جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء
الدراسات العليا

التقديرات البيزية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع التطبيق

رسالة قدمها الطالب

أنور فوزي علي

الى
مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة القادسية وهي جزء من متطلبات نيل شهادة الماجستير في علوم الاحصاء

باشراف

أ. د مهند فائز السعدون

١٤٤٤هـ ٢٠٢٣م

بسم الله الرحمن الرحيم

(قَالَ يَا قَوْمِ أَرَأَيْتُمْ إِنْ كُنْتُ على بَيِّنَةٍ مِنْ رَبِّي وَرَزَقَنِي مِنْهُ رِزْقًا حَسَنًا وَمَا أُرِيدُ أَنْ أُخَالِفَكُمْ إِلَىٰ مَا أَنْهَاكُمْ عَنْهُ إِنْ أُرِيدُ إِلَّا الْإِصْلَاحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ)

صدق الله العظيم

(سورة هود /الآية 88)

الشكــــــر والتقديـــــر

الحمد لله على إعطائي الإرادة والطاقة والصبر على انجاز هذا العمل

أود أن أعرب عن تقديري لموظفي وموظفات قسم الدراسات العليا في كلية الادارة والاقتصاد والامتنان الى كل منتسبي كلية الادارة والاقتصاد والى كل اساتذة قسم الاحصاء

والى مشرفي الأستاذ الدكتور مهند فائز السعدون لإشرافه وتوجيهاته التي كانت مفيدة لاستكمال هذه الرسالة

خالص الشكر لعائلتي الحبيبة

واخوتي واخواتي من أجل حبهم ومساندتهم

خالص شكري لأصدقائي الأعزاء على دعمهم وتشجيعهم

وأخيرًا أود أن أشكر كل من شارك

بطريقة أو بأخرى اثناء العمل

ومن الله التوفيق والسداد.....

الباحث

الاهـــــــداء

الى سيد البشرية الرسول الاعظم محمد (صلى الله عليه واله وسلم)

إلى سيدتي ومولاتي فاطمة الزهراء (عليها السلام)

إلى الغالي الذي عجزت الكلمات عن وصفه

والدي (رحمه الله)

إلى من غرس هذه البذرة فكان من ثمارها هذا الجهد المتواضع

والدتي العزيزة

الى اخوتي واخواتي

إلى كل من شجعني وآزرني لإكمال هذه المسيرة الغراء حباً واحتراما أهدي

جهدي المتواضع

انور

المحتويات

رقم الصفحة	الموضـــــــوع	ت
1-7	الفصل الاول منهجية الرسالة والدراسات السابقة	
١-٢	المقدمة	١.١
2	مشكلة الرسالة	١-٢
2	هدف الرسالة	١-٣
3-7	الاستعراض المرجعي	١-٤
8-29	الفصل الثاني	
8	المقدمة	٢-١
٨-1٢	المعادلات التفاضلية العشوائية	٢-٢
١٢-١٤	المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا	٢-٣
١٤-15	وجود ووحدانية الحل	1-3-2
15-19	طريقة اويلر العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا	٢-٣-٢
19-21	تقدير المعالم بأسلوب بيز للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا	٢-٤
21-23	التوزيع السابق والتوزيع اللاحق للمعالم	٢-٤-١
23-29	التوزيع اللاحق الشرطي الكامل	٢-٤-٢
29	خوارزمية Metropolis Hastings لتوليد عينات المعلمة d	3-4-2
30-47	الفصل الثالث	
30	المقدمة	٣-١
30-31	مفهوم المحاكاة	٣-٢
31-33	وصف التجربة	٣-٣
33-37	تجربة المحاكاة الأولى	4-3
37-41	تجربة المحاكاة الثانية	٣-٥
41-45	تجربة المحاكاة الثالثة	6-3
45-47	تحليل البيانات الحقيقية	7-3

48-49	الفصل الرابع	
48	الاستنتاجات	1-4
49	التوصيات	2-4
50-54	المصـــــــادر	
55	الخلاصة باللغة الإنكليزية	

جـــــــدول المختصــــــــرات

الاسم باللغة الإنكليزية	المختصر
Stochastic differential equation	SDE
Stochastic delay differential equation	SDDE
Geometric Brownian Motion	GBM
Wiener process	W(t)
Full Conditional Posterior Distributions	FCPD
Metropolis Hastings	MH
Deviance Information Criterion	DIC

جدول الاشكال

رقم الشكل	العـــــــــــــــــــــــــــنوان	الصفحة
1-3	رسم Trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الأولى للعملية SDDE	34
2-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الأولى لعملية SDDE	35
3-3	رسم Trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الأولى للعملية GBM	36
4-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الأولى لعملية GBM	36
5-3	رسم Trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثانية للعملية SDDE	38
6-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثانية لعملية SDDE	39
7-3	رسم Trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثانية للعملية GBM	40
٨-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثانية لعملية GBM	40
9-3	رسم Trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية SDDE	42
10-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثالثة لعملية SDDE	43
11-3	رسم Trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية GBM	44
12-3	رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثالثة لعملية GBM	44
١٣-3	رسم بيانات أسعار الصرف الموازي للفترة ٢٠٠٤-٢٠٢١	46

المستخلص

درست هذه الرسالة المعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني وتطبيقها في تجارب محاكاة وبيانات حقيقية ومقارنة نتائجها مع النموذج التقليدي المسمى بالحركة البروانية الهندسية. ان استخدام الطرائق العددية في ايجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً يتم دون الاشارة الى تقدير معامل هذه المعادلات. إذ ان تقدير معالم هذا النوع من المعادلات يعد ضرورة لفهم سلوك الظاهرة المدروسة لاسيما ان هناك ظواهر ذات سلوك عشوائي تعتمد على بيانات تاريخية (معلمة التخلف الزمني). أيضاً من المعروف ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تواجه الكثير من الباحثين المهتمين لاسيما بدراسة سلوك الظواهر المالية. لذلك تم تطبيق المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً كنموذج لدراسة سلوك بيانات أسعار صرف الدولار في السوق الموازي وتقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام أسلوب بيز ومقارنة تقديرات بيز مع تقديرات الطريقة الكلاسيكية المعروفة باسم نموذج الحركة البروانية الهندسية. إذ اظهرت نتائج تجارب المحاكاة والتطبيق العملي تفوق نموذج المعادلات التفاضلية ذات التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية في تمثيل سلوك تحركات اسعار الصرف.

الفصل الاول

منهجية الرسالة والدراسات السابقة

1-1 المقدمة Introduction

في السنوات الأخيرة تعد المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic differential equation) من الأساليب الرياضية المهمة المستخدمة في دراسة سلوك الظواهر المالية (أسعار الفائدة، أسعار الأسهم، أسعار الأصول، ..... الخ) وبالتالي تقسيم أداء هذه الظواهر أو البيانات المالية. أي أن المعادلات التفاضلية العشوائية توفر أطاراً طبيعياً لنمذجة السلوك العشوائي المتأصل في الكثير من العمليات الفيزيائية ذات الزمن المستمر ويمكن القول إن العمليات التفاضلية العشوائية تهتم بفهم ونمذجة ديناميكية الأنظمة وتطورها عبر الزمن. فضلاً عن ذلك أهتم الكثير من الباحثين بدراسة العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (Stochastic delay differential equations) من خلال إضافة معلمة التخلف الزمني، إذ أصبحت العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً أكثر مرونة وتطبيقاً في الكثير من المجالات العلمية من خلال اعتمادها على البيانات التاريخية للظاهرة المدروسة وليس فقط على الحالة الحالية للظاهرة المدروسة. يمكن القول ان المهتمين والباحثين في مجال توظيف المعادلات التفاضلية العشوائية في بيانات عالم المال قد اعتمدوا على النظريات المتقدمة في علم الرياضيات ذات الصلة بتتبع ودراسة سلوك حدوث الظواهر ذات الزمن المستمر مما ساعد على الاستخدام الواسع للنماذج العشوائية للظواهر التي تتسم بالتقلبات المتكررة بهدف إيجاد الحل (اتخاذ القرار) للعديد من عقود ومشاكل التسعير في عالم المال.

يعد عالم المال (Finance world) بمثابة عالم الأشياء العشوائية والعالم الذي لا يمكن التنبؤ بظهور حوادثه. ان التطور المبتكر للوسائل الرياضية في مجالات الرياضيات المالية والتعقيدات المرافقة للتغييرات الحاصلة بأسواق المال رافقهُ الكثير من العقود المالية والصفقات المالية في عالم صناعة الأموال مع الاخذ بنظر الاعتبار العوائد والمخاطر من هذه التداولات. وبالنتيجة لتسعير العقود والصفقات المستقبلية فأن عدم التأكد مما يحدث مستقبلاً من تسعير الصفقات أصبح من أكثر المواضيع اهتماماً في حقل الرياضيات المالية والتحليل الكمي الحالي. كذلك فان النموذج الرياضي للحركة البروانية الهندسية يعد نموذجاً رياضياً مالياً لنمذجة أسعارالاصول في نماذج بلاك – شولز والتي تعد من أشهر النماذج الرياضية استخداماً لنمذجة أسعار الوصول والتبادلات التجارية، لكن هنالك نقاط خلل في نماذج الحركة البروانية الهندسية كعملية عشوائية تقريبية في تمثيلها للتطور (التغيرات) التي تحصل باسعارالأصول. أن من المعروف في التعاملات بأسواق المال نجد ان من المهّتمين بالتداول يستفيدون من المعلومات السابقة (التاريخية) لحركة الأسعار، مثل أسعار الأسهم التاريخية بهدف التنبؤ بتحركات السوق وبالتالي

اتخاذ القرارات المثلى في الاستثمار من عدمه. وبهذا فان الاعتماد على المعلومات التاريخية (المعلومات السابقة) من خلال إضافة حد التخلف الزمني الى نموذج الحركة البروانية الهندسية القياسية فأننا نحصل على نموذج معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنياً والتي تعد صيغة رياضية أكثر مرونة للتعامل مع التطورات (التغيرات) التي تحصل في أسعار الأصول في أسواق المال غير الكفؤ، إذ ان سوق المال غير الكفؤ efficient market السوق الفعال هو السوق الذي يتم فيه نقل جميع المعلومات بشكل مثلي وكامل وفوري وبدون تكلفة. في هذه الرسالة سوف نركز على الدراسات التي تناولت تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً والدراسات ذات العلاقة القريبة منها.

١-٢ مشكلة الرسالة problem statement

يتطلب إيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تقدير معالم هذا النوع من المعادلات إذ من الضروري فهم سلوك تغير قيم هذه المعالم عند دراسة أنظمة المعادلات ذات السلوك العشوائي لاسيما في حالة كون أنظمة هذه المعادلات تعتمد في سلوكها على البيانات التاريخية (معلمة التخلف الزمني) أيضاً من المعروف ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً وجه الكثير من الباحثين المهتمين لاسيما بدراسة سلوك الظواهر المالية.

3-1هدف الرسالة Thesis objectivists

تهدف هذه الرسالة إلى مناقشة المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من خلال ما يأتي: -

١- تطبيق المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً نموذجاً لدراسة سلوك بيانات أسعار صرف الدولار بالسوق الموازي.

٢- تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام أسلوب بيز.

٣- مقارنة تقديرات بيز مع تقديرات الطريقة الكلاسيكية المعروفة باسم نموذج الحركة البروانية الهندسية.

١-٤ الدراسات السابقة Literature Revieu

ان المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تعد امتداداً للمعادلات التفاضلية العشوائية في هذه الحالة الاخذ بنظر الاعتبار البيانات التاريخية (البيانات السابقة) لأسعار الأصول او أسعار الأسهم. الدراسات والأبحاث أدناه تمثل التطور التاريخي لهذا النوع من المعادلات مع التركيز على الدراسات التي تناولت تقدير معالم هذا النوع من المعادلات علماً ان الدراسات التي تناولت الجانب البيزي قليلة جداً.

- في عام ١٩٩٥ قدم الباحثان (Nechaeva) و(Mackey) بحثاً عن دراسة عزوم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً. إذ تمت دراسة سلوك حلول هذا النوع من المعادلات من خلال تقدير العزوم (العزم الأول والثاني) للمعادلات التفاضلية العشوائية الخطية المتخلفة زمنياً. في حالة وجود صفر تمثل الضوضاء المضافة (Additive Noise) وأيضاً في حالة وجود صفر يمثل ضوضاء مضاعفة (Multiplicative Noise).

- في عام ٢٠٠٠ قدم الباحثان (Kutoyants) و (Küchlev) بحثاً عن تقدير بيز في معادلة تفاضلية عشوائية خطية بوجود تخلف زمني. إذ ركز البحث على تقدير معلمة التخلف الزمني باستخدام أسلوب بيز من خلال دراسة السلوك المحاذي (asymptotic) لدالة الإمكان الأعظم والتقدير البيزي .بين الباحثان ان مقدرات بيز المستحصل عليها هي مقدرات متسقة (consistent) فضلاً عن ذلك تم وصف توزيعاتها المحاذية عندما حجم العينة يقترب إلى المالانهاية.

- في عام ٢٠٠٤ قام الباحث Stoica بدراسة نموذج لأسواق المال مستخدما المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا . كذلك استخدم هذا النوع من المعادات التفاضلية بديلا عن عمليات Black Scholes. واستخدم في هذا البحث بيانات اسواق المال والتداوات السابقة ، لدراسة استقرار التداولات المالية واثبت ان دراسة سلوك تحركات البيانات المالية باستخدام المعادلات المتخلفة زمنيا يكون اكثر مرونة منه باستخدام نماذج Black Scholes .

-في عام ٢٠٠٥ قدم الباحث (Kutoyants) بحثاً عن تقدير معلمة التخلف الزمني للمعادلات التفاضلية العشوائية. إذ تم تقدير معلمة التخلف باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وتم أيضا توظيف معيار الكفاءة المحاذية (asymptotic efficiency) للحكم على نوعية المقدر.

- في عام ٢٠٠٧ قدم الباحثان (Mackey) و (lei) بحثاً عن توليد عزوم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً. تدارس البحث العزوم المتولدة من هذا النوع من المعادلات في حالة وجود الضوضاء المضافة والضوضاء المضاعفة. تم تطبيق الحل المقترح للمعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً على بيانات الخلايا الجذعية. كذلك تم دراسة استقرارية العزم الاول لحل المعادلة الخطية في حال افتراض ان المعادلة العشوائية تعاني من الاضطرابات العشوائية وفي حاله أخرى اعتبرها لا تعاني من الاضطرابات العشوائية وكانت النتيجة العزوم متماثلة في كل الحالتين.

- في عام ٢٠٠٧ قدم الباحثان (Kuchler) و(vasilier) بحثاً عن تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المختلفة زمنياً. كان الهدف في هذا البحث هو تقدير معالم العملية العشوائية بوجود التخلف الزمني، إذ كانت المعادلة التفاضلية العشوائية تحتوي على معادلة متوسط معدل النمو (drift) ومعلمة التقلبات (volatility) تم بناء ما يسمى خطط التقدير المتسلسل (sequential estimation plans)بتخصيص متوسط مربعات الدقة وباستخدام طريقة تدعى طريقة الارتباط.

- في عام ٢٠٠٨ قدم الباحث (Girolomi) بحثاً عن الاستدلال البيزي في تقدير معالم المعادلات التفاضلية بوجود التخلف الزمني بوصفها نموذجاً رياضياً لتمثيل الأنظمة الديناميكية. فقد استخدم الباحث نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً لتمثيل بيانات الكيمياء الحياتية، فضلاً عن ذلك قام الباحث باستخدام منهجية الاستدلال البيزي من خلال تخصيص توزيعات مسبقة واشتقاق التوزيعات اللاحقة لمعالم نموذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية بوجود تخلف زمني. أنطلق الباحث من خلال فكرة ان هناك عدم تأكد حول سلوك المعلمات الخاصة بالنموذج المدروس لذلك افترضها متغيرات عشوائية وخصص لها توزيعات مسبقة.

- في عام ٢٠٠٨ قدم الباحث (Rao) بحثاً لتقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من خلال توضيح الحركة البروانية الجزئية ، في هذا البحث قدم الباحث معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنياً لكن فيها حدث التقلبات يعتمد على عمل الحركة البروانية الجزئية في تمثيل الاخطاء. ايضاً تمت دراسة تقدير معالم المعادلة المقترحة باستخدام طريقة الامكان الاعظم تحت افتراضات نظرية الغاية المركزية.

- في عام ٢٠٠٩ قدم الباحث (kuchler) و (Vasilier) بحثاً بين تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً بافتراض حفظ التقدير المتسلسل وباستخدام طريقة تدعى

طريقة الارتباط الموزون. فضلاً عن ذلك تم تدارس سلوك مقدرات الطريقة المتقدمة من خلال دراسة التقارب المحاذي للمقدرات عندما يكون حجم العينة كبيراً جداً. في هذا البحث افترض الباحثان ان العملية العشوائية هي خطية وذات زمن مستمر بوجود تقلبات تتبع عملية الحركة البروانية.

-في سنة ٢٠٠٩ قدم الباحث (Swords) رسالة ماجستير حول تطبيق المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً في أسواق المال إذ استعرض الباحث الطرق العددية لحل نماذج المعادلات المتخلفة زمنياً، فضلاً عن ذلك تطرق الى استخدام النماذج الخطية والنماذج اللاخطية للمعادلات التفاضلية العشوائية.

في عام ٢٠١٠ قدم الباحث (Xu) وآخرون بحثاً عن المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود تخلف زمني. ناقش الباحثون كيفية تطبيق هذا النوع من المعادلات التفاضلية في الاتصالات، إذ أقترح الباحثون مخطط اتصالات جديداً يعتمد على ما يسمى تعديل وقت التأخير (delay time modulation) المعادلة المقترحة يتم من خلالها تحويل التخلف الزمني الى معادلة تخلف زمني. تم أيضاً توضيح عمل المعادلة المقترحة من خلال دراسة محاكاة وكانت النتائج التحليأتية للمعادلات أنها حلول مثلى مما يدل على حصانة المعادلة للمقترح.

- في عام ٢٠١٢ قدم الباحثان (Cao) و(Wang) بحثاً عن تقدير معالم نماذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً. إذ وضح الباحثان ان طريقة الامكان الأعظم لا يمكن تطبيقها مباشرتا لهذا النوع من المعادلات لأنها الحل التحليلي فضلاً عن ذلك فأن الحل العددي أيضاً لا يمكن تطبيقه لأنه يحتاج الى بينات ومعلومات سابقة (تاريخية) في العملية الديناميكية للظاهرة. إذ أقترح الباحثان أستخدام طريقة شبه معلمية لإيجاد الحل.

- في سنة ٢٠١٥ قدم (Zheng) بحثاً تناولت المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً بوصفها نموذجاً لأسعار الأصول. وركز الباحث على تقدير معالم المعادلات الخطية التفاضلية العشوائية المختلفة زمنياً إذ قارن النتائج مع نتائج نماذج كلاسيكية. حيثُ طبق نموذج المعادلات المتخلفة زمنياً على بيانات حقيقة لأسعار الأسهم وقدر معالم النموذج وقارنها مع مقدرات نموذج الحركة البروانية الهندسية.

- في عام ٢٠١٩ قدم الباحثان (Forman) و (Picchini) بحثاً عن الاستدلال البيزي في المعادلات التفاضلية العشوائية بوصفها نماذج ذات تأثيرات مختلطة. استخدم الباحث خوارزمية (Psendo-marginal MCMC) مستخدماً دالة أمكان بيزية تسمى (Synthetic) تم تطبيق

الخوارزميات على بيانات طبية، إذ استخدم الباحث عينة بيانات صغيرة مما اعطى دعماً لاختبار توزيع مسبق لدعم دالة الإمكان(البيانات) إذ توصل الباحث الى ان الخوارزميات المقترحة تعمل بشكل أفضل عند حجوم العينات الصغيرة.

- في عام ٢٠٢٢ قدم الباحثان (Xi) و(Hu) بحثاً عن تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معلمة (drift) ومعلمة (diffusion).
في هذا البحث استخدم الباحثان دوال معينة ومن خلال تدارس التقارب للمعلمات المقترحة تبين ان المقدرات المستخرجة هي مقدرات متسقة وتتقارب بمعدل معين. كذلك تم افتراض عده أمثلة تبين من خلالها فعالية العمل المقترح.

- في عام ٢٠٢٢ قدمت الباحثة (شذى كاظم عواد) رسالة ماجستير حول الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا مستخدمة طريقة اويلر العددية في ايجاد الحلول التقريبية لهذا النوع من المعادلات التفاضلية من خلال تجربة محاكاة وتحليل بيانات لاسعار الصرف في العراق.

في عام ٢٠٢٢ قدم الباحثان Awaad و Al-sasdony بحثا حول ايجاد الحلول التقريبية لنوع من المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا المسماة Black-scholes إذ تم افتراض وجود تخلف زمني في كل من drift و diffusion وتطبيق هذا النوع على بيانات سوق التصريف الموازي للدولار مقابل الدينار العراقي،إذ اصدرت النتائج اهمية معلومات التخلف الزمني في تتبع سلوك بيانات اسعار الصرف مستخدمين طريقة اويلر العددية في ايجاد مسار الحل التقريبي.

في عام ٢٠٢٢ قدم الباحثان Awaad و Al-sasdony بحثا حول دراسة سلوك التخلف الزمني في المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا وتتبع الحل العددي لهذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة اويلر العددية. إذ اظهرت النتائج تقارب الحل العددي لطريقة اويلر مع الحلول الحقيقية في معظم تجارب المحاكاة.

ومن الاطلاع على الدراسات السابقة يتبين لنا شحة المصادر العربية بموضوع المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا سواءً على مستوى البحوث العلمية او رسائل واطاريح، الامر الذي حفز الباحث بالبحث في موضوع تقدير معالم لمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا باسلوب بيز مستخدمين خوارزمية كبس وخوارزمية متروبولس- هاستنكز وهو مايعد اضافة علمية في هذا الموضوع على مستوى الجامعات العراقية.

الفصل الثاني

الجـــــــــانب النظري

٢-١ المقدمة Introduction:

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً احد اهم انواع المعادلات التفاضلية العشوائية وذلك لما توفره من مرونة للتعامل مع الاطار الطبيعي لحركة تغيير الاسعار (اسعار الاسهم او اسعار الاصول) أي ان لها قابلية لوصف سلوك ديناميكية اسواق المال من خلال نمذجة هذه الديناميكية. فضلاً عن ذلك فأن المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تأخذ بنظر الاعتبار جميع المعلومات المتوفرة (التاريخية) في تحركات الاسعار في سوق المال عند نمذجتها. وكما بينا سابقاً فأن هذا النوع من المعادلات غالباًغالباً ما تتكون من حدين الاول هو مايسمى بالحد المحدد او الحتمي (deterministic part) والحد الثاني هو الحد العشوائي (stochastic part) إذ ان الجزء الاول غالباً ما يشير الى حركة الاسواق المتوقعة والتي يمكن التنبؤ بها وانها بمثابة استثمار خالٍ من المخاطرة لكونه لا يخضع الى اي تقلبات ، لكن الجزء الثاني المتمثل بالحد العشوائي غالباً ما ينمذج التغيرات العشوائية الحاصلة في سوق المال بسبب بعض الاثار او الاسباب الخارجية غير المتوقعة.**[Bahar,2019]**

نتيجة لذلك بدل من افتراض ان اسعار الاسهم او اسعار الاصول تتصف بخاصية ماركوف او انها تتبع الحركة البروانية الهندسية فأن النمذجة باستخدام المعادلات التفاضلية المتخلفة زمنياً تفترض ان تطور (حركة او تغير) اسعار الاسهم المستقبلية لا تعتمد على السعر الحالي للسهم وانما على الاسعار السابقة.

في هذا الفصل نتطرق الى اهم التعاريف والنظريات المتعلقة بهذا النوع من العمليات التفاضلية.

٢-٢ المعادلات التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equations

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية بمثابة معادلة رياضية تشتمل على دوال (functions) فضلاً عن مشتقاتها. وغالباً ما تكون الدوال هي بمثابة كميات رياضية (مثل المتوسط او اي دالة ببيانات الظاهرة المدروسة) اما مشتقاتها فتمثل معدل التغير (rate of change) في هذه الكميات او الدوال، وباستخدام المعادلات التفاضلية يمكن وصف العلاقة بين هذه الدوال ومشتقاتها. لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية: **[Carlsson et al.,2010]**

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + \alpha N(t)dW(t) \quad \ldots (1-2)$$

إذ ان

$W(t)$: تمثل الحركة البروانية Brownian Motion

$r(t)$: هو الجزء المحدد (الحتمي) deterministic

α: هو عدد يمثل مقدار التقلبات (Volatility)

$N(t)$: تمثل حالة الظاهرة المدروسة عند الزمن t.

من اجل فهم المعادلة التفاضلية العشوائية $(2-1)$ يتطلب الامر ادراج التعاريف الاتية:

تعريف (١) العملية العشوائية Stochastic Process

[Skorokhod,2004],[Florescu,2014], [Althary,1990]

العملية العشوائية هي مجموعة من المتغيرات العشوائية $\{X(t); t \in T\}$ معرفة على الفضاء الاحتمالي، وتأخذ قيماً من فضاء الحالة (State space) بالاعتماد على الزمن t ، فإذا كانت $T = N = \{1,2, \ldots\}$ فأن العملية العشوائية يقال بأنها عملية الزمن المتقطع واذا $T = [0, \infty]$ فأن العملية يقال بأنها عملية زمن مستمر. ان T تدعى Index set او *parameter set* وهي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية.

تعريف (٢) الحركة البروانية Brownian Motion

[Karatzas and Shreve 1991]

الحركة البروانية او عملية وينر Wiener process هي عملية عشوائية يرمز لها $\{W(t); t \geq 0\}$ وتحقق الشروط الاتية: [**Olfosson and Andersson, 2003**]

١- عند الزمن $t = 0$ فأن $W(0) = 0$

٢- اذا كان $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ فأن

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

تكون مستقلة

٣- أن $W(t+s) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$ لكل من $t, s \geq 0$.

تعريف (٣) : الضوضاء البيضاء White Noise [Hauser,2016]

الضوضاء البيضاء هي متغير عشوائي B_t إذ يحقق الشرط الآتي:

$$P(B_t|B_\tau) = P(B_t)$$

لكل قيم $t > \tau \in T$. وهذا يعني ان التاريخ السابق لقيم المتغير العشوائي لاتحتوي اية معلومات عن المستقبل. ان مشتقة الحركة البروانية تعرف على انها الضوضاء البيضاء وتعرف رياضياً بما يأتي:

$$\frac{d}{dt}W(t) = B_t$$

إذ ان B_t تدعى بالضوضاء البيضاء (white noise). **[Grigoriu, 1997]**

تعريف (٤): المعادلة التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equation

[Zheng,2015],[Cordoni and Di Persio, 2017],[Evans, 2013]

نفرض ان $W(t)$ هي عملية الحركة البروانية العشوائية وان $g(.), f(.)$ هي دوال فأن العملية التفاضلية العشوائية يمكن تعريفها بما يأتي:

$$dx(t) = f\big(t, x(t)\big)dt + g(t, x(t))dW(t); \quad 0 \le t \le T \qquad \dots(2-2)$$

بأفتراض ان $x(0) = x_0$ هو متغير عشوائي وان الدوال f, g معرفة بما يأتي:

$f: [0, T] \times R^n \longrightarrow R^n$

$g: [0, T] \times R^n \longrightarrow R^{n+m}$

إذ ان:

m هو عدد التغيرات لعملية الحركة البروانية

n هي عدد المتغيرات العشوائية X

R تمثل مجموعة الاعداد الحقيقة

***ملاحظة*(2 – 1)**: ان المعادلة التفاضلية العشوائية (2 – 2) تكتب باستخدام التكاملات بالصيغة الاتية: **[Florescu, 2014],[Klebaner, 2005]**

$$X(t+s) = X(t) + \int_{t}^{t+s} f\,(X(u),u)du + \int_{t}^{t+s} g\,(X(u),u)dw(u) \,... (3-2)$$

وبافتراض ان$S = 0$ فانه يمكن اغالباً كتابة المعادلة (2 – 3) بما يأتي:

$$X(t) = X(0) + \int_{0}^{t} f\,(X(u),u)du + \int_{0}^{t} g\,(X(u),u)dw(u) \,... (4-2)$$

عندئذ وبناءاً على المعادلة (2 – 4) يمكن القول بأن العملية العشوائية $\{X_t\}_{t\geq 0}$ هي عملية Itô ($\text{Itô}\ process$) والتي غالباً ما تتكون من تكاملين الاول يدعى تكامل $Riemann$ والثاني يدعى التكامل العشوائي (stochastic integral) . **[Han, 2005]**.

تعريف(٥): Martingales (عواد،٢٠٢٢)

لنفرض أن لدينا مجموعة الترشيح Filtration $\{F(t)\}_{0\leq t\leq T}$ والعملية العشوائية $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ولنفرض $\{X(t)\}$ متكيفة مع مجموعة الترشيح $\{F(t)\}$ عندئذ فأن:

١. $\{X(t)\}$ تدعى عملية Martingales اذا كانت لكل t يوجد $\mu(t)$ قابل للتكامل اي ان $E|\mu(t)| < \infty$ لكل $0 \leq t \leq T$.

٢. وان $E[\mu(t)|F(s)] = \mu(s)$ إذ ان $\mu(t)$ هي عملية Martingales في $[0,\infty]$.

ويمكننا القول ان Martingales هي السعر العادل والتي يمكن فيها توقع السعر مثلا لخمس سنوات في المستقبل هو نفسه السعر الحالي معتمدا على السعر الحالي نفسه

تعريف (٦): سلسلة ماركوف Markov chain [Althary,1991]

تدعى العملية التصادفية $\{X_n; n \in N\}$ بسلسلة ماركوف اذا تحقق الشرط الاتي:

$$P_r\{X_{n+1} = j \mid X_o, \dots, X_n\} = P_r\{X_{n+1} = j \mid X_n\}$$

ولكل $n \in N\ , j \in I$ إذ ان I مجموعة الاعداد الصحيحة ، N مجموعة الاعداد الطبيعية

ان الشرط اعلاه يدعى بخاصية ماركوف Markov property.

تعريف (٧): الحركة البروانية الهندسية (GBM) Geometric Brownian Motion

[Zheng,2015]

بافتراض ان لدينا اسعاراسهم فان الحركة البروانية الهندسية لاسعار الاسهم s(t) تعرف على بأنها عملية عشوائية تحقق المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \mu dt + \sigma w(t)$$

إذ ان

μdt : هو الحد المتنبأ به (predictable) وتكون فيه المعلمة μ هي مقياس لمتوسط معدل نمو اسعار الاسهم والتي تعرف بـمعلمة drift.

$\sigma w(t)$: هو الحد العشوائي الذي يمثل التغير العشوائي بأسعار الاسهم الناجمة من التأثيرات الخارجية غير المتوقعة، إذ ان σ تمثل معلمة *volatility* اي معلمة التقلبات والتي تقيس الانحراف المعياري للعوائد.

من خلال التعريف اعلاه نجد من الواضح ان العملية التفاضلية العشوائية تعاني من بعض المحددات اهمها هو ان المعلومات السابقة (التاريخية) للتبادلات المالية لا تؤخذ بنظر الاعتبار عند محاولة فهم التحركات في اسعار الاسهم المستقبلية. لذلك تطلب الامر تطوير ما يسمى بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً، المبحث الآتي يبين هذا النوع من المعادلات.

٢-٣ : المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

Stochastic delay differential Equation (SDDE)

في البحث السابق ذكرت تعريف العملية العشوائية التفاضلية (SDE) وهنا سنتطرق الى المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (SDDE) من خلال ادخال المعلومات السابقة او التاريخية على شكل معلمة تمثل ما يسمى بالتخلف الزمني (delay) او الذاكرة (Memory) الى المعادلة التفاضلية العشوائية. وتجدر الاشارة الى انه يمكن اضافة معلمة التخلف الزمني **الى** الحد الحتمي (deterministic) او الحد العشوائي (stochastic) او كليهما. **[Shevchenko,2010]و[Scheutzow,2018] ,[Mohammed,1998] ,[*Abou*-El-Ela,*2015*].**

ان اضافة هذه المعلمة يجعل من المعادلة التفاضلية العشوائية اكثر مرونة وواقعية لفهم ووصف تحركات الاسعار والتبادلات المالية من خلال نموذج رياضي ذي قدرة تفسيرية عالية. وبذلك بدلاً من افتراض ان اسعار الاسهم S(t) تتبع عملية الحركة البروانية الهندسية (GBM) وان اسعار الاسهم تتبع خاصية ماركوف فأننا نفترض ان التحركات المستقبلية لاسعار الاسهم S(t) تعتمد ليس فقط على السعر الحالي للسهم بل وانها تعتمد كذلك الاسعار التاريخية (الاسعار السابقة) انظر **[Zheng 2015]** و **[Mao and Matina, 2006]** لمزيد من المعلومات.

تعريف (8): على فرض ان لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وان $W(t)$ يمثل الحركة البروانية، عندئذ فأن المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تعرف رياضياً بالصيغة الاتية: [ALADAĞLI 2017]

$$dS(t) = f\big(S(t), S(t-\tau)\big)dt + g(S(t), S(t-\tau), t)dW(t)\ ; \qquad t \geq 0$$

$$S(t) = \phi(t), -\tau \leq t \leq 0 \qquad \dots (5-2)$$

إذ ان $0 < \tau$ هي معلمة التخلف الزمني وان الدوال f و g معرفتان بالشكل الاتي:

$$f: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

$$g: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

وان $R_+ = [0, \infty]$

وان

$$\emptyset(t) = [-\tau, 0] \longrightarrow R^n$$

هي متغير عشوائي يحقق الشرط الآتي:

$$E[sup|\emptyset(t)|^p{}_{t\in[-\tau,0]}]^{1/p} < \infty$$

وان f و g هي دوال *volatility , drift*.

ملاحظة (2 – 2): يمكن كتابة المعادلة (2 – 5) بصيغة تكامل $\mathrm{It\hat{o}}$ وكما يأتي

$$S(t) = \emptyset(0) + \int_0^t f\left(u, S(u-\tau), S(u)\right)du + \int_0^t g\left(u, S(u-\tau), S(u)\right)dW(u) \dots (6-2)$$

٢-٣-١ : وجود ووحدانية الحل *Existence and Uniqueness of Solution*

سوف نتطرق الى مجموعة من التعاريف والنظريات الضرورية لايجاد حل المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً فضلاً عن اثبات ووحدانية حلها.

تعريف (٩): الحل القوي *Strong solution*

[Shen et al, 2014]

لنفترض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوئية المتخلفة زمنيا $(2-5)$، عندئذ فان العملية العشوائية *S(t)* ذات القيمة حقيقية *real – value* والمعرفة بالصيغة الاتية:

$$S(t): [-\tau, T] \times \Omega \longrightarrow R$$

تدعى بالحل القوي اذا كانت قابلة للقياس *measurable* ، ومستمرة ، وتحقق المعادلة *(5-2)* بشكل مؤكد *almost – surly*.

تعريف (١٠): لنفترض ان هنالك حلاً قوياً آخرهو $\hat{S}(t)$ للمعادلة $(2-5)$ وعند تحقق الشرط الاتي: **[Zheng,2015]**

$$P\big[S(t) = \hat{S}(t)\big] = 1, \quad \forall\, t \in [-\tau, T]$$

فأن $S(t)$ يدعى بالحل القوي الوحيد المسار pathwise unique .

تعريف (١١): ان الدوال $(f)\ drift$ و $(g)\ voltality$ في المعادلة $(2-5)$ تحقق شرط Local Lipschitz اذا كان لكل عدد صحيح $i \geq 1$ يوجد ثابت موجب K_i بإذ ان: **[Zheng,2015]**

$$|f(x_1, y_1, t) - f(x_2, y_2, t)| \vee |g(x_1, y_1, t) - g(x_2, y_2, t) \leq K_i(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

إذ ان

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ وان $|x_1| \vee |y_1| \vee |x_2| \vee |y_2|) \leq i$

وان

$|x| \vee |y| = max(|x|, |y|)$ بحيث $t \in R_+$

تعريف (١٢): ان الدوال f و g في المعادلة $(2-5)$ تحقق شرط النمو الخطي Linear growth في التعريف **(١٠)** اذا وجد عدد ثابت موجب K بإذ ان : **[Zheng,2015]**

$$|f(x,y,t)| \vee |g(x,y,t)| \leq K(1+|x|+|y|)$$

لكل

$x, g, t \in R \times R \times R_+$

نظرية (١): بفرض تحقق شرط Local Lipschitz وشرط النمو الخطي *linear growth*فأن المعادلة $(2-5)$ تمتلك حلاً قوياً وحيد المسار وان الحل يمتلك الخاصية الاتية: **[Zheng,2015]**

$$E[sup|S(t)|^2] < \infty \,; t \in [-\tau, T]$$

لكل قيمة $0 < T < \infty$.

٢-٣-٢ : طريقة اويلر العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

Numerical Euler Method for SDDE

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً كتعميماً لكل للمعادلات التفاضلية المتخلفة زمنياً ذات الحد الحتمي (deterministic part) لأن ان المعلومات السابقة (التخلف الزمني) عن اسعار الاسهم او التداولات يمكن ان تحدث في الحد الحتمي، فضلاً عن ان المعلومات السابقة (التخلف الزمني) يمكن ان تحدث في المعادلات التفاضلية العشوائية الاعتيادية، إذ تم دمج تأثير التخلف الزمني من اجل جعل المعادلة التفاضلية اكثر مرونة وواقعية في تمثيل الظواهر المدروسة. تتميز المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً بانها لا تمتلك صيغة حل محددة، لذلك يتم اللجوء الى استخدام الطرائق العددية لايجاد تقريب للحل. **[Zheng,2015]**، **[ALADAĞLI ,2017]**، **[Buckwar,2000]**.

نظرية (٢): افترض ان لدينا المعادلة التفاضلية المتخلفة زمنياً $(SDDE)$ الاتية:
[Zheng,2015] [Buckwar,2000] [Jassim,2006]

$$dS(t) = f\big(t, S(t), S(t-\tau)\big)dt + g\big(t, S(t), S(t-\tau)\big)dW(t); \;\; a \le t \le b$$
$$S(t_0) = \emptyset_0(t); \quad t_0 - \tau \le t \le t_0 \qquad \dots (6-2)$$

ومن خلال تقسيم الفترة $[a, b]$ بالشكل الاتي:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b,$$

إذ ان $t_n = n.h \;,\; n = 0,1, \dots, N$

وان $h = \frac{T}{N} = \frac{b-a}{N},$

$$\tau = N_\tau . h$$

عندئذ فأن الحل وفق طريقة اويلر يمتلك الدالة الاتية:

$$\Psi\big(h, \tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau} \;, \Delta w_{n+1}\big) = f\big(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau}\big)h + g(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau})\Delta W_{n+1}$$

إذ ان $0 \le n \le N-1$ وان

$$\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$$

هنا المتغيرات العشوائية $\Delta W_1, \dots, \Delta W_N$ مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين h. وان $\tilde{S}_{(.)}$ تمثل التقريب القوي strong approximation لحل المعادلة $(2-6)$.

في هذه الرسالة سوف نعتمد على المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا الآتية التي افترضها الباحث **[Zheng,2015]** لنمذجة اسعار الاسهم على انها تعتمد في حركة التبادلات المالية على المعلومات التي يستوعبها المضاربون من البيانات والتبادلات المالية التي تعود لازمان سابقة (معلمة التخلف الزمني)،

$$dS(t) = \big(a.S(t) + b.S(t-\tau)\big)dt + \big(c.S(t) + dS(t-\tau)\big)dW(t);$$
$$0 \le t \le T$$
$$S(t) = \emptyset(t); \; -\tau \le t \le 0 \qquad \dots (7-2)$$

إذ ان معلمة التخلف الزمني $\tau > 0$ تمثل ثابتاً عددياً معيناً.

إذ اختبر الباحث **[Zheng,2015]** بأن المعادلة التفاضلية $(2-7)$ تحقق شرط *Local Lipschitz* وشرط النمو الخطي *Linear growth* . ولتوضيح الحل بطريقة اويلر ندرج المثال التالي لتوضيح كيفية الحصول على الحل التقريبي.

مثال: لنفترض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الخطية المتخلفة زمنياً الاتية: (من عمل الباحث)

$$dS(t) = \left(-3S(t) + 2e^{-1}S(t-1)\right)dt + \left(c.S(t) + d.S(t-1)\right)dW(t);$$
$$0 \le t \le 2$$
$$S(t) = 2e^{-t}\ ;\ -1 \le t \le 0 \qquad \dots (8-2)$$

إذ ان c وd هي ثوابت. اولا يجب التاكد من ان المعادلة $(2-8)$ تحقق شروط وجود الحل ووحدانيته. لنفرض ان لدينا الدوال الاتية:

$$f(t,x,y) = -3x + 2e^{-1}y$$
$$g(t,x,y) = cx + dy$$

ومن خلال التعاريف (١٠) و (١١) نجد ان:

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| = |-3x_1 + 2e^{-1}y_1 + 3x_2 - 2e^{-1}y_2|$$
$$= |-3(x_1 - x_2) + 2e^{-1}(y_1 - y_2)|$$
$$\le 3|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| \qquad \dots (9-2)$$

كذلك فان

$$|g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)| = |cx_1 + dy_1 - (cx_2 + dy_2)|$$
$$\le |c||x_1 - x_2| + |d||y_1 - y_2|$$
$$\le (|c| \vee |d|)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \qquad \dots (10-2)$$

ان تحقق الشرطين $(2-9)$ و $(2-10)$ يعني تحقق شرط local Lipschitz، وبالنتيجة تحقق شرط النظرية (١).

سوف نستخدم طريقة اويلر لحل المعادلة $(2-8)$ ونوضح تأثير معلمة التخلف الزمني على سلوك العملية العشوائية من خلال حساب دالة الوسط mean function للعملية العشوائية $S(t)$ هي:

$$m(t) = E[S(t)],$$

نفرض ان صيغة التكامل للمعادلة العشوائية $(2-8)$ هي:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \left(-3S(u) + 2e^{-1}S(u-\tau)\right)du + \int_0^t (cS(u) + dS(u-\tau)dW(u)$$

وباخذ التوقع لكل من طرفي التكامل اعلاه نحصل على ما يأتي:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(-3m(u) + 2e^{-1}m(u-\tau)\right)du + E(\int_0^t (cS(u) + dS(u-\tau)dW(u))$$

ولانه توقع عملية الحركة البروانية يساوي صفر، نحصل على مايأتي:

$$= m(0) + \int_0^t \left(-3m(u) + 2e^{-1}m(u-\tau)\right)du$$

وباخذ المشتقة للمعادلة الاخيرة، وبفرض ان $\tau = 1$ نحصل على ماياتي:

$$\begin{cases} m'(t) = -3m(t) + 2e^{-1}m(t-1); 0 \le t \le 2, \\ m(t) = 2e^{-t}\,;\ -1 \le t \le 0 \end{cases} \quad \dots (11-2)$$

ولايجاد معادلة الوسط بالتكرارiteration ، لنفرض اننا سوف نقسم الفتره [0,2] على فترات الاولى هي [0,1] وعليه فان:

$$m(t-1) = 2e^{-(t-1)}$$

عندئذ فان

$$\begin{aligned} m'(t) &= -3m(t) + 2e^{-1}(2e^{-t}e^{1}) \\ &= -3m(t) + 4e^{-1}e^{-t}e^{+1} \\ &= -3m(t) + 4e^{0}e^{-t} \\ &= -3m(t) + 4e^{-t} \end{aligned}$$

لذلك فان المعادلة التفاضلية المتخلفة زمنيا $(2-11)$ تصبح معادلة تفاضلية اعتيادية بوجود الشرط الابتدائي الاتي:

$$m(0) = 2e^{0} = 2$$

وبهذا نحصل على المعادلة الاتية:

$$\begin{cases} m'(t) = -3m(t) + 4e^{-t}\,; 0 \le t \le 1 \\ m(0) = 2 \end{cases} \quad \dots (12-2)$$

نبحث الان عن حل المعادلة اعلاه إذ ان:

$$m'(t) = -3m(t) + 4e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow [e^{3t}m(t)]' = 4e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow e^{3t}m(t) = 2e^{2t} + \mathrm{C}$$

وبسبب ان:

$$C = e^{0}m(0) - 2e^{0} = 2 - 2 = 0$$

فان:

$$e^{3t}m(t) = 2e^{2t} + \mathrm{C} \Rightarrow \quad \mathrm{m(t)} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,, 0 \le t \le 1.$$

وهذا يعني ان حل المعادلة $(2-12)$ هو نفس الحل الاساس.

نفرض ان الفترة الثانية هي :

$$t \in [1,2]$$

باتباع نفس الخطوات في الفترة الاولى نحصل على الحل الاتي:

$$m(t) = 2e^{-t}\,; 1 \le t \le 2$$

وبهذا فأن المعادلة $(2-8)$ تمتلك دالة متوسط هي:

$$m(t) = 2e^{-t}\,;\; 0 \le t \le 2$$

٢-٤ : تقدير المعالم باسلوب بيز للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

Bayesian parameter Estimation for SDDE

تعتمد الطرائق الكلاسيكية (*Classical methods*) في نظرية الإستدلال الإحصائي على فرض أن الظاهرة المدروسة والتي تتمثل بيانتها بالمتغير $\boldsymbol{X}$ تتوزع تبعا لتوزيع احتمالي محدد $f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})$ ومعرف على المعلمة غير المعلومة $\boldsymbol{\theta}$ ، إذ ان القيمة الحقيقية لهذه المعلمة غير معلومة بالضبط ، وتهتم الطرائق الكلاسيكية في إيجاد تقدير قيمة المعلمة (*Point estimate*) و تحديد فترة ثقة هذه المعلمة (*Interval estimate*) وذلك من خلال استخدام البيانات المتوفرة من العينة المسحوبة التي تم سحبها من المجتمع الذي يحتوي على القيمة الحقيقية للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$. **[Bernardo et al.,2000]**و**[Box et al.,1973]**

في عام ١٧٦٤ تم نشر نظرية بيزمن خلال ورقة بحثية تحمل اسم مؤلفها ثوماس بيز(*Thomas Bayes*) والتي تعرف يومنا هذا بالمدرسة البيزية (*Bayesian School*)

وبسبب عدم القدرة في حساب الاحتمالات المسبقة (*prior probabilities*) التي تعد الحجر الاساس في تحليل بيز بقيت نظرية بيز محدودة الاستعمال والانتشار الى حين ظهور عالم الكمبيوترات السريعة التي ساعدت في العمليات الحسابية لنظرية بيز. نظرية بيز تعتمد بالاساس على خبرة الباحث ودمجها مع المعلومات المتوفره من بيانات العينة حول المعلمة. وبالتالي يمكن ان نفترض ان المعلمة المدروسة $\boldsymbol{\theta}$ بانها متغير عشوائي وانها تتبع توزيعاً احصائياً محدداً مسبقا $p(\boldsymbol{\theta})$. اي ان الاحتمالات في نظرية بيز يتم تحديثها اعتمادا على خبرة الباحث والبيانات المشاهدة، لهذا الحتمالات بحالة عدم اليقين تدريجيا تتحدث الى ان نحصل على الاحتمال الاكيد (اليقين) اعتمادا على خبرة الباحث.

في هذا المبحث سيتم التطرق الى تقدير معالم المعادلة *SDDE* باستخدام اسلوب بيز ومقارنة النتائج من خلال اطلاعنا على الدراسات السابقة. ان ايجاد تقديرات المعالم باسلوب بيز يتسم بالكثير من الخصائص من اهمها انه يمكن تطبيق اسلوب بيز في حالة حجوم العينات الصغيرة وهو عكس الطرق الاخرى التي يعتمد بعضها على الحجوم الكبيرة للعينات ونظريات التقارب، كذلك هنالك طرق مثل طريقة العزوم التي لا تتطلب اجراء تكاملات لتسهيل العمليات الحسابية، لذلك وعند التعامل مع ظواهر في فترات زمنية محددة يصبح من الصعب الاعتماد على الطرائق الكلاسيكية في تقدير معالم المعادلة التفاضلية لذلك في هذه الرسالة سوف نعتمد على اسلوب بيز.

تنص قاعدة بيز على المعادلة الاتية:

$$\mathrm{g}(\theta|\mathrm{data}) = \frac{f(data|\theta) \times g(\theta)}{\int f(data|\theta) \times g(\theta)d\theta} \qquad \dots (13-2)$$

وبسبب ان مقام $(13-2)$ هو دالة لا تعتمد على المعلمة θ فممكن كتابة $(13-2)$ بالشكل الاتي:

$$\mathrm{g}(\theta|\mathrm{data}) \propto \mathrm{f}(\mathrm{data}|\theta) \times \mathrm{g}(\theta)$$

إذ ان:

$g(\theta|data)$ هي التوزيع اللاحق Posterior distribution.

$f(data|\theta)$ هو دالة الامكان Likelihood.

$\mathrm{g}(\theta)$ وهي دالة التوزيع المسبق prior distribution للمعلمة θ .

تعد تقنية MCMC (Markov chain Monte Carlo) من اوسع التقنيات الحسابية التي يمكن استخدامها في اجراء دراسة المحاكاة في الاستدلال البيزي. من اهم واشهر الخوارزميات المستخدمة في تقنية MCMC لحساب او تقدير التوزيع اللاحق هي:

[Casella and George, 1992]

١- معاينة الرفض *Rejection Sampling*

٢- معاينة كبس *Gibbs Sampling*

٣- معاينة الشرائح *Slice Sampling*

٤- خوارزمية متروبولس – هاستنك *Mertopolis Hastings*

٥- خوارزمية *Metropolis Hastings with Gibbs algorithm*

في هذه الدراسة سوف نستخدم الخوارزمية رقم (٥) لتقدير معالم المعادلة *SDDE*.

٢-٤-١ : التوزيع السابق والتوزيع اللاحق للمعالم

Prior distribution and posterior distribution for the interest parameters

اولا يجب ان نفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً $(2-5)$ واننا بصدد تقدير معالم هذه المعادلة باسلوب بيز، إذ ان $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ هي العملية العشوائية بالمعالم $\theta=\{\mathrm{a,b,c,d}\}$ ، وان $a\ ,b$ هي معالم دالة *drift* وان d و c هي معالم دالة *volatility* .

ان تقديرالمعالم وفق اسلوب بيز يتم من خلال مايأتي: **[Jones, 1998]**

1) لنفرض ان لدينا N من المشاهدات موضحة بالمتجه التالي إذ سنفرض ان البيانات (data) سيتم تمثيلها بالمتغير y:

$$y=\{S_o,S_1,\dots,S_N\}$$

إذ تم توليدها من العملية العشوائية $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ بالاعتماد عى الاوقات الاتية:

$$t_0,t_1,\dots t_n$$

2) ان الهدف من استخدام اسلوب بيزهو ايجاد التوزيع اللاحق posterior للمعلمة θ اي ايجاد التوزيع $g(\theta|y)$. اذا كانت العملية العشوائية تمتلك خاصية ماركوف وان دالة الاحتمالات الانتقالية للعملية العشوائية معلومة، وباستخدام نظرية بيز فانه لدينا:

$$g(\theta|y) \propto f(y|\theta) \times g(\theta)$$

$$\propto f(S_o|\theta) \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1}|\, S_i, \theta) \times \; g(\theta). \qquad \dots (14-2)$$

ومن خلال تطبيق طريقة اويلر العددية لايجاد الحل التقريبي للمعادلة (2 – 5) إذ يمكن اغالباً كتابتها بالشكل الاتي: **[Jones, 1998]**

$$S_{n+1} = S_n + \left(\alpha. S_n + b. S_{n-N_\tau}\right). h + \left(C. S_n + d. S_{n-N_\tau}\right). \Delta W_{n+1} \qquad \dots (15-2)$$

إذ ان $n = 0,1, \dots, N-1$

وان $\Delta W_i \sim N(0, h) \; ; i = 1, \dots, N$

وهنا يجدر الانتباه الى ان $h = \sigma^2 = dt$

كذلك فأن الحل الأساس (الابتدائي) هو

$$(S_{-N_\tau}\,, S_{-N_\tau+1}\,, \dots\; S_{-1}\,, S_0)$$

واشار الباحث [Zheng,2015] الى ان المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من هذا انوع لا تتميز بخاصة ماركوف لذلك لا يمكن بشكل مباشر ايجاد الاحتمالات الانتقالية وإيجاد التوزيع اللاحق، لذلك سوف نعتمد الأسلوب الذي افترضه هذا الباحث من اجل إيجاد عملية عشوائية تتمتع بخاصية ماركوف من خلال افتراض ما يأتي:

١- افترض ان $\tilde{y}_n = (S_n, S_{n-1}, \dots, X_{n-N_\tau})'$

٢- ان الحل الأساس هو $\tilde{y}_0 = (S_0, S_{-1}, \dots, S_{-N_\tau})'$

٣- افرض انه اصبح لدينا العملية العشوائية $\{\tilde{Y}_n \; ; 0 \le n \le N\}$ وانها تمتلك خاصية ماركوف.

٤- يمكن كتابة التوزيع اللاحق للمعلمة θ بالشكل الاتي: **[Girolami, 2008]**

$$g(\theta|\tilde{y}_0 ,\tilde{y}_1, \dots ,\tilde{y}_N) \propto f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots ,\tilde{y}_N \,|\tilde{y}_0 ,\theta).\, g(\theta)$$

$$= g(\theta) \prod_{i=0}^{N-1} f\,(\tilde{y}_{i+1}|\tilde{y}_i, \theta)$$

٥- ان دالة الكثافة للاحتمالات الانتقالية للعملية العشوائية $\{\tilde{Y}_n \,; 0 \le n \le N\}$ تحقق الشرط الاتي:

$$f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots ,\tilde{y}_N \,|\tilde{y}_0 ,\theta) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_i^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(S_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\} \dots (16-2)$$

إذ ان المتوسط هو:

$$\mu_i = (ah+1)S_{i-1} + bhS_{i-N_\tau-1}$$

والتباين

$$\sigma_i^2 = c^2(S_{i-1} + dS_{i-N_\tau-1})^2 h$$

وان $i = 1,2, \dots, N$

٢-٤-٢ : التوزيع اللاحق الشرطي الكامل ***Full Conditional Posterior Distributions***

ان تحديد التوزيع المسبق *prior distribution* يعد أساس الحصول على الصيغة الدقيقة للتوزيع اللاحق، إذ ان التوزيع المسبق غالباً ما يعكس ما يؤمن به الباحث من إذ اتباع المعلمة لتوزيع معين. فقد افترض الباحث [Zheng,2015] ان المعالم a, b الموجودات في حد ***drift*** الموجودة في المعادلة $(2-5)$ سوف تتبع التوزيع الطبيعي بوصفه حداً مسبقاً لها. أما d, c الموجودات في الحد العشوائي (حد التقلبات) فأن من اشهر التوزيعات التي تتبعها التقلبات او التباينات هو توزيع معكوس كاما بوصفه حداً مسبقاً، إذ ان كثيراً من الدراسات اشارت الى انه يمكن اعتبار ان توزيع البيانات *(likelihood)* التي تتبع التوزيع الطبيعي يمكن ان يترافق *(Conjugate)* مع توزيع معكوس كاما، إذ ان c^2 تم افتراض انها تتبع توزيع معكوس كاما بوصفه حداً مسبقاً وفي ما يلي التوزيعات اللاحقة الكاملة *(Full)* للمعالم c, b, a.

١- التوزيع اللاحق الكامل للمعلمة a

Full Conditional Posterior distribution for a

بالاعتماد على توزيع دالة الإمكان $(2-16)$ الذي تتبع فيه التوزيع الطبيعي للبيانات المتولدة من العملية $\{S_n\}_{0\le n\le N}$ وبافتراض ان المعلمة a تمتلك توزيعاً مسبقاً (prior) يتمثل بالتوزيع الطبيعي فانه يمكن كتابة التوزيع اللاحق (posterior) للمعلمة a بالشكل الآتي:

لنفرض

$$g(\mathrm{a};0,\sigma_a^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\exp\left\{\frac{-a^2}{2\sigma_a^2}\right\}$$

إذ ان $-\infty\le a\le\infty$.

كذلك فان

$$g(a\,|\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_N,b,c^2,d)=g(a|S_1,S_2,\dots S_n,\tilde{y}_0\,,b,c^2,d)$$

$$\propto\prod_{i=1}^{N}f\,(S_i|\sigma_i^2).\;\;g(a|\sigma_a^2)$$

$$\propto\prod_{i=1}^{N}[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\;\exp\left\{-\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}]\,.\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\;exp\left\{\frac{-a^2}{2\sigma_a^2}\right\}$$

$$\propto e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}\;\;e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}}$$

وبالتعويض عن μ_i بما يساويها فأننا نحصل على ما يأتي:

$$\propto exp\,\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{[S_i-\{(ah+1)S_{i-1}+bhS_{i-N_\tau}\}]^2}{2\sigma_i^2}\}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}}$$

$$\propto exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[\left(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)-ahS_{i-1}\right]^2}{2\sigma_i^2}\right\}\,e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}}$$

$$\propto exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{[(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})^2-2ahS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})+a^2(hS_{i-1})^2}{2\sigma_i^2}\right\}\,e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}}$$

$$\propto exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{[(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})^2}{2\sigma_i^2}-\frac{2ahS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})}{2\sigma_i^2}+\frac{a^2(hS_{i-1})^2}{2\sigma_i^2}\right]e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}}$$

$$\propto exp\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{a^2(hS_{i-1})^2}{2\sigma_i^2}-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right]+\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{ahS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1})}{\sigma_i^2}\right]$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{a^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_a^2}\right]+\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{ahS_{i-1}\left(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)}{\sigma_i^2}\right]\right\}$$

$$\propto exp\left\{-\frac{a^2}{2\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{ahS_{i-1}\left(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)}{\sigma_i^2}\right\}\dots(17-2)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن اعتباره كتوزيع طبيعي للمعلمة a بمتوسط

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}hS_{i-1}\left(S_i-S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)/\sigma_i^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_a^2}\right]^{-1}$$

٢- التوزيع اللاحق الكامل للمعلمة b

لقد بينا سابقا ان التوزيع مسبقا للمعلمة b هو بمثابة التوزيع الطبيعي وبالتالي وبالاعتماد على قاعدة بيز $(2-13)$ وتوزيع دالة الامكان $(2-16)$ فان التوزيع اللاحق للمعلمة b هوما يأتي:

$$g(b\ |\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_N,a,c^2,d)=g(b|S_1,S_2,\dots S_n,\tilde{y}_0\ ,a,c^2,d),$$

$$\propto\prod_{i=1}^{N}f\ (S_i|\sigma_i^2).\ \ g(b|\sigma_b^2)$$

$$\propto \prod_{i=1}^{N}[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}] . \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} \; e^{-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}}$$

$$\propto e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \; e^{-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}}$$

وبالتعويض عن μ_i بما يساويها فأننا نحصل على ما يأتي:

$$\propto exp\,\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{[S_i-((ah+1)S_{i-1}+bhS_{i-N_\tau})]^2}{2\sigma_i^2}\}e^{-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{b^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-N_\tau-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_b^2}\right]+\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{bhS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-ahS_{i-1})}{\sigma_i^2}\right]\right\}$$

$$\propto exp\left\{-\frac{b^2}{2\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(hS_{i-N_\tau-1})^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{bhS_{i-1}(S_i-S_{i-1}-ahS_{i-1})}{\sigma_i^2}\right\} \dots (18-2)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن عده كتوزيعاً طبيعياً للمعلمة b بمتوسط

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}hS_{i-N_\tau-1}(S_i-S_{i-1}-ahS_{i-1})/\sigma_i^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(hS_{i-N_\tau-1}\right)^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(hS_{i-N_\tau-1}\right)^2}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_b^2}\right]^{-1}$$

٣- التوزيع اللاحق الكامل للمعلمة c^2

The Full Conditional Posterior distribution for c^2

وضحنا سابقاً ان المعلمة c موجودة في الحد العشوائي (حد التقلبات او الانحرافات المعيارية) من المعادلة التفاضية العشوائية المتخلفة زمنيا، لذلك فأن التوزيع المسبق المفترض لها هو توزيع معكوس كاما، إذ ان

$$g(c^2|\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\alpha}(c^2)^{-\alpha-1} \quad e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

وهكذا فأن التوزيع اللاحق للمعلمة c^2 وبالاعتماد على قاعدة بيز $(2-13)$ وتوزيع الامكان $(2-16)$ سيكون بالشكل الاتي:

$$\pi(c^2\ |\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a, b, d) = \pi(c^2|S_1, S_2, \dots\ S_n, \tilde{y}_0\ , a, b, d)$$

$$\propto \prod_{i=1}^{N} f\ (S_i|\sigma_i^2).\, g(c^2|\alpha,\beta)$$

$$\propto \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\ \exp\left\{-\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}.\ \frac{\beta^{\alpha}}{\alpha}(c^2)^{-\alpha-1} \quad e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

وبالتعويض عن σ_i^2, μ_i بما يساويها فأننا نحصل على ما يأتي:

$$\propto \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi(S_{i-1}+dS_{i-N_\tau-1})^2 c^2 h}} exp\left\{-\frac{(S_i-\mu_i)^2}{2c^2(S_{i-1}+dS_{i-N_\tau-1})^2 h}\right\}.\frac{\beta^{\alpha}}{\alpha}(c^2)^{-\alpha-1} \quad e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

$$\propto \left(\frac{1}{\sqrt{c^2}}\right)^N\ \exp\{-\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[S_i-\left((ah+1)S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)\right]^2}{2hc^2(S_{i-1}+dS_{i-N_\tau-1})^2} * (c^2)^{-\alpha-1} \quad e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

$$\propto (c^2)^{-\left(\frac{N}{2}+\alpha\right)-1} \quad exp\left\{-\frac{(\beta+z)}{c^2}\right\} \qquad \dots(19-2)$$

إذ ان:

$$z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[S_i-\left((ah+1)S_{i-1}-bhS_{i-N_\tau-1}\right)\right]^2}{2hc^2(S_{i-1}+dS_{i-N_\tau-1})^2}$$

ان الجانب الايمن اعلاه من الدالة $(2-19)$ يمثل توزيع معكوس كاما وبالتالي فأن c^2 يمتلك توزيع معكوس كاما بوصفه توزيعاً لاحقاً بالمعالم:

$$\frac{N}{2}+\alpha = shape\ parameter$$

(shape parameter) معلمة الشكل وهي معلمة احصائية تؤثر على الشكل العام لمنحني دالة التوزيع الاحتمالي.

$$\beta+\sum_{i=1}^{N} z_i = scale\ parameter$$

(Scale parameter) هي معلمة تعطي معنى للرسوم البيانية في النموذج القياسي

ان التوزيعات اللاحقة $(2-17)$ ، $(2-18)$، و $(2-19)$ تمتلك توزيعات احصائية معلومة الشكل لذلك يمكن استخدام خوارزمية Gibbs لتوليد عينات للمعالم c^2, b, a من اجل حساب متوسطاتها تقديراً لقيمها. اما المعلمة الرابعة d فلا يمكن تحديد صيغة قريبة لتوزيعها المسبق لذلك لا يمكن اشتقاق توزيعها اللاحق مما يستوجب ان نستخدم خوارزمية متروبولس هاستنكس Metropolis – Hastings لتوليد عينات للمعلمة d إذ ان هذه الخوارزمية لا تتطلب تحديد توزيع للمعلمة المدروسة من توزيع متأتٍ من قاعدة بيز $(2-13)$ وانما يمكن اقتراح توزيع معين بشكل مسبق ليؤدي الغرض في توليد العينات.

تعد خوارزمية Metropolis – Hastings جزءاً من تقنية او طريقة MCMC للحصول على سلسلة من العينات العشوائية المتولدة من التوزيع الاحتمالي للمعلمة، إذ تستخدم لتقريب او حساب قيمة المتوسط للتوزيع المرغوب (desired or target). تعتمد خوارزمية Metropolis على مبدأ خاصية ماركوف إذ ان توزيع العينة اللاحق يعتمد بشكل مباشر على قيم العينة الحالية وتحت احتمالية معينة يتم قبول هذا التوزيع (وبالتالي يستخدم في توليد العينة اللاحقة من سلسلة من العينات) او يتم رفض هذا التوزيع (وبالتالي يهمل هذا التوزيع وبالتالي فأن العينة الحالية تهمل ولا تستخدم في توليد العينة اللاحقة). إذ ان احتمالية القبول (probability of acceptance) يتم تحديدها من خلال مقارنة دالة الكثافة لتوزيع العينة الحالية (current) وقيم دالة الكثافة لتوزيع العينة اللاحقة مع قيم التوزيع المرغوب (target).

إذ يعد ايجاد توزيع مقترح مناسب امراً مهماً وبالغ الاهمية لنجاح عمل خوارزمية Metropolis. ان معدل القبول التالي يعني ان معظم العينات الجديدة المتولدة تحدث مباشرة حول بيانات العينة الحالية مما يدل على ان سلسلة ماركوف تنفذ او تعمل بشكل غير كفوء إذ

انها ترفض العديد من العينات المسحوبة وبالتالي لا تتحرك او تنتقل من حالة الى اخرى بشكل يجعل الترابط بين العينات المتولدة بطيئاً.

ان معاينة Metropolis الكفوءة غالباً هي التي تتمتع بمعدل قبول ليس مرتفعاً جداً وليس منخفضاً جداً. وبشكل عام ان معدل القبول الموصى به تكون قيمته بين 0.2 و 0.4 في هذا المبحث سنفرض ان دالة التوزيع المسبق للمعلمة d هو $g_i(d^*|d_i)$ ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط d_i وتباين σ_d^2.

٢-٤-٣ : خوارزمية Metropolis Hastings لتوليد عينات المعلمة d

ان خوارزمية Metropolis – Hastings غالباً ما تتطلب اقتراح توزيع معين وليكن $g_i(d^*|d_i)$ ، إذ يمكن من خلال هذا التوزيع الافتراضي حساب احتمالية المتغير d^*. فضلاً عن ذلك سوف نستخدم خوارزمية Metropolis within Gibbs من اجل توليد عينات والعمل بآلية سلسلة ماركوف، إذ سيكون تحديث (update) المعالم عند توليد العينات ضمن اطار خوارزمية Gibbs باتباع خطوات Metropolis. ان عمل هذه الخوارزمية يمكن وصفه بالخطوات الاتية:

١- تحديد القيم الابتدائية للمعالم d_0, c_0^2, b_0, a_0 في الخطوة $(i+1)$.

٢- سحب عينة من خلال

$$a_{i+1} \sim g(a_{i+1}|\tilde{y}_0 , \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, c_i^2, d_i)$$

٣- سحب عينة من خلال

$$b_{i+1} \sim g(b_{i+1}|\tilde{y}_0 , \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, c_i^2, d_i)$$

٤- سحب عينة من خلال

$$C_{i+1}^2 \sim g(c_{i+1}^2|\tilde{y}_0 , \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, b_{i+1}, d_i)$$

٥- سحب d^* من التوزيع المقترح $g_i(d^*|d_i) \sim N(d_i, \sigma_d^2)$ وحساب نسبة القبول الآتية:

$$R = \frac{g(d^*|S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2)/gi(d^*|d_i)}{g(d_i|S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2)/gi(d_i|d^*)}.$$

٦- تقبل d^* عندما يكون التكرار الاول $(i+1)$ هو d_{i+1} مع احتمال $min(R, 1)$. اما اذا لم يتم قبول d^* عندئذ نجعل $d_{i+1} = d_i$

٧- بالرجوع الى الخطوة ٢ والعمل على تنفيذ الخطوة الآتية $(i+2)$.

الــفصــل الثالث

المحاكاة والتطبيق العملي

٣-١ المقدمة:

ينقسم هذا الفصل على قسمين الاول يتعلق بالمحاكاة ونتائج تجربة المحاكاة والقسم الثاني يتعلق بتحليل البيانات الحقيقية المتمثلة باسعار سعر صرف الدولارالموازي. إذ سنتعرف على اسلوب المحاكاة (Simulation) من خلال نبذة مختصرة أو فكرة مختصرة. وغالباً ما تواجه معظم الباحثين بمجال تحليل البيانات مشاكل او صعوبات في تحديد الصيغ او العلاقات الرياضية الدقيقة وايجاد حلٍ لها بسهولة لاسباب عديدة منها حداثة الفكرة الرياضية او وجود عدد كبير من المتغيرات التفسيرية في الظاهرة المدروسة ، او قلة البيانات المتوفرة للظاهرة المدروسة (صغر حجم العينة) ... الخ. من هنا ياتي دور استخدام اسلوب المحاكاة لاختبار الاسلوب الرياضي المقترح قيد الدراسة من خلال فرض سيناريوهات مختلفة للتعرف على الحالات او الظروف التي يعمل بها النموذج او الطريقة المقترحة. ان اسلوب المحاكاة وبفضل التطور الهائل للحاسوب و البرمجيات اصبح من السهل الحصول عى نتائج تجارب المحاكاة وتحليل هذه النتائج وبالتالي فهم نقاط الضعف ونقاط القوة للاسلوب المقترح وبالتالي يتمكن الباحث من تحديد مساره والشروط الواجب توفرها لتطبيق الاسلوب المقترح على البيانات الحقيقة. وبالتالي يمكن القول ان هدف هذا الفصل هو ايجاد تقدير بيز لمعالم المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا SDDE وتقدير بيز لمعالم الحركة البروانية الهندسية GBM ومقارنة النتائج باستخدام معيار معلومات الانحرافات DIC (Deviance Information Criterion) للحكم على اداء التقدير.

٣-٢ مفهوم المحاكاة

تعرف المحاكاة بانها التقنية التي يتم من خلالها التعامل ودراسة مشكلة (نموذج رياضي) معينة تحت ظروف مختلفة بناءً على افتراضات محددة للتعرف على التركيبة المعقدة للأسلوب المقترح المراد دراسة سلوكه وايجاد الحلول المرجوة. وكذلك يمكن تعريف المحاكاة بأنها طريقة تحليأتية عددية الهدف منها دراسة سلوك نماذج رياضية مختلفة من خلال تطبيقات برمجية بلغة الحاسوب . وعرفت بانها تقنية رقمية تستخدم لتنفيذ تجارب باستخدام الحاسبة الالكترونية. ويمكن التعرف على اسلوب المحاكاة من خلال النتائج الافتراضية لتمثيل الواقع الحقيقي باستخدام افتراضات محددة مسبقا تتناسب مع ابعاد النموذج المدروس. إذ إننا نجد عند تحليل بيانات الواقع الحقيقي العديد من الظواهر المدروسة ذات بنية معقدة الفهم وصعبة التحليل والتفسير لذلك يفضل محلل البيانات إن تتم دراسة سلوك هذه العمليات بصورة تشابه العالم الحقيقي من خلال نماذج معينة .

ومن هنا يمكن القول ان اسلوب المحاكاة يسهل من عملية فهم الظروف التي يعمل بها الاسلوب المقترح مما يحقق لمحلل البيانات قدراً كافيا من فهم وتتبع الواقع الحقيقي من خلال دراسة السيناريوهات المختلفة لتجربة المحاكاة. يمتاز اسلوب المحاكاة بالحصول على المعلومات المفيدة عن الواقع الحقيقي الذي يمثله من خلال التجارب المفترضة من قبل محلل البيانات، وكذلك يمتاز بقدرته على اغالباً التجربة عدة مرات مستخدما معلومات ومدخلات جديدة في كل تجربة لمعرفة سلوك النموذج المقترح. اي ان المحاكاة توفر اسلوباً مرناً لمحلل البيانات او متخذ القرار المعرفة الكاملة للتعرف على سلوكك البيانات والطريقة المقترحة واختبارها وامكانية اجراء التعديل اوالتغيير من أجل استثمار الوقت والجهد والكلفة . وتعد طريقة مونت كارلو Monte – Carlo من اكثر تقنيات المحاكاة كونها توفر خوارزميات يتم من خلالها توليد العينات للمتغير المدروس، وتعدخوارزمية كبس وخوارزمية متروبولس- هاستنك وخوارزمية القبول والرفض من اشهر الخوازميات في توليد البيانات.

[Chib and Greenberg ,1996]

٣-٣ وصف التجربة

كما اوضحنا سابقا ان الهدف من تجربة المحاكاة هوالمقارنة بين اداء اسلوب بيز في تقديرمعالم كل من المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا والعملية العشوائية المسماة بالحركة البروانية الهندسية، إذ سنفترض ان عملية الحركة الروانية الهندسية تمتلك المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

$$dS(t) = a.S(t)dt + c.S(t)dW(t), -\tau \le t \le T. \quad \dots (3-1)$$

في هذه التجربة واشارة للمعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا (2-7) والمعادلة (3-1). سنفترض انه تم تنفيذ خوارزمية متروبولس- كبس لكل معلمة من خلال توليد 13000 (iteration) او عينة حجم مشاهداتها 200 مشاهدة من قيم العملية العشوائية S(t) إذ تم استبعاد اول 1000 تكرار من اجل الحصول على استقرارعمل الخوارزمية في عملية توليد البيانات كمايأتي:

اولا: خوارزمية كبس للمعالم b, c, a

يتم تنفيذ هذه الخوارزمية وفق الخطوات الاتية:

١- ان توزيع دالة الامكان (بيانات العملية العشوائية) تحسب من خلال الدالة (2-16).

٢- ان المعلمة a تمتلك توزيعاً لاحقاً (posterior distribution) يتبع التوزيع الطبيعي وفق الدالة (2-17). إذ سيتم افتراض ان هذه المعلمة تتبع التوزيعات المسبقة الاتية $N(0,9)$ و$N(0,10)$ و$N(0,11)$.

٣- ان المعلمة b تمتلك توزيعاً لاحقاً (posterior distribution) يتبع التوزيع الطبيعي وفق الدالة (2-18). إذ سيتم افتراض ان هذه المعلمة تتبع التوزيعات المسبقة الاتية $N(0,9)$ و$N(0,10)$ و$N(0,11)$.

٤- ان المعلمة c^2 تمتلك توزيعاً لاحقاً (posterior distribution) يتبع توزيع معكوس كاما وفق الدالة (2-19). إذ سيتم افتراض ان هذه المعلمة تتبع التوزيعات المسبقة الاتية $IG(3,1)$ و$IG(4,1)$ و$IG(5,1)$.

ثانيا: خوارزمية متروبولس- هاستنك للمعلمة d.

سيتم اتباع الخطوات في الفقرة (2-3-4) من الفصل الثاني في توليد مشاهدات العينات من التوزيع اللاحق للمعلمة d. وسنفترض ان هذه المعلمة لها توزيعاً لاحقاً يتبع التوزيع الطبيعي، إذ سيتم افتراض ان هذه المعلمة تتبع التوزيع المسبق $N(0,10)$ وان التوزيع المقترح هو $g_i(d^*|d_i) \sim N(d_i, \sigma_d^2 = 0.2)$. علما انه تم افتراض ان معدل القبول d^* هو30%.

كذلك تم افتراض معيار معلومات الانحرافات DIC للحكم على اداء النموذج ويحسب من الصيغة الرياضية الاتية: **[Berg et al., 2004]**

$$DIC = D(\bar{\theta}) + 2(\bar{D}(\theta) - D(\bar{\theta})),$$

إذ ان $\overline{D}(\theta)$ تمثل قيمة متوسط التوزيع اللاحق للانحرافات ويحسب بماياتي:

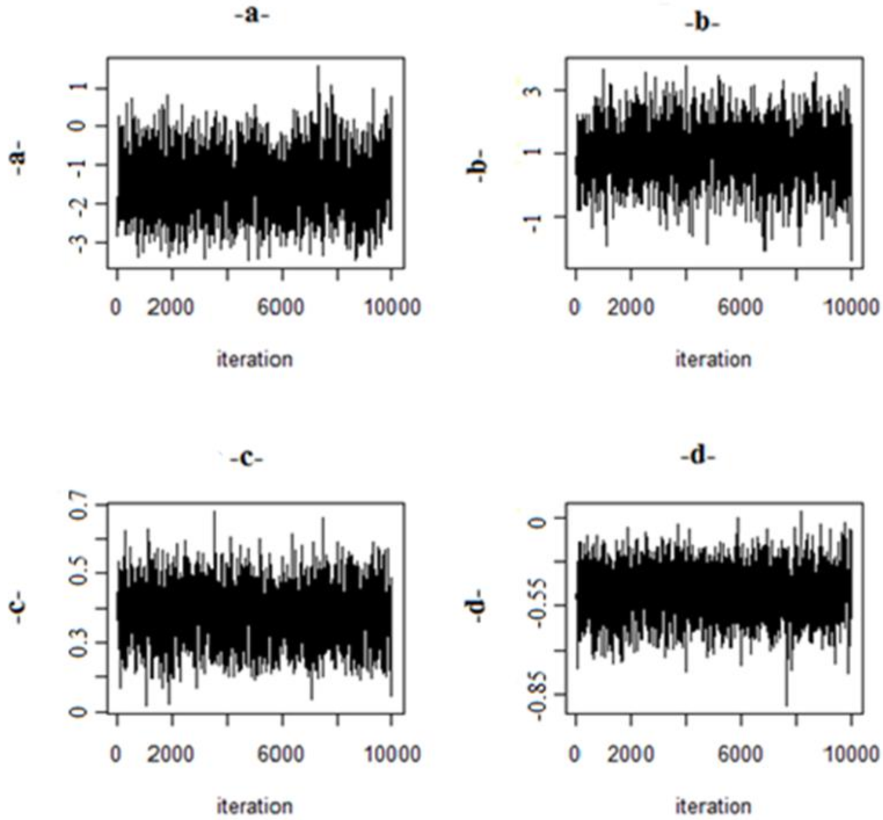
$$\overline{D}(\theta) = E_{\theta|y}[D(\theta)]$$

وان $D(\bar{\theta})$ تمثل القيمة المقدرة للانحراف عند متوسط التوزيع اللاحق ل θ ويحسب بالصيغة الاتية:

$$D(\bar{\theta}) = D_{\theta|y}[E(\theta)]$$

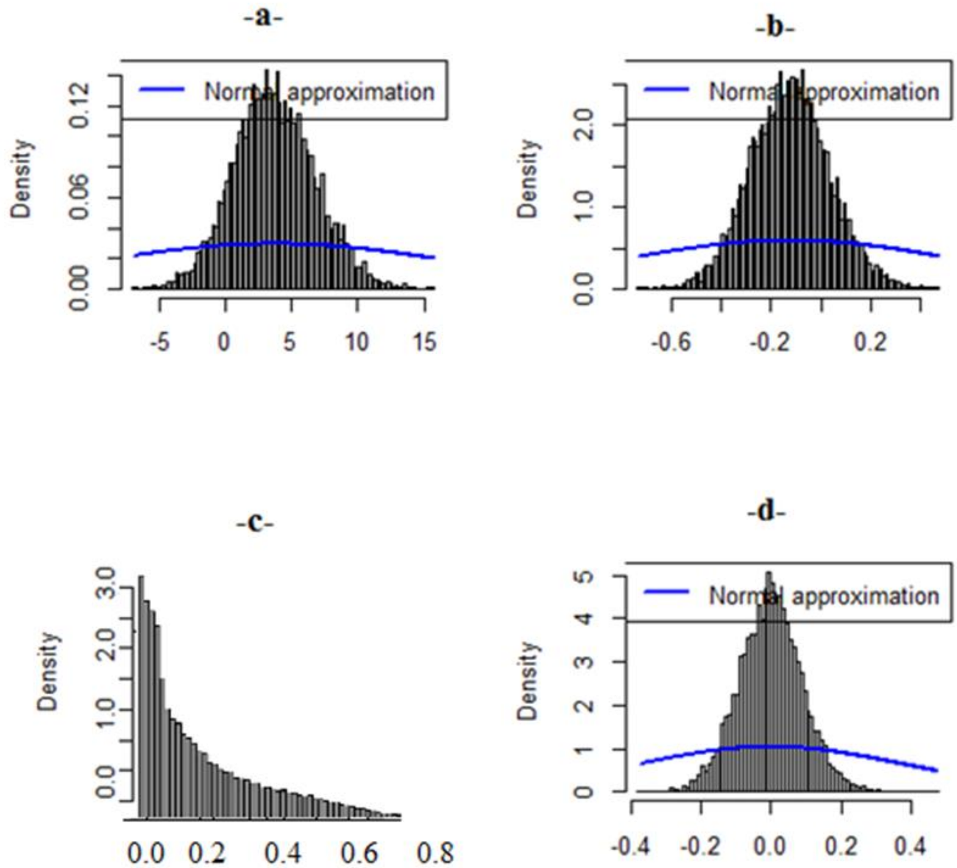
ومن الجدير بالذكر بان قيمة DIC الاقل تعني ان النموذج هو الافضل. الجداول في ادناه تمثل نتائج المحاكاة لثلاث تجارب مع رسم Trace plots ورسم المرج التكراري Histograms لكل معلمة مقدرة.

٣-٤ : تجربة المحاكاة الاولى: اولاً في هذه التجربة تم اولا توليد مشاهدات من دالة الكثافة (transition density) للعملية العشوائية المفترضة في الدالة (2-6) وبحجم ٢٠٠ مشاهدة، إذ تم عد هذه الدالة بمثابة توزيع للبيانات (likelihood function) عند استخدام الخوارزميات الحسابية في توليد قيم المعالم من التوزيعات اللاحقة. في هذه التجربة تم افتراض ان التوزيع المسبق يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,11)$ للمعلمة a والتوزيع المسبق الطبيعي $N(0,11)$ للمعلمة b والتوزيع المسبق $N(0,10)$ للمعلمة d عند التوليد من خوارزمية كبس. كذلك تم استخدام التوزيع المسبق $IG(5,1)$ للمعلمة c عند التوليد من خوارزمية متروبولس – هاستنك ضمن خوامية كبس مستخدما توزيعا مقترحا للعمل بهذه الخوازمية يتبع التوزيع الطبيعي $N(d_i, \sigma_d^2 = 0.2)$. الاشكال البيانية الآتية تمثل رسم trace plot ، إذ يستخدم هذا الرسم بوصفه أداة لتشخيص التقارب في عملية توليد العينات في خوارزمية كبس وتتبع حالة استقرار العينات المتولدة من التوزيع اللاحق اي ان هذا الرسم البياني يوضح التمازج (mixing) بين التوزيع المسبق وتوزيع البيانات. وتم رسم المدرج التكراري Histogram للمعالم المقدرة يستخدم بوصفه أداة لمعرفة نوع التوزيع اللاحق من خلال الرسم. وثانياً تم توليد ٢٠٠ مشاهدة من العلمية العشوائية (1-3) التي تمثل العملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية GBM بافتراض وجود معلمتين فقط هما (a, c) يتبعان نفس التوزيعات المشار اليهما اعلاه في المعادلة SDDE بوصفها توزيعات مسبقة وتوزيعات لاحقة. وتم رسم كل من trace plot و المدرج التكراري للحكم على اداء الخوارزمية.



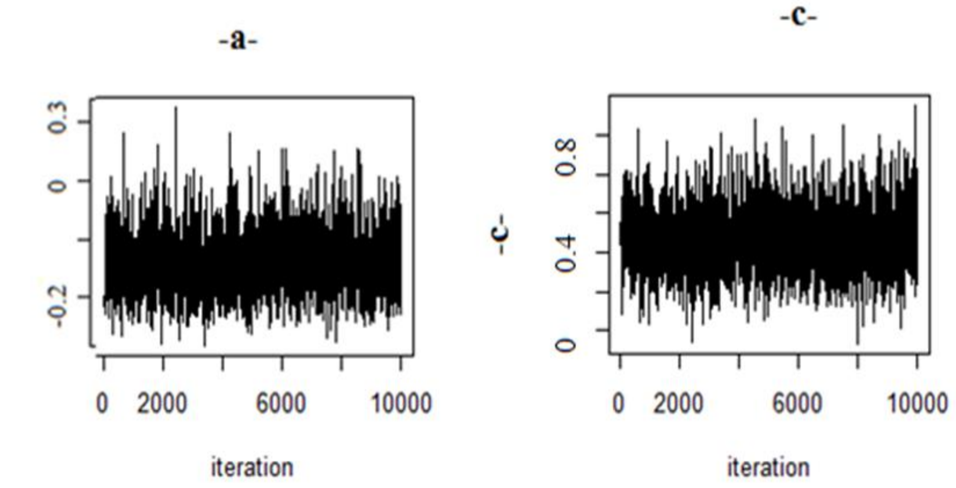
شكل ٣-١: رسم trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الاولى للعملية SDDE

من خلال الشكل (٣-١) نجد ان هناك اربعة رسوم تمثل مخطط trace plot كل معلمة من المعالم المقدرة، إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لاتعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



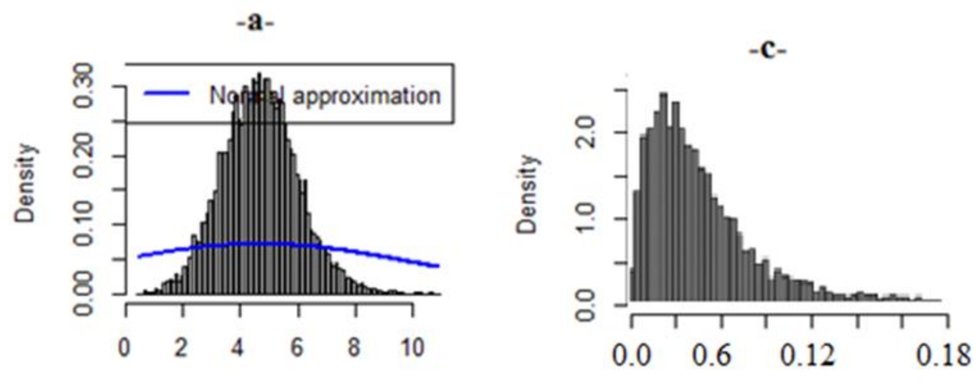
شكل ٣-٢: رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الاولى للعملية SDDE.

الرسومات في الشكل (٣-٢) توضح ان المعالم a, b, d تتبع التوزيع اطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعالم تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري. الرسومات الآتية توضح رسم trace plot والمدرج التكراري لمعالم الحركة البروانية الهندسية (a, c).



شكل ٣-٣: رسم trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الاولى للعملية GBM.

إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لاتعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



شكل ٣-٤: رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الاولى للعملية GBM

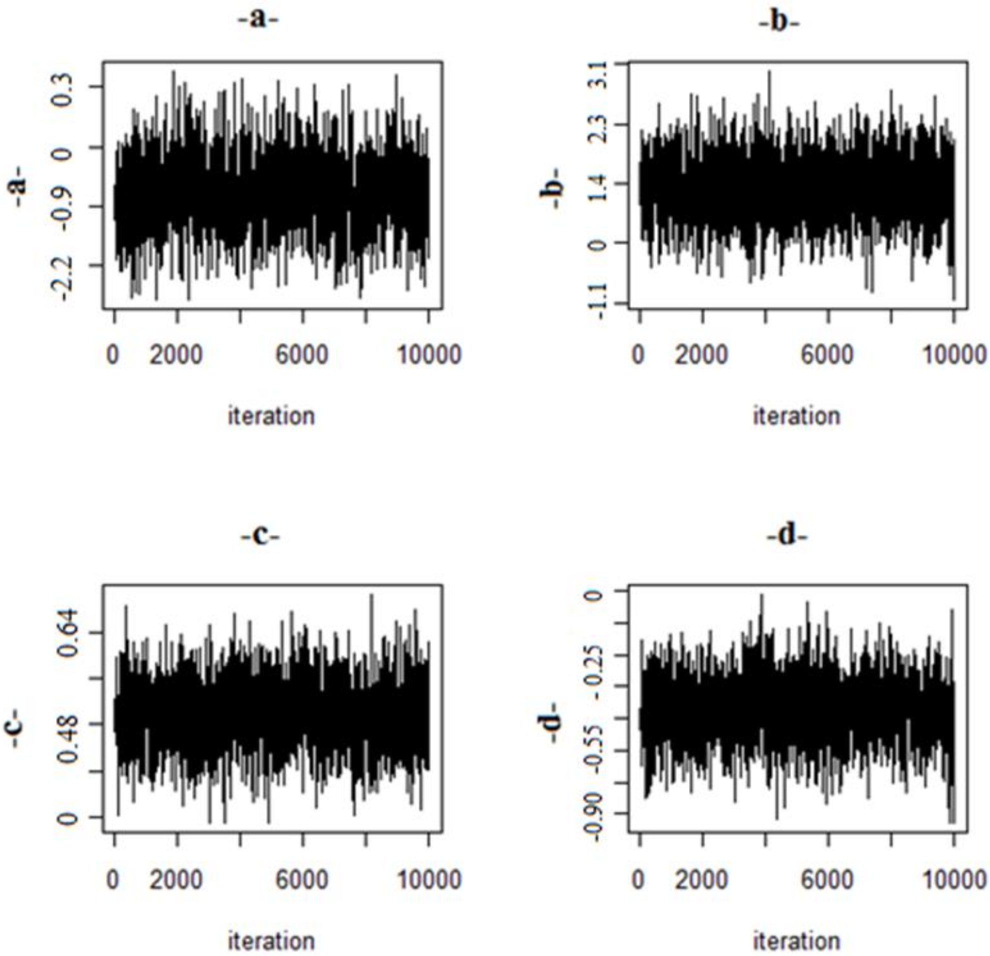
توضح ان المعلمة a تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ما ينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعالم تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري.

جدول (٣-١) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار DIC لتجربة المحاكاة الاولى

Models	a	b	C	D	DIC
SDDE	-0.923	1.1	0.4	-0.58	29.04
(s.e.)	(0.592)	(0.611)	(0.071)	(0.067)	
GBM	-0.10	0	0.5	0	216.11
(s.e.)	(0.057)	(0)	(0.0078)	(0)	

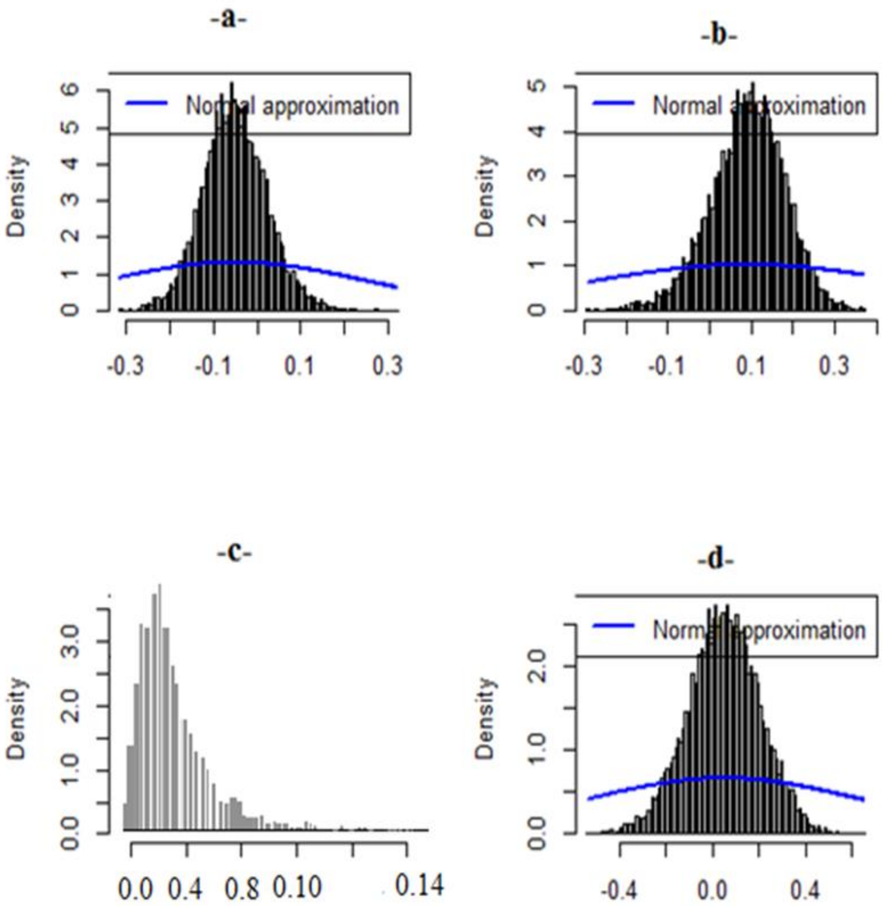
من الجدول (٣-١) الذي يبين تقديرمعالم بيانات اسعار صرف الدولار في السوق الموازي نجد ان قيمة معيار DIC اقل لنموذج SDDE مما عليه لنموذج GBM مما يعني ان نموذج المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا يلائم هذا النوع من البيانات اكثر من ملاءمةالنموذج التقليدي GBM .

٣-٥ : تجربة المحاكاة الثانية: أولاً في هذه التجربة تم اولا توليد مشاهدات من دالة الكثافة (transition density) للعملية العشوائية المفترضة في الدالة (2-6) وبحجم ٢٠٠ مشاهدة، إذ تم عد هذه الدالة بمثابة توزيع للبيانات (likelihood function) عند استخدام الخوارزميات الحسابية في توليد قيم المعالم من التوزيعات اللاحقة. في هذه التجربة تم افتراض ان التوزيع المسبق يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,10)$ للمعلمة a والتوزيع المسبق الطبيعي $N(0,10)$ للمعلمة b والتوزيع المسبق $N(0,10)$ للمعلمة d عند التوليد من خوارزمية كبس. كذلك تم استخدام التوزيع المسبق $IG(4,1)$ للمعلمة c عند التوليد من خوارزمية متروبولس – هاستنك ضمن خوارزمية كبس مستخدما توزيعا مقترحا للعمل بهذه الخوارزمية يتبع التوزيع الطبيعي $N(d_i, \sigma_d^2 = 0.2)$. وتم رسم المدرج التكراري Histogram للمعالم المقدرة يستخدم بوصفها أداة لمعرفة نوع التوزيع اللاحق من خلال الرسم. وثانياً تم توليد ٢٠٠ مشاهدة من العلمية العشوائية (3-1) التي تمثل العملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية بافتراض وجود معلمتين فقط هما (a, c) يتبعان نفس التوزيعات المشار اليهما اعلاه في المعادلة SDDE بوصفها توزيعات مسبقة وتوزيعات لاحقة. وتم رسم كل من trace plot و المدرج التكراري للحكم على اداء الخوارزمية.



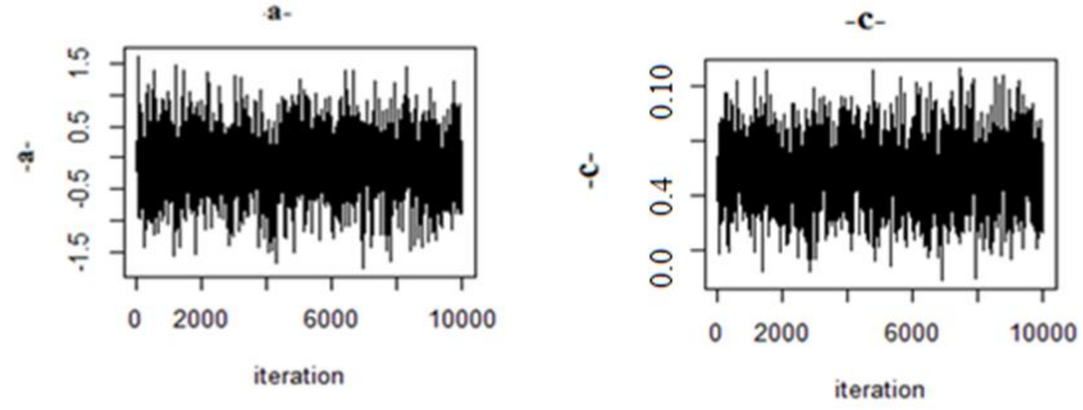
شكل ٣-٥: رسم trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثانية للعملية SDDE

من خلال الشكل (٣-٥) نجد ان هناك اربعة رسوم تمثل مخطط trace plot كل معلمة من المعالم المقدرة، إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لا تعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



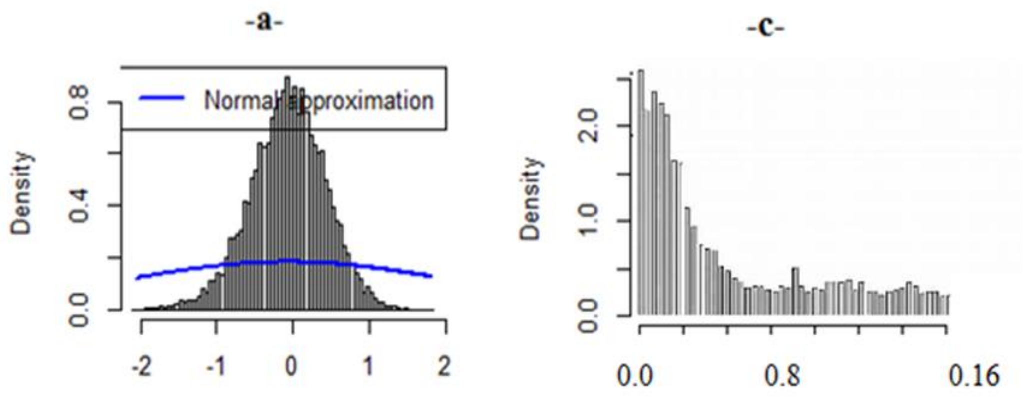
شكل ٣-٦: رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثانية للعملية SDDE.

الرسومات في الشكل (٣-٦) توضح ان المعالم a, b, d تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعالم تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري. الرسومات الآتية توضح رسم trace plot والمدرج التكراري لمعالم الحركة البروانية الهندسية (a, c).



شكل ٣-٧: رسم trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثانية للعملية GBM.

إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لا تعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



شكل ٣-٨: رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثانية للعملية GBM.

توضح ان المعلمة a تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعالم تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري.

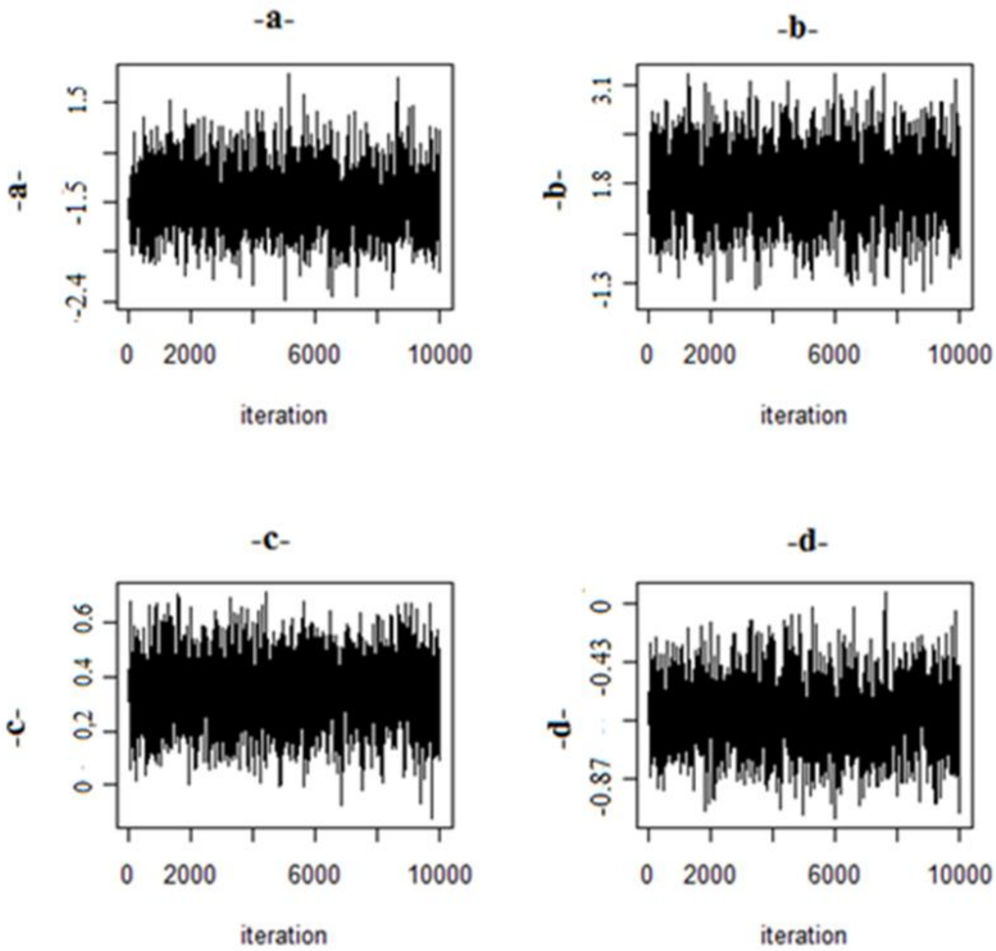
جدول (٣-٢) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار DIC لتجربة المحاكاة الثانية

Models	a	B	C	D	DIC
SDDE	-0.99	1.4	0.48	-0.40	38.56
(s.e.)	(0.692)	(0.657)	(0.081)	(0.055)	
GBM	-0.35	0	0.5	0	342.11
(s.e.)	(0.048)	(0)	(0.0061)	(0)	

من الجدول (٣-٢) الذي يبين تقديرمعالم بيانات اسعار صرف الدولار في السوق الموازي نجد ان قيمة معيار DIC اقل لنموذج SDDE مما عليه لنموذج GBM مما يعني ان نموذج المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا يلائم هذا النوع من البيانات اكثر من ملاءمة النموذج التقليدي GBM .

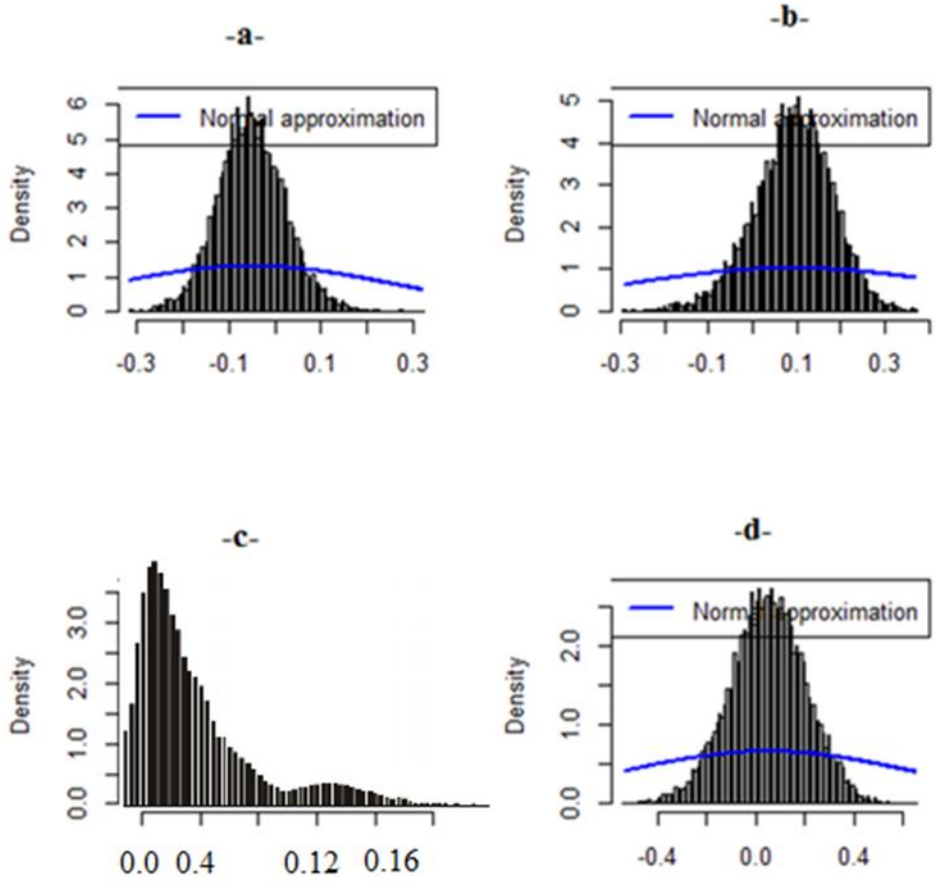
٣-٦ : تجربة المحاكاة الثالثة: اولاً في هذه التجربة تم اولا توليد مشاهدات من دالة الكثافة (transition density) للعملية العشوائية المفترضة في الدالة (2-6) وبحجم ٢٠٠ مشاهدة، إذ تم عد هذه الدالة بمثابة توزيع للبيانات (likelihood function) عند استخدام الخوارزميات الحسابية في توليد قيم المعالم من التوزيعات اللاحقة. في هذه التجربة تم افتراض ان التوزيع المسبق يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,9)$ للمعلمة a والتوزيع المسبق الطبيعي $N(0,9)$ للمعلمة b والتوزيع المسبق $N(0,10)$ للمعلمة d عند التوليد من خوارزمية كبس. كذلك تم استخدام التوزيع المسبق $IG(3,1)$ للمعلمة c عند التوليد من خوارزمية متروبولس – هاستنك ضمن خوارزمية كبس مستخدما توزيعا مقترحا للعمل بهذه الخوارزمية يتبع التوزيع الطبيعي $N(d_i, \sigma_d^2 = 0.2)$. وتم رسم المدرج التكراري Histogram للمعالم المقدرة يستخدم بوصفه أداة لمعرفة نوع التوزيع اللاحق من خلال الرسم. وثانياً تم توليد ٢٠٠ مشاهدة من العلمية العشوائية (3-1) التي تمثل العملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية بافتراض وجود معلمتين

فقط هما (a, c) يتبعان نفس التوزيعات المشار اليهما اعلاه في المعادلة SDDE بوصفها توزيعات مسبقة وتوزيعات لاحقة. وتم رسم كل من trace plot و المدرج التكراري للحكم على اداء الخوارزمية.



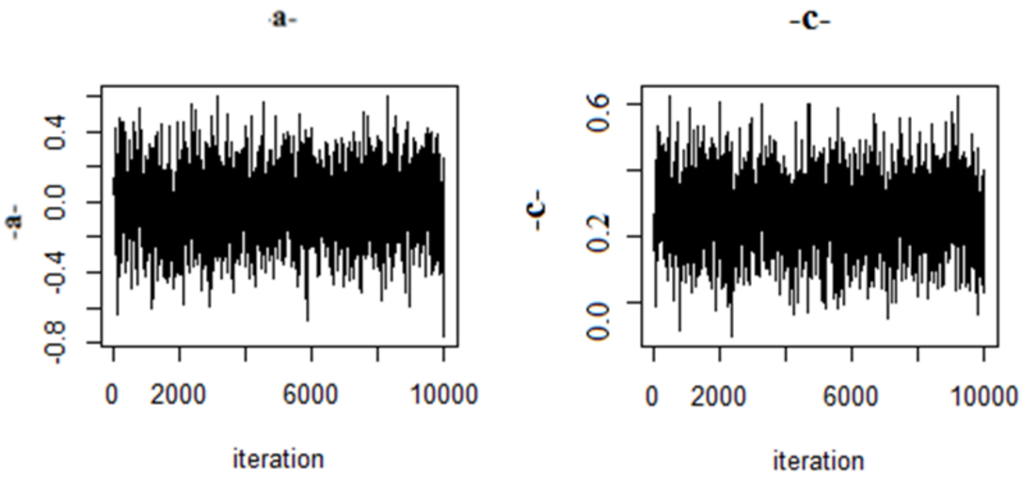
شكل ٣-٩: رسم trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية SDDE

من خلال الشكل (٣-٩) نجد ان هناك اربعة رسوم تمثل مخطط trace plot كل معلمة من المعالم المقدرة، إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لا تعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



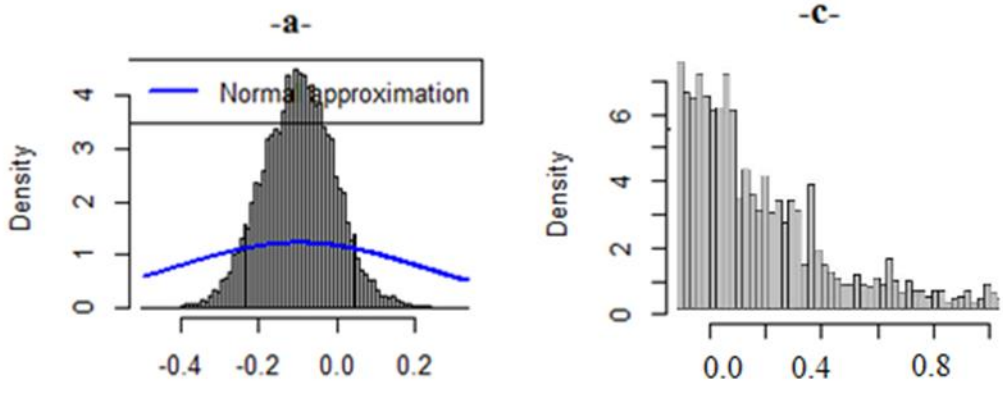
شكل ٣-١٠: رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية SDDE.

الرسومات في الشكل (٣-١٠) توضح ان المعالم a, b, d تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعامل تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري. الرسومات الآتية توضح رسم trace plot والمدرج التكراري لمعالم الحركة البروانية الهندسية (a, c).



شكل ٣-١١: رسم trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية GBM.

إذ يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لا تعاني تباطؤاً في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



شكل ٣-١٢: رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الثالثة للعملية GBM.

توضح ان المعلمة a تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعالم تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كاما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري.

جدول (٣-٣) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار DIC لتجربة امحاكاة الثالثة

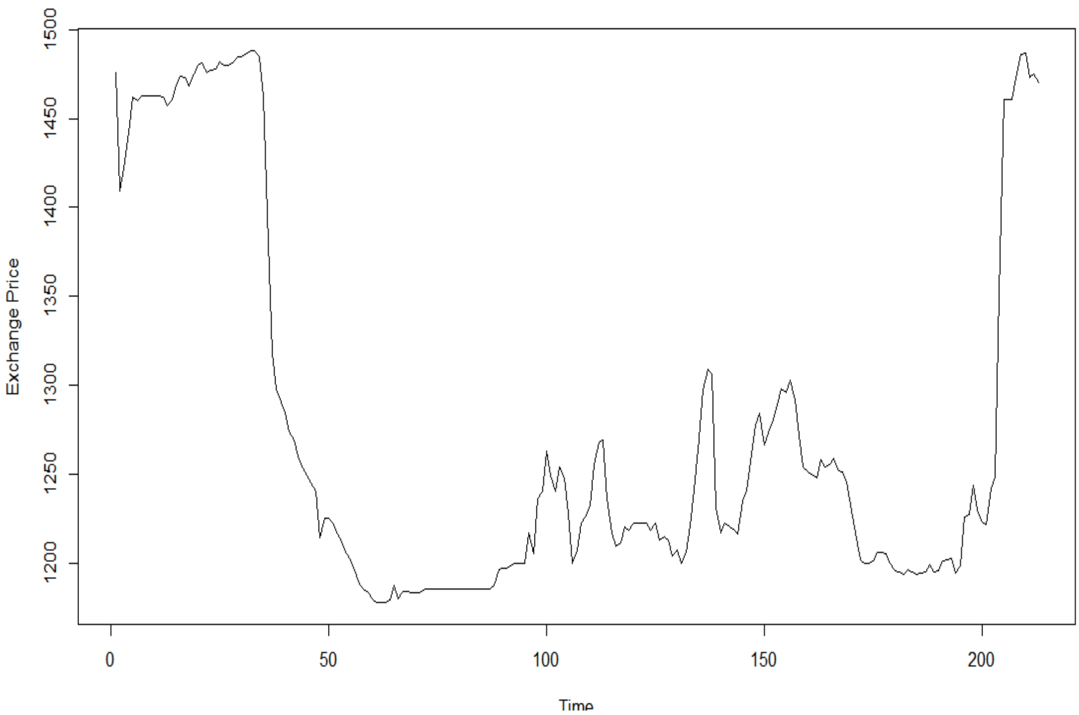
Models	A	b	C	d	DIC
SDDE	-1.6	1.84	0.33	-0.31	33.93
(s.e.)	(0.592)	(0.467)	(0.079)	(0.049)	
GBM	-0.90	0	0.33	0	300.32
(s.e.)	(0.044)	(0)	(0.0047)	(0)	

من الجدول (٣-٣) الذي يبين تقديرمعالم بيانات اسعار صرف الدولار في السوق الموازي نجد ان قيمة معيار DIC اقل لنموذج SDDE مما عليه لنموذج GBM مما يعني ان نموذج المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا يلائم هذا النوع من البيانات اكثر من ملاءمة النموذج التقليدي GBM .

٣-٧:تحليل البيانات الحقيقية

تناول هذا المبحث تطبيقا عمليا لمعادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنيا من خلال تحليل البيانات الحقيقية المتمثلة في بيانات اسعار صرف الدولار الموازية. إذ يتناول هذا المبحث تقديربيز لأربعة معالم لمعادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنيا وما اشرنا هذه المعادلة (2-7) وتقدير معلمتين لنموذج الحركة البروانية الهندسية وكما اشرنا اليها بالمعادلة (1-3) بعد جعل (b=0 و d=0) في المعادلة (2-7) . تم الاعتماد على عينة من اسعار الصرف الموازي الشهرية التي تنشرها وزارة التخطيط رسميا للفترة من ٢٠٠٤-٢٠٢١. أسعار الصرف الموازية يحكمها عوامل وتاثيرات غير عشوائية يمكن التنبؤ بها وعوامل وتاثيرات عشوائية لا يمكن التنبؤ بها لذلك فان المتداولين بسعر الصرف الموازي يحتكمون الى خبراتهم ومن ثم اتخاذ القرار بشأن البيع او الشراء، هذا يعني ان القرارات المستقبلية للمتداولين بسعر الصرف البيع المستقبلية لا تتأثر بالسعر الحالي للعملة وانما تتأثر بخبراتهم المتراكمة ومعرفتهم بالتقلبات المفاجئة التي تحدث بسعر الصرف. تم افتراض ان سعر صرف الدولار الموازي يخضع لنموذج عشوائي يعتمده المتداولون في السوق بناءاً على خبراتهم وهذا النموذج العشوائي يكون فيه سعر الصرف

في السوق يمتلك معلمة تخلف زمني مقدارها شهر واحد. إذ سيتم افتراض ان هذا التخلف الزمني موجود في كل من الحد المتوسط لمعدل نمو اسعارالصرف وحد التقلبات لاسعارالصرف. والرسم الآتي يوضح حركة سعر الصرف الموازي للدولار للمدة ٢٠٠٤-٢٠٢١ وبالتالي يمكن للمتداولين تحليل نمط سلوك هذه الاسعار والتعرف على السلوك القابل للتكرار او التغيرات السريعة التي تحدث في سعر الصرف. إذ تمكن رسومات حركة اسعار الصرف المتداولين من معرفة البيانات التاريخية للأسعار وبالتالي يتوفر لهم الدليل حول مستوى سعر الصرف الذي يتحلل به سوق سعر الصرف الموازي. **[Wang, 2016]**



شكل ٣-١٣: رسم بيانات اسعار الصرف الموازي للفترة ٢٠٠٤ -٢٠٢١.

نلاحظ من الشكل (٣-١٣) ان حركة اسعارالصرف الدولار شهدت تقلبات مفاجئة خلال بعض الفترات الزمنية وعدم استقرار في معظم الفترات. وبهذا تم افتراض ان معلمة التخلف الزمني تكون شهر واحد افتراضا من الباحث واعتقادا ان التغيرات المفاجئة تحدث بعد ٣ اشهر من تراوح اسعار الصرف بين ١٣٠٠-١٢٠٠ دينار عراقي . وبناءاً على ذلك فأننا مهتمون بتحليل هذا النوع من البيانات المالية وكذلك نعتقد ان ما توفره هذه البيانات من معلومات مسبقة (تاريخية) سيؤثر على حركة الاسعار الحالية مما يسهم باتخاذ القرار المناسب بشأن التداول

المستقبلي. والجدول في ادناه يوضح المعالم المقدرة واخطائها المعيارية بأسلوب بيز لكل من النموذجين SDDE و GBM والحكم على اداء النموذجين باستعمال معيار DIC .

Models	a	b	C	d	DIC
SDDE	-2.36	1.36	1.39	-1.91	28.03
(s.e.)	(0.712)	(0.557)	(0.044)	(0.043)	
GBM	-0.44	0	0.51	0	251.74
(s.e.)	(0.049)	(0)	(0.0051)	(0)	

جدول (٣-٤) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار DIC لاسعار الصرف الموازي

من الجدول (٣-٤) نجد ان القيمة المقدرة للمعلمة a تساوي (2.36-) مما يعني ان معدل متوسط نمو (average rate of growth) اسعار الصرف يتناقص وان القيمة المقدرة للمعلمة b تساوي (1.36) مما يعني ان معدل متوسط نمو اسعار الصرف بوجود معلمة التخلف الزمني يتزايد مما يدل على ان هناك تأثيراً ايجابياً للتخلف الزمني كمعلومة تاريخية (مسبقة) في نمو اسعار الصرف. بينما نجد ان القيمة المقدرة للمعلمة c تساوي (1.39) والتي تمثل معلمة الانحرافات او التقلبات (التغيرات العشوائية) بأسعار الصرف، إذ كان لها تأثير ايجابي على حركة اسعار الصرف وبدون تدخل اي معلومات مسبقة او تاريخية. وان القيمة المقدرة للمعلمة d تساوي (1.91-) مما يعني ان التقلبات في حركة اسعار الصرف بوجود اثر اتخلف الزمني كان لها تأثير سلبي على حركة التداول. وكذلك من الجدول اعلاه نجد ان قيمة معيار DIC للنموذج SDDE كان اقل مما هو عليه فان النموذج BGM يدل على ان نموذج SDDE له الافضلية في تمثيل حركة اسعار صرف الدولار بالسوق الموازي.

الـفصــل الرابــــع
الاستنتاجات والتوصيات

1.4. الاستنتاجات:-

في العديد من التطبيقات ، يفترض الباحثون أن الظاهرة المدروسة يتحكم بها مبدأ السببية أي أن الحالة المستقبلية للظاهرة تكون مستقلة عن حالتها الماضية وان تحديد ودراسة سلوك هذه الظاهرة يعتمد فقط على ما توفره هذه الظاهرة من بيانات الحاضر. ومن خلال الفحص الدقيق لسلوك بيانات الظاهرة ، يصبح واضحًا أن مبدأ السببية غالبًا ما يكون مجرد تقريب أولي للحالة الحقيقية و أن النموذج الأكثر واقعية والذي يمثل سلوك هذه الظاهرة سيشمل بعض الحالات السابقة (التاريخية) للظاهرة. ان المعادلات التفاضلية العشوائية تعد صيغاً رياضيةً مثلى لوصف سلوك هذه الظواهر(الانظمة). تعد النماذج العشوائية ولاسيما المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني *SDDE* من اوسع النماذج العشوائية انتشاراً في المجالات التطبيقية ولاسيما البيانات المالية (اسعار الصرف او اسعار الاسهم،.... الخ). ان مرونة دوال المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني من الناحية الرياضية ومن ناحية تمثيل العمليات العشوائية للظواهر المالية إذ ان وجود معلمة التخلف الزمني يسهم في فهم حركة البيانات المالية لكونها تستغل البيانات التاريخية في رسم صورة واضحة عن تحركات البيانات المالية. هذه الرسالة تطرقت الى المعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني، إذ تم ادراج مجموعة من التعاريف والنظريات اسهمت الى حد كبير في فهم آلية عمل هذا النوع من المعادات التفاضلية. والنظريات المهمة لحل هذه المعادلات فضلاً عن ذلك تم التطرق الى طريقة أويلر العددية لإيجاد الحل التقريبي العددي لهذه النماذج. وتم استعراض ثلاث تجارب محاكاة من اجل فهم سلوك هذا النوع من المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود التخلف الزمني في حد معدل النمو وفي حد التقلبات، ونموذج الحركة البروانية الهندسية من خلال استخدام نظرية بيز في تقدير معالم النماذج المشار اليها. ومن خلال استخدام معيار انحرافات المعلومات *DIC* تبين تفوق المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية في جميع تجارب المحاكاة. فضلاً عن ذلك تمت الاستعانة ببيانات اسعارصرف الدوار في السوق الموازي لفهم سلوك تحركات اسعار الصرف من خلال توظيف المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني ونموذج الحركة البروانية الهندسية وتقدير معالم هذه النماذج إذ بينت النتائج تفوق نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني في دراسة تحركات اسعار الصرف على نموذج الحركة البروانية الهندسية بسبب مرونتها التي تتمتع بها من خلال وجود معالم التخلف الزمني التي تستغل البيانات التاريخية لتحركات اسعار الصرف.

2.4. التوصيات:-

يوصي الباحث بما يأتي:

١- دراسة سلوك نماذج المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني من خلال الاعتماد على افتراضات اخرى للتوزيعات المسبقة في تقدير معالم هذا النموذج.

٢- دراسة تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني بأسلوب بيزمع وجود قفزات (*jump*).

٣- دراسة المقدرات البيزية للمعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني بتوظيف عمليات (*Fractional lévy process*).

٤- اعتماد اسلوب المقدرات البيزية للمعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني لدراسة سلوك حركة اسعار الاسهم في سوق العراق للأوراق المالية.

المصادر

المصـــادر

- العذاري فارس مسلم، الوكيل علي عبد الحسين. العمليات التصادفية. وزارة التعليم العالي العراقية. جامعة بغداد 1991.
- كاظم، شذى عواد.(٢٠٢٢). المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع تطبيق عملي.رسالة ماجستير، قسم الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة القادسية.

Abou-El-Ela, A. M. A., A. I. Sadek, A. M. Mahmoud, and R. O. A. Taie . (2015). On the Stochastic Stability and Boundedness of Solutions for Stochastic Delay Differential Equation of the Second Order. Hindawi Publishing Corporation Chinese Journal of Mathematics ,Volume, Article ID 358936, 8 pages.

ALADAĞLI, E-EZGI, (2017). ″Stochastic Delay Differential Equations″. A Thesis submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University.

Awwad,S. and Al-saadony, M.(2022). Simulation Analysis Based on Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences, 2312-9883 *QJAE*, Volume 24, Issue 1.

Awwad,S. and Al-saadony, M.(2022). Iraqi Exchange pricing Analysis with Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences,QJAE, Volume 24, Issue 2.

Bahar, A. (2019). ″ Numerical solution of stochastic state-dependent delay differential equations: convergence and stability″.,Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran,.

Berg, A., Meyer, R., and Yu, J. (2004). Deviance information criterion for comparing stochastic volatility models. Journal of Business and Economic Statistics, 22, 107–120.

Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000). Bayesian Theory, John Wiley and Sons, New York.

Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1973). Bayesian Inference in Statistical Analysis, John Wiley and Sons, New York.

Buckwar, E., (2000). Introduction to the numerical analysis of stochasthic delay differential equations. Department of Mathematics, the Victoria University of Manchester,.

Chib, S. and Greenberg, E. (1996). Markov chain Monte Carlo simulation methods in econometrics. Econometric Theory, 12, 409–431.

Carlsson, J., Moon, K. S., Szepessy, A., Tempone, R., and Zouraris, G. (2010). Stochastic differential equations: Models and numerics. Lecture notes.

Casella, G. and George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. American Statistician, 46, 167–174.

Cordoni, F. and Di Persio,L. (2017).Stochastic reaction-diffusion equations on networks with dynamic time-delayed boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA); in Press, available online: 10 February 2017.

Evans, L. C. (2013). An Introduction to Stochastic Differential Equations. American Mathematical Society. Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

Florescu, I. (2014). Probability and stochastic processes. John Wiley & Sons.

Girolami, M. (2008). Bayesian inference for differential equations. Theoretical Computer Science, 408(1), 4-16.

Grigoriu, M., (1997). Control of time delay linear systems with Gaussian white noise, Probabilistic Engineering Mechanics, 12(2), pp. 89–96,.

Han, S. (2005). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. M.Sc. Thesis, University of Edinburgh and Heriot-Watt.

Hauser,M.The Derivative of Brownian Motion is White Gaussian Noise http://mbhauser.com/informal-notes/white-gaussian-noise.pdf.

Hu,Y., and Xi, F., and Zhu,M. (2022). LEAST SQUARES ESTIMATION FOR

DISTRIBUTION-DEPENDENT STOCHASTIC DIFFERENTIAL DELAY EQUATIONS. COMMUNICATIONS ON doi:10.3934/cpaa.2022027

PURE AND APPLIED ANALYSIS, Volume 21, Number 4.

Jones, C. S. (1998). Bayesian estimation of continuous-time finance models. Mathematics. Manuscript, University of Rochester.

Klebaner F. C., (2005). Introduction to Stochastic Calculus with Application. 3rd Edition, Monash University, Australia, Imperial College Press.

Küchler, U., & Vasiliev, V. A. (2009). On sequential parameter estimation of stochastic delay differential equations by noisy observations. IFAC Proceedings Volumes, 42(10), 892-897.

Küchler, U., & Vasil'iev, V. A. (2007). On parameter estimation of stochastic delay differential equations with guaranteed accuracy by noisy observations. Journal of statistical planning and inference, 137(9), 3007-3023.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus,

second edition, Springer-Verlag, Berlin.

Kuchler, U. and Kutoyants, Y. A. (2000). Delay Estimation for Some Stationary Diffusion-type Processes. Scandinavian Journal of Statistics, 27(3), 405-414.

Kutoyants, Y. A. (2005). On delay estimation for stochastic differential equations. Stochastics and Dynamics, 5(02), 333-342.

Lei, J., & Mackey, M. C. (2007). Stochastic differential delay equation, moment stability, and application to hematopoietic stem cell regulation system. SIAM journal on applied mathematics, 67(2), 387-407.

Mackey, M. C., & Nechaeva, I. G. (1995). Solution moment stability in stochastic differential delay equations. Physical Review E, 52(4), 3366.

Mohammed, Salah-Eldin, A. (1998) . Stochastic Differential Systems with Memory″. ,Southern Illinois University Carbondale.,.

Mao, X. and Matina J.R., (2006). Khasminskii –Type Theorems for Stochastic Differential Delay Equations., Department of Statistics and Modelling Science, Universtiy of Strathclyde ,Glasgow,U.K.,.

Olofsson, P. and Andersson, M. (2012). Probability, statistics, and stochastic processes. John Wiley & Sons.

Picchini, U. and Forman, J. L. (2019). Bayesian inference for stochastic differential equation mixed effects models of a tumor xerography study. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics), 68(4), 887-913.

Wang,P. (2016). Application of Stochastic Differential Equations to Option Pricing. Master of Arts, Graduate Faculty of the University of Kansas.

Rao, B. P. (2008). Parametric estimation for linear stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motion. Random Operators and Stochastic Equations 16(1):27-38.

Rosli, N., Bahar,A., Hoe,.S. and Abdul Rahman, H. (2013). Stochastic Taylor Methods for Stochastic Delay Differential Equations. MATEMATIKA, , Volume 29, Number 1c, 241-251.

Skorokhod, V. (2004). Basic principles and applications of probability theory (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Scheutzow,M.(2018). Stochastic Delay Equations. http://page.math.tu-berlin.de.

Shen, Y., Qingxin M., Peng S. (2014). Maximum principle for mean-field jump–diffusion stochastic delay differential equations and its application to finance. Automatica. 50(6):1565–1579.

Shevchenko, G.(2010). Mixed stochastic delay differential equations. Mathematics Subject Classification. 60H10, 34K50, 60G22.

Stoica, G. (2004). A Stochastic Delay Financial Model, American Mathematical Society,.

Wang, L., & Cao, J. (2012). Estimating parameters in delay differential equation models. Journal of agricultural, biological, and environmental statistics, 17(1), 68-83.

Wang, P. (2016). Application of stochastic differential equations to option pricing (Doctoral dissertation, University of Kansas).

Xu, M., Wu, F., and Leung, H. (2010). Stochastic delay differential equation and its application on communications. In Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (pp. 1364-1367). IEEE.

Zheng, Y. (2015). Asset pricing based on stochastic delay differential equations (Doctoral dissertation, Iowa State University).

Abstract……………………………………………………….

This thesis studies the stochastic differential delay equations and their application in simulation experiments and real data, and compare their results with the restrictive model called the geometric Brownian motion. The use of numerical methods in finding the numerical solution of time-lagged random differential equations is done without reference to the estimation of the coefficient of these equations. As estimating the parameters of this type of equations is necessary to understand the behavior of the studied phenomenon, especially since there are phenomena with random behavior that depend on historical data (the parameter of time lag). It is also known that there are difficulties in estimating the parameters of time-lag stochastic differential equations that face many researchers who are especially interested in studying the behavior of financial phenomena. Therefore, the stochastic differential delay equations were applied as a model to study the behavior of the dollar exchange rate data in the parallel markets. Estimating the parameters of the stochastic delay equations using the Bayesian method, comparing the Bayesian estimates with the estimates of the classical method known as the geometric Brownian motion model. The results of simulation experiments and practical application showed the superiority of the differential equations with time dilation model over the geometrical Brownian motion model in representing the behavior of exchange rate movements.

Republic of Iraq

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of AI-Qadisiyah

College of administration and Economics
Department of Statistic
Graduate studies

BAYESIAN ESTIMATES OF THE STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

WITH APPLICATION

A thesis submitted to the Council of College of Administration Economics University of Al-Qadisiyah in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Statistics

M.Sc. Thesis of Statistics

by
Anwer Fawzi Ali

Supervisor
Prof.Dr. Muhannad F. Al-Saadon

2023 A.D. 1444 A.H.