0.4937013	0.4937013	0.5021869	0.4943043	
		IMSE	0.003970038	0.003970038	0.004633928	0.00357273	
50	XG	0.5	0.5045893	0.5044612	0.4973327	0.5045024	$\hat{S}$ BAY
		0.5005795	0.4987321	0.4991479	0.5042417	0.4987714	
		IMSE	0.001585159	0.001598772	0.002009466	0.001559269	
	XG1D	0.5	0.5024953	0.5032413	0.6538438	0.5074723	$\hat{S}$ BAY
		0.4998141	0.4987446	0.4995327	0.5576521	0.5011112	
		IMSE	0.001017028	0.001220399	0.005220061	0.000989734	
	XG2D	0.5	0.5256333	0.5151045	0.5117875	0.5166622	$\hat{S}$BAY
		0.4971599	0.4918952	0.495862	0.4964676	0.4945626	
		IMSE	0.001362287	0.001311282	0.001454768	0.001241304	
	XG3D	0.5	0.6269082	0.6265536	0.7299318	0.6356396	$\hat{S}$MOM
		0.4154995	0.4945283	0.4943271	0.5487882	0.4994491	
		IMSE	0.007295391	0.007258496	0.02061737	0.008226613	
	LD	0.5	0.5040666	0.5040666	0.5748893	0.5041745	$\hat{S}$ BAY
		0.4989432	0.497945	0.497945	0.4496803	0.4978265	
		IMSE	0.001570137	0.001570137	0.004144377	0.001537989	
	EXP	0.5	0.5123625	0.5123625	0.4996959	0.5119004	$\hat{S}$ BAY
		0.5020491	0.4984967	0.4984967	0.5047379	0.4986171	
		IMSE	0.00149294	0.00149294	0.001845642	0.00143181	
80	XG	0.5	0.5026795	0.5023766	0.497618	0.5026452	$\hat{S}$ BAY
		0.4996549	0.4985668	0.4989855	0.5025501	0.4985835	
		IMSE	0.000944567	0.000951050	0.00128479	0.000934995	
	XG1D	0.5	0.5031066	0.5066979	0.6546247	0.50617	$\hat{S}$ BAY
		0.496152	0.4961246	0.498447	0.5548961	0.4975817	
		IMSE	0.000591527	0.000685707	0.00510448	0.000584770	
	XG2D	0.5	0.5124825	0.5094823	0.5005475	0.5077665	$\hat{S}$ BAY
		0.498953	0.496498	0.4980956	0.5003619	0.4979684	
		IMSE	0.000689945	0.000694379	0.00069834	0.000680988	
	XG3D	0.5	0.4770932	0.4848315	0.6236431	0.481711	$\hat{S}$ MOM
		0.480159	0.4633047	0.4690687	0.5607442	0.466753	
		IMSE	0.00329888	0.001428575	0.00757735	0.002087301	
	LD	0.5	0.5024947	0.5024947	0.5731363	0.5025859	$\hat{S}$ BAY
		0.4996175	0.4990252	0.4990252	0.4512029	0.4989436	
		IMSE	0.00101582	0.001015825	0.00363103	0.001002952	
	EXP	0.5	0.5073956	0.5073956	0.4976217	0.5072214	$\hat{S}$ BAY
		0.5013556	0.4993255	0.4993255	0.50412	0.4993705	
		IMSE	0.000943262	0.000943262	0.00117120	0.000919519	
1		0.5	0.5021947	0.5017607	0.4982689	0.5021711	

	XG	0.4990645	0.49822	0.4987255	0.501316	0.4982316	$\hat{S}$ BAY
		IMSE	0.00078683	0.000799012	0.00107567	0.000780452	
	XG1D	0.5	0.5015503	0.5008769	0.6517484	0.5040426	$\hat{S}$ BAY
		0.5002793	0.499937	0.4998267	0.5580207	0.5011169	
		IMSE	0.00050923	0.000680495	0.00493977	0.000422599	
	XG2D	0.5	0.5086084	0.5077258	0.4979966	0.5050075	$\hat{S}$ BAY
		0.5001627	0.4985285	0.4992819	0.502051	0.4996643	
		IMSE	0.00045186	0.000510508	0.00052156	0.000435718	
	XG3D	0.5	0.5532897	0.5581445	0.7126101	0.5573049	$\hat{S}$MLE
		0.4383456	0.4753216	0.4785422	0.569055	0.4779869	
		IMSE	0.00154884	0.001830608	0.01946765	0.001780345	
	LD	0.5	0.5039684	0.5039684	0.574256	0.5040381	$\hat{S}$ BAY
		0.5016071	0.4997303	0.4997303	0.4524695	0.4996702	
		IMSE	0.00079152	0.000791526	0.00350460	0.000783709	
	EXP	0.5	0.5042744	0.5042744	0.4983632	0.5041826	$\hat{S}$ BAY
		0.4989836	0.4980696	0.4980696	0.501021	0.4980906	
		IMSE	0.00071576	0.000715768	0.00088626	0.000701405	

يتضح من الجدول (3-2) مايأتي:

a) عند حجم عينة (10) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.003811767) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.004566246)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG2D) بقيمة (0.005083908)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.006220486)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.007248515)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.007456009).

b) عند حجم عينة (20) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.002506078) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.002535236)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG3D) بقيمة (0.00317844)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.00357273)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.00370174)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.00390358).

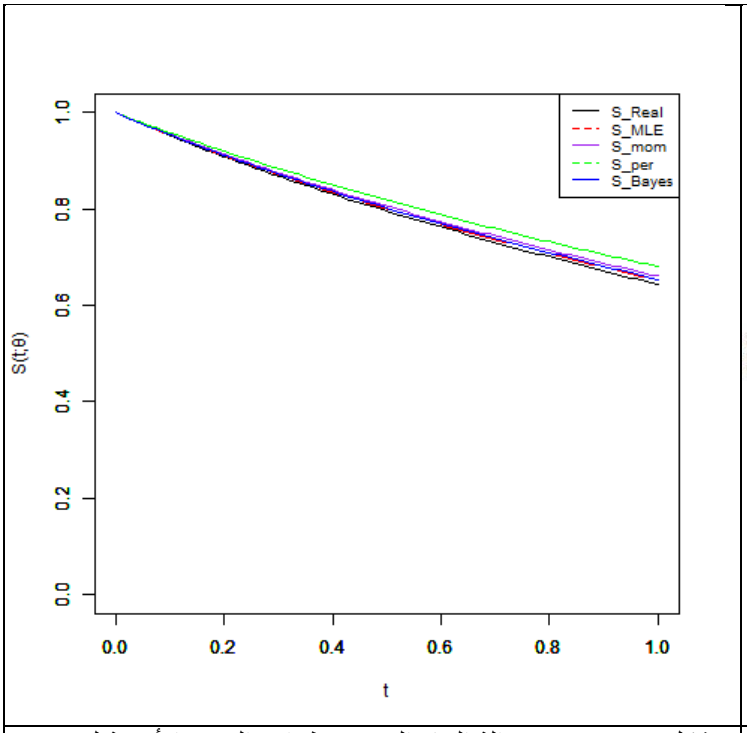
c) عند حجم عينة (50) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000989734) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.001241304)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة

(0.00143181)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.001537989)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.001559269)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.007258496).

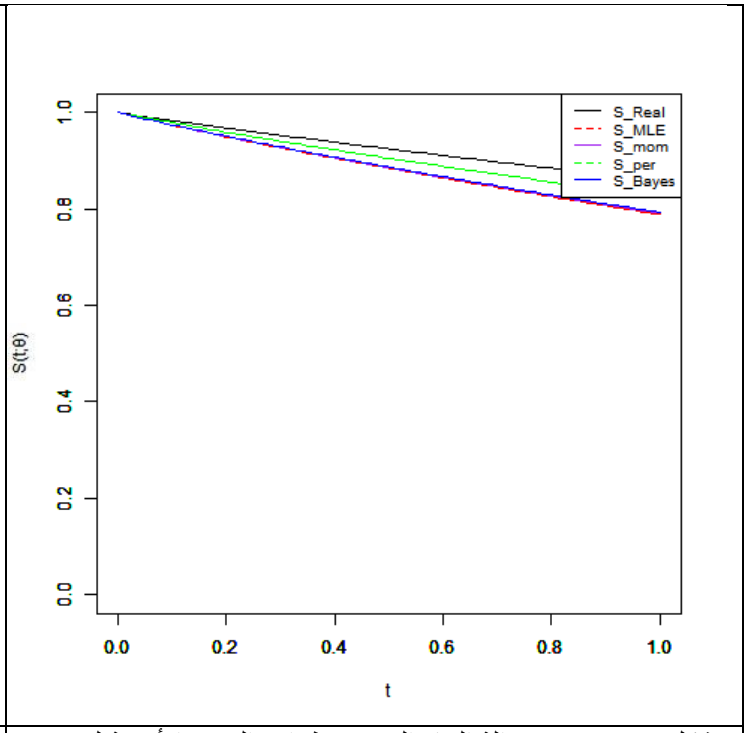
d) عند حجم عينة (80) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000584770) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.000680988)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.000919519)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.000934995)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.001002952)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.001428575).

e) عند حجم عينة (100) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000422599) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.000435718)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.000701405)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.000780452)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.000783709)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.00154884).

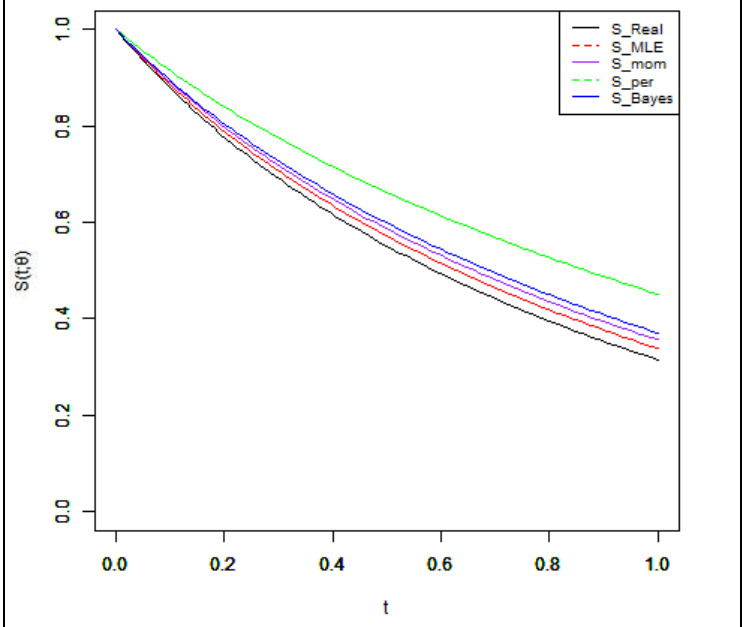
ويمكن رسم الشكل البياني لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات المدروسة عند حجوم العينات (10,20,50,80,100) كما مبين في الاشكل (3-1) شكل (3-30) كالاتي:



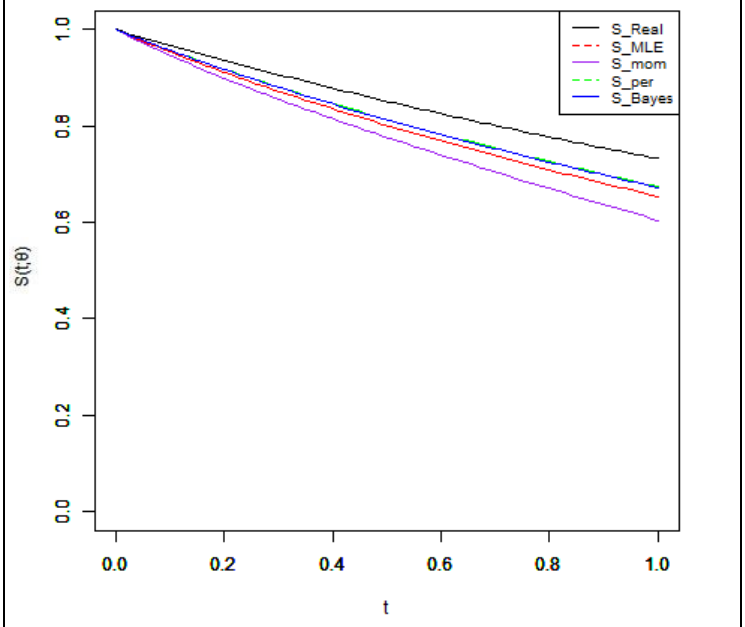
شكل (3-2) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



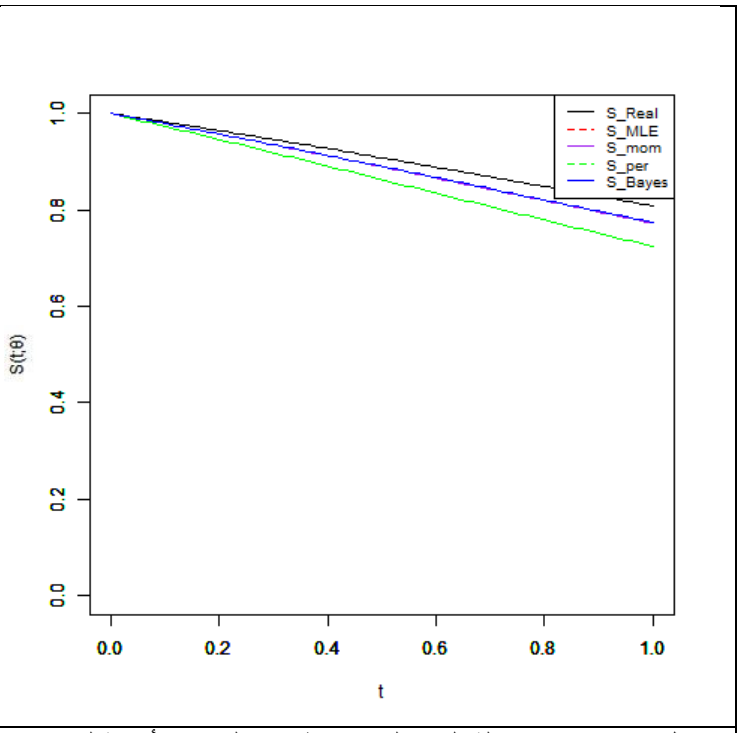
شكل (3-1) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



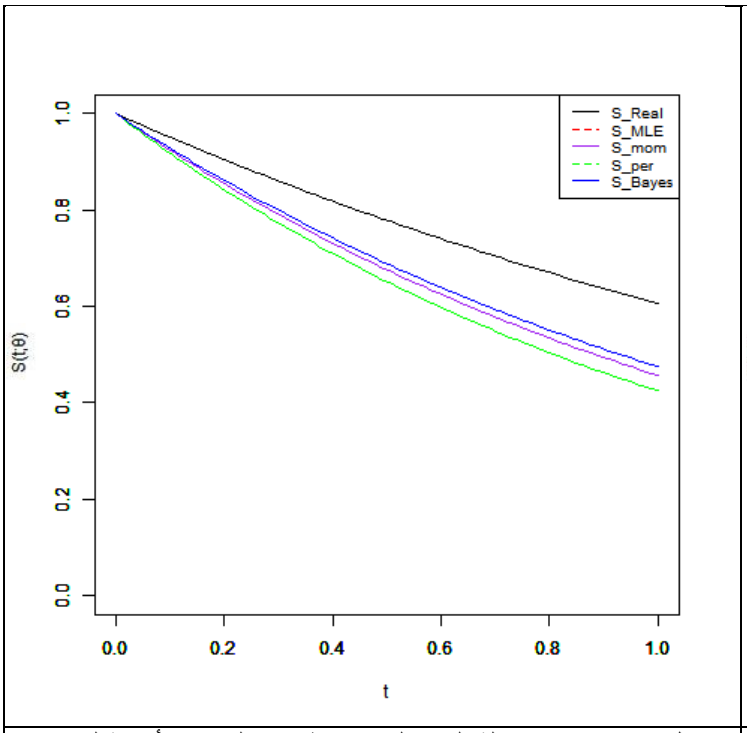
شكل (3-4) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



شكل (3-3) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



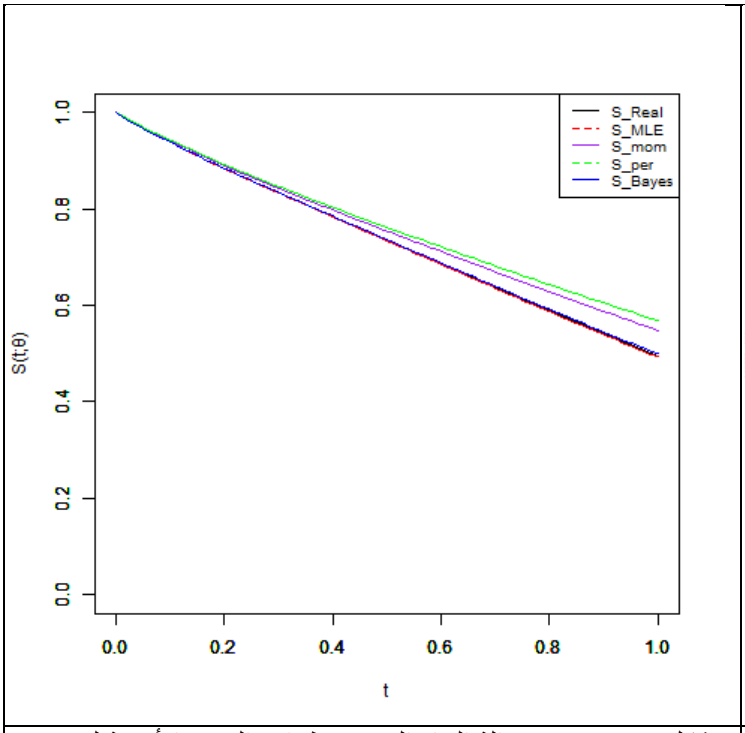
شكل (3-5) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



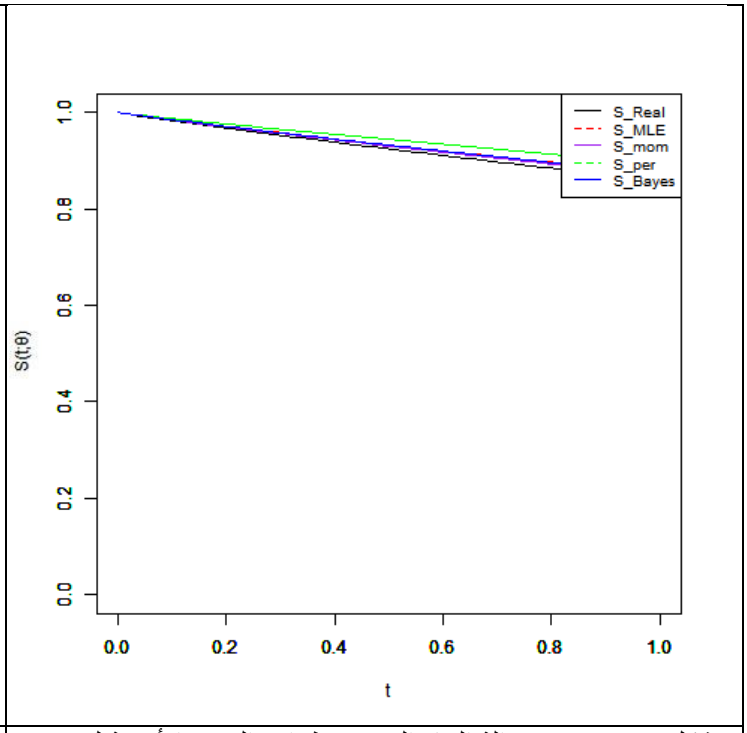
شكل (3-6) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10

يتضح من الرسوم البيانية لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات عند حجم العينة (10) والمبينة في الاشكال من (3-1) الى (3-6) الاتي:

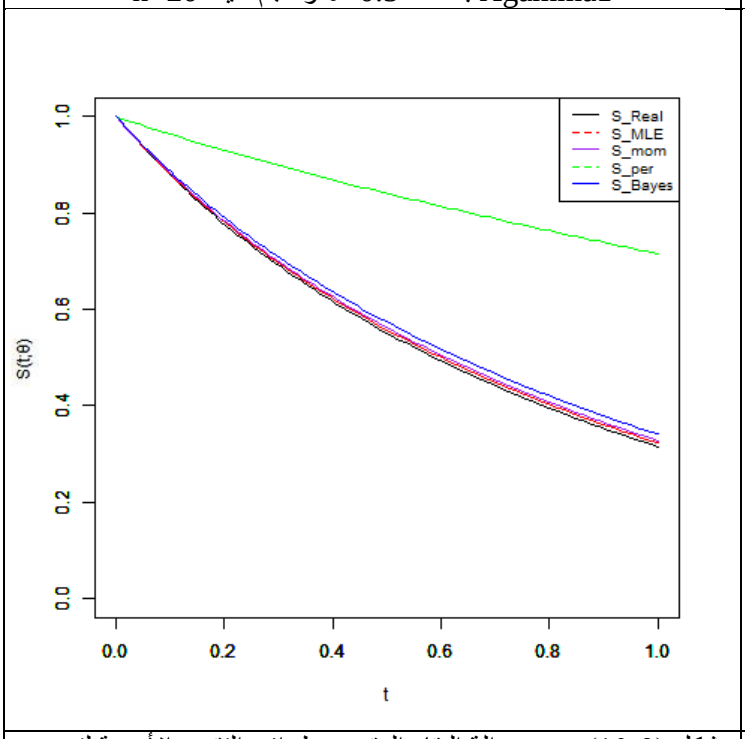
- افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية لتقارب الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.
- كان أفضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج XG1D وذلك لقرب الخطوط البيانية لدوال البقاء المقدرة بطرق التقدير مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية ولاسيما الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية الذي اقترب من التطابق مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.



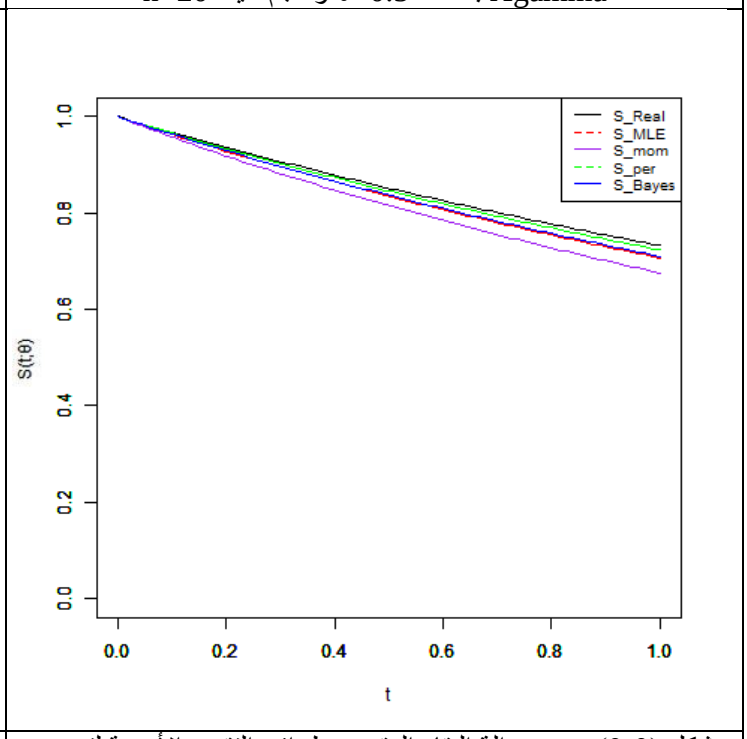
شكل (3-8) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=20



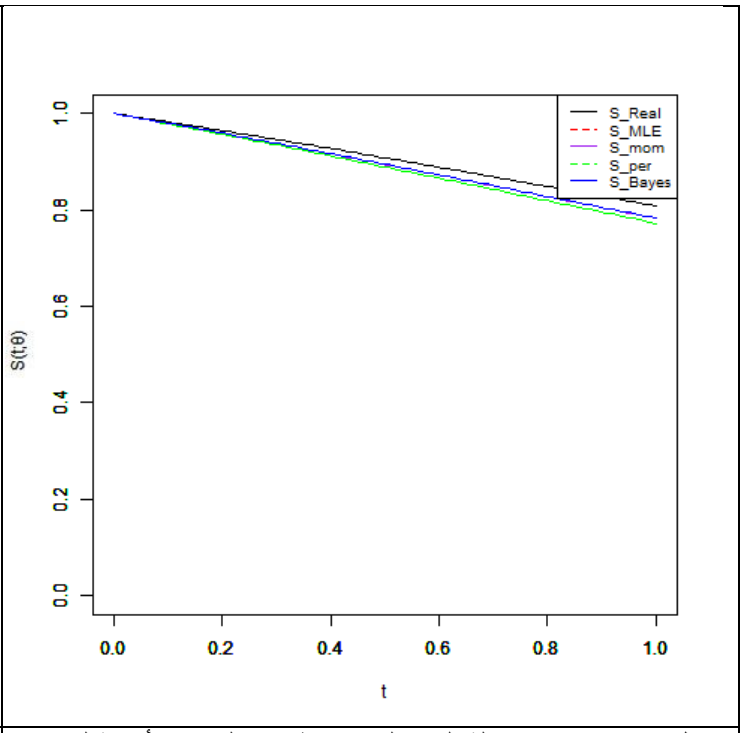
شكل (3-7) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=20



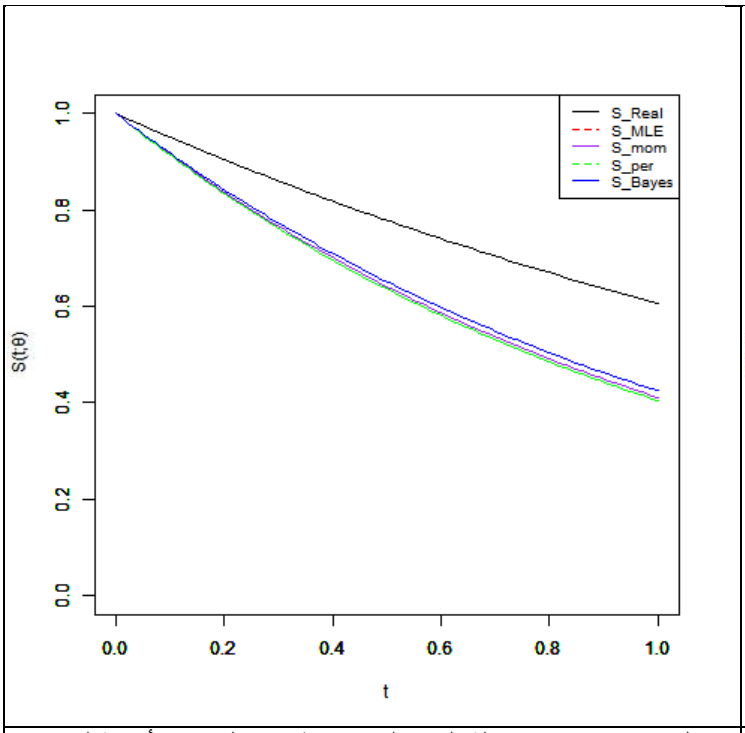
شكل (3-10) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=20



شكل (3-9) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=10



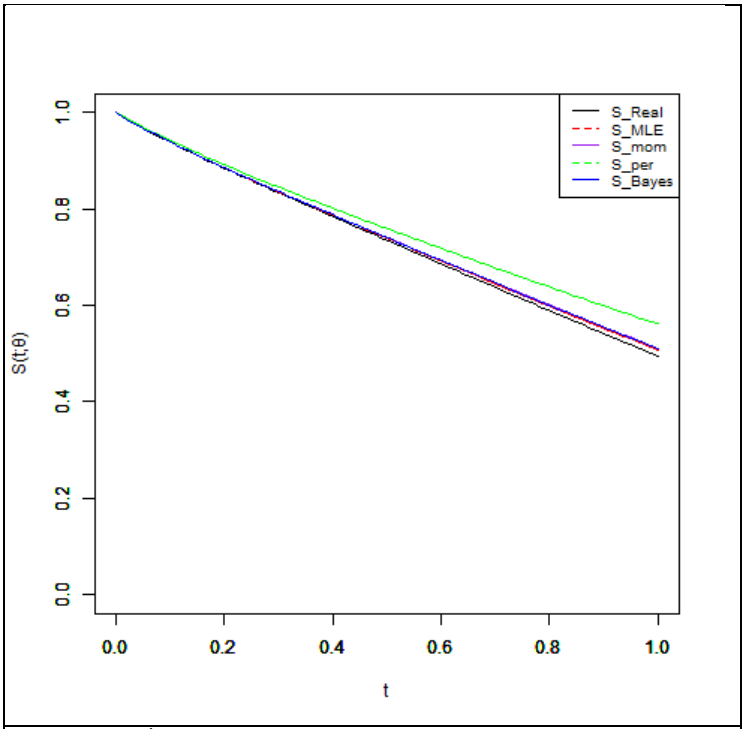
شكل (3-11) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=20



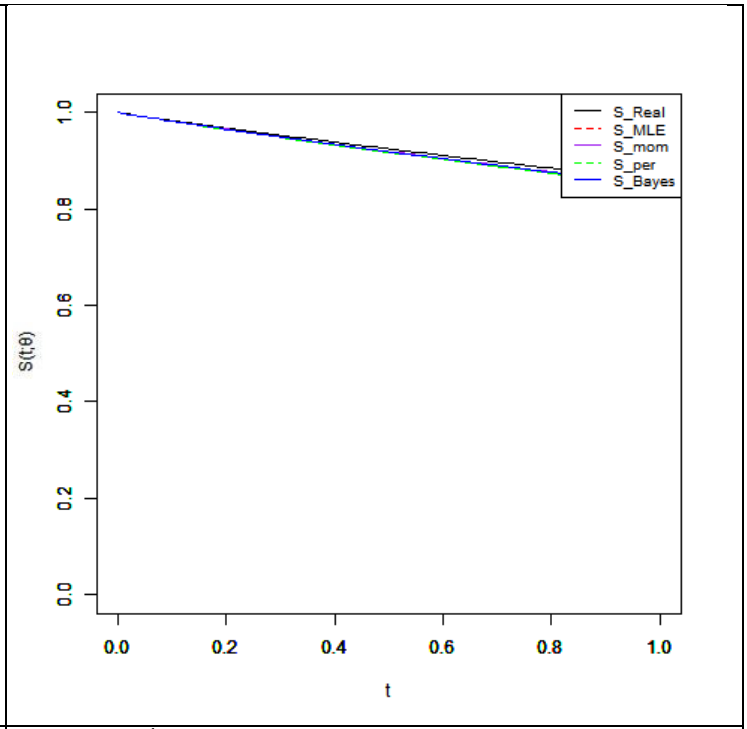
شكل (3-12) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=20

يتضح من الرسوم البيانية لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات عند حجم العينة (20) والمبينة في الاشكال من (3-7) الى (3-12) الاتي:

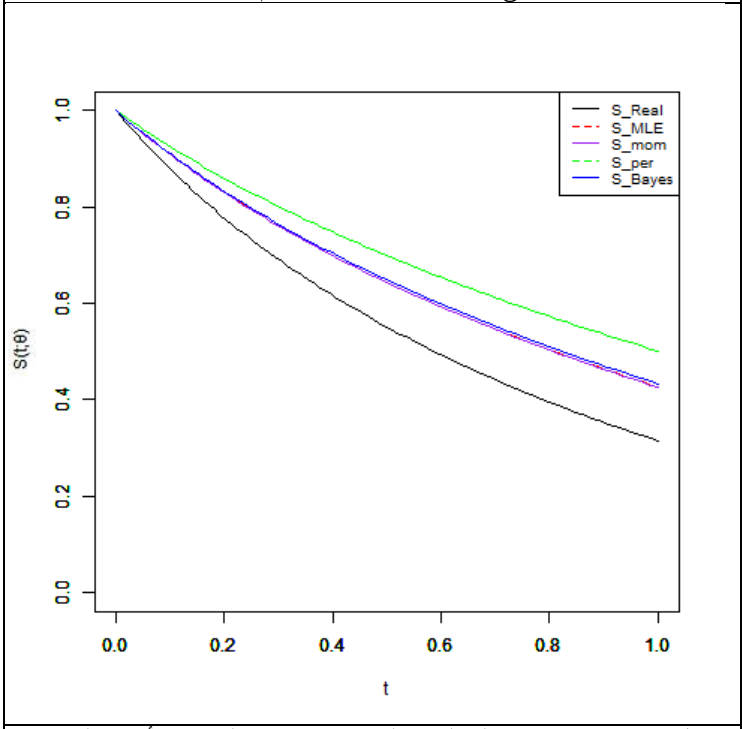
- افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية لتقارب الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.
- كان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج XG1D وذلك لقرب الخطوط البيانية لدوال البقاء المقدرة بطرق التقدير مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية وبالخصوص الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية الذي اقترب من التطابق مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.



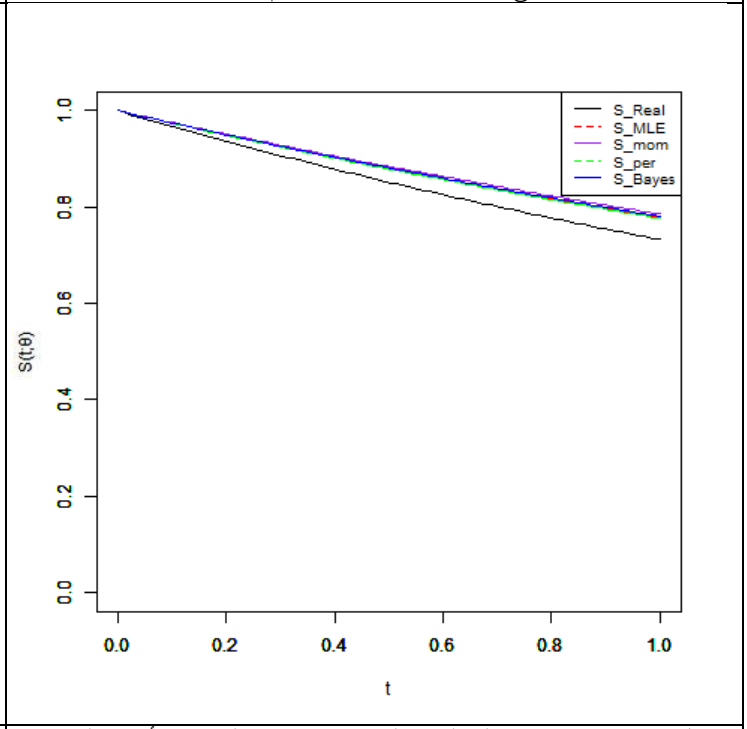
شكل (3-14) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50



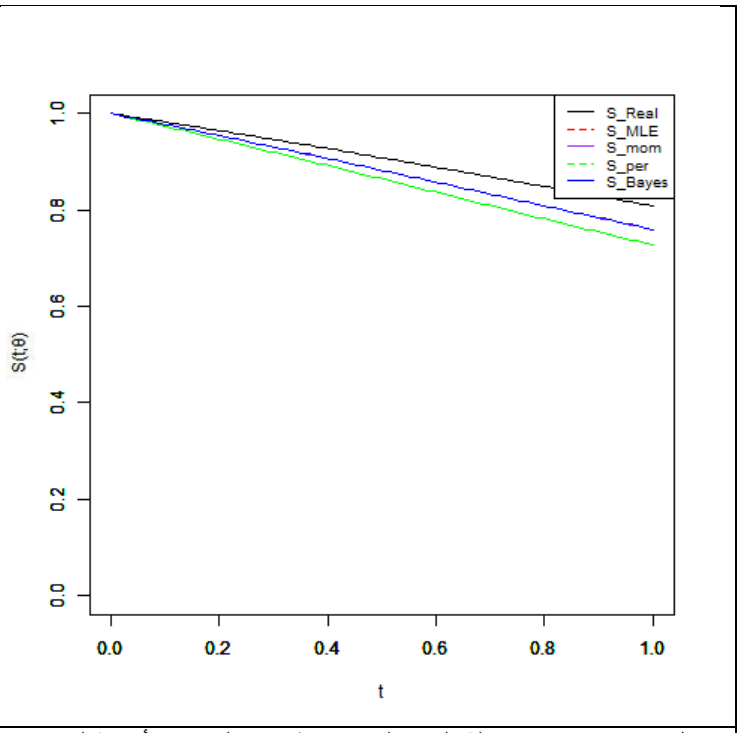
شكل (3-13) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50



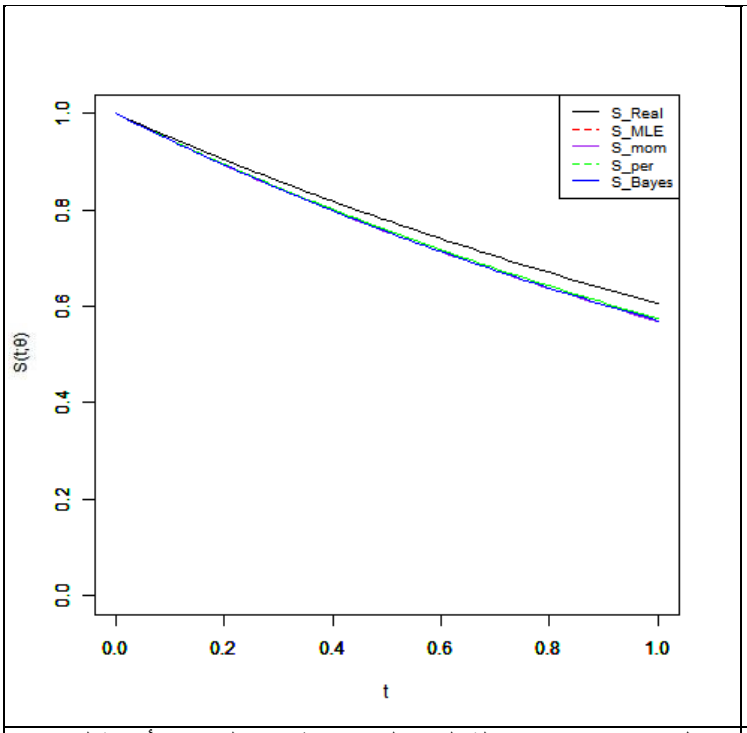
شكل (3-16) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50



شكل (3-15) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50



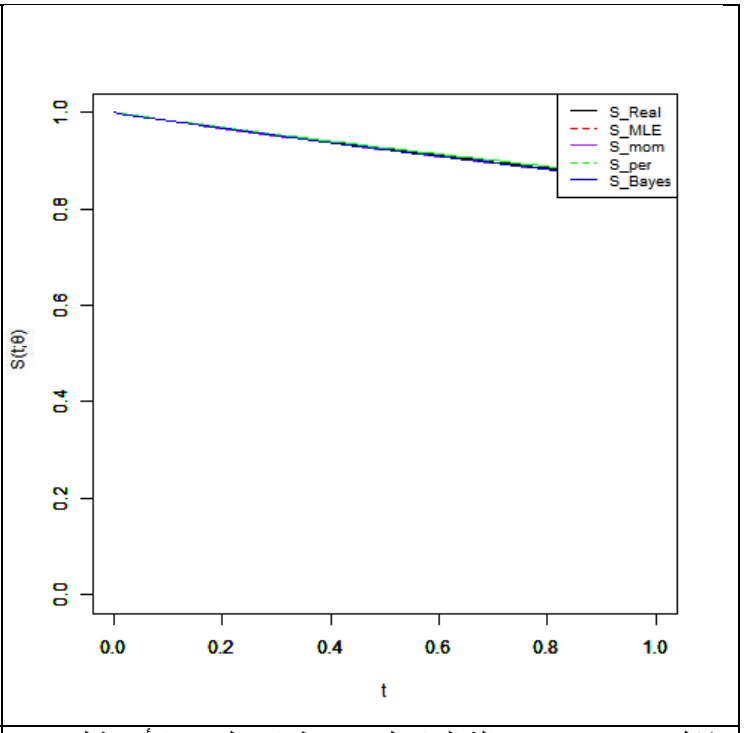
شكل (3-17) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50



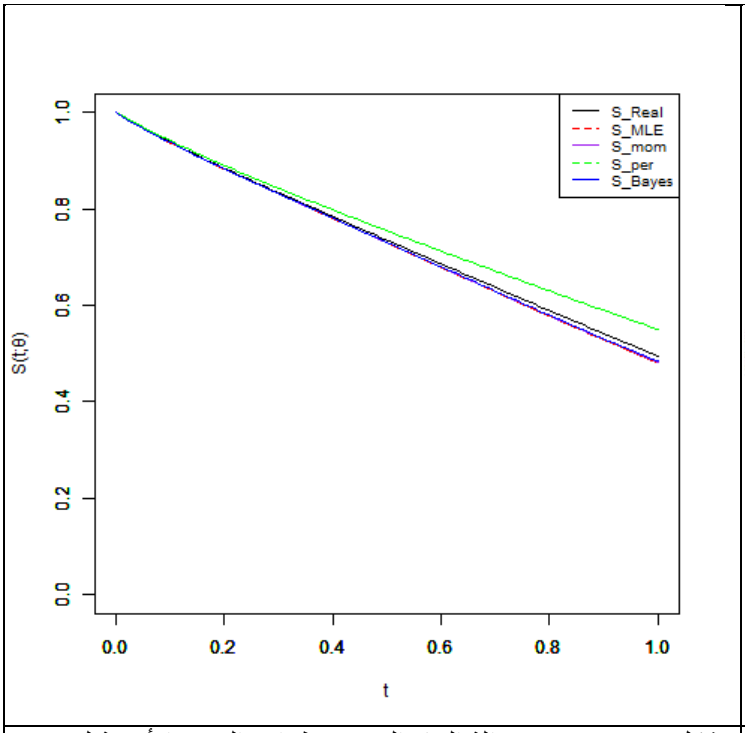
شكل (3-18) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=50

يتضح من الرسوم البيانية لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات عند حجم العينة (50) والمبينة في الاشكال من (3-13) الى (3-18) الاتي:

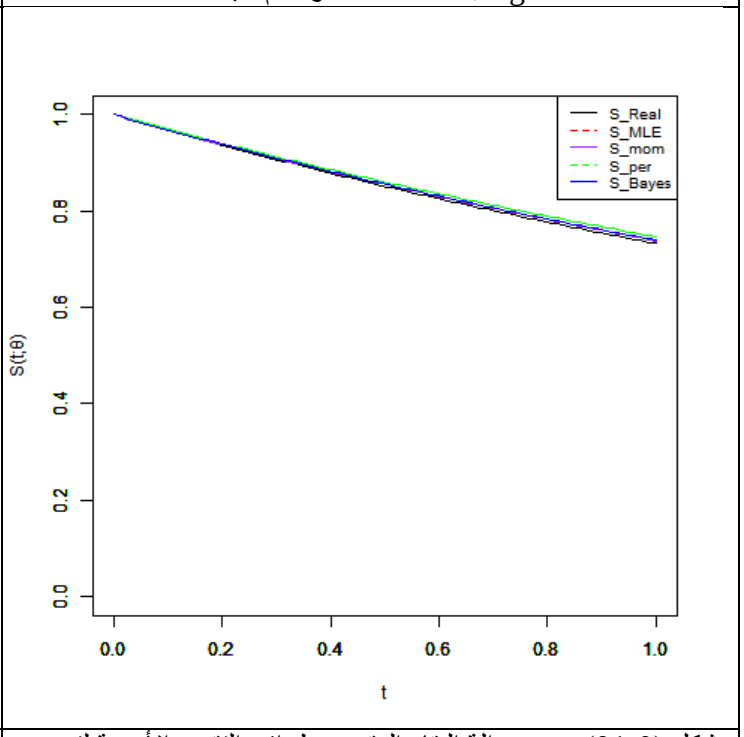
- افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية لتقارب الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.
- كان أفضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج XG1D وذلك لقرب الخطوط البيانية لدوال البقاء المقدرة بطرق التقدير مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية ولاسيما الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية الذي اقترب من التطابق مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.



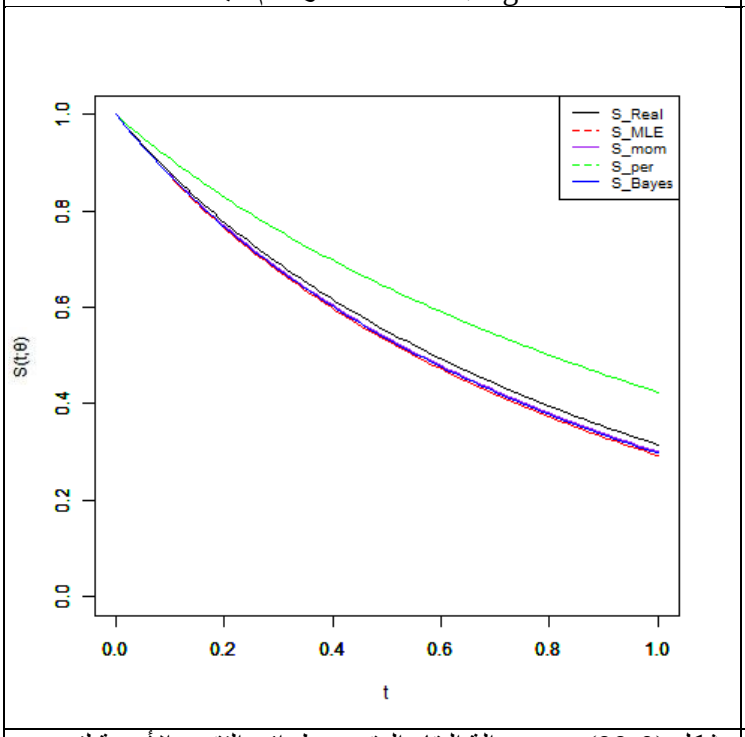
شكل (3-19) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80



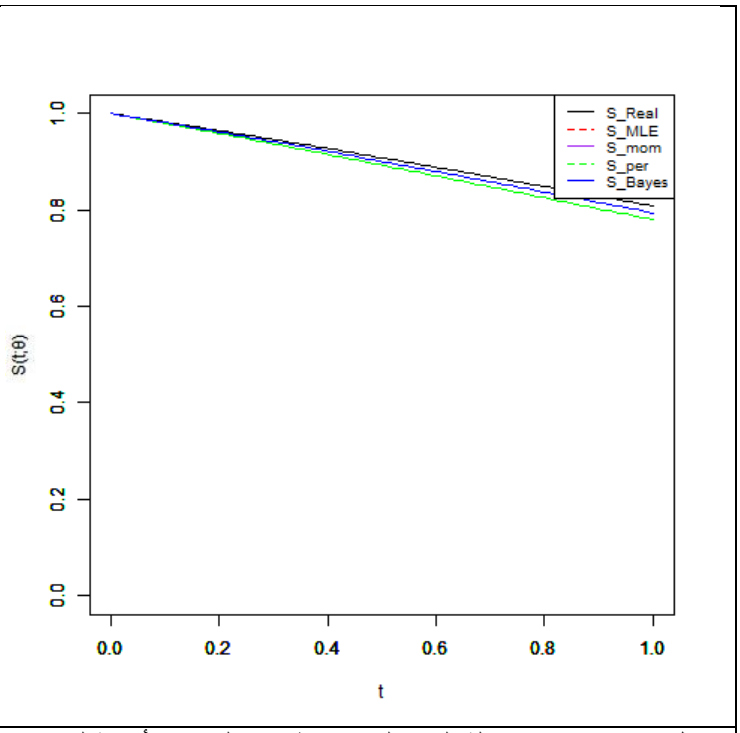
شكل (3-20) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80



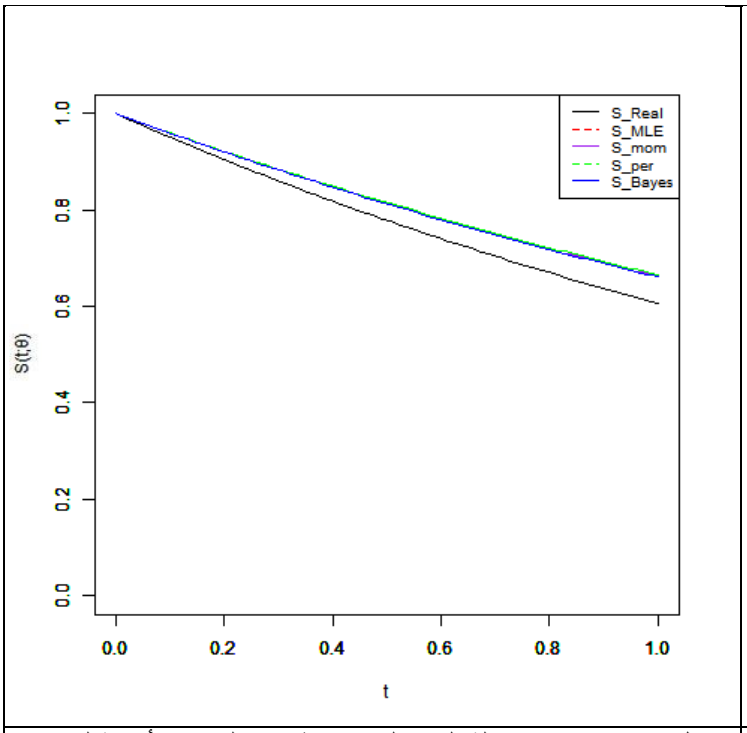
شكل (3-21) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80



شكل (3-22) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80



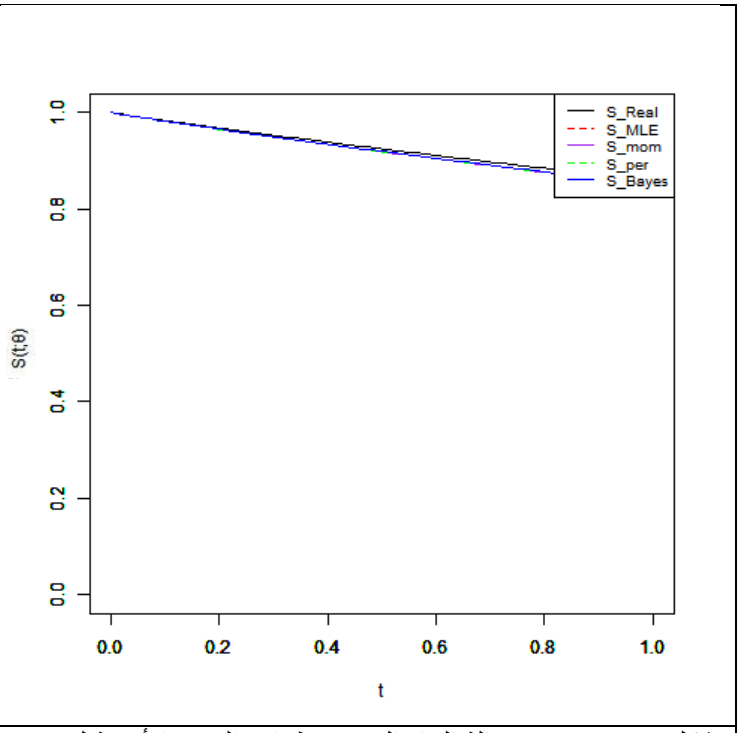
شكل (3-23) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80



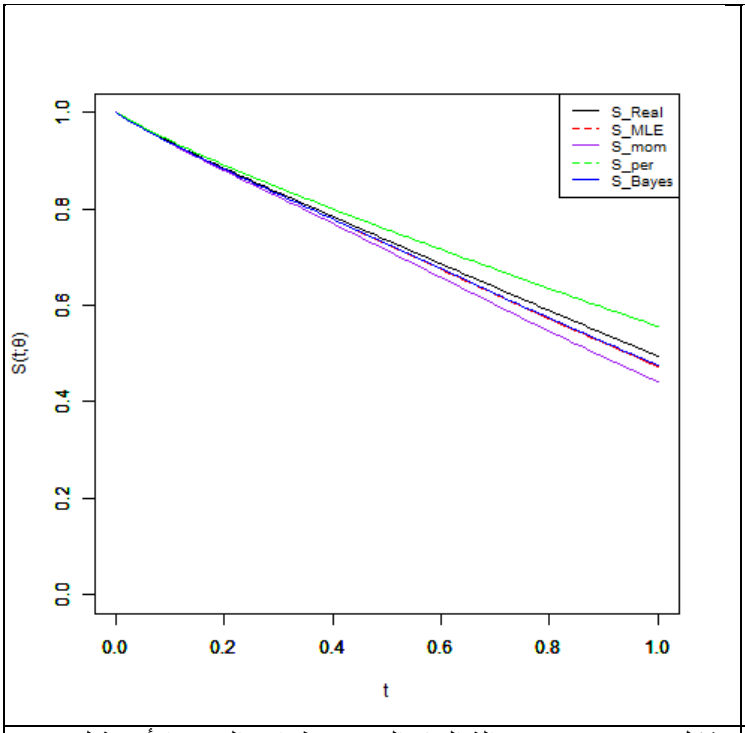
شكل (3-24) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=80

يتضح من الرسوم البيانية لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات عند حجم العينة (80) والمبينة في الاشكال من (1-19) الى (3-24) الاتي:

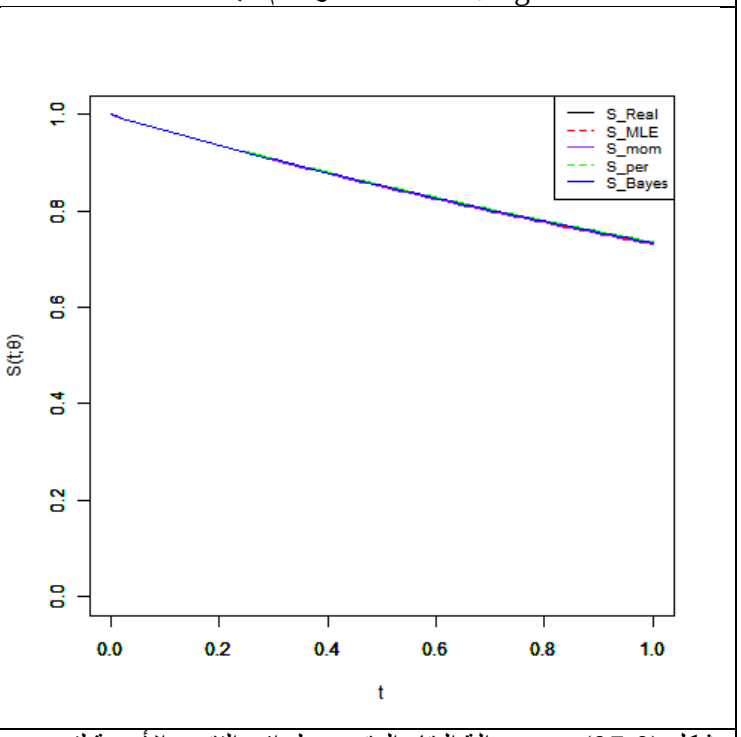
- افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية لتقارب الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.
- كان أفضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج XG1D وذلك لقرب الخطوط البيانية لدوال البقاء المقدرة بطرق التقدير مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية ولاسيما الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية الذي اقترب من التطابق مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.



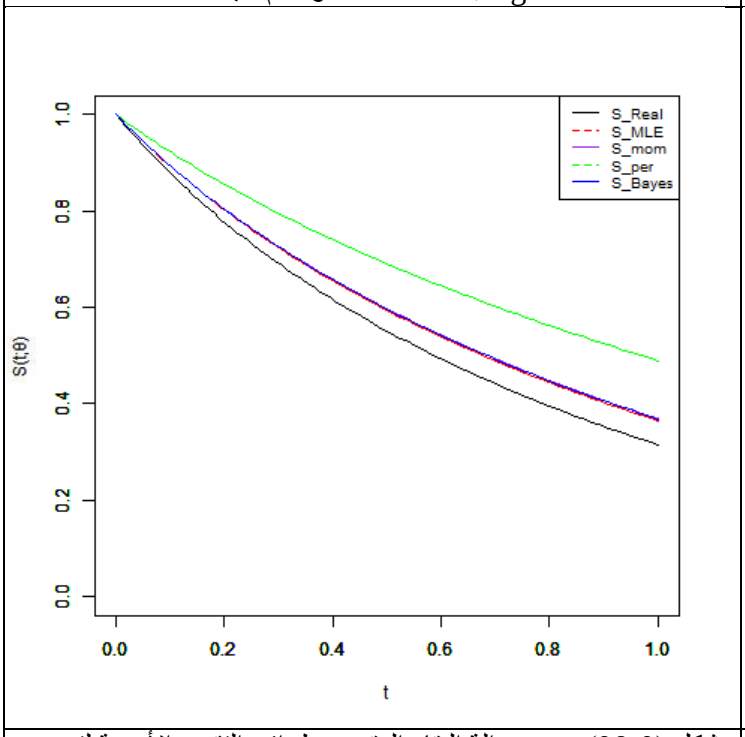
شكل (3-25) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100



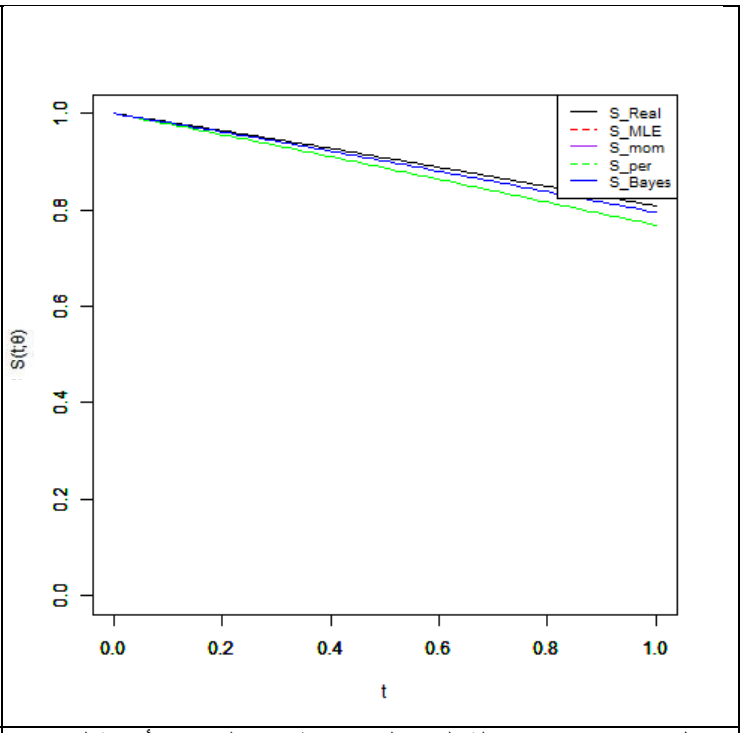
شكل (3-26) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100



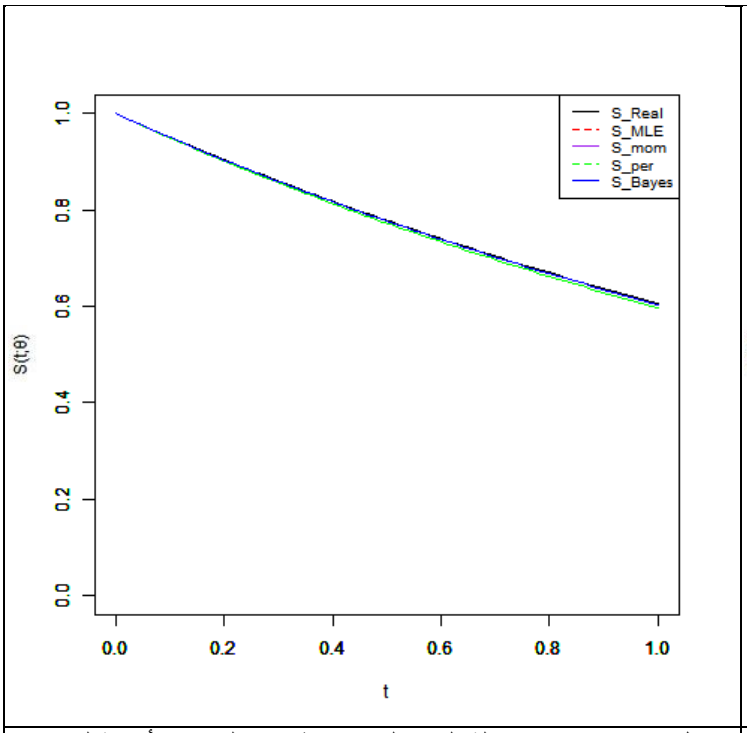
شكل (3-27) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100



شكل (3-28) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100



شكل (3-29) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100



شكل (3-30) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=0.5 وحجم عينة n=100

يتضح من الرسوم البيانية لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الأولى بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات عند حجم العينة (100) والمبينة في الاشكال من (3-25) الى (3-30) الاتي:

- افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية لتقارب الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بهذه الطريقة مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.
- كان أفضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج XG1D وذلك لقرب الخطوط البيانية لدوال البقاء المقدرة بطرق التقدير مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية ولاسيما الخط البياني لدالة البقاء المقدرة بطريقة بيز القياسية الذي اقترب من التطابق مع الخط البياني لدالة البقاء الحقيقية.

2- التجربة الثانية: في هذه التجربة يتم افتراض قيمة المعلمة θ=1 للنماذج المدروسة وكما مبين في جدول **(3-3)**

جدول (3-3) مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=1

n	Model	θ	$\hat{\theta}$mle	$\hat{\theta}$mom	$\hat{\theta}$per	$\hat{\theta}$Bay	Best Method
10	XG	1	1.055763	1.049523	1.020466	1.043477	$\hat{S}$ BAY
		S	$\hat{S}$ mle	$\hat{S}$ mom	$\hat{S}$ per	$\hat{S}$ BAY	
		0.4966129	0.487108	0.49043	0.49789	0.4891341	
		IMSE	0.008216375	0.008197971	0.009084089	0.006527469	
	XG1D	1	1.011734	1.0561	1.310486	1.047991	$\hat{S}$ BAY
		0.4882513	0.4777576	0.4887502	0.530376	0.4851028	
		IMSE	0.004650664	0.005206892	0.004369163	0.003120486	
	XG2D	1	1.045013	1.120585	0.9574794	1.238928	$\hat{S}$ MLE
		0.5224438	0.5213259	0.515708	0.5363489	0.5063513	
		IMSE	0.003240137	0.004629943	0.003252931	0.01103276	
	XG3D	1	1.195479	1.213463	1.5196	1.279014	$\hat{S}$ MLE
		0.4004318	0.4685981	0.4745372	0.5662562	0.4956762	
		IMSE	0.005317682	0.006280856	0.03146298	0.01036032	
	LD	1	1.053752	1.053752	1.012938	1.041715	$\hat{S}$ BAY
		0.4962816	0.4885819	0.4885819	0.4971455	0.4897201	
		IMSE	0.007505553	0.007505553	0.005782786	0.005628798	
	EXP	1	1.106996	1.106996	1.050495	1.069268	$\hat{S}$ BAY
		0.4987454	0.4868873	0.4868873	0.4987152	0.4908983	
		IMSE	0.007786423	0.007786423	0.008434809	0.005116644	
20	XG	1	1.037475	1.035151	1.01212	1.034349	$\hat{S}$ BAY
		0.5023903	0.4948064	0.496261	0.5031394	0.4953267	
		IMSE	0.00434782	0.004374401	0.005116636	0.003921548	
	XG1D	1	0.9740149	0.9801511	1.283106	0.9926108	$\hat{S}$ BAY
		0.5096629	0.4992126	0.5006827	0.5497337	0.5028619	
		IMSE	0.002588387	0.003394152	0.00329905	0.002325781	
	XG2D	1	1.256921	1.253723	1.144022	1.284663	$\hat{S}$ PER
		0.5294968	0.49235	0.4982665	0.5089096	0.4973224	
		IMSE	0.003938364	0.004793764	0.003238147	0.01107647	
	XG3D	1	1.294053	1.315746	1.516886	1.336842	$\hat{S}$ MLE
		0.3708009	0.4769446	0.4839523	0.5438033	0.4906606	
		IMSE	0.01302011	0.01478958	0.03442669	0.01658803	
	LD	1	1.031534	1.031534	1.00443	1.02973	$\hat{S}$ PER
		0.4995509	0.4940765	0.4940765	0.5008923	0.4940487	

		IMSE	0.00393235	0.00393235	0.003244382	0.003480509	
	EXP	1	1.05149	1.05149	1.010911	1.041987	$\hat{S}$ BAY
		0.5007525	0.4942115	0.4942115	0.5034508	0.4953515	
		IMSE	0.00365107	0.00365107	0.004283667	0.002971598	
50	XG	1	1.01288	1.011593	0.9985609	1.012613	$\hat{S}$ BAY
		0.4999777	0.4972812	0.4979977	0.5023507	0.4973016	
		IMSE	0.001554441	0.001559862	0.00201225	0.00149625	
	XG1D	1	0.9847681	0.9847679	1.289714	0.9922489	$\hat{S}$ BAY
		0.5045411	0.4999169	0.50004	0.5471626	0.5013086	
		IMSE	0.000751825	0.00106476	0.002834131	0.0007237652	
	XG2D	1	1.010142	0.9994652	0.9879861	0.9980173	$\hat{S}$ MLE
		0.4941066	0.4934746	0.496713	0.497553	0.4959559	
		IMSE	0.0007832887	0.001058425	0.0008968719	0.0009254465	
	XG3D	1	0.9976015	0.9981264	1.300397	1.01368	$\hat{S}$ BAY
		0.5012275	0.499217	0.4995433	0.5974858	0.5051148	
		IMSE	0.001420447	0.001488489	0.01218867	0.001415608	
	LD	1	1.009268	1.009268	0.9917359	1.009554	$\hat{S}$ PER
		0.4988233	0.4980448	0.4980448	0.5031532	0.4978397	
		IMSE	0.001705563	0.001705563	0.001536009	0.001629285	
	EXP	1	1.018877	1.018877	0.9924218	1.01736	$\hat{S}$ BAY
		0.5012358	0.4989847	0.4989847	0.5055069	0.4991661	
		IMSE	0.00147368	0.00147368	0.001863387	0.001359466	
80	XG	1	1.008404	1.007538	0.997373	1.008343	$\hat{S}$ BAY
		0.4998389	0.4981312	0.4985835	0.5020893	0.4981219	
		IMSE	0.001009918	0.00102453	0.001216332	0.0009864472	
	XG1D	1	1.003711	1.001506	1.303816	1.008411	$\hat{S}$ BAY
		0.5008639	0.5000077	0.5001664	0.5456144	0.5008553	
		IMSE	0.0004670886	0.000492860	0.002899297	0.0004612739	
	XG2D	1	1.021732	1.019678	1.000431	1.011697	$\hat{S}$ MLE
		0.5006926	0.4976492	0.4989957	0.5015089	0.4995083	
		IMSE	0.0005477964	0.000728571	0.000607119	0.0005774587	
	XG3D	1	1.001966	1.002519	9.171033	1.012033	$\hat{S}$ MLE
		0.4990341	0.4988549	0.4991837	0.5054271	0.5025405	
		IMSE	0.0009106496	0.000923926	0.001849301	0.0009179577	
	LD	1	1.006805	1.006805	0.9948728	1.00711	$\hat{S}$ PER
		0.4995849	0.4985432	0.4985432	0.5021204	0.4984024	
		IMSE	0.0009625362	0.000962536	0.000954062	0.0009361091	
	EXP	1	1.011065	1.011065	0.9955182	1.010469	$\hat{S}$ BAY
		0.4992408	0.4981073	0.4981073	0.5020432	0.4981745	
		IMSE	0.0009677838	0.000967783	0.001285978	0.0009201888	

100	XG	1	1.003654	1.002944	0.9952325	1.003671	$\hat{S}$ BAY
		0.498844	0.4984572	0.4988406	0.5015135	0.4984331	
		IMSE	0.000725833	0.000734995	0.000959875	0.000712289	
	XG1D	1	0.9944964	0.9855858	1.305248	0.9982719	$\hat{S}$ BAY
		0.505366	0.5030526	0.5018316	0.5500999	0.5037358	
		IMSE	0.000434471	0.000501349	0.002846897	0.0004273366	
	XG2D	1	1.010779	1.012146	0.9930893	1.001627	$\hat{S}$ BAY
		0.500671	0.4993821	0.4998774	0.50259	0.5010142	
		IMSE	0.000458588	0.000552074	0.000474512	0.0004510646	
	XG3D	1	0.99489	0.9941559	1.28943	1.002957	$\hat{S}$ BAY
		0.503774	0.5011951	0.5010244	0.596258	0.5041336	
		IMSE	0.000657657	0.000664035	0.01097277	0.0006454498	
	LD	1	1.008727	1.008727	0.9971461	1.008961	$\hat{S}$ PER
		0.501285	0.4993913	0.4993913	0.5028852	0.4992864	
		IMSE	0.000820545	0.000820545	0.000690908	0.0008025457	
	EXP	1	1.008111	1.008111	0.9950111	1.007769	$\hat{S}$ BAY
		0.499392	0.4985079	0.4985079	0.5017981	0.4985477	
		IMSE	0.000691918	0.000691918	0.000893461	0.0006648861	

يتضح من الجدول (3-3) مايأتي:

a) عند حجم عينة (10) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.003120486) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.003240137)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.005116644)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.005317682)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.005628798)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.006527469).

b) عند حجم عينة (20) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.002325781) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.002971598)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG2D) بقيمة (0.003238147)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.003244382)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.003921548)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.01302011).

c) عند حجم عينة (50) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.0007237652) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0007832887)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة

(0.001359466)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.001415608)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.00149625)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.001536009).

d) عند حجم عينة (80) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.0004612739) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0005774587)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG3D) بقيمة (0.0009179577)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.0009201888)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.0009361091)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.0009864472).

e) عند حجم عينة (100) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.0004273366) يأتيه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0004510646)، يأتيه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG3D) بقيمة (0.0006454498)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.0006648861)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.000712289)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.000690908).

ويمكن رسم الشكل البياني لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الثانية بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات المدروسة وعند حجوم العينات (10,20,50,80,100) كما مبين في الاشكال في الملحق (A).

3- التجربة الثالثة: في هذه التجربة يتم افتراض قيمة المعلمة θ=5 للنماذج المدروسة وكما مبين في الجدول (4-3)

جدول (4-3) مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=5

n	Model	θ	$\hat{\theta}$mle	$\hat{\theta}$mom	$\hat{\theta}$per	$\hat{\theta}$Bay	Best Method
10	XGD	5	5.434126	5.426155	0.7896803	5.024359	$\hat{S}$ BAY
		S real	$\hat{S}$ mle	$\hat{S}$ mom	$\hat{S}$ per	$\hat{S}$ BAY	
		0.4975784	0.4869227	0.4874187	0.9002261	0.4997731	
		IMSE	0.007918487	0.008003676	0.2499864	0.00220847	
	XG1D	5	5.215166	5.271982	6.706005	4.86339	$\hat{S}$ BAY
		0.4982206	0.4943071	0.4973764	0.5471378	0.4849867	
		IMSE	0.006679315	0.005809417	0.006917393	0.00475411	
	XG2D	5	4.849746	5.267983	1.891268	5.587388	$\hat{S}$ MOM
		0.5007694	0.5162514	0.4950024	0.7279037	0.4747603	
		IMSE	0.0201164	0.008062803	0.08504267	0.02290965	
	XG3D	5	4.926357	4.93359	6.386699	5.033546	$\hat{S}$ BAY
		0.5067585	0.4934026	0.4951495	0.6104418	0.5041995	
		IMSE	0.007052404	0.007035052	0.0161799	0.005452689	
	LD	5	5.399494	5.399494	4.655591	4.999417	$\hat{S}$ BAY
		0.4950631	0.4862534	0.4862534	0.5297154	0.4984916	
		IMSE	0.008186315	0.008186315	0.01115765	0.003086262	
	EXP	5	5.450326	5.450326	5.182139	5.161049	$\hat{S}$ BAY
		0.4949617	0.486179	0.486179	0.4977319	0.4922221	
		IMSE	0.0077338	0.0077338	0.008732608	0.003137519	
The best model according to IMSE							XG1D
20	XG	5	5.2368	5.231177	0.4603924	5.152539	$\hat{S}$ BAY
		0.5017865	0.4941261	0.4944382	0.9484941	0.4966055	
		IMSE	0.003667485	0.003679841	0.2901045	0.002299308	
	XG1D	5	5.003431	5.039062	6.496726	4.879238	$\hat{S}$ BAY
		0.4945903	0.4873155	0.4890982	0.5412017	0.4839065	
		IMSE	0.004238076	0.003887233	0.005164432	0.003537436	
	XG2D	5	5.06876	5.131261	2.073669	5.428052	$\hat{S}$ MLE
		0.4995045	0.4977214	0.4964523	0.7158622	0.4757471	
		IMSE	0.004158259	0.004203805	0.08359606	0.005905465	
	XG3D	5	5.030062	5.033574	6.588809	5.08147	$\hat{S}$ BAY
		0.4972734	0.4951833	0.49594	0.6146704	0.5001411	
		IMSE	0.004437859	0.004506238	0.01951155	0.003952811	

	LD	5	5.182538	5.182538	4.519271	5.112548	$\hat{S}$ BAY
		0.4971252	0.4929914	0.4929914	0.5329712	0.4945315	
		IMSE	0.003826256	0.003826256	0.006366154	0.002385039	
	EXP	5	5.24185	5.24185	5.056516	5.145419	$\hat{S}$ BAY
		0.4983847	0.493214	0.493214	0.5015381	0.4953327	
		IMSE	0.003816775	0.003816775	0.004459505	0.002367996	
The best model according to IMSE							XG1D
50	XG	5	5.082211	5.080838	0.1816031	5.073462	$\hat{S}$ BAY
		0.5005785	0.4982779	0.4983546	0.9826973	0.4984212	
		IMSE	0.001481615	0.001488252	0.3205461	0.001265553	
	XG1D	5	4.996303	5.006862	6.456929	4.96421	$\hat{S}$ BAY
		0.4995156	0.4974891	0.4969896	0.547102	0.4974389	
		IMSE	0.001202138	0.001124608	0.00356636	0.001118989	
	XG2D	5	5.050899	5.048531	2.450322	5.187759	$\hat{S}$ MLE
		0.4997756	0.4975292	0.4986164	0.6887616	0.4887109	
		IMSE	0.001349599	0.001537382	0.07517342	0.001648739	
	XG3D	5	4.931148	4.93503	6.480314	4.954547	$\hat{S}$ Bay
		0.5060231	0.4983671	0.4988325	0.6169994	0.5005217	
		IMSE	0.002264709	0.002316578	0.01668678	0.002135397	
	LD	5	5.112338	5.112338	4.498524	5.102368	$\hat{S}$ BAY
		0.5018417	0.4981677	0.4981677	0.5351127	0.4983119	
		IMSE	0.001618976	0.001618976	0.003286976	0.001371388	
	EXP	5	5.088361	5.088361	4.986978	5.071078	$\hat{S}$ BAY
		0.4990417	0.4972008	0.4972008	0.5021581	0.4975895	
		IMSE	0.001556056	0.001556056	0.001891424	0.00127889	
The best model according to IMSE							XG1D
80	XG	5	5.047978	5.046932	0.09291821	5.045836	$\hat{S}$ BAY
		0.4995946	0.4983056	0.4983629	0.9910346	0.4982909	
		IMSE	0.0009246311	0.000925172	0.3275369	0.00084049	
	XG1D	5	4.970869	4.974439	6.463814	4.953177	$\hat{S}$ BAY
		0.4996733	0.4971308	0.4972847	0.5477861	0.4965269	
		IMSE	0.0007992157	0.000775934	0.003366018	0.00076756	
	XG2D	5	5.032811	5.03255	3.10668	5.116951	$\hat{S}$ MLE
		0.5003245	0.4988544	0.4994753	0.6493362	0.4933645	
		IMSE	0.0008463158	0.000976778	0.05919701	0.00096414	
	XG3D	5	4.953764	4.965808	6.507115	4.968311	$\hat{S}$ BAY
		0.5012088	0.4960259	0.4972089	0.6159046	0.4973572	
		IMSE	0.00125774	0.001252139	0.01651265	0.00121039	
	LD	5	5.052303	5.052303	4.485233	5.05101	$\hat{S}$ BAY
		0.4996211	0.498259	0.498259	0.5328723	0.4981746	

		IMSE	0.001020651	0.001020651	0.00266391	0.00092392	
	EXP	5	5.094147	5.094147	5.018106	5.084713	$\hat{S}$ BAY
		0.5009678	0.4979096	0.4979096	0.5016739	0.498183	
		IMSE	0.0009769658	0.000976965	0.001207842	0.0008622	
The best model according to IMSE							XG1D
100	XG	5	5.053385	5.052163	0.04388787	5.051957	$\hat{S}$ BAY
		0.500506	0.4985651	0.4986364	0.9958338	0.4985615	
		IMSE	0.0007201055	0.000723670	0.3297894	0.000667556	
	XG1D	5	5.070869	5.069828	6.60041	5.055179	$\hat{S}$ BAY
		0.498904	0.5002544	0.5001432	0.55103	0.4997194	
		IMSE	0.0005984925	0.000628843	0.003601722	0.000575182	
	XG2D	5	5.019285	5.013858	3.401519	5.085871	$\hat{S}$ MLE
		0.498914	0.4981753	0.4989987	0.6141152	0.4938046	
		IMSE	0.0007473025	0.000825859	0.04594446	0.000820875	
	XG3D	5	5.024941	5.024732	6.482824	5.036134	$\hat{S}$ BAY
		0.497586	0.4990284	0.499127	0.609523	0.5000163	
		IMSE	0.0007330758	0.000746546	0.01578649	0.000721083	
	LD	5	5.07194	5.07194	4.512791	5.070751	$\hat{S}$ BAY
		0.501263	0.4983035	0.4983035	0.532313	0.4982783	
		IMSE	0.0007653397	0.000765339	0.002177958	0.000707143	
	EXP	5	5.052812	5.052812	4.971598	5.047845	$\hat{S}$ BAY
		0.500804	0.4995244	0.4995244	0.5035367	0.4996449	
		IMSE	0.0007639846	0.000763984	0.000958323	0.000691849	
The best model according to IMSE							XG1D

يتضح من الجدول (3-4) مايأتي:

a) عند حجم عينة (10) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.00220847) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.003086262)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.003137519)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG1D) بقيمة (0.00475411)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.005452689)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.008062803).

b) عند حجم عينة (20) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.002299308) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.002367996)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (LD) بقيمة (0.002385039)، ومن

ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG1D) بقيمة (0.003537436)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.004158259)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.003952811).

c) عند حجم عينة (50) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.001118989) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.001265553)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.00127889)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.001349599)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.001371388)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.002135397).

d) عند حجم عينة (80) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.00076756) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.00084049)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.0008622)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0008463158)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.00092392)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.00121039).

e) عند حجم عينة (100) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000575182) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.000667556)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.000691849)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.000707143)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.000721083)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0007473025).

ويمكن رسم الشكل البياني لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الثالثة بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات المدروسة وعند حجوم العينات (10,20,50,80,100) كما مبين في الاشكال في الملحق (B).

4- التجربة الرابعة: في هذه التجربة يتم افتراض قيمة المعلمة θ=10 للنماذج المدروسة، وكما مبين في الجدول (5-3)

جدول (5-3) مقدرات المعلمة ودالة البقاء بطرائق التقدير الأربعة للنماذج الاحتمالية الستة ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) عند احجام العينات المفترضة (n=10,20,50,80,100) عند القيمة الافتراضية للمعلمة θ=10

n	Model	θ	$\hat{\theta}$mle	$\hat{\theta}$mom	$\hat{\theta}$per	$\hat{\theta}$Bay	Best Method
10	XGD	10	10.92052	10.92731	0.06831195	9.959206	$\hat{S}$ BAY
		S real	$\hat{S}$ mle	$\hat{S}$ mom	$\hat{S}$ per	$\hat{S}$ BAY	
		0.49928	0.4883308	0.4880272	0.9959557	0.5032447	
		IMSE	0.007751817	0.007799245	0.3307882	0.001972461	
	XG1D	10	10.20773	10.22276	13.11187	6.014252	$\hat{S}$ MLE
		0.5010563	0.4963383	0.4962422	0.5530176	0.3990856	
		IMSE	0.004500733	0.004516821	0.006052138	0.01336691	
	XG2D	10	10.00067	11.82745	1.622647	11.27954	$\hat{S}$ MLE
		0.5625964	0.5625747	0.5090083	0.8776875	0.5238864	
		IMSE	0.00460611	0.00464515	0.1616005	0.00467553	
	XG3D	10	9.972062	9.993491	11.59604	7.702608	$\hat{S}$ MOM
		0.5003451	0.4906329	0.4923089	0.5987303	0.24654	
		IMSE	0.009248879	0.009212459	0.009833753	0.01245062	
	LD	10	11.12323	11.12323	9.88873	9.988717	$\hat{S}$ BAY
		0.5007076	0.4856508	0.4856508	0.5182563	0.5038828	
		IMSE	0.00838984	0.00838984	0.01027857	0.002843653	
	EXP	10	11.00615	11.00615	10.43587	10.39204	$\hat{S}$ BAY
		0.4978208	0.4872682	0.4872682	0.4989712	0.4937801	
		IMSE	0.007586012	0.007586012	0.008299265	0.003106658	
The best model according to IMSE							XG1D
20	XG	10	10.35759	10.36052	0.1277076	10.1881	$\hat{S}$ BAY
		0.4972418	0.4936876	0.4935311	0.9915513	0.4956995	
		IMSE	0.00358113	0.003593618	0.3280729	0.00212726	
	XG1D	10	10.44277	10.41015	13.26817	6.357579	$\hat{S}$ MOM
		0.4936516	0.4996628	0.498726	0.5525663	0.4005495	
		IMSE	0.002037245	0.002028281	0.005349492	0.01016333	
	XG2D	10	8.302106	8.60265	1.316607	8.539074	$\hat{S}$ MOM
		0.4557713	0.5279024	0.5143304	0.8511247	0.5171738	
		IMSE	0.006618126	0.004355444	0.2035445	0.004790092	
	XG3D	10	10.50772	10.55257	13.73015	8.834777	$\hat{S}$ MLE
		0.4723285	0.4911729	0.4934439	0.6143835	0.4142901	
		IMSE	0.004843864	0.004925594	0.02524563	0.006373462	
		10	10.50725	10.50725	9.444895	10.29796	

	LD	0.499907	0.4929137	0.4929137	0.5224097	0.4956729	$\hat{S}$ BAY
		IMSE	0.003868116	0.003868116	0.005574974	0.002241427	
	EXP	10	10.49721	10.49721	10.15168	10.30701	$\hat{S}$ BAY
		0.4985985	0.4928745	0.4928745	0.5006549	0.4950742	
		IMSE	0.00378642	0.00378642	0.004257071	0.002366898	
The best model according to IMSE							XG1D
50	XG	10	10.18924	10.19219	0.0775134	10.16317	$\hat{S}$ BAY
		0.4986621	0.4960949	0.4959763	0.9948203	0.496355	
		IMSE	0.001515516	0.001518007	0.3288955	0.001259305	
	XG1D	10	10.00977	10.00141	10.311	8.577149	$\hat{S}$ MLE
		0.4992245	0.4966195	0.4962928	0.5013601	0.4656393	
		IMSE	0.001603798	0.001604432	0.002034058	0.002138159	
	XG2D	10	9.519415	9.546993	1.404724	9.618006	$\hat{S}$ BAY
		0.4986728	0.5165916	0.5155446	0.8593033	0.5128593	
		IMSE	0.003954302	0.003505602	0.1799201	0.002478312	
	XG3D	10	10.03694	10.03083	13.02531	9.439546	$\hat{S}$ MLE
		0.4975441	0.4977267	0.4975688	0.614325	0.4704009	
		IMSE	0.001801577	0.001806832	0.01772708	0.002352114	
	LD	10	10.20192	10.20192	9.303002	10.17685	$\hat{S}$ BAY
		0.5001691	0.4972455	0.4972455	0.5226976	0.4974739	
		IMSE	0.001570839	0.001570839	0.002735925	0.001303861	
	EXP	10	10.21135	10.21135	9.98244	10.17255	$\hat{S}$ BAY
		0.500521	0.4979324	0.4979324	0.5036237	0.4983995	
		IMSE	0.001620535	0.001620535	0.002005685	0.001330546	
The best model according to IMSE							XG1D
80	XG	10	10.14414	10.14555	0.1111604	10.13555	$\hat{S}$ BAY
		0.5004998	0.4980249	0.4979638	0.9925104	0.4981054	
		IMSE	0.0008699203	0.0008711217	0.3248285	0.000779588	
	XG1D	10	9.99609	9.989372	10.22357	9.125055	$\hat{S}$ MLE
		0.4995558	0.4977277	0.4974853	0.5015681	0.4790869	
		IMSE	0.0009689882	0.0009739017	0.00125593	0.001157544	
	XG2D	10	9.362532	9.440244	1.356583	9.454019	$\hat{S}$ BAY
		0.5052236	0.5291435	0.5261738	0.8602049	0.5256489	
		IMSE	0.007268447	0.005575841	0.1719666	0.005299994	
	XG3D	10	10.09395	10.09626	13.08891	9.717647	$\hat{S}$ MLE
		0.4958192	0.4990759	0.4992536	0.6150099	0.4819857	
		IMSE	0.001050297	0.001060291	0.01794747	0.001151467	
	LD	10	10.17279	10.17279	9.311592	10.16374	$\hat{S}$ BAY
		0.5014143	0.4982862	0.4982862	0.5226174	0.4983637	
		IMSE	0.0008995646	0.0008995646	0.00178165	0.000803358	

	EXP	10	10.08701	10.08701	9.910447	10.07423	$\hat{S}$ BAY
		0.4991362	0.4987246	0.4987246	0.5030615	0.4988413	
		IMSE	0.0009644138	0.0009644138	0.00116764	0.000851793	
The best model according to IMSE							XG1D
100	XG	10	10.13748	10.13793	0.1119696	10.13162	$\hat{S}$ BAY
		0.5010325	0.4985639	0.4985346	0.9925966	0.4986169	
		IMSE	0.000743812	0.0007442967	0.3245902	0.000681711	
	XG1D	10	10.17831	10.20809	13.26126	9.462529	$\hat{S}$ MLE
		0.5062169	0.5094974	0.5100365	0.5648673	0.4945782	
		IMSE	0.000305912	0.0003228728	0.00435981	0.000379931	
	XG2D	10	9.167439	9.442967	1.420094	9.238005	$\hat{S}$ MOM
		0.491651	0.5222317	0.511851	0.8577706	0.5195482	
		IMSE	0.001209505	0.0005280426	0.1883092	0.001006686	
	XG3D	10	9.891159	9.884403	13.01012	9.60454	$\hat{S}$ MLE
		0.5053399	0.4997919	0.4995571	0.621363	0.4866343	
		IMSE	0.000710313	0.0007143002	0.01673963	0.000934097	
	LD	10	10.04948	10.04948	9.223631	10.04856	$\hat{S}$ BAY
		0.4985746	0.4984389	0.4984389	0.5220095	0.4983581	
		IMSE	0.000751900	0.0007519006	0.00171053	0.000687932	
	EXP	10	10.05463	10.05463	9.9098	10.04686	$\hat{S}$ BAY
		0.4989742	0.4989552	0.4989552	0.5026317	0.4990188	
		IMSE	0.000804913	0.0008049132	0.00100995	0.000728702	
The best model according to IMSE							XG1D

يتضح من الجدول (3-5) مايأتي:

a) عند حجم عينة (10) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.001972461) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.002843653)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.003106658)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG1D) بقيمة (0.004500733)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.00460611)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.009212459).

b) عند حجم عينة (20) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.002028281) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG) بقيمة (0.00212726)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (LD) بقيمة (0.002241427)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.002366898)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.004355444)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.004843864).

c) عند حجم عينة (50) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.001259305) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.001303861)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.001330546)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG1D) بقيمة (0.001603798)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.001801577)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.002478312).

d) عند حجم عينة (80) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000779588) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.000803358)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (EXP) بقيمة (0.000851793)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG1D) بقيمة (0.0009689882)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.001050297)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.005299994).

e) عند حجم عينة (100) كانت افضل طريقة تقدير لدالة البقاء بشكل عام عند معظم التوزيعات هي طريقة بيز القياسية وكان افضل تقدير لدالة البقاء عند النموذج (XG1D) لانه حقق اقل قيمة خطأ تكاملي مقارنة بباقي النماذج إذ كانت (0.000305912) يليه تقدير دالة بقاء نموذج (XG2D) بقيمة (0.0005280426)، يليه تقدير دالة البقاء للنموذج (XG) بقيمة (0.000681711)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (LD) بقيمة (0.000687932)، ومن ثم تقدير دالة بقاء نموذج (XG3D) بقيمة (0.000710313)، وأخيرا تقدير دالة بقاء نموذج (EXP) بقيمة (0.000728702).

ويمكن رسم الشكل البياني لدوال البقاء المقدرة لتجربة المحاكاة الرابعة بطرائق التقدير الأربعة ولجميع التوزيعات المدروسة وعند حجوم العينات (10,20,50,80,100) كما مبين في الاشكال في الملحق (C).

ويمكن تلخيص نتائج تجارب المحاكاة المبينة في الجداول من (3-2) الى (3-5) كم مبين في الجدول (3-6) الذي يبين عدد مرات ونسب الأفضلية لطرق التقدير لكل نموذج احصائي.

جدول (3-6) عدد مرات ونسب افضلية لكل طريقة من طرائق التقدير حسب معيار (IMSE)

Mathod / n	Model	n=10	n=20	n=50	n=80	n=100	المجموع	نسبة الأفضلية بالنسبة للنماذج
MLE	XG	0	0	0	0	0	0	0
	XG1D	1	1	1	1	1	5	4.16
	XG2D	2	1	2	2	1	8	6.6

	XG3D	1	3	1	2	2	9	7.5
	LD	0	0	0	0	0	0	0
	EXP	0	0	0	0	0	0	0
المجموع		4	5	4	5	4	22	//////
نسبة الافضلية		%18.2	%22.7	%18.2	%22.7	%18.2	%18.34	//////
MOM	XG	0	0	0	0	0	0	0
	XG1D	0	0	0	0	0	0	0
	XG2D	1	1	0	0	1	3	2.5
	XG3D	1	0	1	1	0	3	2.5
	LD	0	0	0	0	0	0	0
	EXP	0	0	0	0	0	0	0
المجموع		2	1	1	1	1	6	//////
نسبة الافضلية		%33.3	%16.7	%16.7	%16.7	%16.7	%5	//////
PER	XG	0	0	0	0	0	0	0
	XG1D	0	0	0	0	0	0	0
	XG2D	1	2	0	0	0	3	2.5
	XG3D	0	0	0	0	0	0	0
	LD	0	1	1	1	1	4	3.3
	EXP	0	0	0	0	0	0	0
المجموع		1	3	1	1	1	7	//////
نسبة الافضلية		%14.3	%42.86	%14.3	%14.3	%14.3	%5.8	//////
BAY	XG	4	4	4	4	4	20	16.6
	XG1D	3	3	3	3	3	15	12.5
	XG2D	0	0	2	2	2	6	5
	XG3D	2	1	2	1	2	8	6.6
	LD	4	3	3	3	3	16	13.3
	EXP	4	4	4	4	4	20	16.67
المجموع		17	15	18	17	18	85	//////
نسبة الافضلية		%20	%17.65	%21.18	%20	%21.18	%71	//////

من الجدول (3-7) يتضح مايأتي:

أ- حققت طريقة الإمكان الأعظم نسبة افضلية (7.5%) عند التوزيع (XG3D)، يأتيها (6.6%) عند التوزيع (XG2D)، وأخيرا نسبة (4.16%) عند التوزيع (XG1D)، ولم يحقق أي افضلية بالتوزيعات الأخرى؛ وبالمقارنة مع طرائق التقدير نجد انها حققت نسبة افضلية 18.34% من بين الطرق.

ب- حققت طريقة العزوم نسبة افضلية (2.5%) عند التوزيع (XG2D)، يأتيها (2.5%) عند التوزيع (XG3D)، ولم يحقق أي افضلية بالتوزيعات الأخرى؛ وبالمقارنة مع طرائق التقدير نجد انها حققت نسبة افضلية 5% من بين الطرق.

ت-حققت الطريقة التجزيئية نسبة افضلية (3.3%) عند التوزيع (LD)، يأتيها (2.5%) عند التوزيع (XG2D)، ولم يحقق أي افضلية بالتوزيعات الأخرى؛ وبالمقارنة مع طرائق التقدير نجد انها حققت نسبة افضلية 5.8% من بين الطرق.

ث- حققت طريقة بيز القياسية نسبة افضلية (16.67%) عند التوزيع (XG) وتوزيع (EXP)، يأتيها (13.3%) عند التوزيع (LD)، يأتيها (12.5%) عند التوزيع (XG1D)، يأتيها (6.6%) عند التوزيع (XG3D)، وأخيرا نسبة (5 %) عند التوزيع (XG2D) ؛ وبالمقارنة مع طرائق التقدير نجد انها حققت نسبة افضلية 71% من بين الطرق.

الفصل الرابع
الجانب التطبيقي

المبحث الأول – مرض كورونا.

المبحث الثاني – البيانات الحقيقية.

المبحث الثالث – اختبار حسن المطابقة للبيانات.

المبحث الرابع – المقارنة بين توزيع XG1D وباقي التوزيعات.

المبحث الخامس – تحليل البيانات الحقيقية.

سيتضمن هذا الفصل استخدام بيانات حقيقية تمثل أوقات البقاء (بالايام) حتى الوفاة او الشفاء لمرضى كورونا الراقدين في مستشفى الامل للامراض الانتقالية في محافظة النجف الاشرف وبعدد (61) مريضاً للمدة من (2022/2/1) الى (2022/2/28) لغرض اختبار النماذج المذكورة في الفصل الثاني من الرسالة والكشف عن أي منها يتعامل مع البيانات بشكل افضل وباستخدام طرق مقارنة مختلفة وباستعمال طريقة تقدير بيز القياسية.

1.4 مرض كورونا Corona Vires (COVD19)

(كوفيد-19) هو من الامراض الفايروسية ذات العدوى الشديدية بين البشر، ويعد الفايروس المسؤول عن هذه العدوى هو فيروس كورونا-سارس-2.

إذ تظهر بعض الأعراض التنفسية التي تكون ما بين المتوسطة والخفيفة على اغلب الذين تمت اصابتهم بعدوى هذا الفيروس ويتم الشفاء في اغلب الحالات من دون علاج خاص. لكن في بعض الحالات تظهر اعراض شديدة على المصابين بالفيروس مما يدعو الى الحاجة للعناية الطبية. كما ان الأكثر عرضة من المصابين للاعراض الشديدة الذين يكونون قد أصيبوا سابقا بأمراض مزمنة، مثل مرض السكر وتصلب الشرايين وارتفاع ضغط الدم والمشاكل التنفسية والمصابون بالاورام السرطانية وغيرها. مع ذلك فان أي انسان يكون عرضة للإصابة بالمضاعفات الشديدة التي تصل الى الوفاة بسبب هذا المرض، مهما كان عمره.

ومن الطرق المهمة للوقاية من COVD19 والتقليل من انتقاله بين البشر هي معرفة الطريقة التي ينتشر بها المرض و الإحاطة بخصائص هذا الفيروس. وللحماية من الفيروس اتباع الارشادات الوقائية مثل التباعد، ارتداء كمامة طبية، وغسل الايدي أو تعقيمهما بمعقم كحولي. والاهم من هذا كله هو تلقي جرعات اللقاح بشكل كامل ليتم القضاء على هذا الفيروس بشكل نهائي.

ومن اهم طرق انتشار العدوى عن طريق الرذاذ المتطاير من انف او فم المصابين في حالات السعال أو العطاس أو عند التحدث أو من جراء التنفس الطبيعي. ومن الواجبات على المصابين البقاء في البيت او المستشفى الخاص بالامراض الانتقالية إلى حين الشفاء الكامل.(Organization, 2020a) (Organization, 2020b)

2.4 البيانات الحقيقية Real Data

تم اخذ البيانات عن المرضى المصابين بفيروس كورونا من مستشفى الامل للامراض الانتقالية في محافظة النجف الاشرف، والتي مثلت أوقات البقاء حتى الوفاة او الشفاء (بالايام) للمرضى الراقدين بالمستشفى وبعدد (61) مريضا وللفترة من (2022/2/1) الى (2022/2/28) وتم تقريب أوقات البقاء الى اقرب عدد صحيح من الأيام وذلك لعدم توفر بيانات عن ساعات البقاء من دون مبيت (لا يحسب للمريض يوم طالما لم يتم مبيته ليلة). وكما مبين في الجدول (4-1).

جدول (4-1) أوقات البقاء (بالايام) حتى الوفاة او الشفاء للمرضى الراقدين في مستشفى الامل في محافظة النجف الاشرف وللفترة من (2022/2/1) الى (2022/2/28)

NO.	t_i	NO.	t_i	NO.	t_i	NO.	t_i	NO.	t_i	NO.	t_i
1	4	12	1	23	1	34	17	45	1	56	4
2	3	13	16	24	1	35	6	46	7	57	5
3	3	14	15	25	6	36	4	47	6	58	19
4	7	15	9	26	15	37	3	48	1	59	1
5	5	16	10	27	3	38	6	49	8	60	1
6	7	17	24	28	44	39	6	50	7	61	4
7	1	18	3	29	3	40	8	51	7		
8	6	19	10	30	3	41	3	52	9		
9	2	20	3	31	7	42	12	53	3		
10	3	21	1	32	7	43	11	54	3		
11	22	22	9	33	1	44	6	55	5		

3.4 اختبار حسن المطابقة للبيانات

لاختبار البيانات في الجدول (4-1) فيما اذا كانت تتوزع توزيع (XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP) ام انها بيانات عشوائية يتم استعمال اختبار مربع كاي وكما تم ذكره في الفقرة (9.2.2) من الجانب النظري.

H_0: البيانات تتوزع توزيع احد التوزيعات المذكورة.

H_1: البيانات لا تتوزع توزيع معين.

ولاختبار الفرضية أعلاه يتم حساب قيمة مربع كاي (X^2) وحسب الصيغة (2-206) والمذكورة في الجانب النظري وباستخدام لغة R البرمجية.

حيث تم بيان نتائج الاختبار في الجدول (4-2):

جدول (4-2) نتائج اختبار مربع كاي للبيانات الحقيقية

Distribution	df	X_c^2	X_t^2	α	Sig.	Decision
XG, XG1D, XG2D, XG3D, LD, EXP	4	0.39344	9.49	0.05	0.983	Accept H_0

من جدول (4-2) نلاحظ ان قيمة احصائة اختبار مربع كاي المحسوبة اصغر من قيمة احصائة اختبار مربع كاي الجدولية تحت مستوى معنوية (0.05)، كذلك قيمة (Sig.) او (P-value) كانت اكبر من مستوى المعنوية. مما يعني قبول فرضية العدم والتي نصت على ان البيانات تتوزع احد التوزيعات المذكورة.

4.4 المقارنة بين التوزيعات

في هذه الفقرة سيتم المقارنة بين التوزيع المستخدمة XG، XG1D، XG2D، XG3D، LD، EXP باستخدام معايير المقارنة (AIC, AICc, BIC) من اجل معرفة أي توزيع من هذه التوزيعات يوفر ملاءمة افضل للبيانات الحقيقية المستخدمة. وقد بينت نتائج المقارنة في الجدول (4-3).

جدول (4-3) نتائج المقارنة بين التوزيعات

Distribution	AIC	AICc	BIC
XGD	367.9931	365.027	367.7789
XG1D	360.1911	358.225	359.9764
XG2D	366.2431	364.277	366.0281
XG3D	368.1015	366.1354	367.8865
LD	362.9537	360.9876	362.7391
EXP	366.6864	364.7203	366.4717

من الجدول (4-3) نلاحظ ان توزيع XG1D امتلك اقل معايير مقارنة بين التوزيعات الأخرى ويليه توزيع LD من ثم توزيع LD بعد ذلك توزيع XG2D وتلاه توزيع EXP وأخيرا كان توزيع XG3D، مما يعني ان توزيع XG1D قد مثل البيانات بصورة افضل من باقي التوزيعات المستخدمة.

5.4 تحليل البيانات الحقيقية

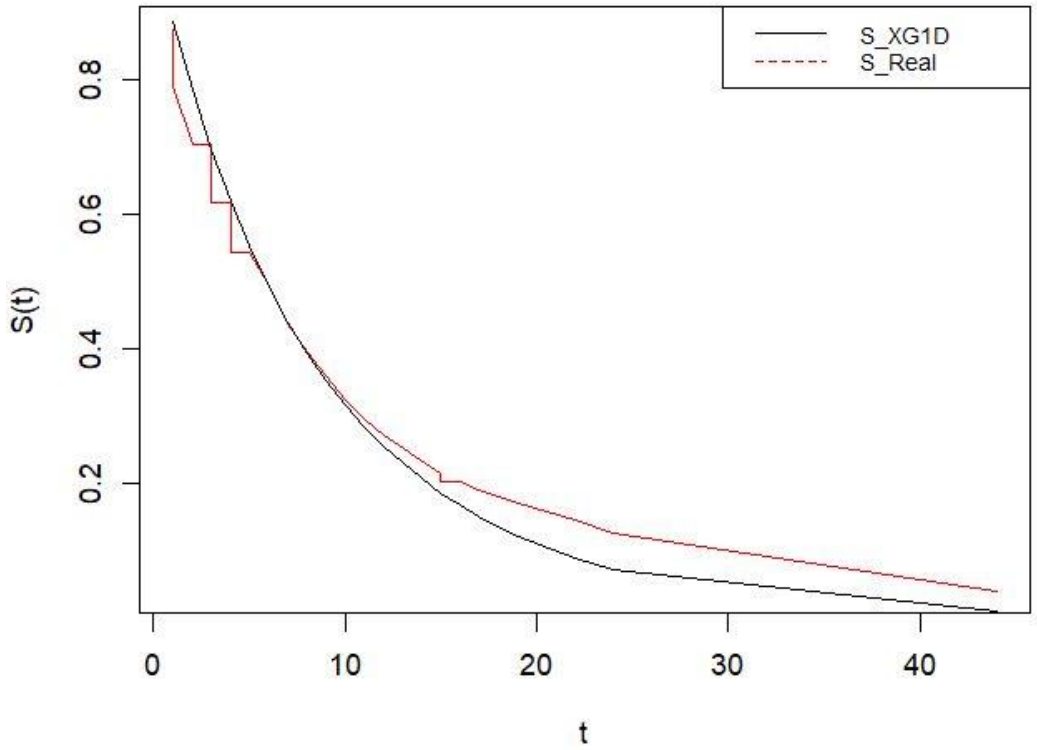
في هذا المبحث سوف تتم مقارنة نتائج تقدير دالة البقاء باستخدام التوزيع المقترح XG1D والمقدر بطريقة بيز القياسية مع دالة البقاء الحقيقية للبيانات المذكورة في الجدول (4-1). وسوف يتم عرض النتائج في جدول رقم (4-4).

جدول(4-4) مقارنة دالة البقاء الحقيقية مع دالة البقاء المقدرة لتوزيع XG1D

t_i	θ-Real	S-Real	θ-Bay	S-XG1D
4	0.3531739	0.6772333	0.3498433	0.6815410595
3		0.7618006		0.7651608280
3		0.7618006		0.7651608280
7		0.4291883		0.4350194208
5		0.5913124		0.5963799862
7		0.4291883		0.4350194208
1		0.9181687		0.9194155232
6		0.5076395		0.5132196856
2		0.8419855		0.8443039710
3		0.7618006		0.7651608280
22		0.01226694		0.0130155631
1		0.9181687		0.9194155232
16		0.05966189		0.0621041312
15		0.07647867		0.0793607849

9		0.2949387		0.3005897829
10		0.2404337		0.2457456447
24		0.007045349		0.0075237779
3		0.7618006		0.7651608280
10		0.2404337		0.2457456447
3		0.7618006		0.7651608280
1		0.9181687		0.9194155232
9		0.2949387		0.3005897829
1		0.9181687		0.9194155232
1		0.9181687		0.9194155232
6		0.5076395		0.5132196856
15		0.7647867		0.0793607849
3		0.7618006		0.7651608280
44		0.00001813784		0.0000206827
3		0.7618006		0.7651608280
3		0.7618006		0.7651608280
7		0.4291883		0.4350194208
7		0.4291883		0.4350194208
1		0.9181687		0.9194155232
17		0.04630930		0.0483569498
6		0.5076395		0.5132196856
4		0.6772333		0.6815410595
3		0.7618006		0.7651608280
6		0.5076395		0.5132196856
6		0.5076395		0.5132196856
8		0.3579446		0.3637854224
3		0.7618006		0.7651608280
12		0.1554485		0.1598280655
11		0.1941464		0.1990198429
6		0.5076395		0.5132196856
1		0.9181687		0.9194155232
7		0.4291883		0.4350194208
6		0.5076395		0.5132196856
1		0.9181687		0.9194155232
8		0.3579446		0.3637854224
7		0.4291883		0.4350194208
7		0.4291883		0.4350194208
9		0.2949387		0.3005897829

3		0.7618006		0.7651608280
3		0.7618006		0.7651608280
5		0.5913124		0.5963799862
4		0.6772333		0.6815410595
5		0.5913124		0.5963799862
19		0.2752971		0.0289300723
1		0.9181687		0.9194155232
1		0.9181687		0.9194155232
4		0.6772333		0.6815410595



شكل رقم (4-1) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بتوزيع XG1D

من الجدول (4-4) والشكل (4-1) نلاحظ الآتي:

1- ان دالة البقاء متناقصة كلما ازداد الزمن، وهذا ما يتماشى مع سلوكها إذ انها بعلاقة عكسية مع الزمن.
2- ان توزيع XG1D قام بتقدير دالة بقاء المرضى بصورة جيدة جدا وقريبة جدا من دالة البقاء الحقيقية في جميع فترات البقاء .
3- من الرسم البياني لدالة البقاء الحقيقية ودالة البقاء المقدرة عن طريق نموذج Xgamm1 المقدر بطريقة بيز يتضح دقة التقدير بواسطة النموذج المقترح.

الفصل الخامس

الاستنتاجات والتوصيات

المبحث الأول – الاستنتاجات.

المبحث الثاني – التوصيات.

1.5 الاستنتاجات

من خلال ما تم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي توصلنا الى الاستنتاجات الآتية:

1- حققت طريقة تقدير بيز القياسية افضلية بلغت (16.67 %) عند التوزيع XG بالمقارنة مع باقي طرق التقدير الاخرى.
2- حققت طريقة تقدير بيز القياسية افضلية بلغت (12.5 %) عند التوزيع المقترح XG1D بالمقارنة مع باقي طرق التقدير الاخرى.
3- سجلت طريقة تقدير الإمكان الأعظم نسبة افضلية بلغت (7.5%) عند التوزيع XG3D بالمقارنة مع باقي طرق التقدير الاخرى.
4- سجلت طريقة تقدير العزوم نسبة افضلية بلغت (2.5%) عند التوزيع XG3D و التوزيع XG2D.
5- سجلت طريقة تقدير (Per) نسبة افضلية بلغت (3.3%) عند التوزيع LD.
6- كانت طريقة تقدير بيز القياسية هي الأفضل مقارنة بباقي الطرق المستخدمة ولجميع التوزيعات ولجميع احجام العينات المستخدمة.

كما بينت نتائج التطبيق العملي للبيانات الحقيقية:

1- التوزيع المقترح XG1D امتلك اقل معايير مفاضلة (AIC, AICc, BIC) مقارنة مع باقي التوزيعات عند استخدام البيانات الحقيقية، إذ مثل البيانات الحقيقية بصورة افضل من باقي التوزيعات المستخدمة.
4- التوزيع المقترح XG1D قام بتقدير دالة البقاء للمرضى بصورة جيدة جدا وقريبة جدا من دالة البقاء الحقيقية في جميع فترات البقاء. كما ان المنحني البياني لدالة البقاء المقدرة كان قريباً جدا من نظيره الحقيقي.

2.5 التوصيات

من خلال الأستنتاجات التي توصلنا اليها، نوصي بما يأتي:

1- يوصي الباحث باستخدام توزيع XG1D في تقدير دالة البقاء للمجنمعات المختلطة وبطريقة تقدير بيز القياسية.
2- يوصي الباحث بتطبيق البيانات الهندسية لدراسة دالة المعولية باستخدام توزيع XG1D.
3- يوصي الباحث بالتوسع في تقدير معلمة التوزيع المقترح XG1D عن طريق استخدام طرق أخرى مثل طريقة بيز الهرمية وبدوال خسارة أخرى مثل دالة خسارة الانتروبي العامة، لمعرفة سلوك مقدرات بيز في ظل وجود تلك الدوال.
4- يوصي الباحث باشتقاق توزيع XG1D بمعلمتين وتقدير دالة البقاء له عن طريق تقدير معالمه بالطرق الكلاسيكية والبيزية.
5- يوصي الباحث باشتقاق توزيع Quasi Xgamma1 distribution وتقدير دالة البقاء له عن طريق تقدير معالمه بالطرق الكلاسيكية والبيزية.
6- يوصي الباحث باشتقاق التوزيع الموزون للتوزيع XG1D وتقدير دالة البقاء له عن طريق تقدير معالمه بالطرق الكلاسيكية والبيزية.

المصادر

المصادر العربية:

العابدي، كرم ناصر (2021). التقدير البيزي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات مع تطبيق عملي [رسالة ماجستير غير منشورة]. كلية الإدارة والاقتصاد جامعة كربلاء

الوكيل، علي عبد الحسين، علي، مها محمد، رشيد، امل هادي. (2018). مقارنة مقدر Beran باستعمال اوزان (Nadaraya-Waston) واوزان (Prestley-chao) في تقدير دالة البقاء الشرطية لمرضى سرطان الثدي. Journal of Economics and Administrative Sciences, 24(107), 538-538.

حسن، ارشد حميد (2019). البرمجة بلغة *R*. دار الكتب والوثائق ببغداد.

طالب شريف جليل. (2013). إيجاد معولية نظام التوالي بطريقة جديدة. IRAOI JOURNAL OF STATISTICAL SCIENCES, 13(23).

لازم، جاسم حسن (2011). مقارنة طرائق بيز مع طرائق أخرى لتقدير معلمة القياس لتوزيع ويبل باستخدام المحاكاة. *Journal of Economics and Administrative Sciences*, 03*17*(63), 303-3.

نعمه ، مهدي وهاب و حافظ، علي ماضي. (2021). مقارنة بين طريقة العزوم وطريقة المقدرات التجزيئية لتقدير دالة المعولية الضبابية للتوزيع المختلط (الاسي–فريچت). ECONOMICS AND ADMINSTRATION STUDIES JOURNAL (EASJ), 1(22).

هرمز، أمير حنا. (1990). الإحصاء الرياضي. دار ابن الاثير للطباعة والنشر.

المصادر الاجنبية:

Al-Omari, A. I., Benchiha, S., & Almanjahie, I. M. (2022). Efficient Estimation of Two-Parameter Xgamma Distribution Parameters Using Ranked Set Sampling Design. *Mathematics*, *10*(17), 3170 .

Alomani, G., & Al-Omari, A. I. (2022). Single acceptance sampling plans based on truncated lifetime tests for two-parameter Xgamma distribution with real data application. *Mathematical Biosciences and Engineering*, *19*(12), 13321-13336 .

Altun, E., & Hamedani, G. (2018). The log-xgamma distribution with inference and application. *Journal de la Société Française de Statistique*, *159*(3), 40-55 .

Anderson, E. (2010). The imperative of integration. In *The Imperative of Integration*. Princeton University Press .

Banerjee, S., Wall, M. M., & Carlin, B. P. (2003). Frailty modeling for spatially correlated survival data, with application to infant mortality in Minnesota. *Biostatistics*, *4*(1), 123-142 .

Casella, G., & Berger, R. L. (2021). *Statistical inference*. Cengage Learning .

Chin, Y.-L., Chiou, B.-S., & Wu, W.-F. Reliability Modeling: A Statistical Approach Reliability Modeling: A Statistical Approach 37, 1999 .

Demirci Biçer, H. (2019). Properties and inference for a new class of XGamma distributions with an application. *Mathematical Sciences*, *13*(4), 335-346 .

Dietz, K., Gail ،M., Krickeberg, K., Samet, J., & Tsiatis, A. (2002). Statistics for biology and health. *Logistic Regression A Self-Learning Text*, *2*, 102-124 .

Elshahhat, A., & Elemary, B. R. (2021). Analysis for Xgamma parameters of life under Type-II adaptive progressively hybrid censoring with applications in engineering and chemistry. *Symmetry*, *13*(11), 2112 .

Gail, M., Krickeberg, K., Samet, J., Tsiatis, A., & Wong, W. (2007). Statistics for biology and health. In: Springer.

Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S .(2008) .Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, *78*(4), 493-506 .

Gu, J. (2014). *Statistical partition problem for exponential populations and statistical surveillance of cancers in Louisiana* University of New Orleans .[

Hassan, A., Wani, S. A., Ahmad, S. B., & Akhtar, N. (2020). A new generalized quasi Xgamma distribution applicable to survival times. *Journal of Xi'an university of Architecture & Technology*, *12*(4), 3720-3736 .

Kao, K.-Y. T., & McGavack, T. H .(1959) .Connective tissue: I. Age and sex influence on protein composition of rat tissues. *Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine*, *101*(1), 153-157 .

Lancelot, R., Lesnoff, M., & McDermott, J. J. (2002). Use of Akaike information criteria for model selection and inference: an application to assess prevention of gastrointestinal parasitism and respiratory mortality of Guinean goats in Kolda, Senegal. *Preventive veterinary medicine*, *55*(4), 217-240 .

Lehmann, E. L., & Casella, G. (200 .(6*Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media .

Lindley, D. V. (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 102-107 .

Maiti, S. S., Dey, M., & Sarkar, S .(2018) .Discrete xgamma distributions: properties, estimation and an application to the collective risk model. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, 117-132 .

Metiri, F., Zeghdoudi, H., & Remita, M. R. (2016). On Bayes estimates of Lindley distribution under linux loss function: informative and non

informative priors. *Global journal of Putre and Applied Mathematics*, *12*, 391-400 .

Miller Jr, R. G. (2011). *Survival analysis*. John Wiley & Sons .

Okoli, O., Osuji, G., Nwosu, D., & Njoku, K. (2016). On the modified extended generalized exponential distribution. *European Journal of Statistics and Probability*, *4*(4), 1-11 .

Organization, W. H. (2020a). Coronavirus disease 2019 (COVID-19): situation report, 51 .

Organization, W. H. (2020b). Coronavirus disease 2019 (COVID-19): situation report, 73 .

Saha, M., & Yadav, A. S. (2021). Estimation of the reliability characteristics by using classical and Bayesian methods of estimation for xgamma distribution. *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, *10*(3), 30-3 .317

Sen, S., & Chandra, N. (2017). The quasi xgamma distribution with application in bladder cancer data. *Journal of data science*, *15*(1), 61-76 .

Sen, S., Chandra, N., & Maiti, S. S. (2017). The weighted xgamma distribution: Properties and application .*Journal of Reliability and Statistical Studies*, 43-58 .

Sen, S., Chandra, N., & Maiti, S. S. (2018a). On Properties and Applications of a Two-Parameter Xgamma Distribution. *J. Stat. Theory Appl.*, *17*(4), 674-685 .

Sen, S., Chandra, N., & Maiti, S. S. (2018b). Survival estimation in xgamma distribution under progressively type-II right censored scheme. *Model Assisted Statistics and Applications*, *13*(2), 107-121 .

Sen, S., Maiti, S. S., & Chandra, N. (2016). The xgamma distribution: statistical properties and application. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, *15*(1), 38 .

Snipes, M., & Taylor, D. C. (2014). Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices. *Wine Economics and Policy*, *3*(1), 3-9 .

Stevenson, M & ،.EpiCentre, I. (2009). An introduction to survival analysis. *EpiCentre, IVABS, Massey University* .

Triana, Y., & Purwadi, J. (2019). Exponential Distribution Parameter Estimation with Bayesian SELF Method in Survival Analysis. Journal of Physics: Conference Series ،

Vrieze, S. I. (2012). Model selection and psychological theory: a discussion of the differences between the Akaike information criterion (AIC) and the

Bayesian information criterion (BIC). *Psychological methods*, *17*(2), 228 .

Yadav, A. S., Maiti, S. S., & Saha, M. (2019). The inverse xgamma distribution: statistical properties and different methods of estimation. *Annals of Data Science*, *8*(2), 275-293 .

Yadav, A. S., Saha, M., Singh, S., & Singh, U. (2019). Bayesian estimation of the parameter and the reliability characteristics of xgamma distribution using Type-II hybrid censored data. *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, *8*(1), 1-10 .

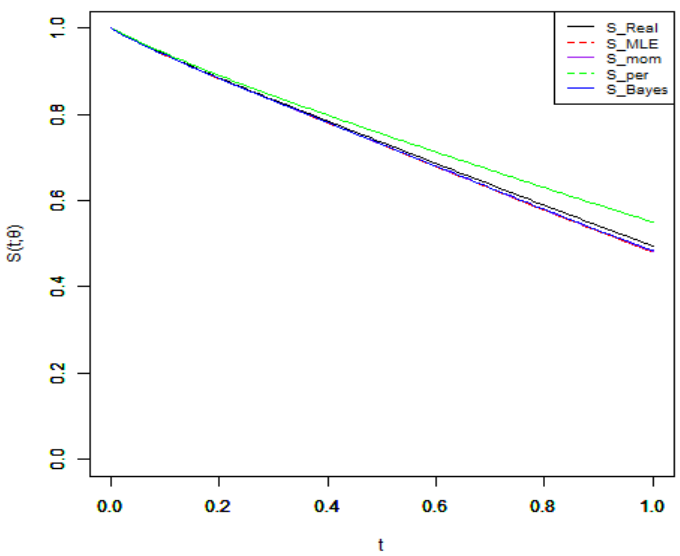
Yadav, A. S., Sen, S., Maiti, S. S., Saha, M., & Shukla, S. (2020). Some further properties and Bayesian inference for inverse xgamma distribution under progressive type-II censored scheme. *Annals of Data Science*, 1-25 .

Zio, E. (2007). *An introduction to the basics of reliability and risk analysis* (Vol. 13). World scientific .

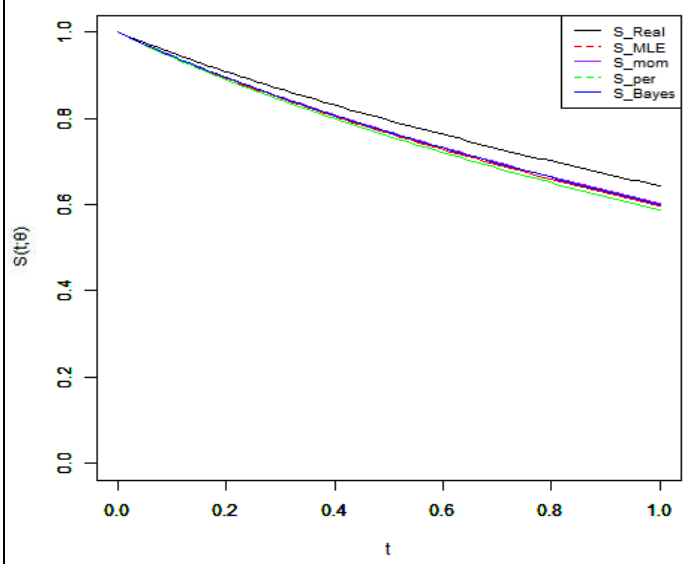
الملاحق

ملحق (A)

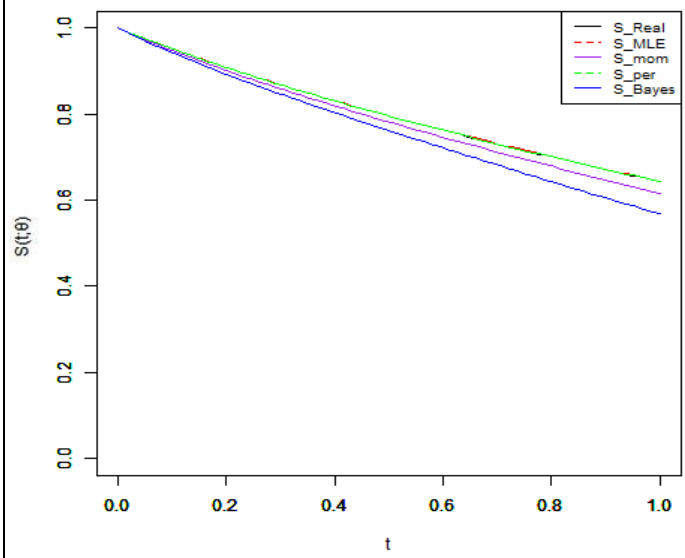
مخططات رسم دالة البقاء للتجربة االثانية من تجارب المحاكاة يبدء من الشكل (1) وينتهي بالشكل(3-30) (30):



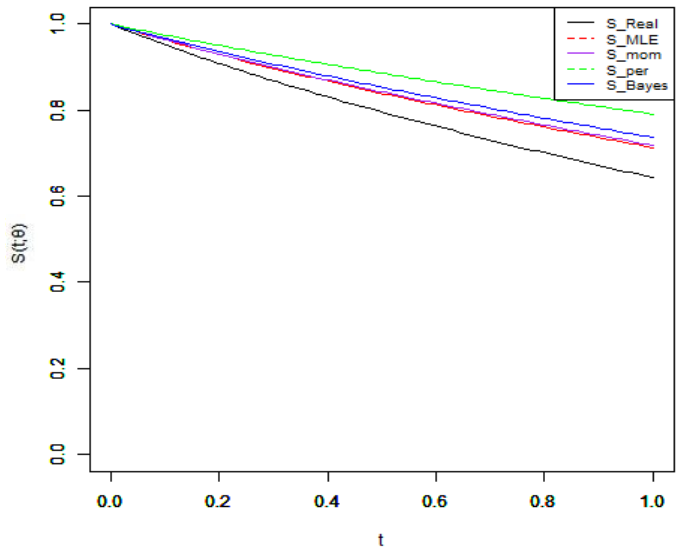
شكل (1) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



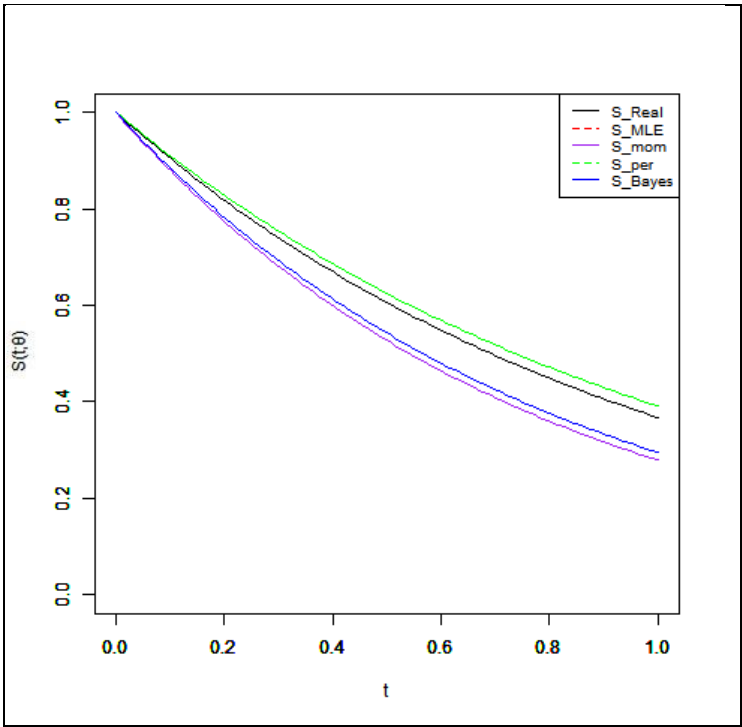
شكل (2) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



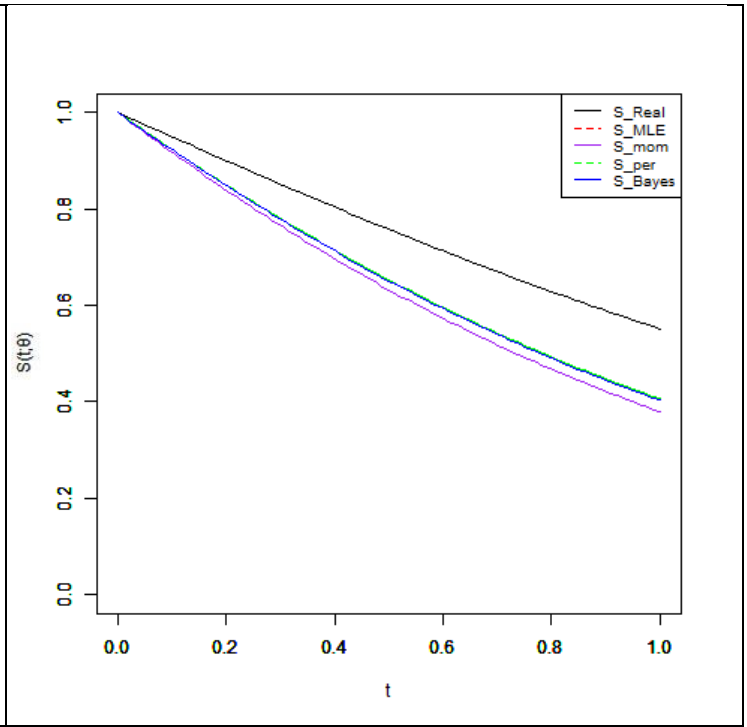
شكل (3) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



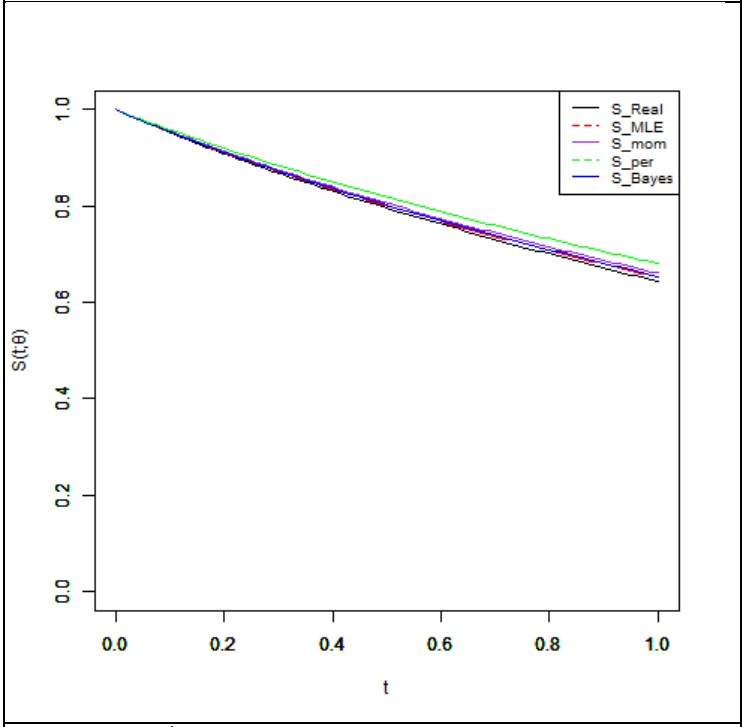
شكل (4) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



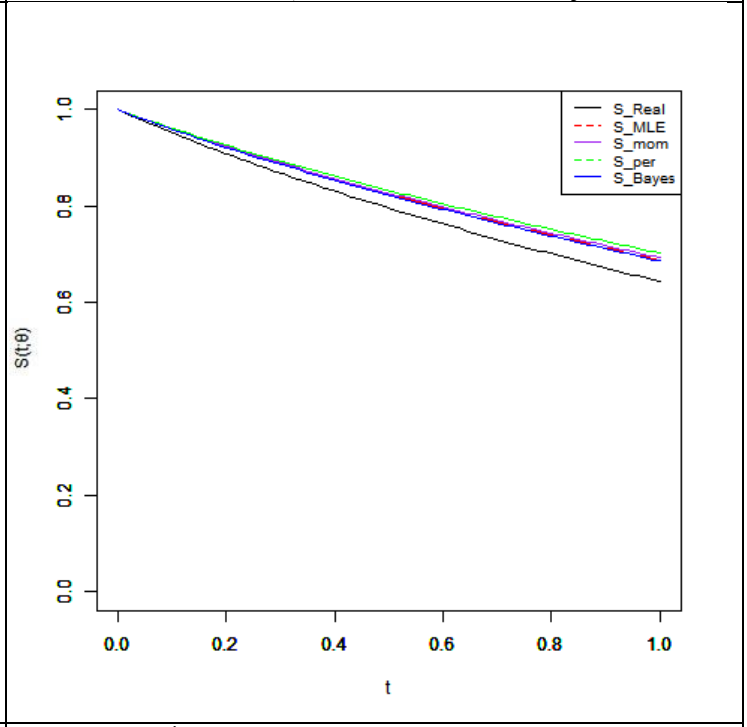
شكل (6) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



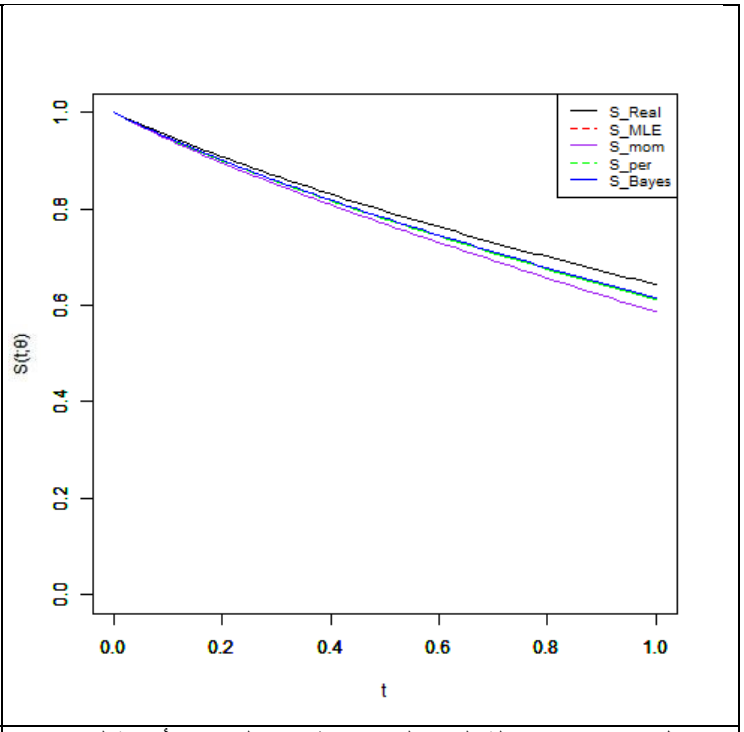
شكل (55) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



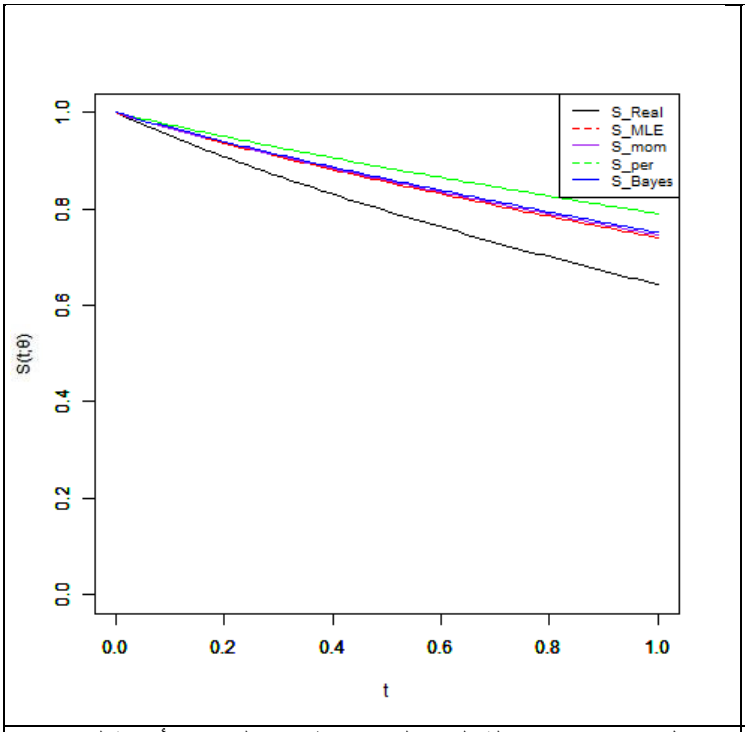
شكل (8) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=20



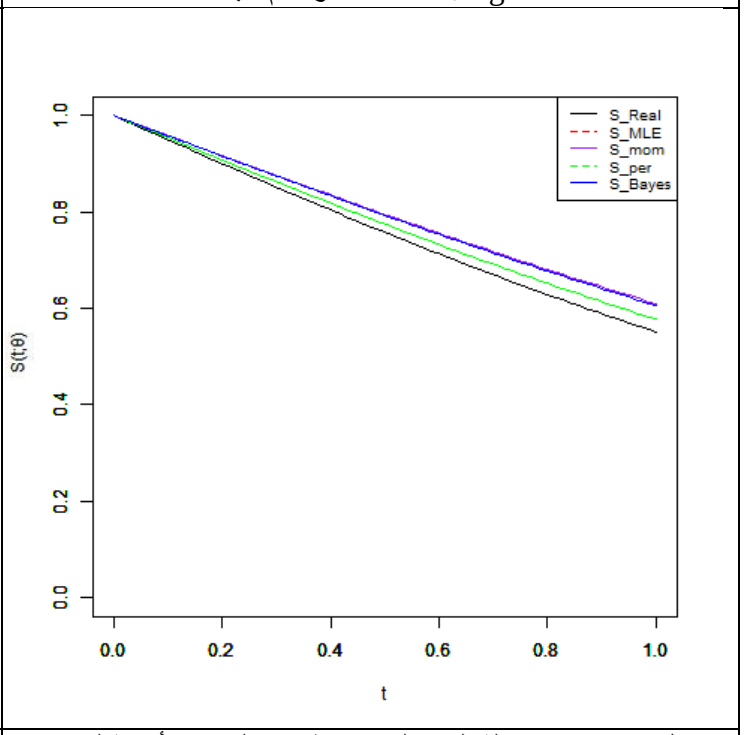
شكل (7) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=20



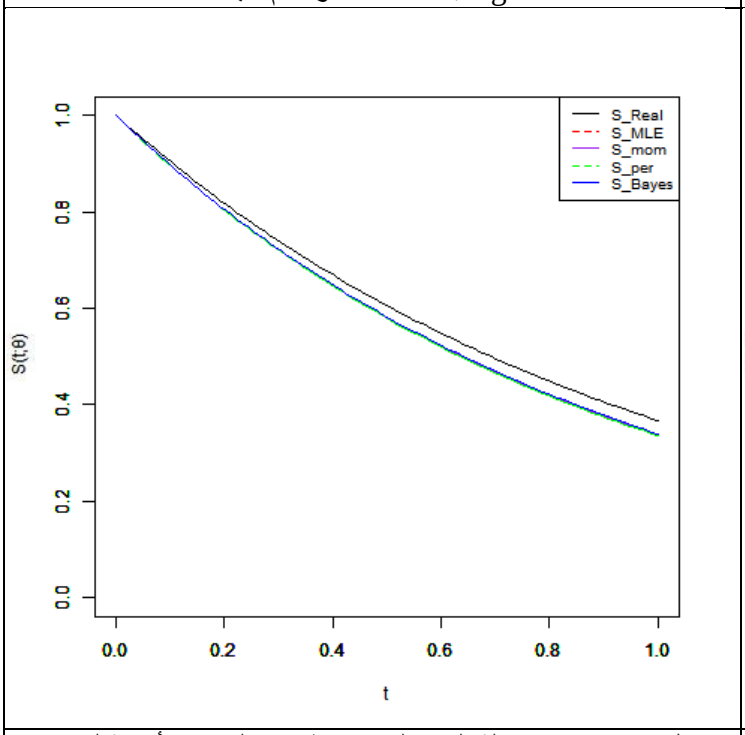
شكل (9) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=10



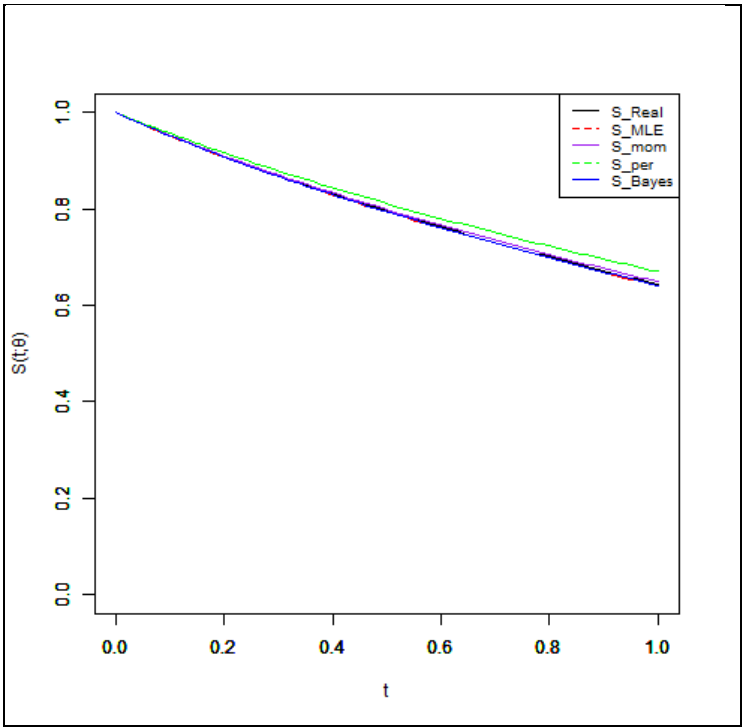
شكل (10) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=20



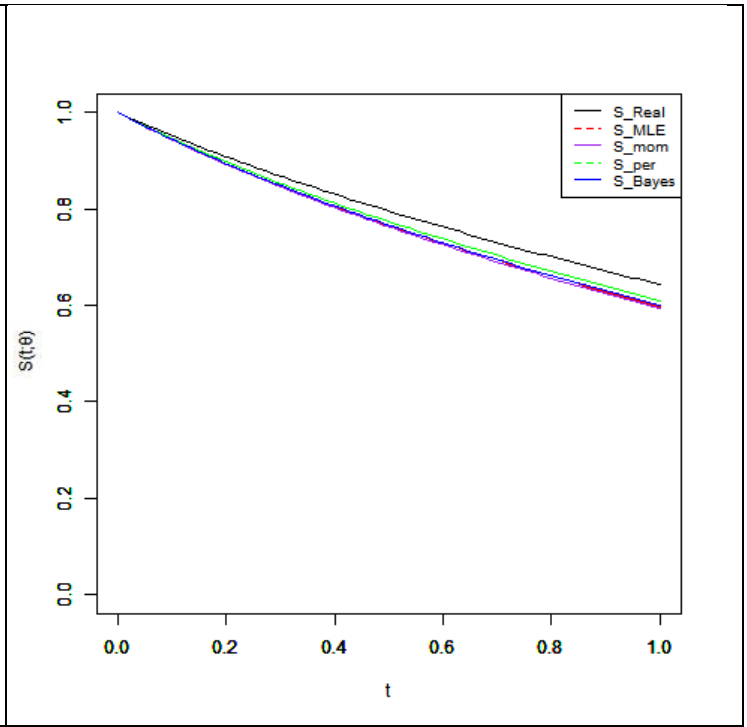
شكل (11) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=20



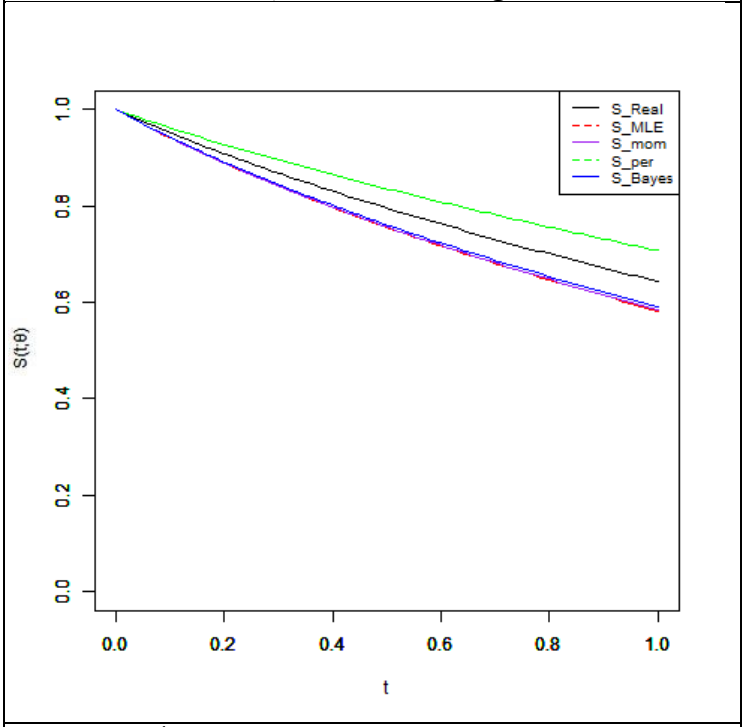
شكل (12) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=20



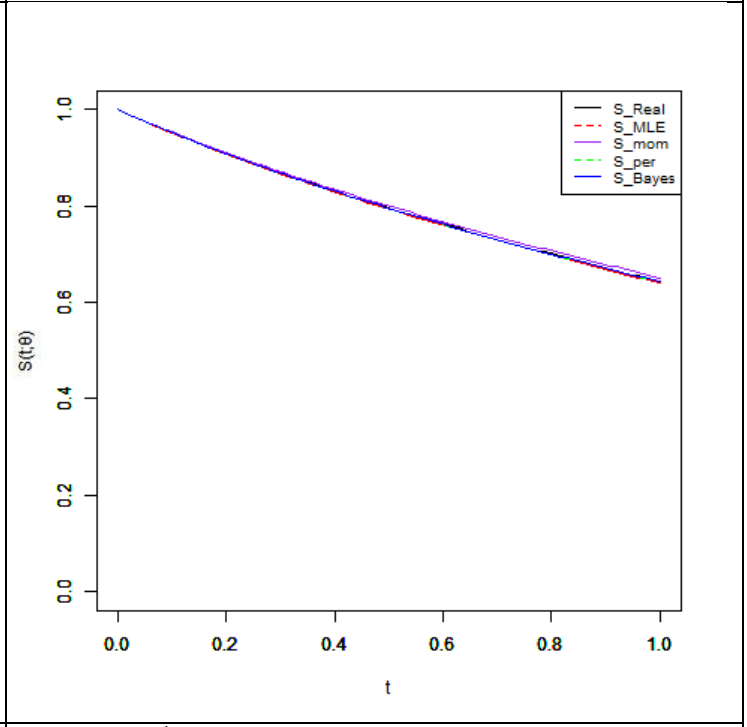
شكل (14) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



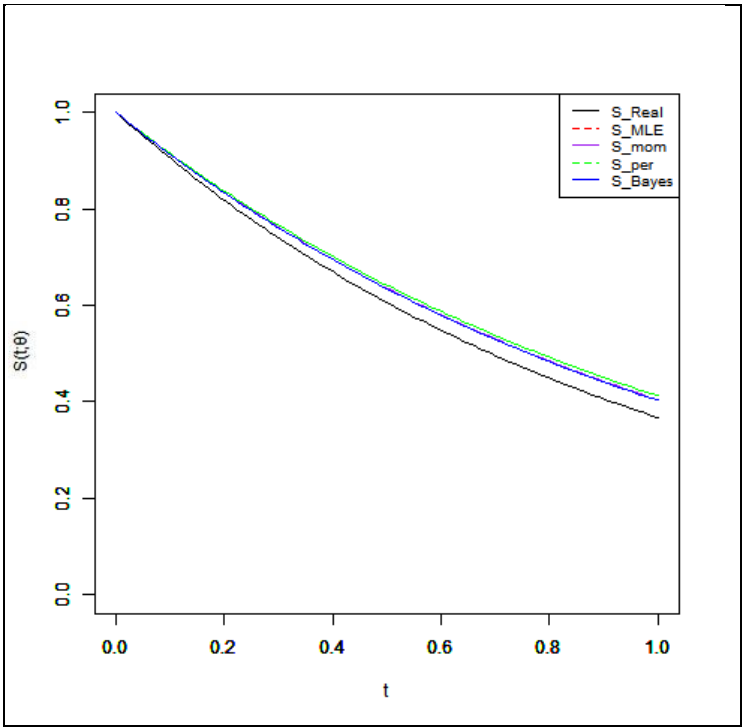
شكل (13) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



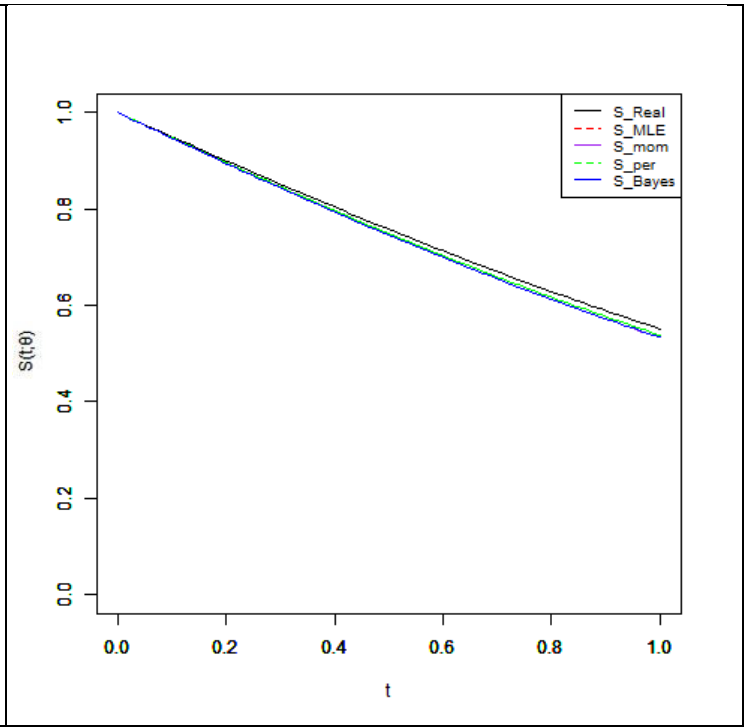
شكل (16) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



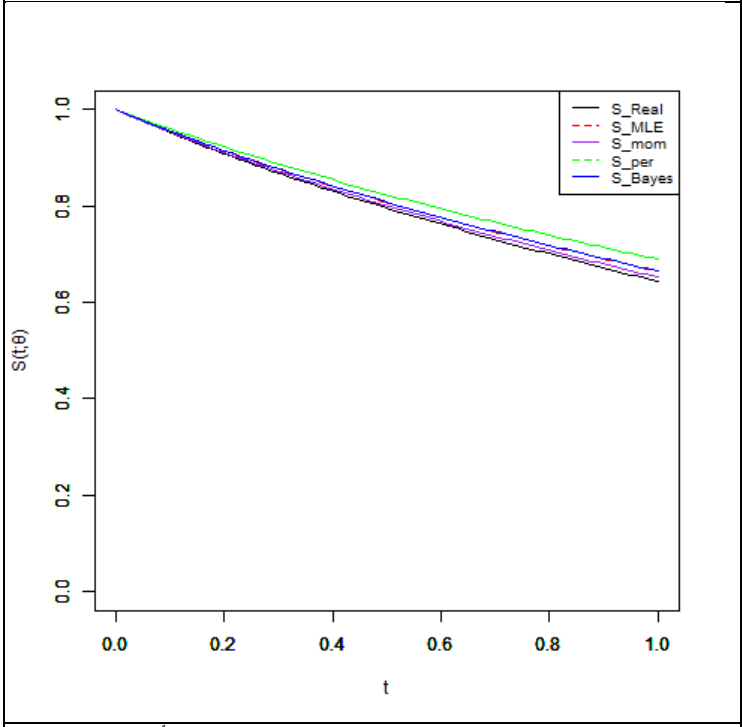
شكل (15) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



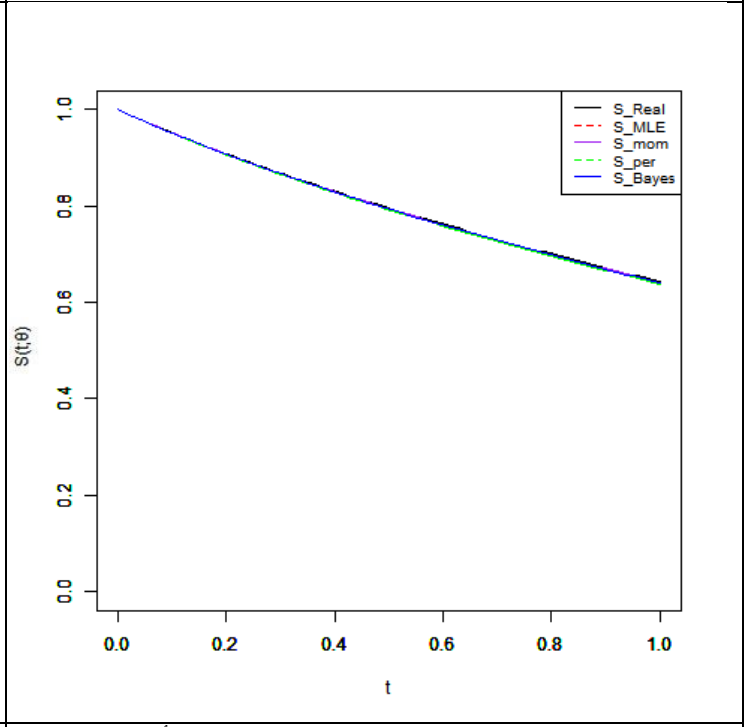
شكل (18) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



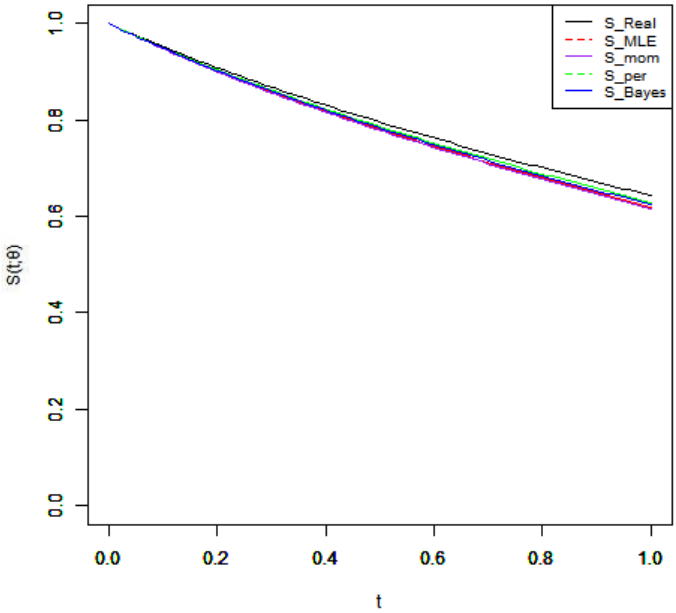
شكل (17) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=50



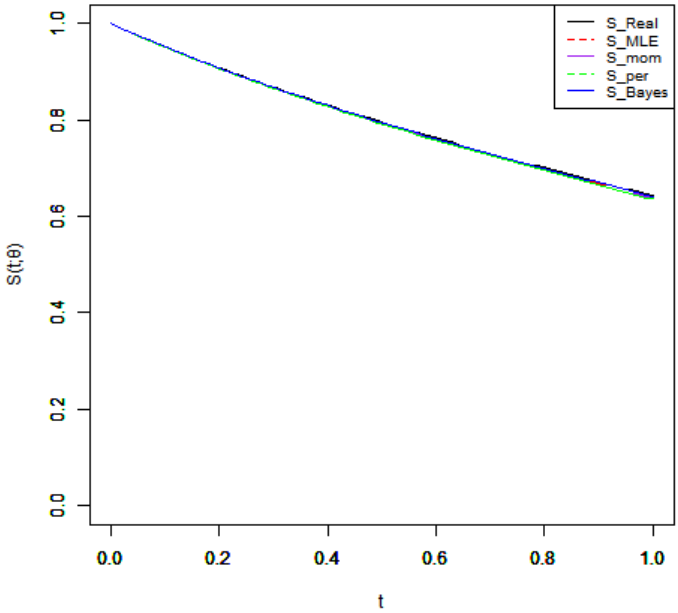
شكل (20) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



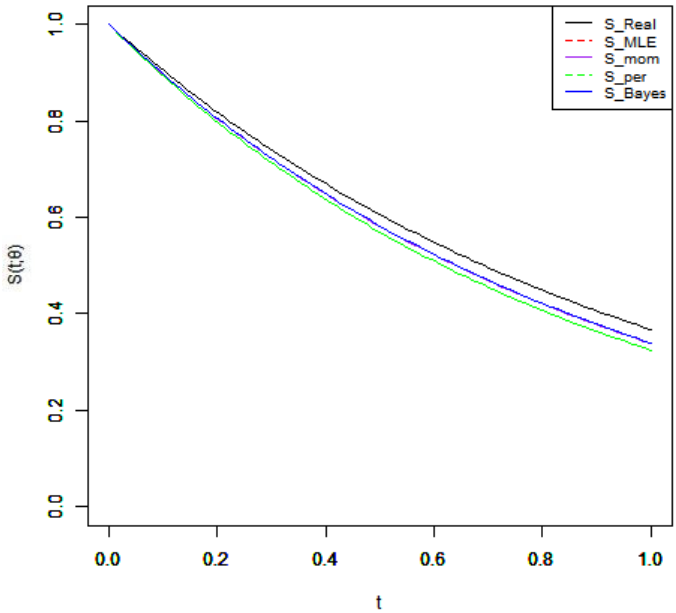
شكل (19) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



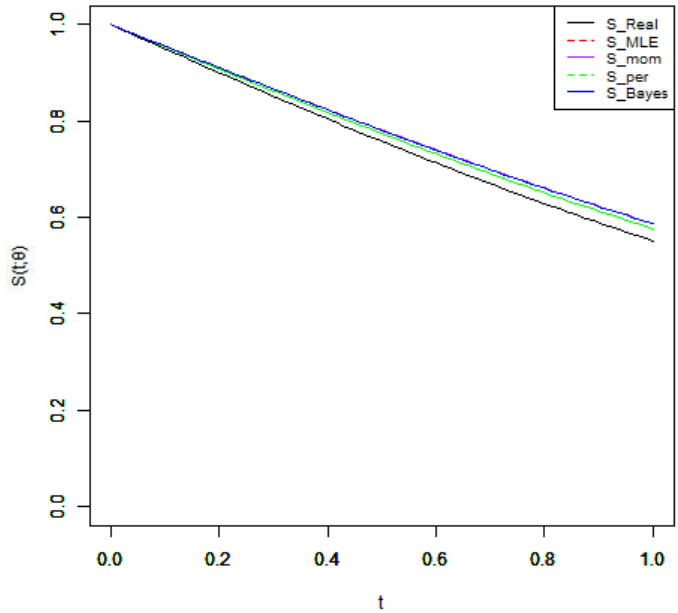
شكل (22) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



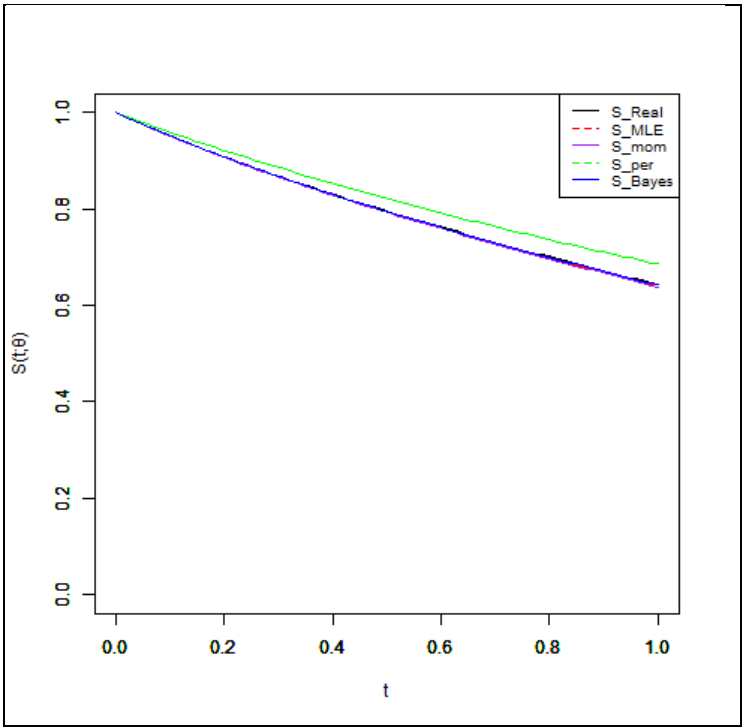
شكل (21) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



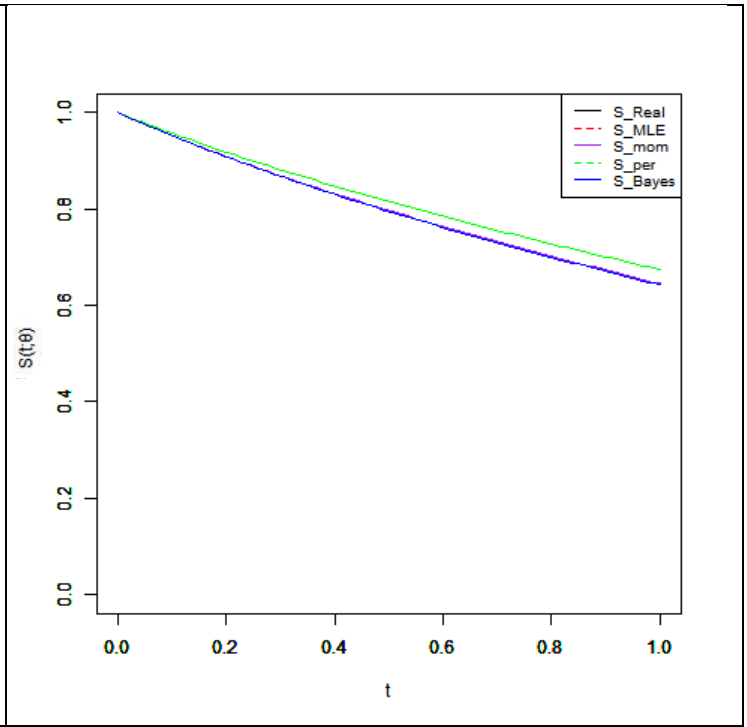
شكل (24) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



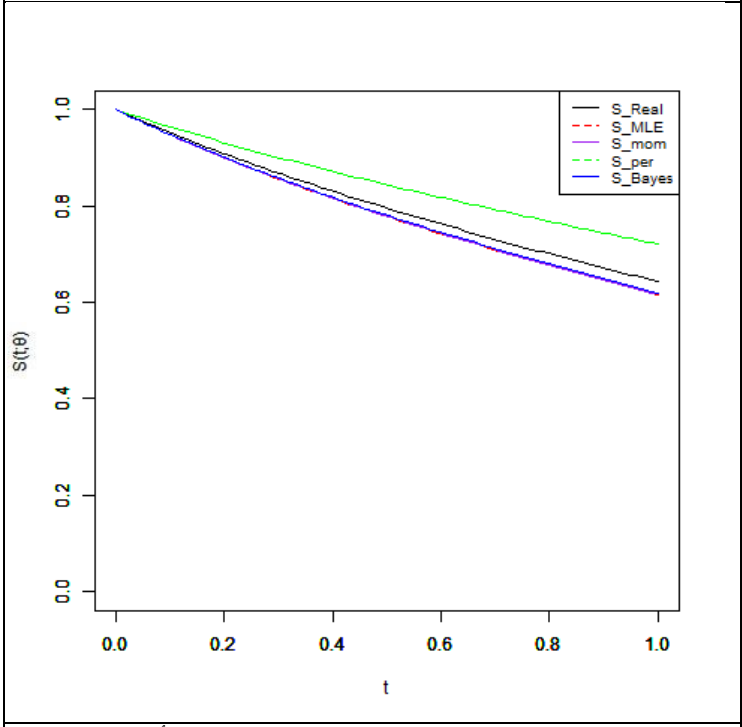
شكل (23) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=80



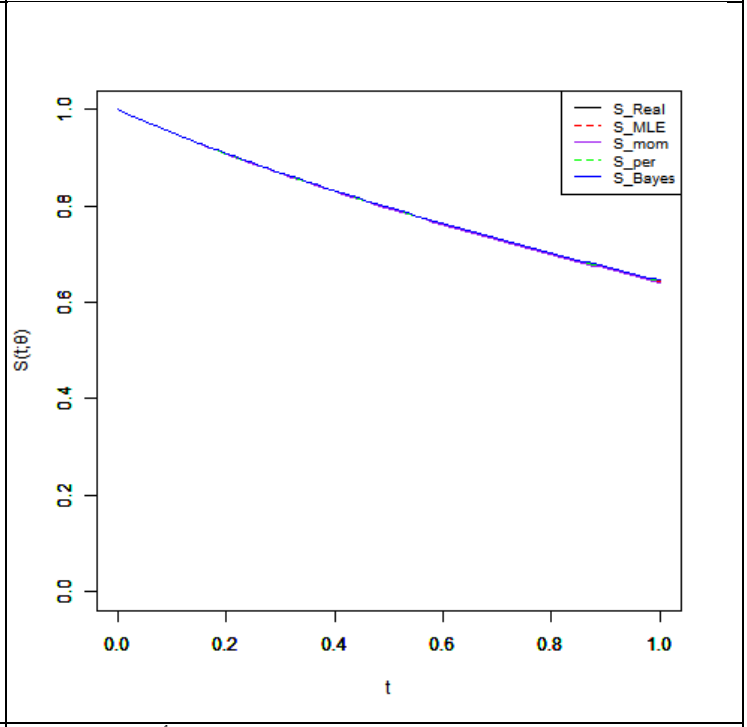
شكل (26) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100



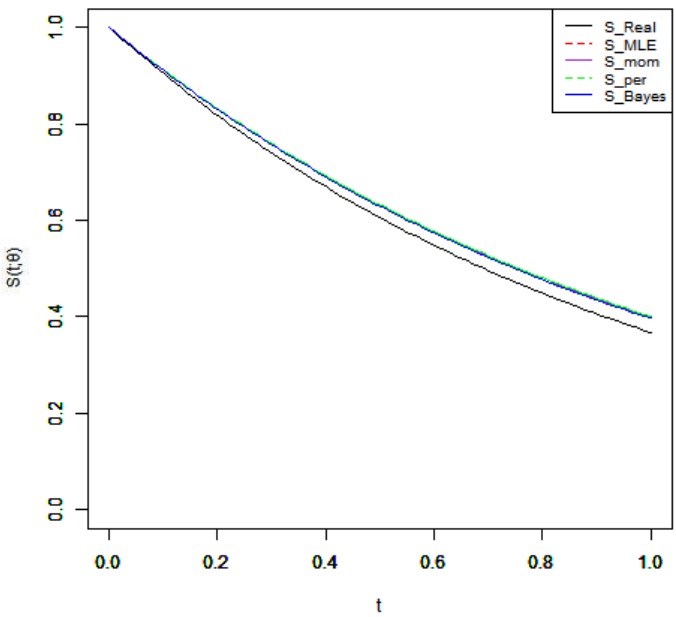
شكل (25) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100



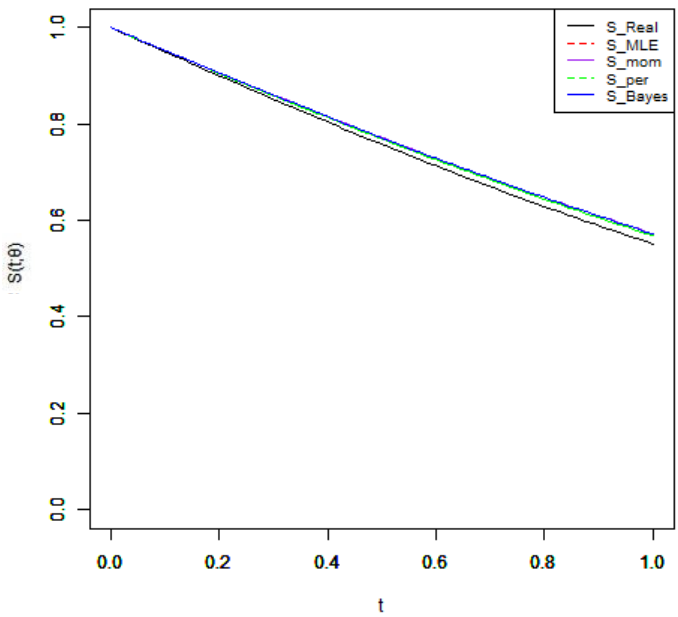
شكل (28) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100



شكل (27) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100



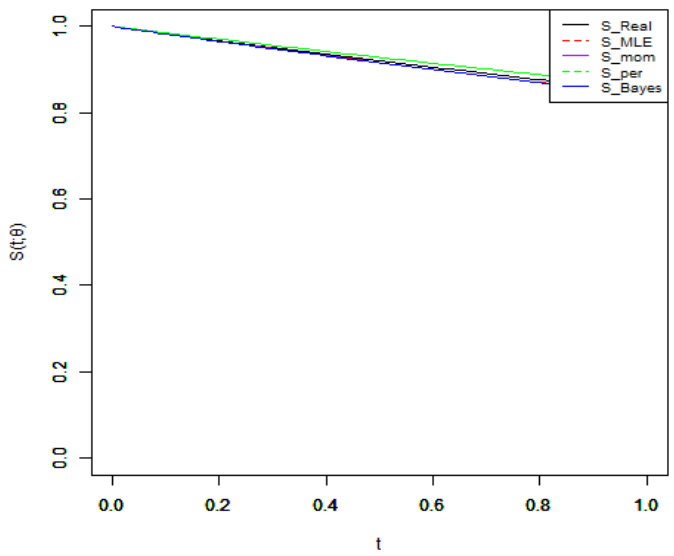
شكل (30) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100



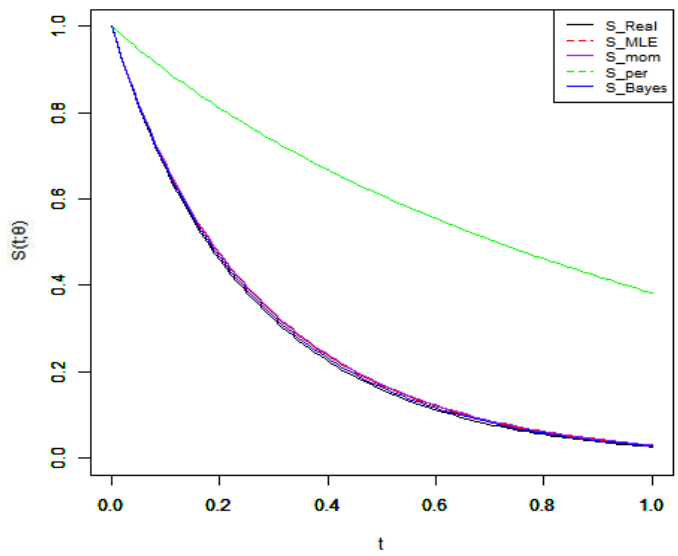
شكل (29) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=1 وحجم عينة n=100

ملحق (B)

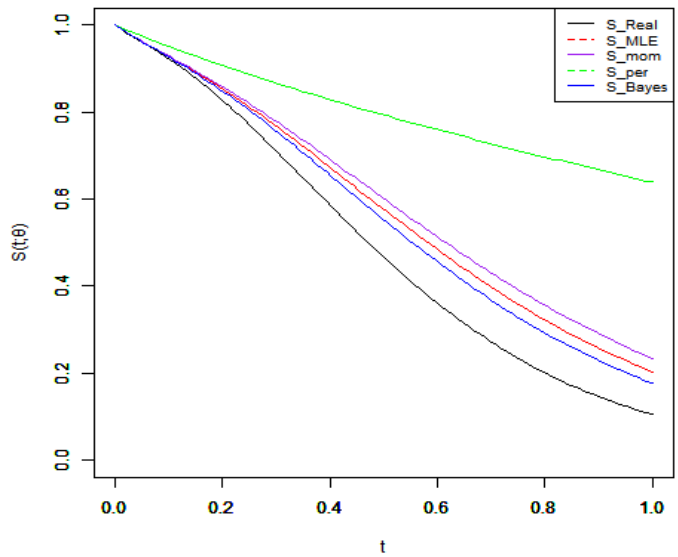
مخططات رسم دالة البقاء للتجربة االثالثة من تجارب المحاكاة يبدء من الشكل (شكل (3-131) وينتهي بالشكل (60):



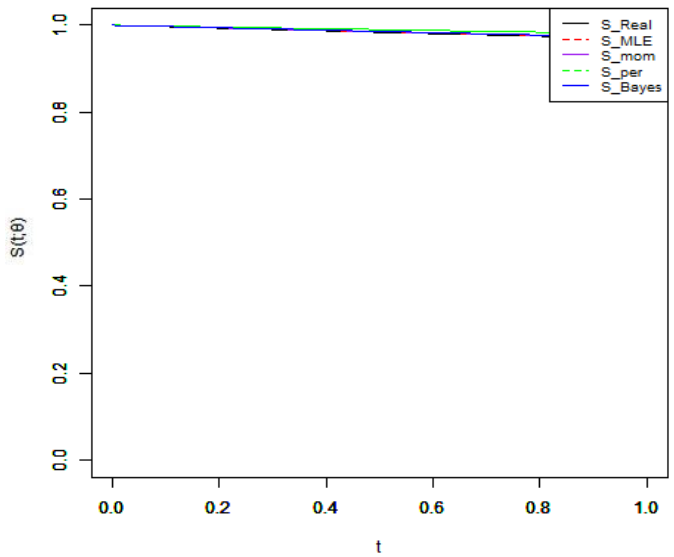
شكل (31) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



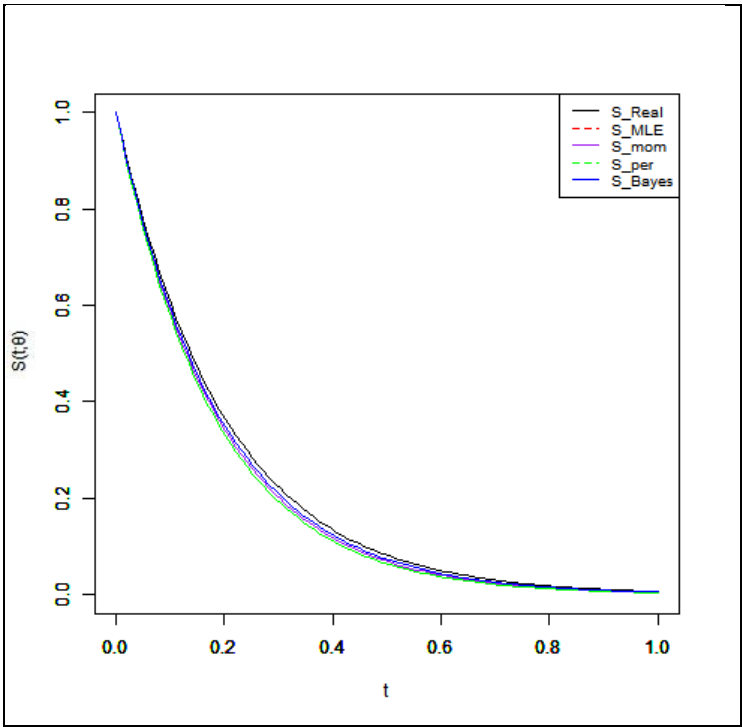
شكل (32) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



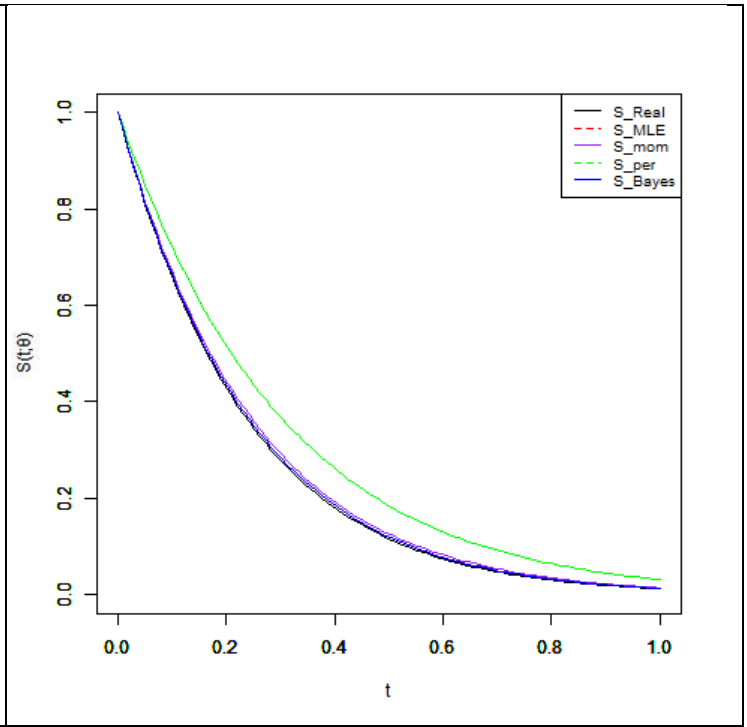
شكل (33) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



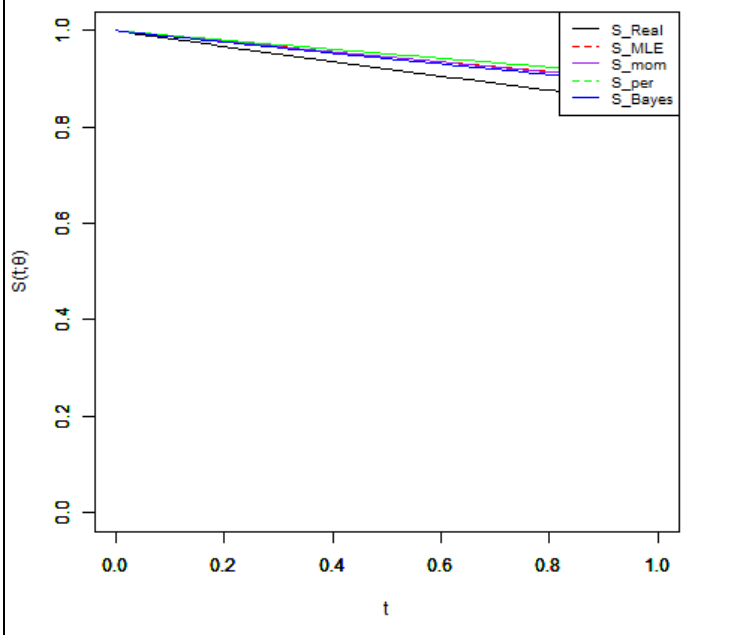
شكل (34) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



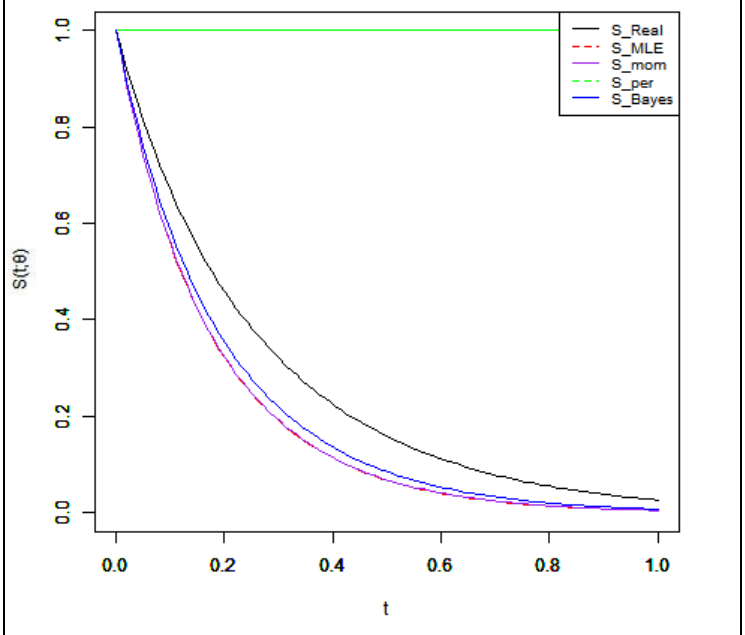
شكل (36) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



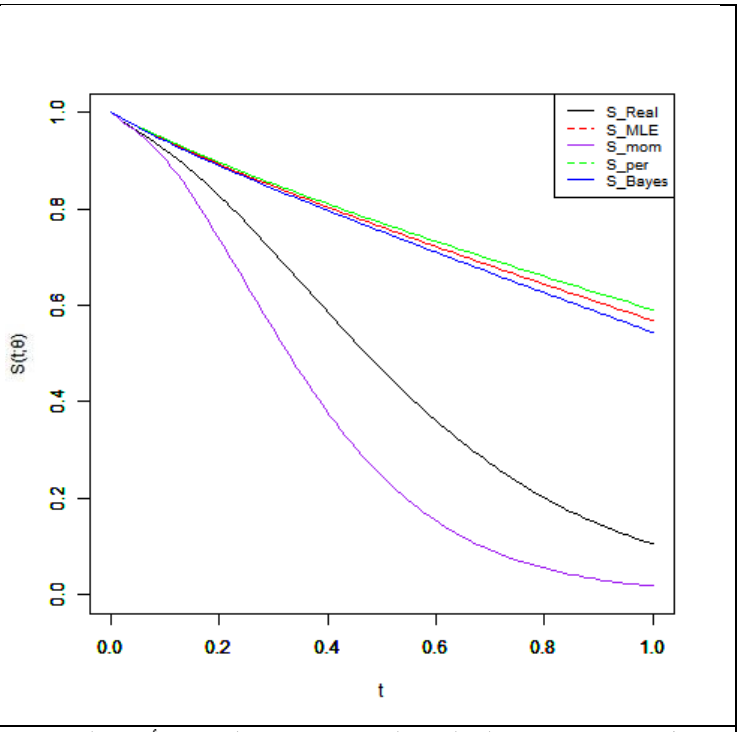
شكل (35) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=10



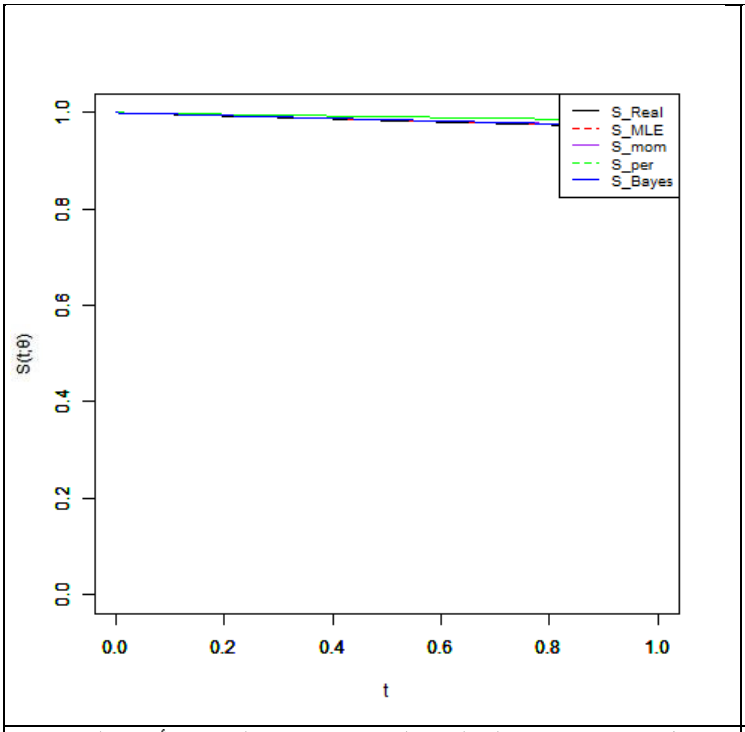
شكل (38) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



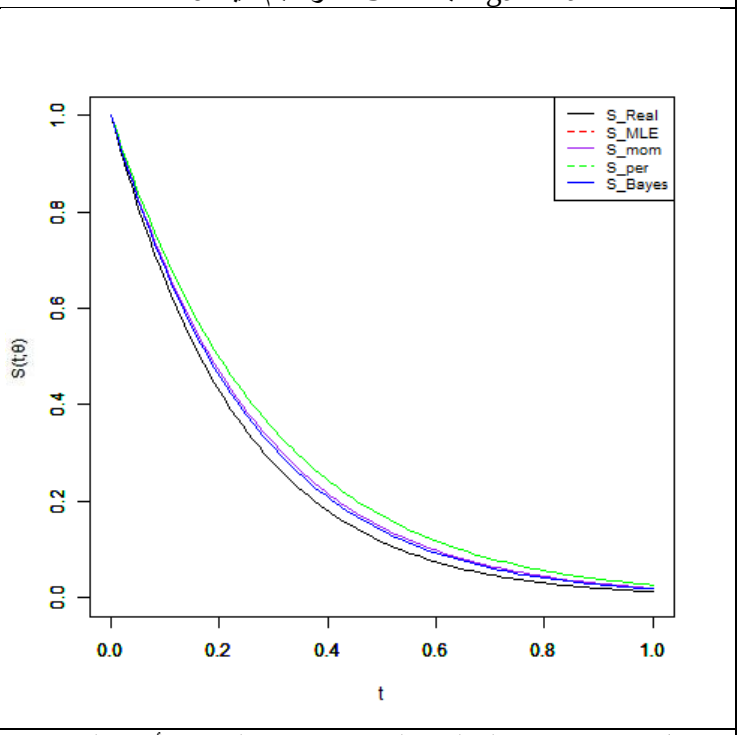
شكل (37) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



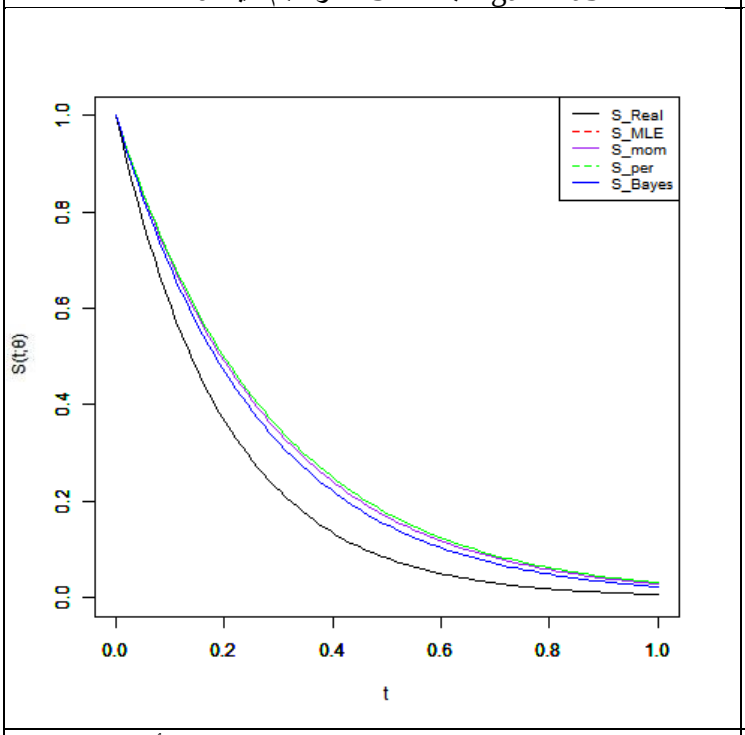
شكل (39) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



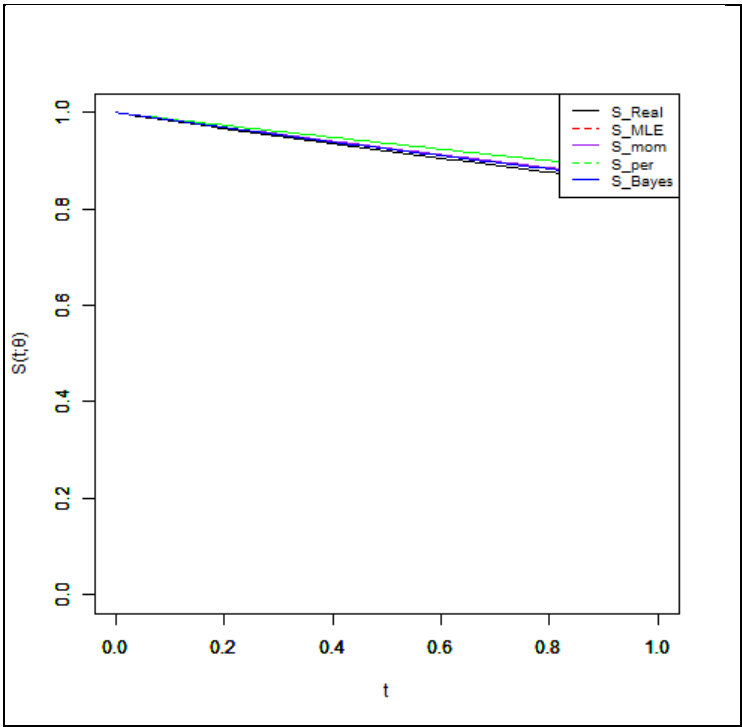
شكل (40) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



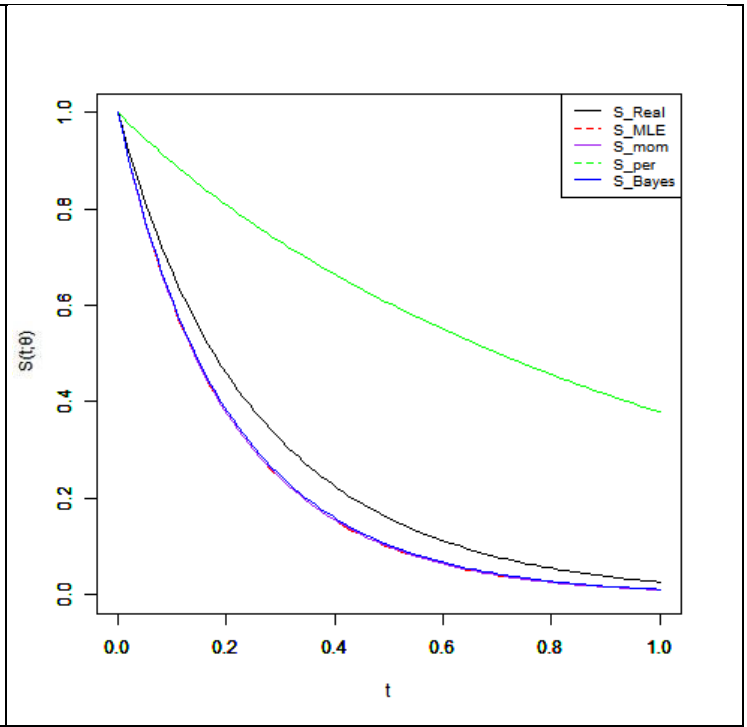
شكل (41) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



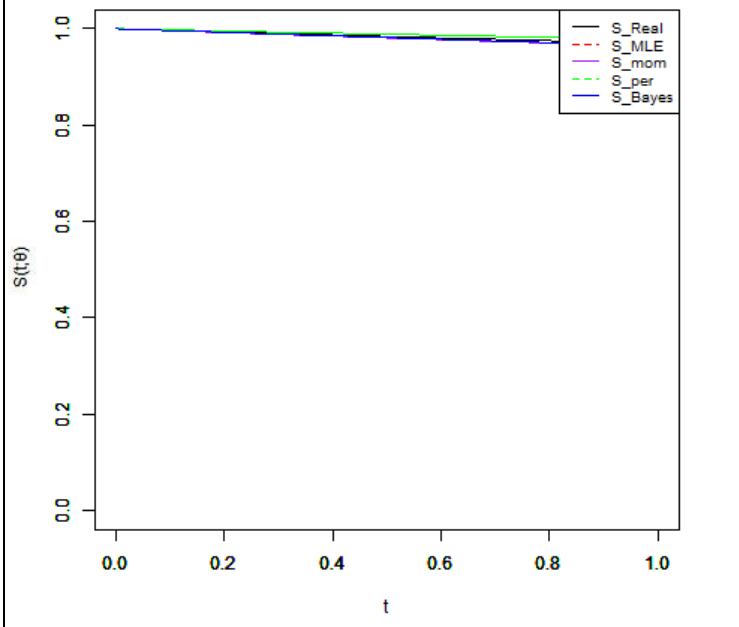
شكل (42) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=20



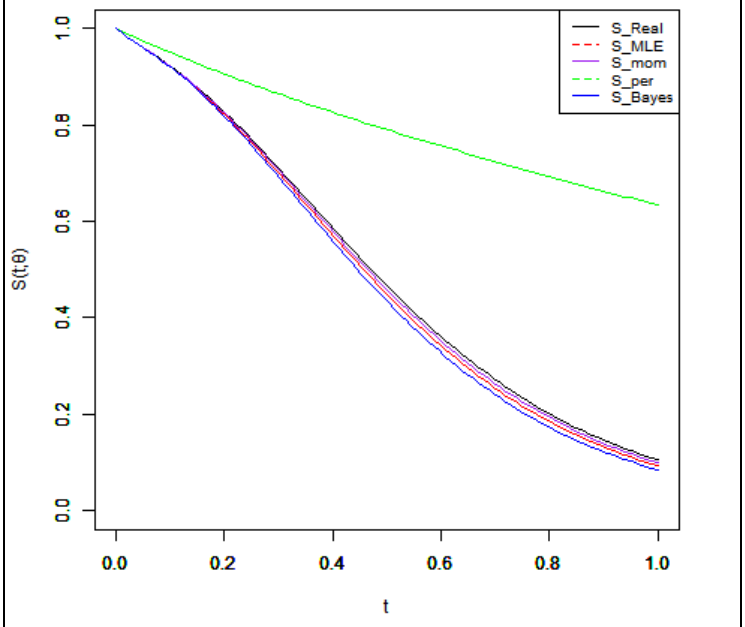
شكل (44) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



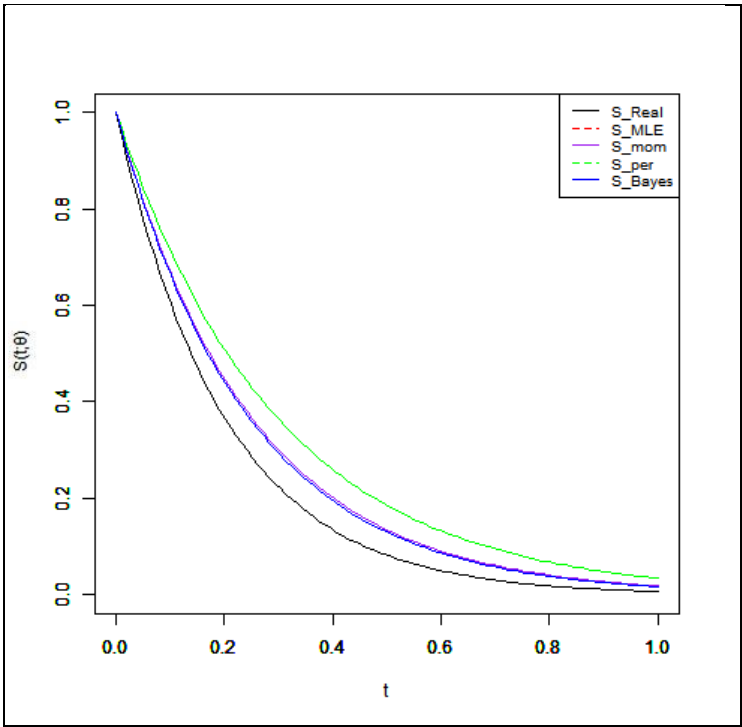
شكل (43) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



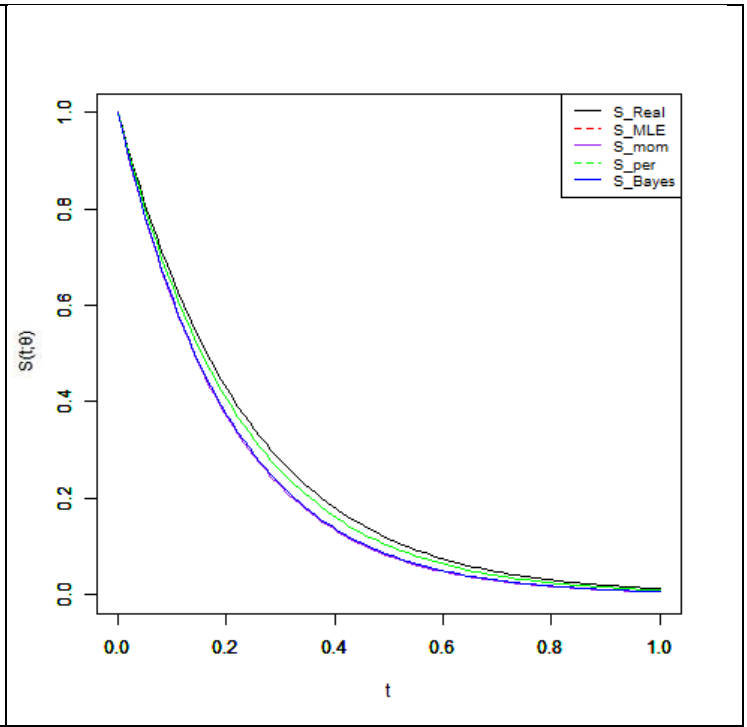
شكل (46) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



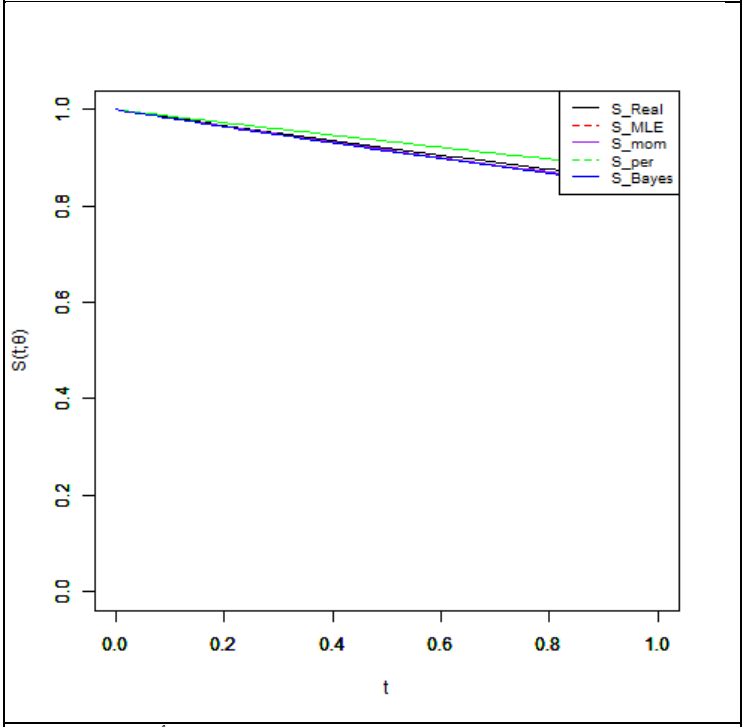
شكل (45) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



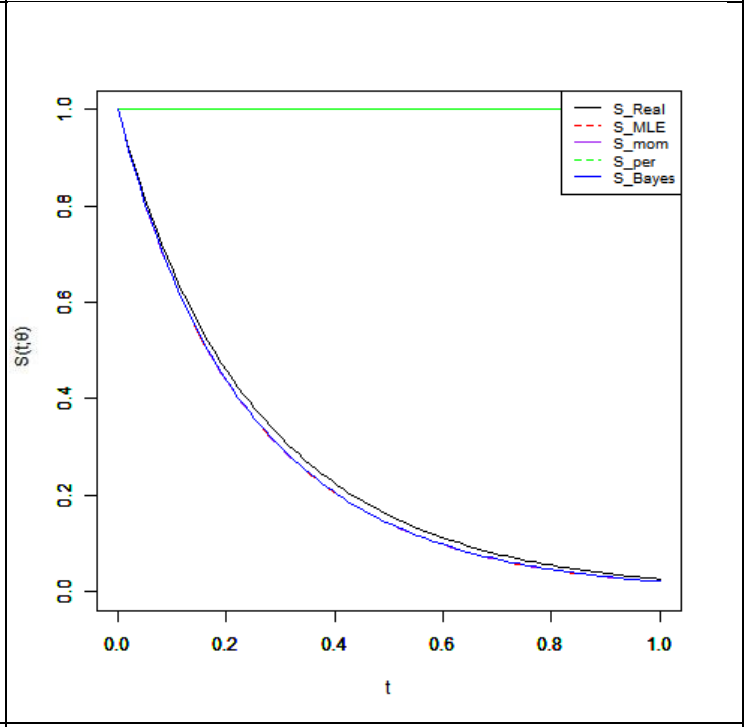
شكل (48) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



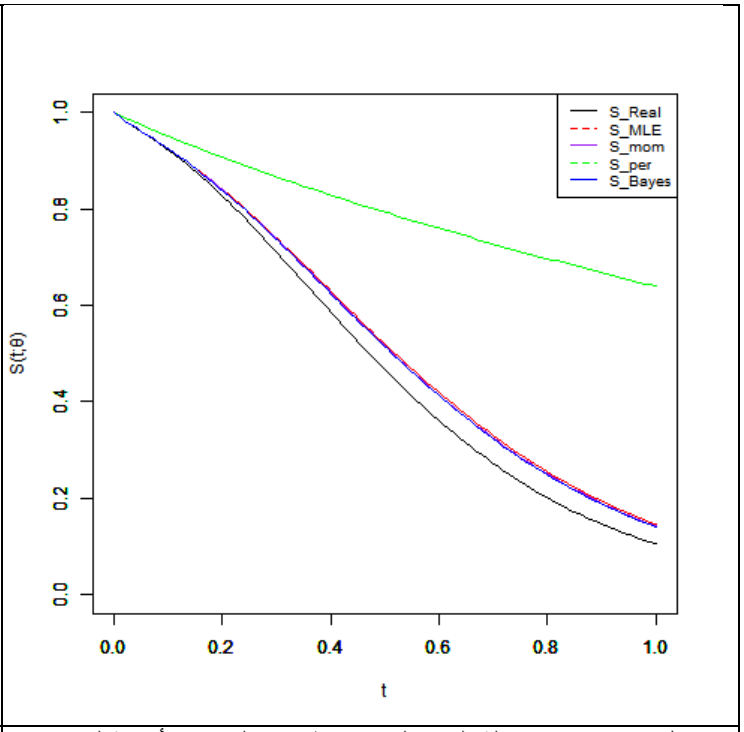
شكل (47) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=50



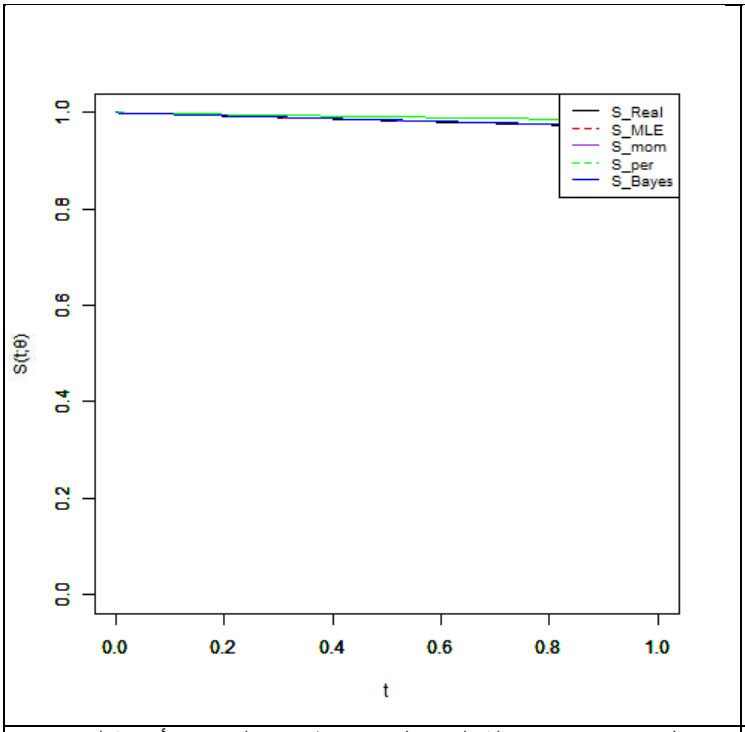
شكل (50) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



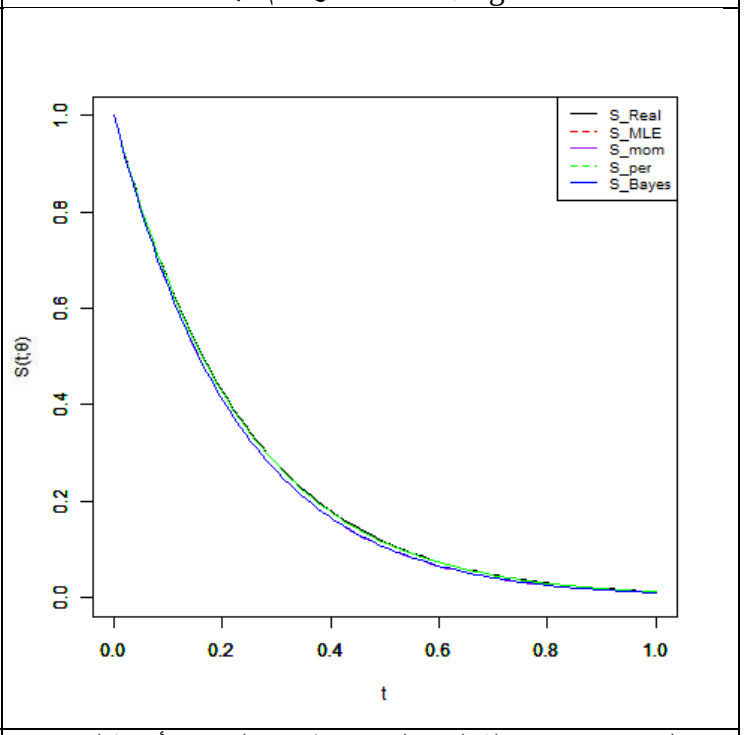
شكل (49) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



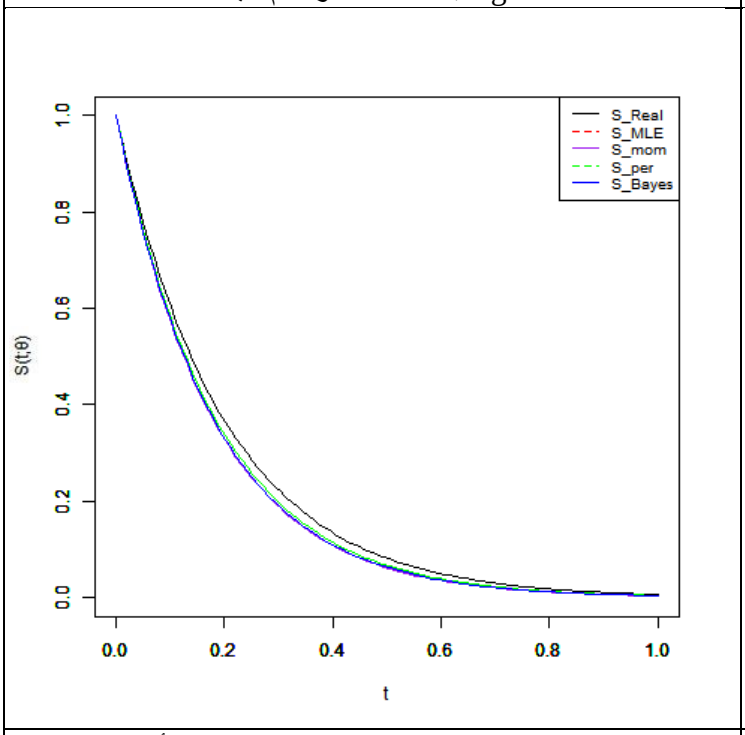
شكل (51) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



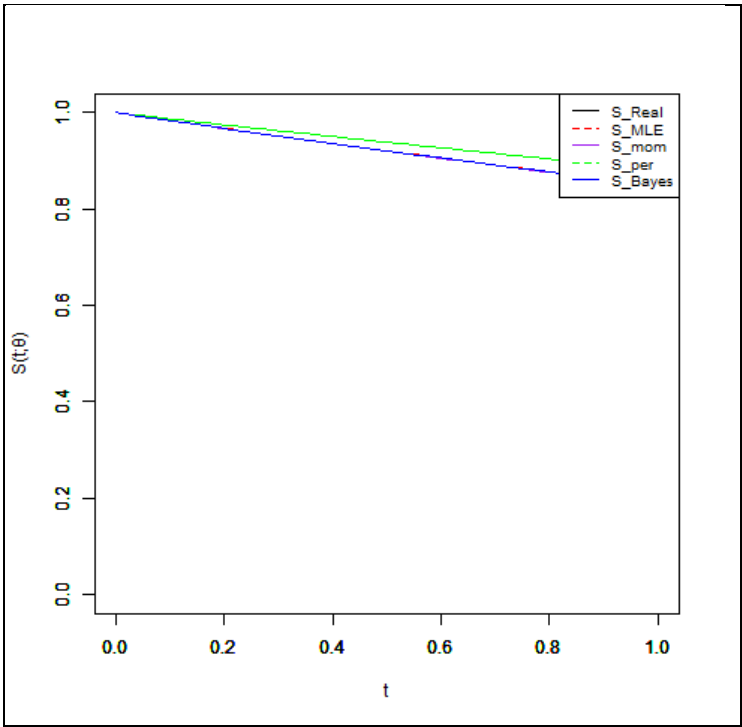
شكل (52) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



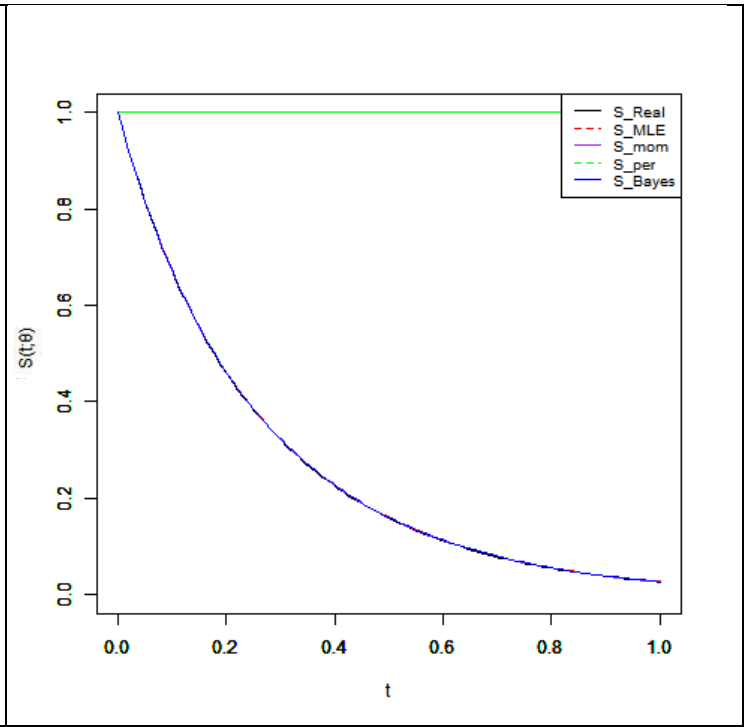
شكل (53) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



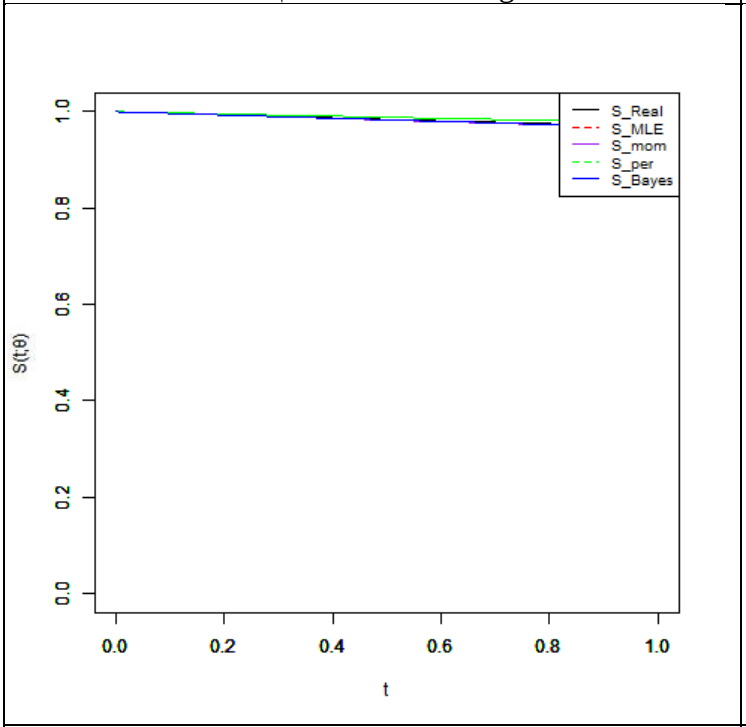
شكل (54) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=80



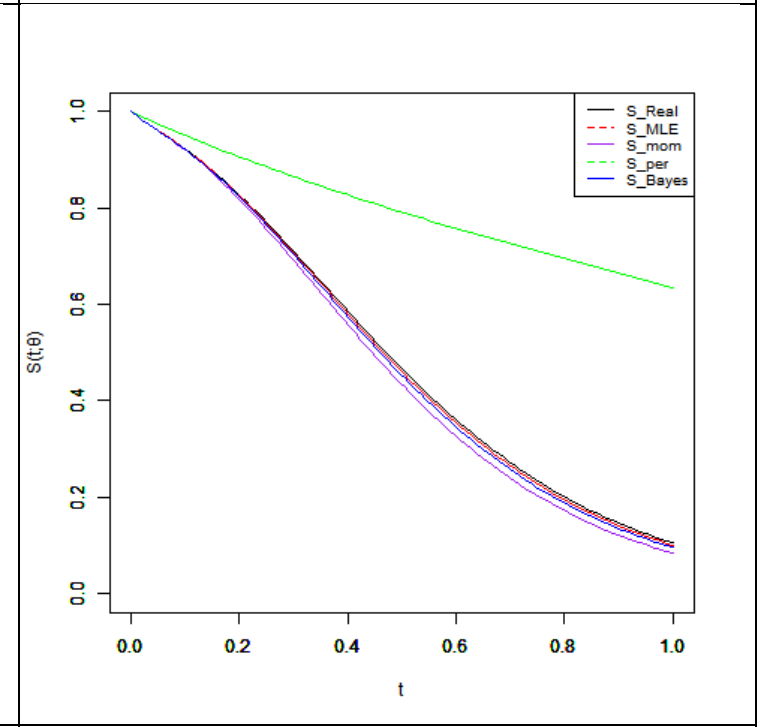
شكل (56) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100



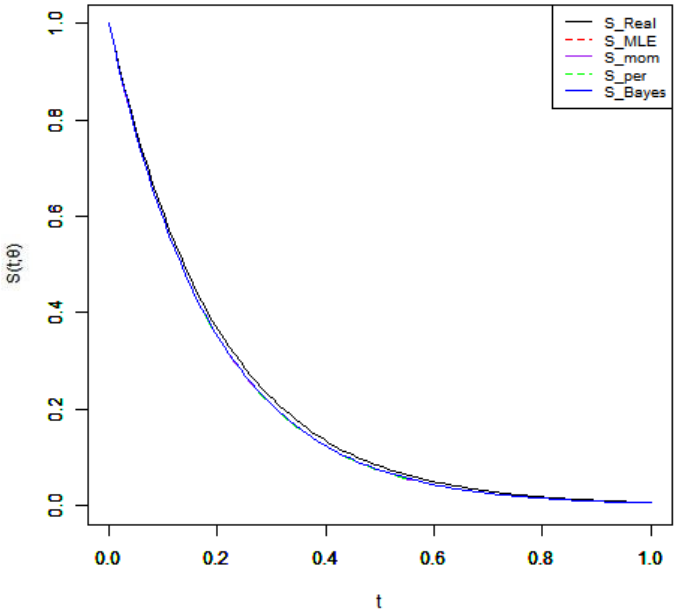
شكل (55) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100



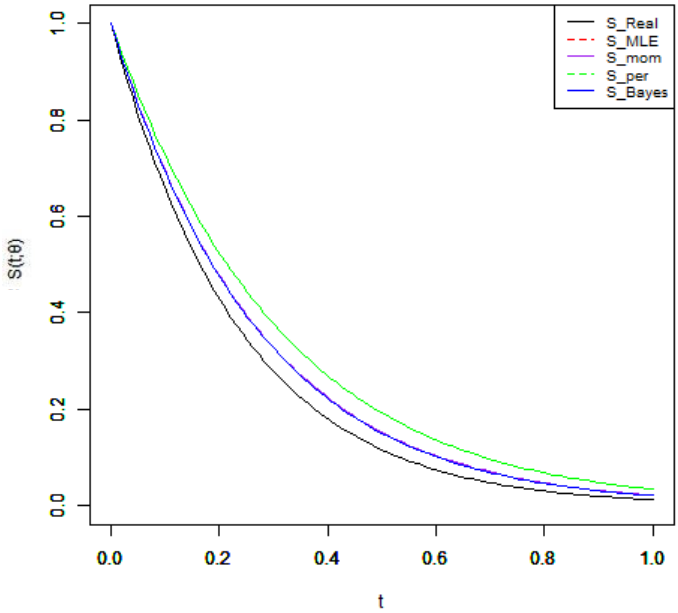
شكل (58) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100



شكل (57) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100



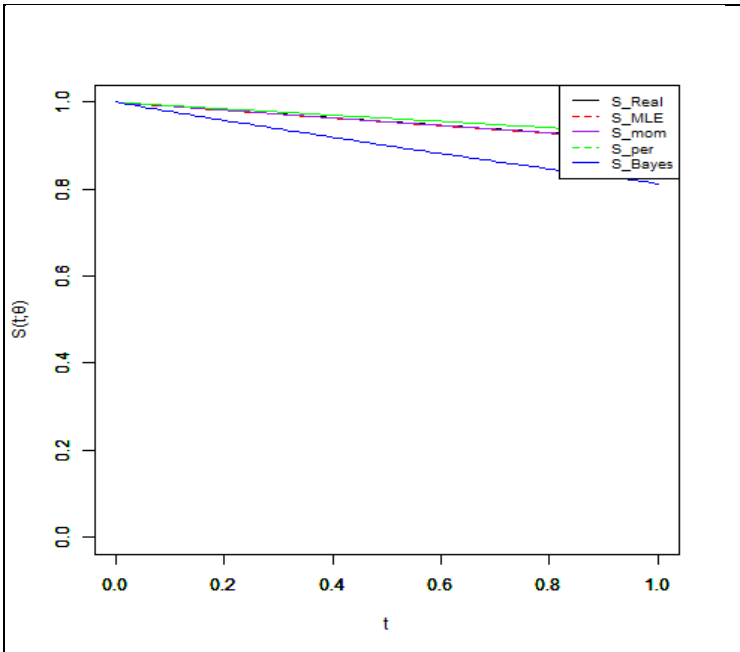
شكل (60) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100



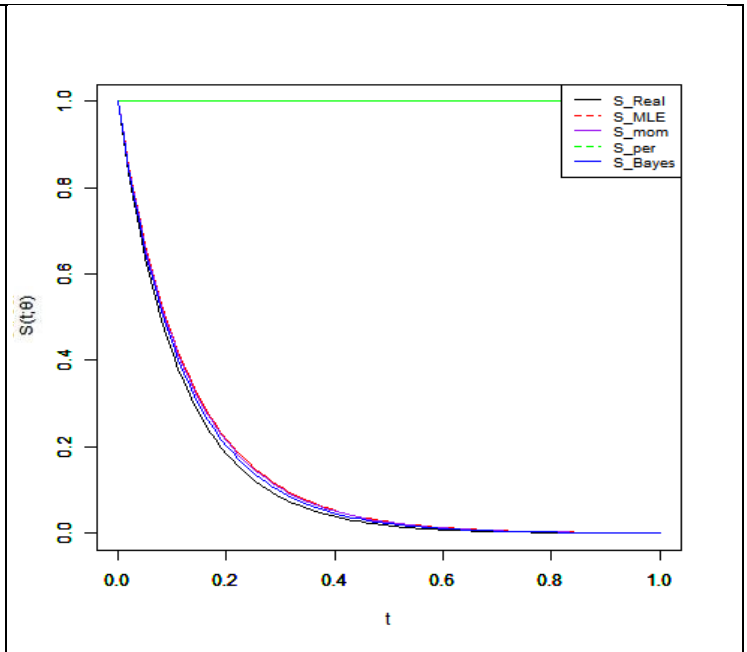
شكل (59) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=5 وحجم عينة n=100

ملحق (C)

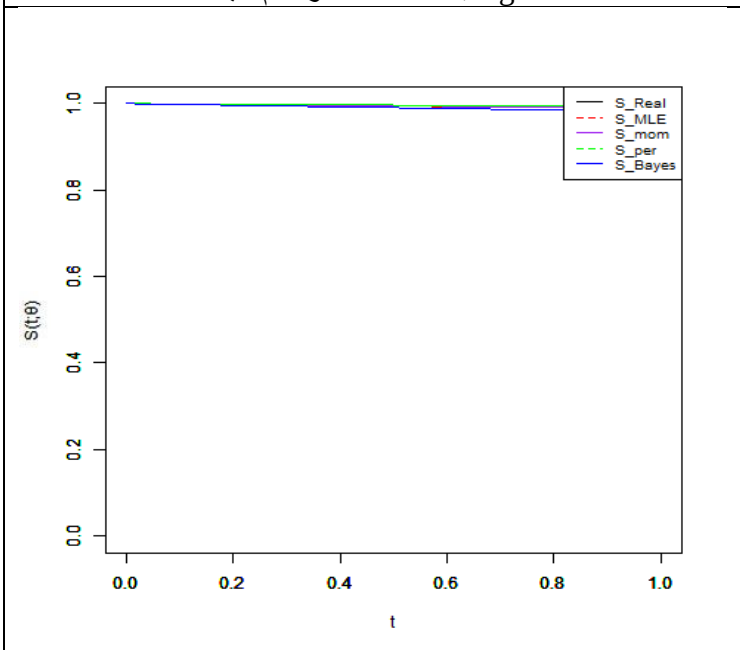
مخططات رسم دالة البقاء للتجربة االثالثة من تجارب المحاكاة يبدء من الشكل (61) وينتهي بالشكل (شكل (3-3090):



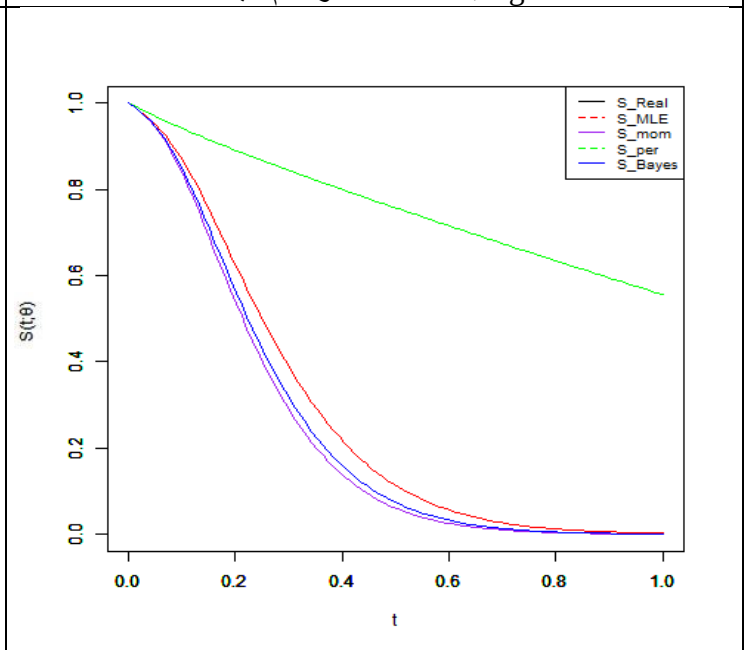
شكل (62) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



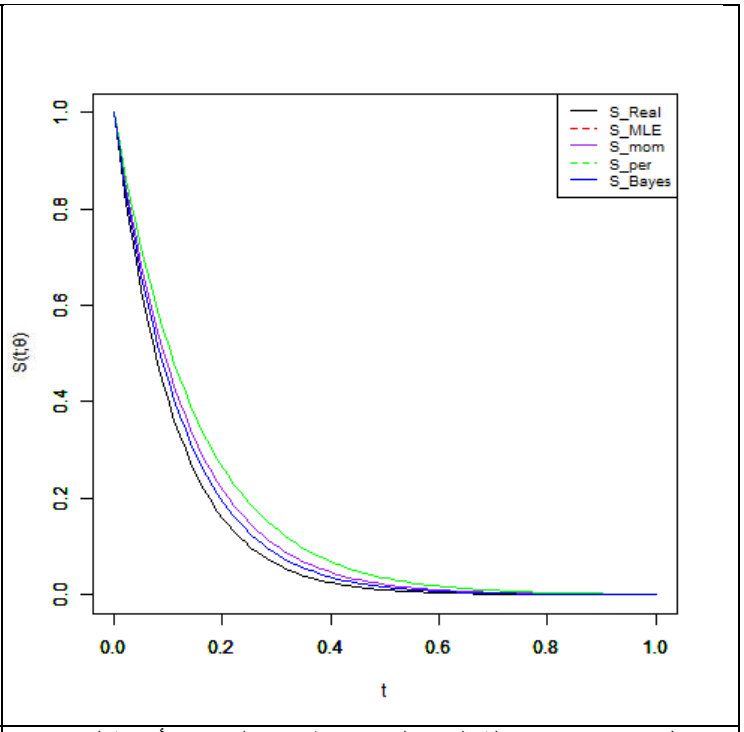
شكل (61) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



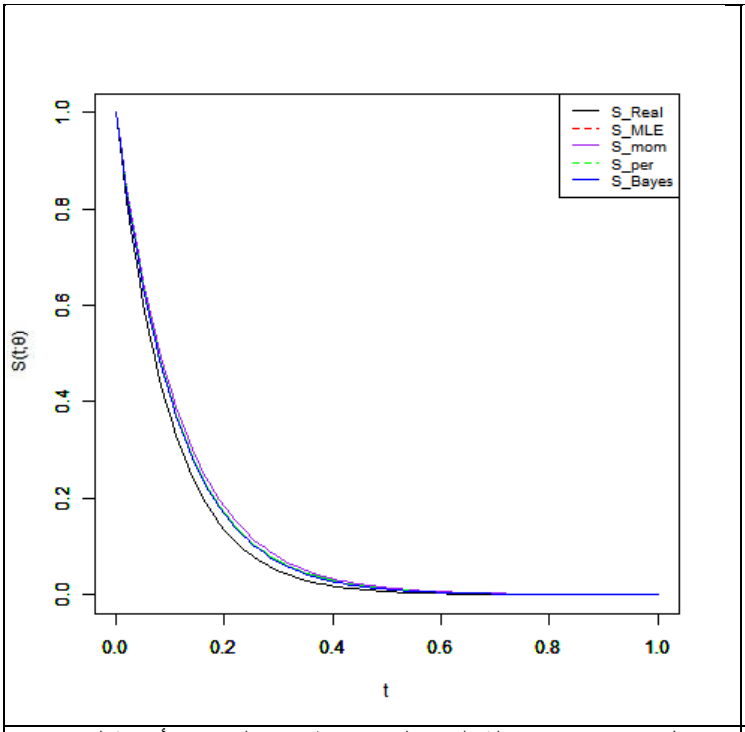
شكل (64) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



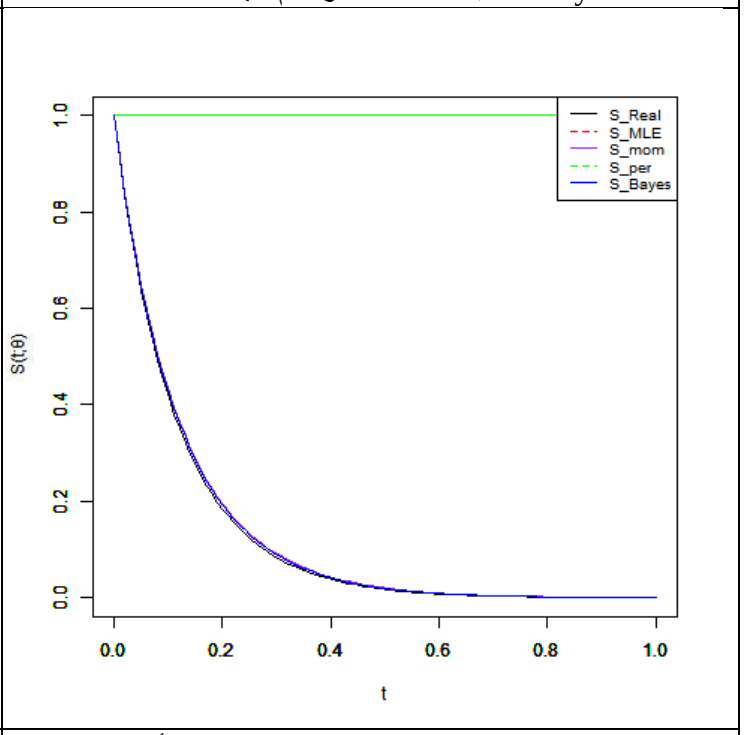
شكل (63) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



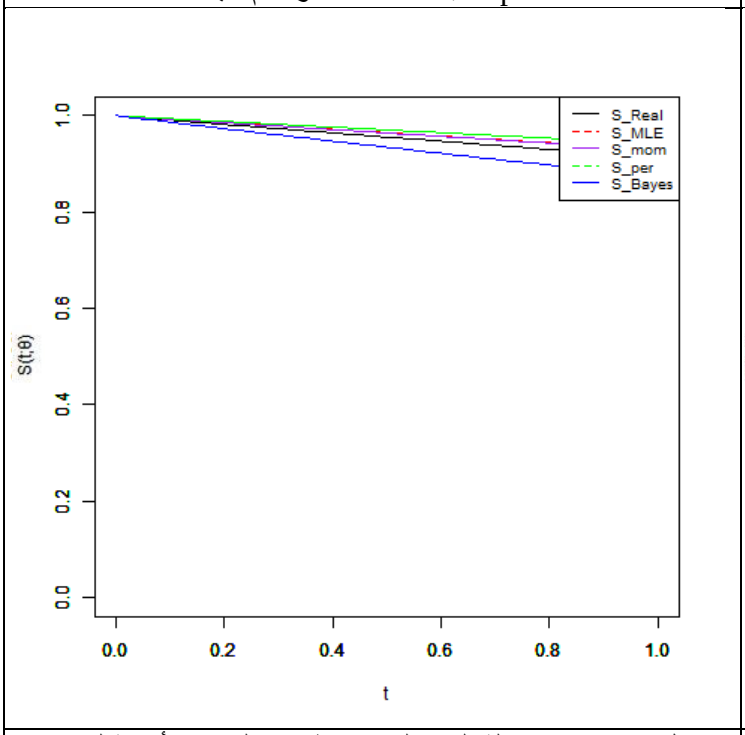
شكل (65) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



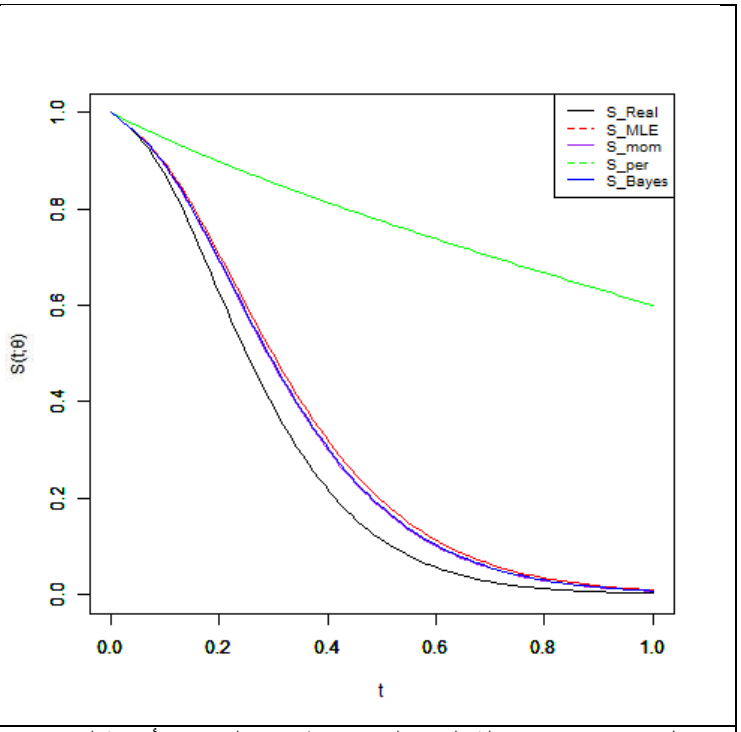
شكل (66) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=10



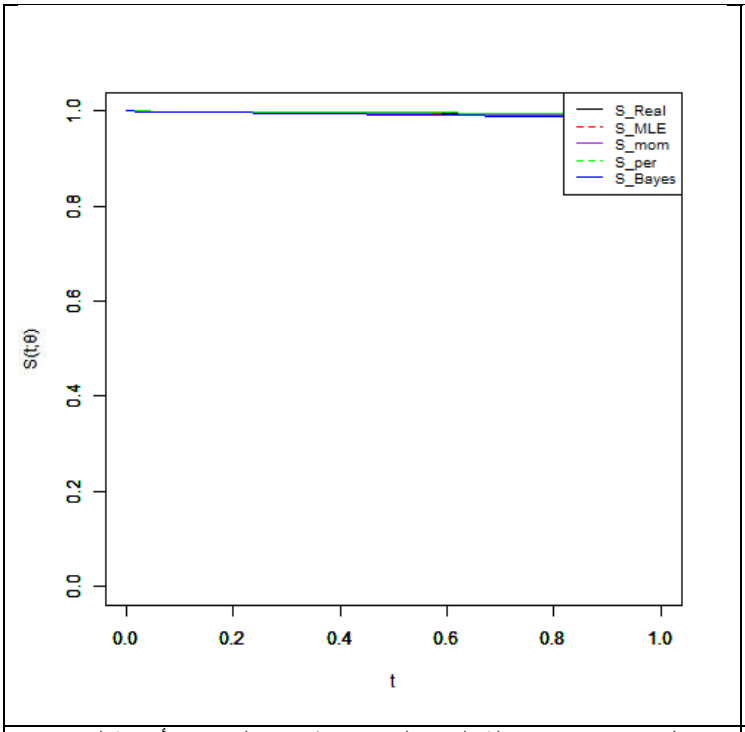
شكل (67) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



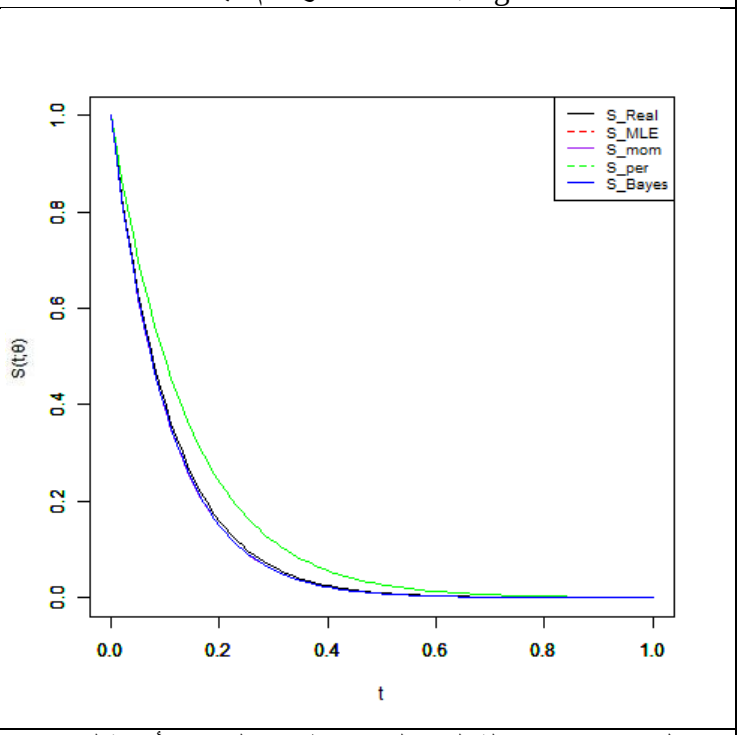
شكل (68) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



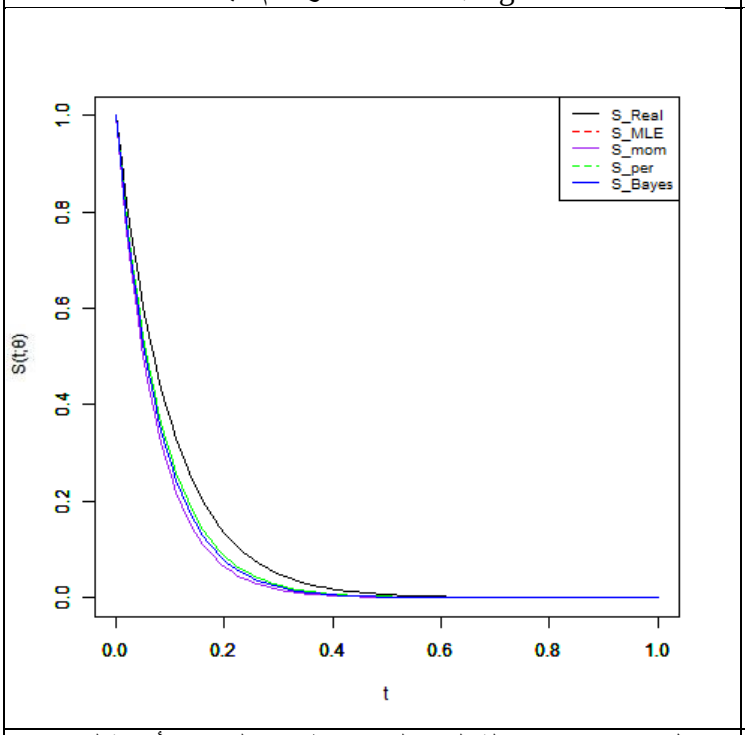
شكل (69) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



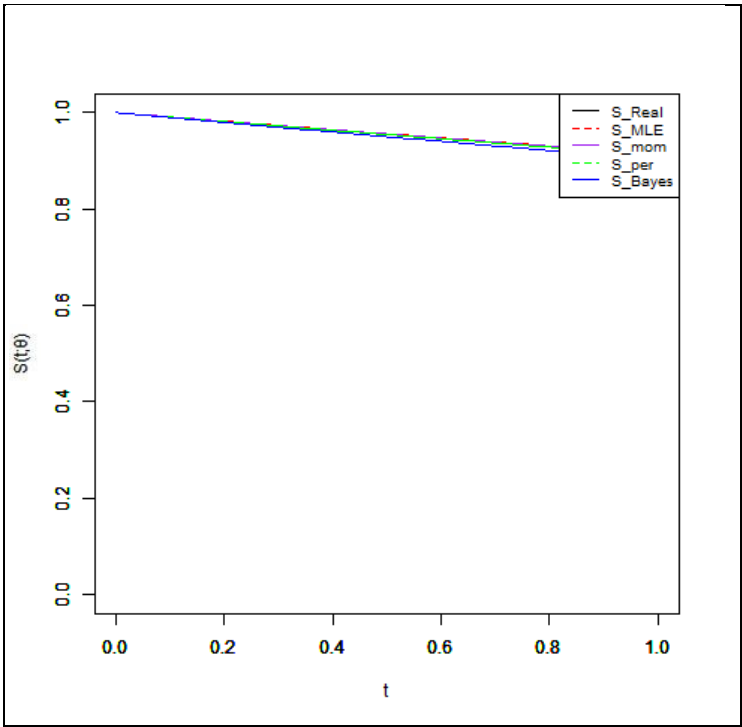
شكل (70) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



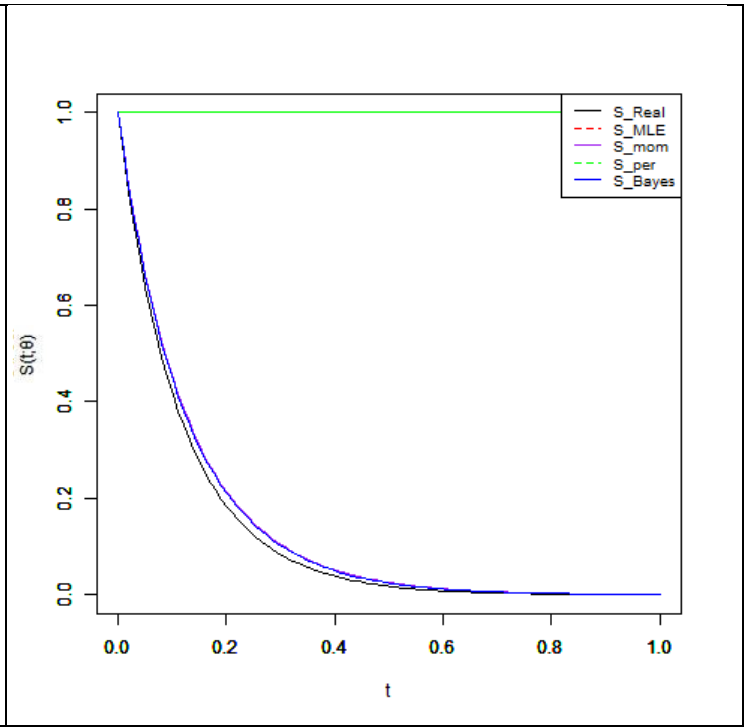
شكل (71) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



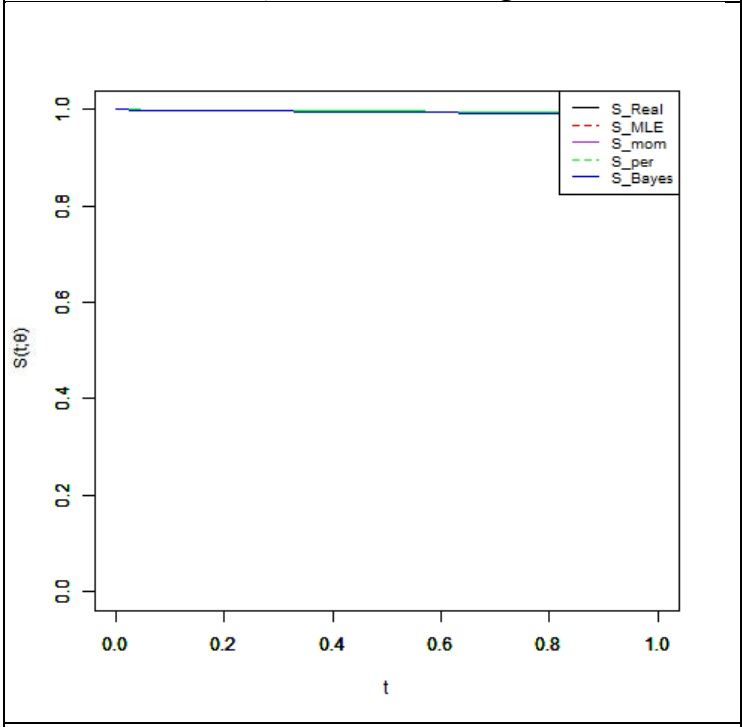
شكل (72) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=20



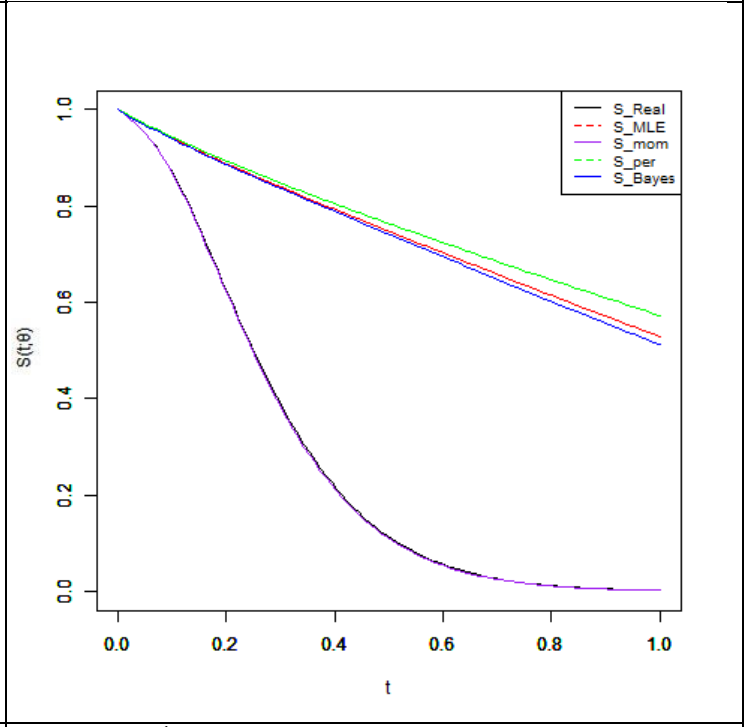
شكل (74) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



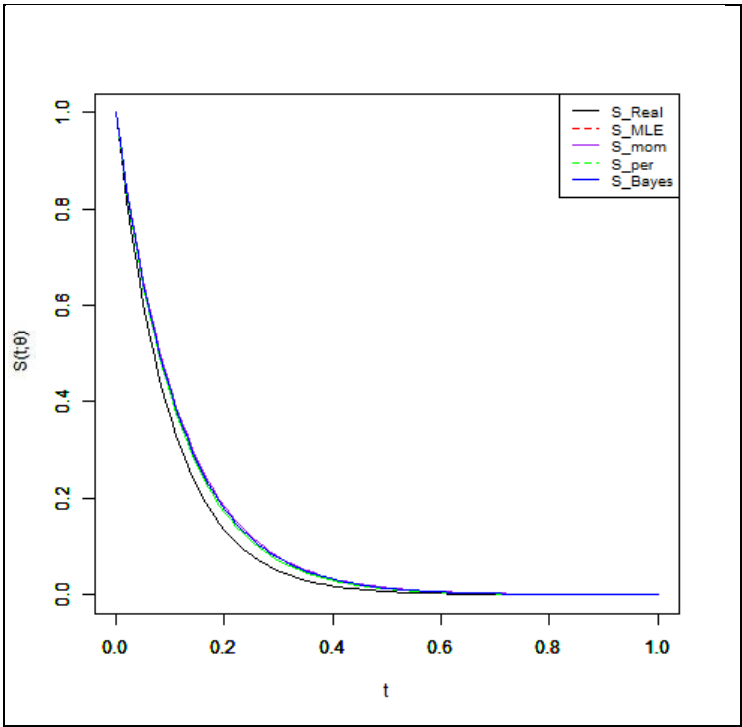
شكل (73) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



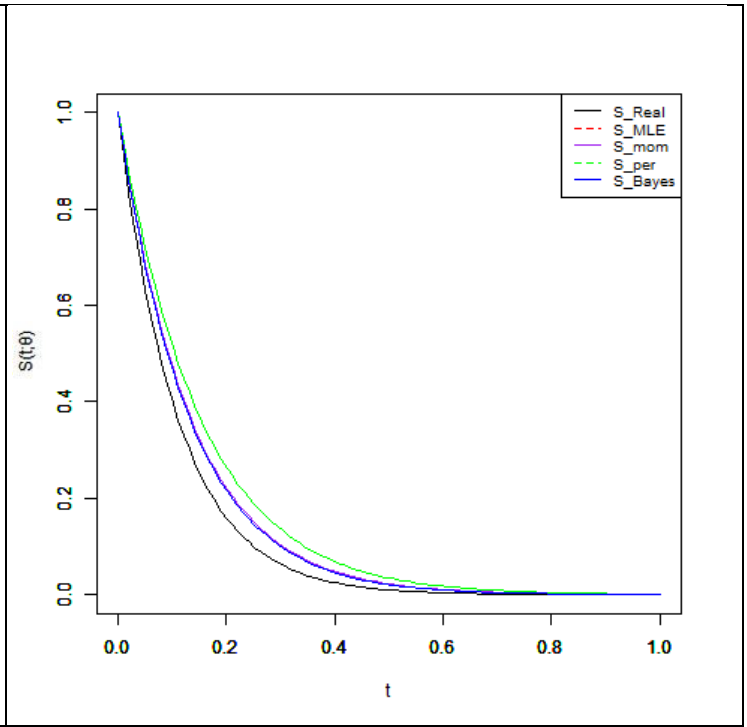
شكل (76) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



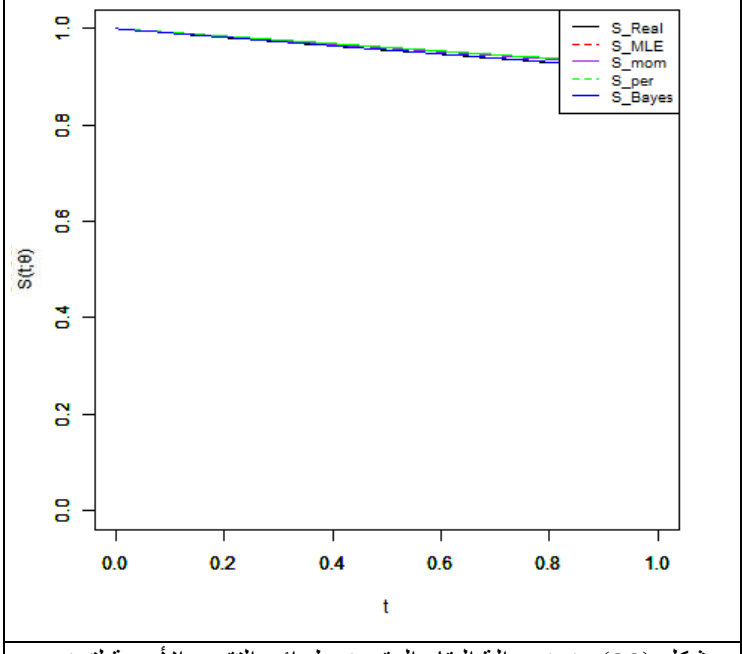
شكل (75) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



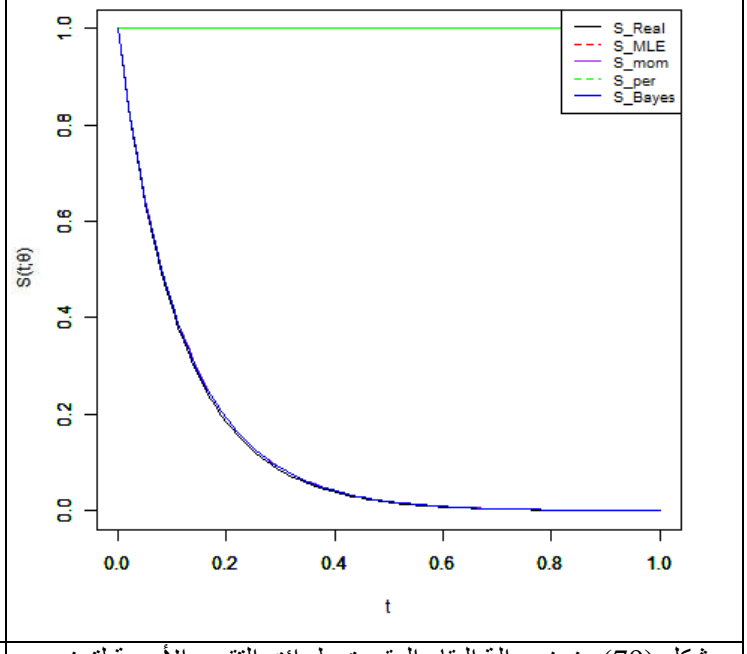
شكل (78) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



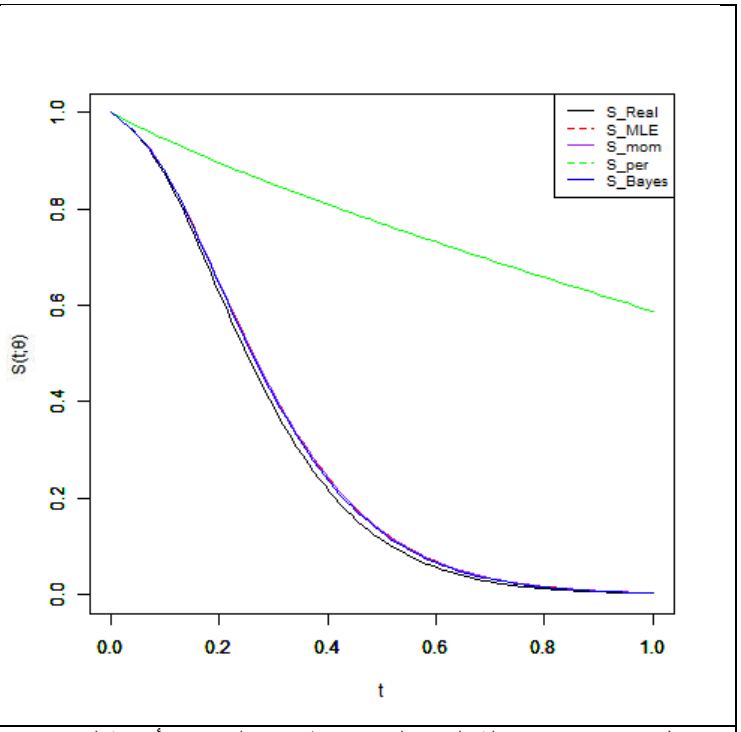
شكل (77) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=50



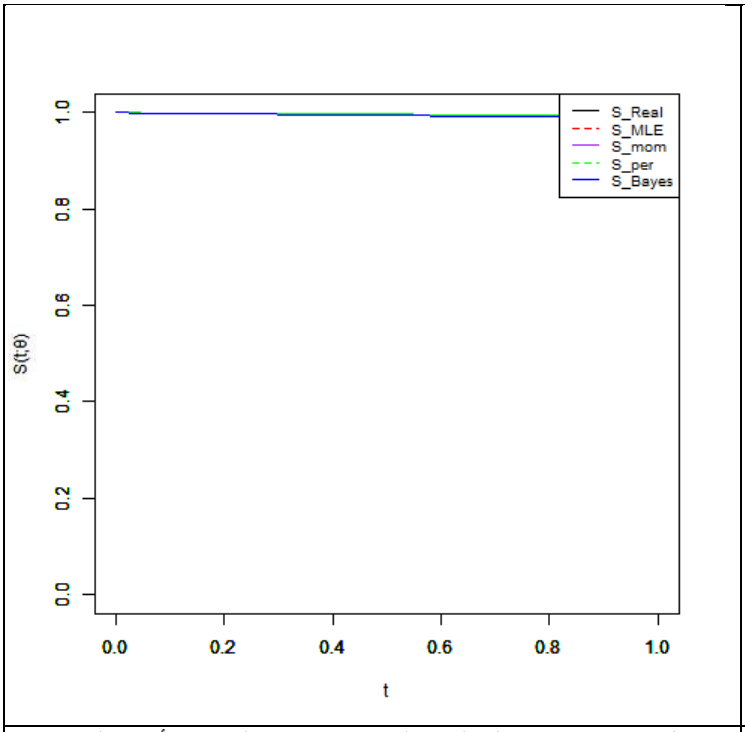
شكل (80) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



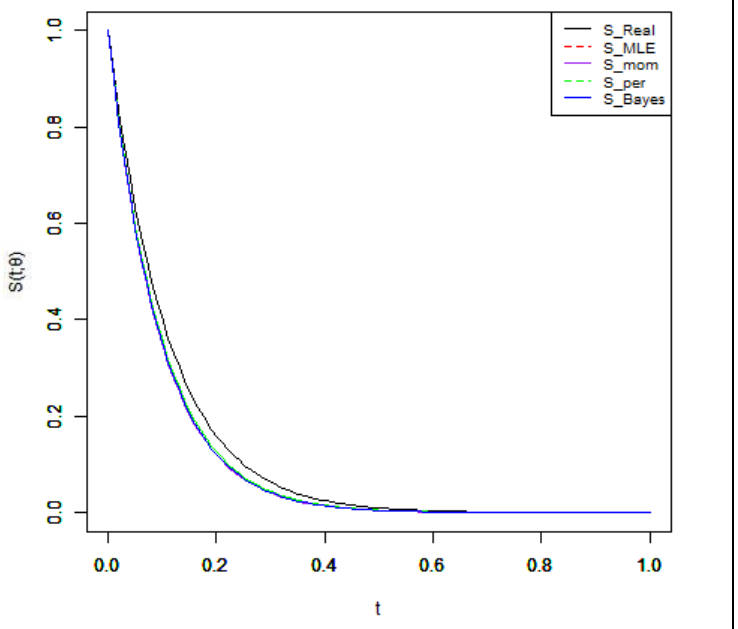
شكل (79) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



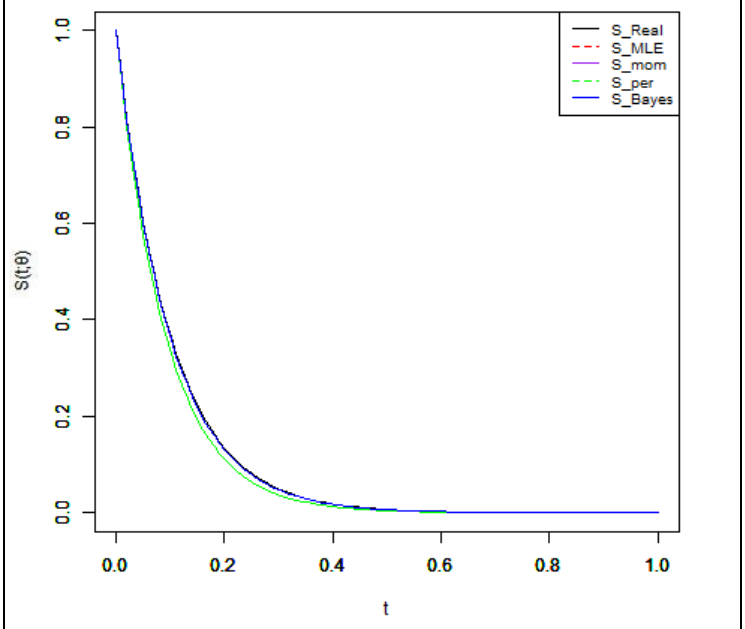
شكل (81) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



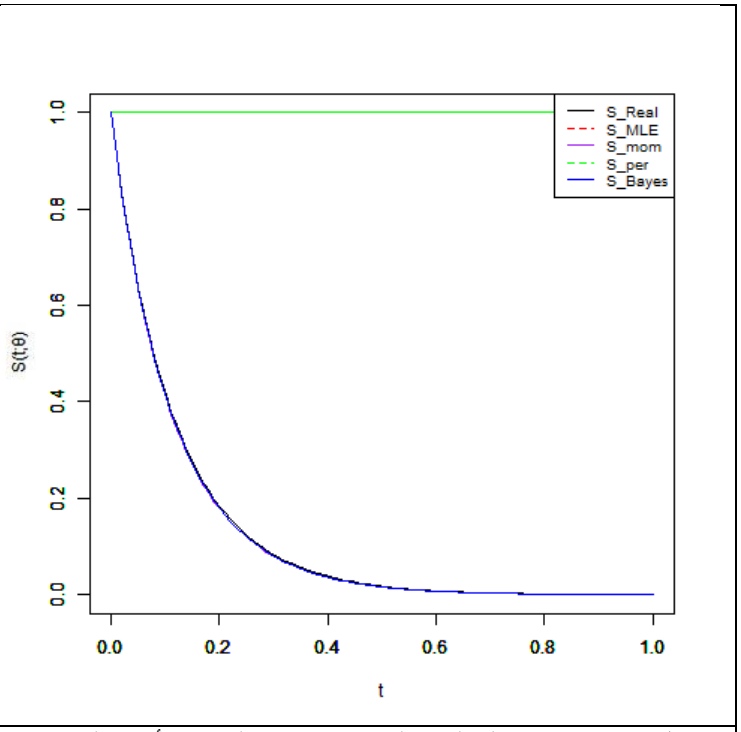
شكل (82) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



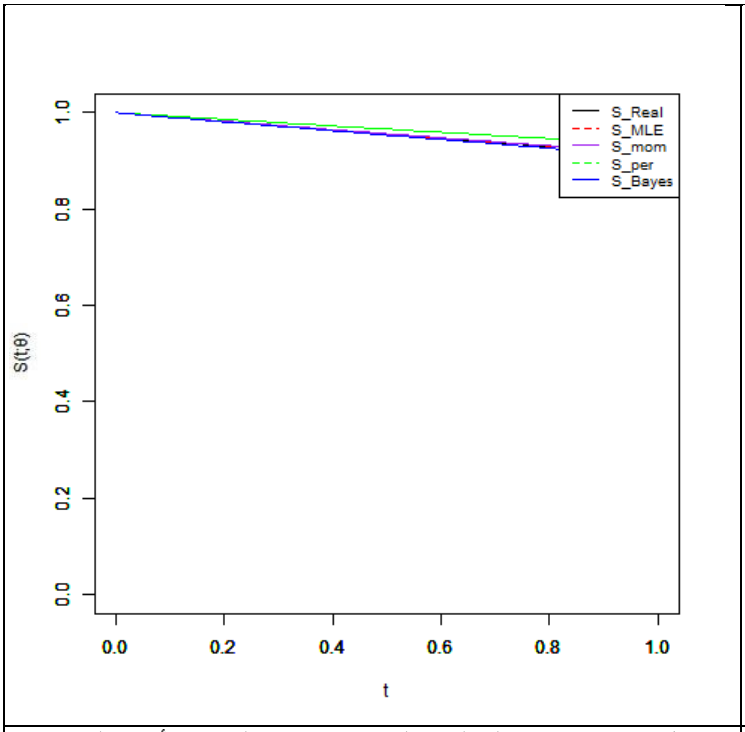
شكل (83) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



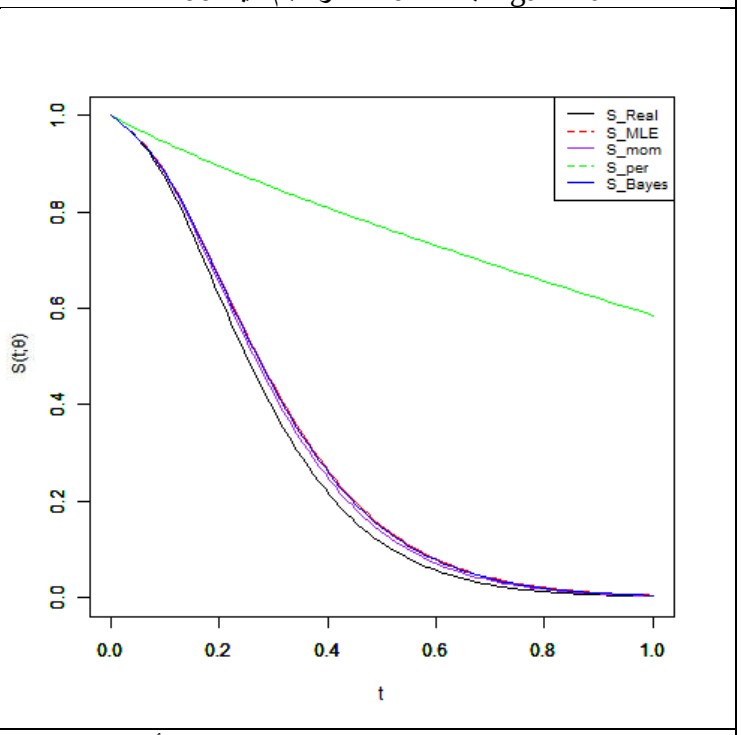
شكل (84) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=80



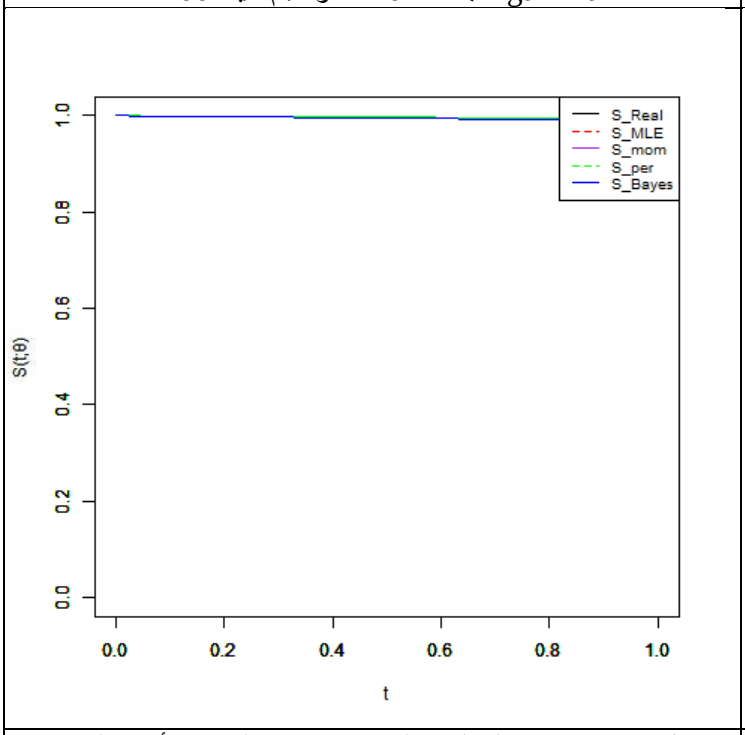
شكل (85) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=100



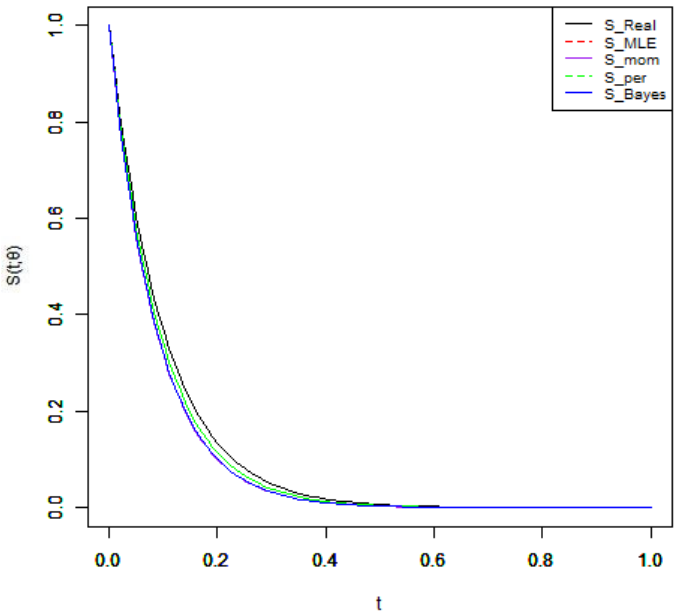
شكل (86) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma1 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=100



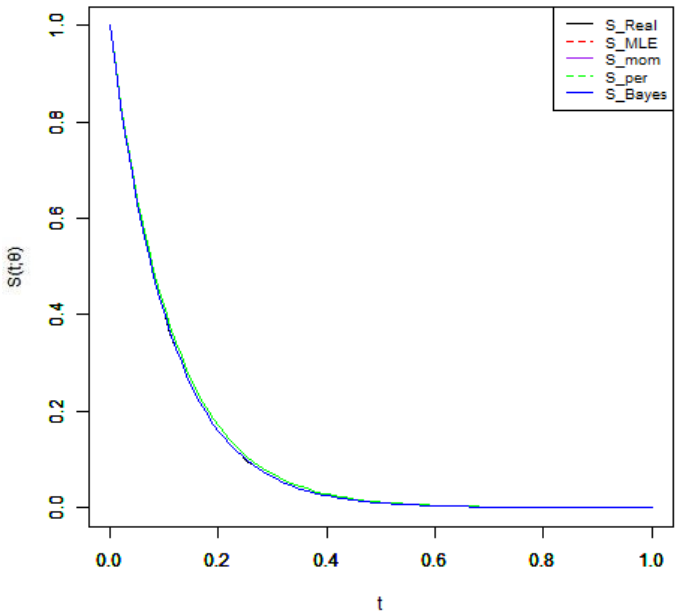
شكل (87) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma2 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=100



شكل (88) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Xgamma3 بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=100



شكل (90) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Exponential بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=100



شكل (89) منحني دالة البقاء المقدرة بطرائق التقدير الأربعة لتوزيع Lindley بمعلمة θ=10 وحجم عينة n=+100

Abstract

The interest in studying the survival function is one of the important topics in the statistical analysis because it is directly related to the life of the human race, as it studies possibilities that concern the medical aspect, such as the possibility of a period of remission for a person with a certain disease until recovery or death, or the possibility of the continuation of the effect of anesthesia on a patient during surgeries and others.

This thesis aims to study the survival function using the Xgamma (XG) distribution resulting from mixing the exponential distribution with the parameter (θ) with the gamma distribution with the scaling parameter (θ) and the parameter of Shape (3).

In this research, the characteristics of the Xgamma distribution have been studied and used in calculating the survival function, and three forms of distribution have been suggested (Xgamma1(XG1D), Xgamma2(XG2D), Xgamma3(XG3D). In addition, a comparison has been made with two well-known distributions, which are the Lendley distribution with one parameter (LD). θ) and the exponential distribution EXP(θ) using four different estimation methods (Maximum likelihood method, Moments method, Percentiles estimators method, standard Bayes method).

The importance of this research is to propose a new distribution that estimates the survival function more accurately by reducing the error between the real and the estimated.

The results of simulation experiments and analysis of real data showed that the standard Bayes method is the best method for estimating the survival function using the proposed distribution XG1D for patients with Covid-19 disease in the city of Najaf for the period of time specified in the research.

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
& scientific research
University of Al-Qadisiyah
College of Administration
and Economics
Department of Statistics

Survival function estimation of Xgamma distribution with application

A thesis submitted to the council of the college of Administration & Economics\ University of Al-Qadisiyah As partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Statistics Sciences

By

Karrar Radi Munaim AL-Sayeab

Supervised by

Prof. Dr. Mohammed Habeeb Al-Sharoot

1444 A.H 2023 A.D