

محاكاة تقدير معالم المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمني بأسلوب بيز

الباحث

أنور فوزي علي

جامعة القادسية _ كلية الإدارة والاقتصاد

admin.stat21.12@qu.edu.iq

رقم الهاتف/ 07800049061

الأستاذ المساعد الدكتور

مهند فائز كاظم

جامعة القادسية _ كلية الإدارة والاقتصاد

muhannad.alsaadony@qu.edu.iq

رقم الهاتف/ 07811262790

Bayesian Parameters Estimation for the Stochastic Differential Delay Equation: A Simulation Study

Researcher

Anwar Fawzy Ali

University of Al-Qadisiyah College of Administration and Economics

Asst. Prof. Dr

Muhannad Al-Sadonny

University of Al-Qadisiyah College of Administration and Economics

الملخص

تناول هذا البحث تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من خلال تجارب محاكاة ومقارنة نتائجها مع النموذج التقليدي المسمى بالحركة البروانية الهندسية. ان استخدام الطرائق العددية في ايجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً يتم دون التطرق الى تقدير معامل هذه المعادلات. حيث ان تقدير معالم هذا النوع من المعادلات يعتبر ضروره لفهم سلوك الظاهرة المدروسة خصوصاً ان هناك ظواهر ذات سلوك عشوائي تعتمد

على بيانات تاريخية (معلمة التخلف الزمني). أيضاً من المعروف ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً حيث تواجه الكثير من الباحثين المهتمين. لذلك تم تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام أسلوب بيز. حيث اظهرت نتائج تجارب المحاكاة تفوق نموذج المعادلات التفاضلية ذات التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً, الحركة البروانية الهندسية, تقدير بيز , خوارزمية كبس, خوارزمية متروبولس- هاستنك.

Abstract

This paper dealt with the estimation of the parameters of stochastic differential delay equations through simulated experiments and compared their results with the traditional model called the geometric Brownian motion. The use of numerical methods in finding the numerical solution to the stochastic differential delay equations is done without addressing the estimation of the coefficient of these equations. As estimating the parameters of this type of equations is necessary to understand the behavior of the studied phenomenon, especially since there are phenomena with random behavior that depend on historical data (delay parameter). It is also known that there are difficulties in estimating the delay parameters of stochastic differential equations, which confront many interested researchers. So the stochastic differential delay equations parameters were estimated using Bayesian method. The results of the simulation experiments showed the superiority of the stochastic differential delay equation model over the geometric Brownian motion model.

Keywords: stochastic differential delay equations, geometric Brownian motion, Bayesian estimation, Gibbs sampler algorithm, Metropolis-Hasting algorithm.

المقدمة

في السنوات الأخيرة تعتبر المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic differential equation) من الأساليب الرياضية المهمة المستخدمة في دراسة سلوك الظواهر المالية (أسعار الفائدة، أسعار الأسهم، أسعار الأصول، الخ) وبالتالي تقسيم أداء هذه الظواهر أو البيانات المالية. أي أن المعادلات التفاضلية العشوائية توفر أطراً طبيعياً لنمذجة السلوك العشوائي المتأصل في الكثير من العمليات الفيزيائية ذات الزمن المستمر ويمكن القول إن العمليات التفاضلية العشوائية تهتم بفهم ونمذجة ديناميكية الأنظمة وتطورها عبر الزمن. إضافة إلى ذلك أهتم الكثير من الباحثين بدراسة العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (Stochastic delay differential equations) من خلال إضافة معلمة التخلف الزمني، حيث أصبحت العمليات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً أكثر مرونة وتطبيقاً في الكثير من المجالات العلمية من خلال اعتمادها على البيانات التاريخية للظاهرة المدروسة وليس فقط على الحالة الحالية للظاهرة المدروسة. يمكن القول إن المهتمين والباحثين في مجال توظيف المعادلات التفاضلية العشوائية في بيانات عالم المال قد اعتمدوا على النظريات المتقدمة في علم الرياضيات ذات الصلة بتتبع ودراسة سلوك حدوث الظواهر ذات الزمن المستمر مما ساعد على الاستخدام الواسع للنماذج العشوائية للظواهر التي تتسم بالتقلبات المتكررة بهدف إيجاد الحل (اتخاذ القرار) للعديد من عقود ومشاركت التسعير في عالم المال. [كاظم,2022],[Wang,2016]

يعتبر عالم المال (Finance world) بمثابة عالم الأشياء العشوائية والعالم الذي لا يمكن التنبؤ بظهور حوادثه. إن التطور المبتكر للوسائل الرياضية في مجالات الرياضيات المالية والتعقيدات المرافقة للتغيرات الحاصلة بأسواق المال رافقه الكثير من العقود المالية والصفقات المالية في عالم صناعة الأموال مع الأخذ بنظر الاعتبار العوائد والمخاطر من هذه التداولات. وبالنتيجة لتسعير العقود والصفقات المستقبلية فإن عدم التأكد مما يحدث مستقبلاً من تسعير الصفقات أصبح من أكثر المواضيع اهتماماً في حقل الرياضيات المالية والتحليل الكمي الحالي. كذلك فإن النموذج الرياضي للحركة البروانية الهندسية يعتبر نموذج رياضي مالي لنمذجة أسعار الأصول في نماذج بلاك – شولز والتي تعتبر من أشهر النماذج الرياضية استخداماً لنمذجة أسعار الوصول والتبادلات التجارية، لكن هنالك نقاط خلل في نماذج الحركة البروانية الهندسية كعملية عشوائية تقريبية في تمثيلها للتطور (التغيرات) التي تحصل بأسعار الأصول. أن من المعروف في التعاملات بأسواق المال نجد أن من المهتمين بالتداول يستفيدون من المعلومات السابقة (التاريخية) لحركة الأسعار، مثل أسعار الأسهم التاريخية بهدف التنبؤ بتحركات السوق وبالتالي اتخاذ القرارات المثلى في الاستثمار من عدمه. وبهذا فإن الاعتماد على المعلومات التاريخية (المعلومات السابقة) من خلال إضافة حد التخلف الزمني إلى نموذج الحركة البروانية الهندسية القياسية فإننا نحصل

على نموذج معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنياً والتي تعتبر صيغة رياضية أكثر مرونة للتعامل مع التطورات (التغيرات) التي تحصل في أسعار الأصول في أسواق المال غير الكفوء. في هذه الرسالة سوف نركز على الدراسات التي تناولت تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً والدراسات ذات العلاقة.

المبحث الاول : الاطار النظري

اولاً: مشكلة البحث:

يتطلب إيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً ثم تقدير معالم هذا النوع من المعادلات حيث من الضروري فهم سلوك تغير قيم هذه المعالم عند دراسة أنظمة المعادلات ذات السلوك العشوائي خصوصاً في حالة كون أنظمة هذه المعادلات تعتمد في سلوكها على البيانات التاريخية (معلمة التخلف الزمني) أيضاً من المعروف ان هناك صعوبات في تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً وجه الكثير من الباحثين المهتمين خصوصاً بدراسة سلوك الظواهر المالية.

ثانياً : فرضية البحث:

تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام اسلوب بيز يوفر مقدرات اكثر دقة من نموذج الحركة البروانية الهندسية.

ثالثاً : الحدود المكانية:

تم تقدير معالم المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام تقنية المحاكاة وفق اسلوب بيز من خلال اجراء ثلاث تجارب للمحاكاة وبافتراض توزيعات مسبقة مختلفة للمعالم المراد تقديرها.

المبحث الثاني: المفاهيم النظرية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

1- المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic differential equations)

تعتبر المعادلات التفاضلية العشوائية بمثابة معادلة رياضية تشتمل على دوال (functions) اضافة الى مشتقاتها. وعادة ما تكون الدوال هي بمثابة كميات رياضية (مثل المتوسط او اي دالة ببيانات الظاهرة المدروسة) اما مشتقاتها فتتمثل معدل التغير (rate of change) في هذه الكميات او الدوال، وباستخدام المعادلات التفاضلية يمكن وصف العلاقة بين هذه الدوال ومشتقاتها. لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية: [Karatzas and Shreve, 1991]

[Awwad, S. and Al-saadony, , [Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022a)

M.(2022b).]

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + \alpha N(t)dW(t) \quad \dots (1)$$

حيث ان

Brownian Motion $W(t)$: تمثل الحركة البروانية

deterministic $r(t)$: هو الجزء المحدد (الحتمي)

α : هو عدد يمثل مقدار التقلبات (Volatility)

$N(t)$: تمثل حالة الظاهرة المدروسة عند الزمن t .

من اجل فهم المعادلة التفاضلية العشوائية (1) يتطلب الامر ادراج التعاريف الاتية:

تعريف (1): المعادلة التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equation

[Zheng,2015]

نفرض ان $W(t)$ هي عملية الحركة البروانية العشوائية وان $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ هي دوال فان العملية

التفاضلية العشوائية يمكن تعريفها كالآتي: [Evans, 2013],[Carlsson et.al, 2010]

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad \dots (2)$$

بأفتراض ان $x(0) = x_0$ هو متغير عشوائي وان الدوال f, g معرفة كالآتي:

$$f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$$

$$g: [0, T] \times R^n \rightarrow R^{n+m}$$

حيث ان:

m هو عدد التغيرات لعملية الحركة البروانية

n هي عدد المتغيرات العشوائية X

R تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية

ان المعادلة التفاضلية العشوائية (2) تكتب باستخدام التكاملات بالصيغة الاتية:

$$X(t + s) = X(t) + \int_t^{t+s} f(X(u), u)du + \int_t^{t+s} g(X(u), u)dw(u) \dots (3)$$

وبافتراض ان $t = 0$ فانه يمكن اعادة كتابة المعادلة (2 - 3) كالآتي:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(X(u), u)du + \int_0^t g(X(u), u)dw(u) \dots (4)$$

عندئذ وبناءً على المعادلة (4) يمكن القول بأن العملية العشوائية $\{X_t\}_{t \geq 0}$ هي عملية $It\hat{o}$ ($It\hat{o}$ process) والتي عادة ما تتكون من تكاملين الاول يدعى تكامل $Riemann$ والثاني يدعى التكامل العشوائي (stochastic integral) .

تعريف (2): الحركة البروانية الهندسية (GBM) Geometric Brownian Motion (GBM) [Zheng,2015]

بافتراض ان لدينا اسعار اسهم فان الحركة البروانية الهندسية لاسعار الاسهم $s(t)$ تعرف على انها عملية عشوائية تحقق المعادلة التفاضلية العشوائية الآتية:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \mu dt + \sigma w(t)$$

حيث ان

μdt : هو الحد المتنبأ به (predictable) وتكون فيه المعلمة μ هي مقياس لمتوسط معدل نمو اسعار الاسهم والتي تعرف بمعلمة drift.

$\sigma w(t)$: هو الحد العشوائي الذي يمثل التغير العشوائي بأسعار الاسهم الناجمة من التأثيرات الخارجية غير المتوقعة، حيث ان σ تمثل معلمة $volatility$ اي معلمة التقلبات والتي تقيس الانحراف المعياري للعوائد. من خلال التعريف اعلاه نجد من الواضح ان العملية التفاضلية العشوائية تعاني من بعض المحددات اهمها هو ان المعلومات السابقة (التاريخية) للتبادلات المالية لا تؤخذ بنظر الاعتبار عند محاولة فهم التحركات في اسعار الاسهم المستقبلية. لذلك تطلب الامر تطوير ما يسمى بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً، المبحث التالي يبين هذا النوع من المعادلات.

المبحث الثالث : المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً Stochastic delay differential Equation (SDDE)

في المبحث السابق ذكرت تعريف العملية العشوائية التفاضلية (SDE) وهنا سنتطرق الى المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (SDDE) من خلال ادخال المعلومات السابقة او التاريخية على شكل معلمة تمثل ما يسمى بالتخلف الزمني (delay) او الذاكرة (Memory) الى المعادلة التفاضلية العشوائية. وتجدر الإشارة الى انه يمكن اضافة معلمة التخلف الزمني الى الحد الحتمي (deterministic) او الحد العشوائي (stochastic) او كلاهما. [Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022a).]

ان اضافة هذه المعلمة يجعل من المعادلة التفاضلية العشوائية اكثر مرونة وواقعية لفهم ووصف تحركات الاسعار والتبادلات المالية من خلال نموذج رياضي ذو قدرة تفسيرية عالية. وبذلك بدلاً من افتراض ان

اسعار الاسهم $S(t)$ تتبع عملية الحركة البروانية الهندسية (GBM) وان اسعار الاسهم تتبع خاصية ماركوف فأنا نفترض ان التحركات المستقبلية لاسعار الاسهم $S(t)$ تعتمد ليس فقط على السعر الحالي للسهم بل وانها تعتمد كذلك الاسعار التاريخية (الاسعار السابقة) انظر [Zheng 2015] لمزيد من المعلومات. [Han, 2005]

تعريف (3): على فرض ان لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وان $W(t)$ يمثل الحركة البروانية، عندئذ فان المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تعرف رياضياً بالصيغة الاتية:

[ALADAĞLI 2017], [العداري, 1990]

$$dS(t) = f(S(t), S(t - \tau))dt + g(S(t), S(t - \tau), t)dW(t); \quad t \geq 0$$

$$S(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad \dots (5)$$

حيث ان $\tau > 0$ هي معلمة التخلف الزمني وان الدوال f و g معرفتان بالشكل الاتي:

$$f: R \times R \times R_+ \rightarrow R$$

$$g: R \times R \times R_+ \rightarrow R$$

وان $R_+ = [0, \infty]$
وان

$$\phi(t) = [-\tau, 0] \rightarrow R^n$$

هي متغير عشوائي يحقق الشرط الاتي:

$$E[\sup_{t \in [-\tau, 0]} |\phi(t)|^p]^{1/p} < \infty$$

وان f و g هي دوال *volatility, drift*.

نظرية (1): افترض ان لدينا المعادلة التفاضلية المتخلفة زمنياً (SDDE) الاتية: [Jassim,2006]

[Zheng,2015] [Buckwar,2000]

$$dS(t) = f(t, S(t), S(t - \tau))dt + g(t, S(t), S(t - \tau))dW(t); \quad a \leq t \leq b$$

$$S(t_0) = \phi_0(t); \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \quad \dots (6)$$

ومن خلال تقسيم الفترة $[a, b]$ بالشكل الاتي:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b,$$

حيث ان $t_n = n.h$, $n = 0,1, \dots, N$

$$h = \frac{T}{N} = \frac{b-a}{N}, \quad \text{وان}$$

$$\tau = N_\tau . h$$

عندئذ فأن الحل وفق طريقة اويلر يمتلك الدالة الاتية:

$$\Psi(h, \tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau}, \Delta W_{n+1}) = f(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau})h + g(\tilde{S}_n, \tilde{S}_{n-N_\tau})\Delta W_{n+1}$$

حيث ان $0 \leq n \leq N - 1$ وان

$$\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$$

هنا المتغيرات العشوائية $\Delta W_1, \dots, \Delta W_N$ مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين h . وان \tilde{S} تمثل التقريب القوي strong approximation لحل المعادلة (6).

في هذه الرسالة سوف نعتمد على المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا التالية التي افترضها الباحث [Zheng,2015] لنمذجة اسعار الاسهم على انها تعتمد في حركة التبادلات المالية على المعلومات التي يستوعبها المضاربون من البيانات والتبادلات المالية التي تعود لازمان سابقة (معلمة التخلف الزمني),

$$dS(t) = (a.S(t) + b.S(t - \tau))dt + (c.S(t) + dS(t - \tau))dW(t);$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$S(t) = \emptyset(t); -\tau \leq t \leq 0 \quad \dots (7)$$

حيث ان معلمة التخلف الزمني $\tau > 0$ تمثل ثابت عددي معين.

حيث اختبر الباحث [Zheng,2015] بأن المعادلة التفاضلية (7) تحقق شرط *Local Lipschitz* وشرط النمو الخطي *Linear growth* . [Kutoyants, 2005]

المبحث الرابع : تقدير المعالم باسلوب بيز للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

ان ايجاد تقديرات المعالم باسلوب بيز يتسم بالكثير من الخصائص من اهمها انه يمكن تطبيق اسلوب بيز في حالة حجوم العينات الصغيرة وهو عكس الطرق الاخرى التي يعتمد بعضها على الحجوم الكبيرة للعينات ونظريات التقارب، كذلك هنالك طرق مثل طريقة العزوم التي لا تتطلب اجراء تكاملات لتسهيل العمليات الحسابية، لذلك وعند التعامل مع ظواهر في فترات زمنية محددة يصبح من الصعب الاعتماد على الطرائق الكلاسيكية في تقدير معالم المعادلة التفاضلية لذلك في هذه الرسالة سوف نعتمد على

اسلوب بيز. [Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000)], [Box and Tiao, 1973],

[Rao, 2008]

تنص قاعدة بيز على المعادلة الآتية:

$$g(\theta|\text{data}) = \frac{f(\text{data}|\theta) \times g(\theta)}{\int f(\text{data}|\theta) \times g(\theta)d\theta} \quad \dots (8)$$

وبسبب ان مقام (8) هو دالة لا تعتمد على المعلمة θ فممكن كتابة (8) بالشكل الآتي:

$$g(\theta|\text{data}) \propto f(\text{data}|\theta) \times g(\theta)$$

تعتبر تقنية MCMC (Markov chain Monte Carlo) من اوسع التقنيات الحسابية التي يمكن استخدامها في اجراء دراسة المحاكاة في الاستدلال البيزي. في هذه الدراسة سوف نستخدم الخوارزمية كبس وخوارزمية متروبوس لتقدير معالم المعادلة SDDE [Casella and George, 1992].

2- التوزيع السابق والتوزيع اللاحق للمعالم

ان دالة الكثافة للاحتتمالات الانتقالية للعملية العشوائية $\{\tilde{Y}_n ; 0 \leq n \leq N\}$ تحقق الشرط الآتي:

$$f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N | \tilde{y}_0, \theta) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{(S_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \dots (9)$$

حيث ان المتوسط هو:

$$\mu_i = (ah + 1)S_{i-1} + bhS_{i-N_\tau-1}$$

والتباين

$$\sigma_i^2 = c^2(S_{i-1} + dS_{i-N_\tau-1})^2h$$

وان $i = 1, 2, \dots, N$

وبهذا فان التوزيع السابق واللاحق لمعالم SDDE سيكون كمايلي:

1-2: التوزيع السابق واللاحق للمعلمة a

بالاعتماد على توزيع دالة الإمكان (9) الذي تتبع فيه التوزيع الطبيعي للبيانات المتولدة من العملية $\{S_n\}_{0 \leq n \leq N}$ وبافتراض ان المعلمة a تمتلك توزيعاً مسبقاً (prior) يتمثل بالتوزيع الطبيعي فانه يمكن كتابة التوزيع اللاحق (posterior) للمعلمة a بالشكل الآتي:

لنفرض

$$g(a; 0, \sigma_a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left\{ \frac{-a^2}{2\sigma_a^2} \right\}$$

حيث ان $-\infty \leq a \leq \infty$.

كذلك فان

$$g(a | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N, b, c^2, d) = g(a | S_1, S_2, \dots, S_n, \tilde{y}_0, b, c^2, d)$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \right]^{-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{ahS_{i-1}(S_i - S_{i-1} - bhS_{i-N_{\tau}-1})}{\sigma_i^2} \right\} \dots (10)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن اعتباره كتوزيع طبيعي للمعلمة a بمتوسط

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^N hS_{i-1}(S_i - S_{i-1} - bhS_{i-N_{\tau}-1}) / \sigma_i^2 \right]}{\left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \right]^{-1}$$

2-2: التوزيع السابق واللاحق للمعلمة b :

$$g(b | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N, a, c^2, d) = g(b | S_1, S_2, \dots, S_n, \tilde{y}_0, a, c^2, d),$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{b^2}{2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-N_{\tau}-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \right]^{-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{bhS_{i-1}(S_i - S_{i-1} - ahS_{i-1})}{\sigma_i^2} \right\} \dots (11)$$

ان الجانب الايمن اعلاه يمكن اعتباره كتوزيع طبيعي للمعلمة b بمتوسط

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^N hS_{i-N_{\tau}-1}(S_i - S_{i-1} - ahS_{i-1}) / \sigma_i^2 \right]}{\left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-N_{\tau}-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \right]^{-1}}$$

وتباين

$$\left[\sum_{i=1}^N \frac{(hS_{i-N_{\tau}-1})^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \right]^{-1}$$

3-2: التوزيع السابق واللاحق للمعلمة c^2 :

ان المعلمة c موجودة في الحد العشوائي (حد التقلبات او الانحرافات المعيارية) من المعادلة التفاضلية العشوائية امتخفة زمنيا, لذلك فإن التوزيع المسبق المفترض لها هو توزيع معكوس كاما, حيث ان

$$g(c^2|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\alpha} (c^2)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{c^2}}$$

وهكذا فإن التوزيع اللاحق للمعلمة c^2 وبالاعتماد على قاعدة بيز (8) وتوزيع الامكان (9) سيكون بالشكل الاتي:

$$\pi(c^2 | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a, b, d) = \pi(c^2 | S_1, S_2, \dots, S_n, \tilde{y}_0, a, b, d)$$

$$\propto (c^2)^{-\left(\frac{N}{2} + \alpha\right) - 1} \exp\left\{-\frac{(\beta + z)}{c^2}\right\} \quad \dots (12)$$

حيث ان:

$$z = \sum_{i=1}^N \frac{\left[S_i - \left((ah + 1)S_{i-1} - bhS_{i-N_t-1}\right)\right]^2}{2hc^2(S_{i-1} + dS_{i-N_t-1})^2}$$

ان الجانب الايمن اعلاه من الدالة (12) يمثل توزيع معكوس كاما وبالتالي فإن c^2 يمتلك توزيع معكوس كاما كتوزيع لاحق بالمعالم:

$$\frac{N}{2} + \alpha = \text{shape parameter}$$

و

$$\beta + \sum_{i=1}^N z_i = \text{scale parameter}$$

ان التوزيعات اللاحقة (10), (11), و (12) تمتلك توزيعات احصائية معلومة الشكل لذلك يمكن استخدام خوارزمية Gibbs لتوليد عينات للمعالم c^2, b, a من اجل حساب متوسطاتها كتقدير لقيمتها. اما المعلمة الرابعة d فلا يمكن تحديد صيغة قريبة لتوزيعها المسبق لذلك لا يمكن اشتقاق توزيعها اللاحق مما يستوجب ان نستخدم خوارزمية متروبولس هاستنكس Metropolis – Hastings لتوليد عينات للمعلمة d حيث ان هذه الخوارزمية لا تتطلب تحديد توزيع للمعلمة المدروسة من توزيع متأتي من قاعدة بيز (8) وانما يمكن اقتراح توزيع معين بشكل مسبق ليؤدي الغرض في توليد العينات.

4-2: خوارزمية Metropolis Hastings لتوليد عينات المعلمة d :

ان خوارزمية Metropolis – Hastings عادة ما تتطلب اقتراح توزيع معين وليكن $g_i(d^*|d_i)$, حيث يمكن من خلال هذا التوزيع الافتراضي حساب احتمالية المتغير d^* . اضافة الى ذلك سوف نستخدم خوارزمية Metropolis within Gibbs من اجل توليد عينات والعمل بألية سلسلة ماركوف, حيث سيكون تحديث (update) المعالم عند توليد العينات ضمن اطار خوارزمية Gibbs باتباع خطوات Metropolis. ان عمل هذه الخوارزمية يمكن وصفه بالخطوات الاتية:

1- تحديد القيم الابتدائية للمعالم a_0, b_0, c_0^2, d_0 في الخطوة $(i + 1)$.

2- سحب عينة من خلال

$$a_{i+1} \sim g(a_{i+1} | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, c_i^2, d_i)$$

3- سحب عينة من خلال

$$b_{i+1} \sim g(b_{i+1} | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, c_i^2, d_i)$$

4- سحب عينة من خلال

$$c_{i+1}^2 \sim g(c_{i+1}^2 | \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N, a_{i+1}, b_{i+1}, d_i)$$

5- سحب d^* من التوزيع المقترح $g_i(d^*|d_i) \sim N(d_i, \sigma_d^2)$ وحساب نسبة القبول الاتية:

$$R = \frac{g(d^* | S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2) / g_i(d^* | d_i)}{g(d_i | S_1, S_2, \dots, S_N, \tilde{y}_0, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}^2) / g_i(d_i | d^*)}$$

6- تقبل d^* عندما يكون التكرار الاول $(i + 1)$ هو d_{i+1} مع احتمال $\min(R, 1)$

. اما اذا لم يتم قبول d^* عندئذ نجعل $d_{i+1} = d_i$

7- بالرجوع الى الخطوة 2 والعمل على تنفيذ الخطوة التالية $(i + 2)$.

المبحث الخامس : عرض نتائج تجربة المحاكاة

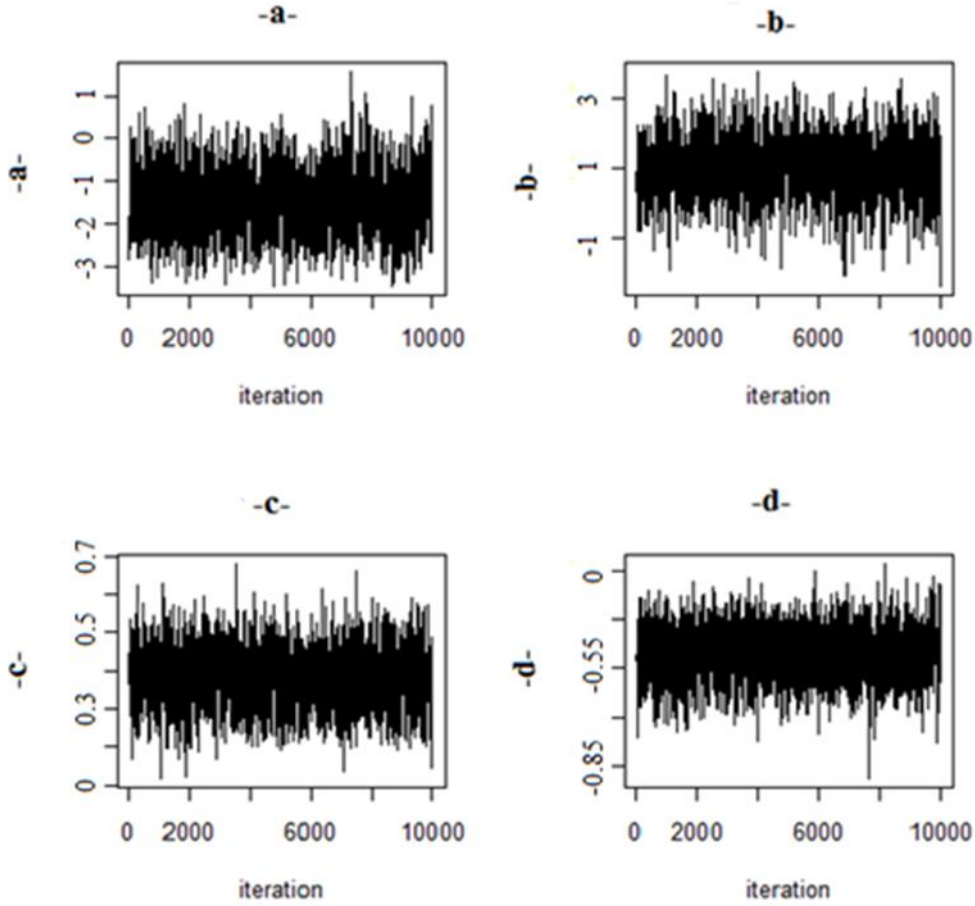
ان اسلوب المحاكاة وبفضل التطور الهائل للحاسوب و البرمجيات اصبح من السهل الحصول عى نتائج تجارب المحاكاة وتحليل هذه النتائج وبالتالي فهم نقاط الضعف ونقاط القوة للاسلوب المقترح وبالتالي يتمكن الباحث من تحديد مساره والشروط الواجب توفرها لتطبيق الاسلوب المقترح على البيانات الحقيقية. وبالتالي يمكن القول ان هدف هذا الفصل هو ايجاد تقدير بيز لمعالم المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا SDDE وتقدير بيز لمعالم الحركة البروانية الهندسية GBM ومقارنة النتائج باستخدام معيار

معلومات الانحرافات DIC (Deviance Information Criterion) للحكم على اداء التقدير. كما
 وضحا سابقا ان الهدف من تجربة المحاكاة هو المقارنة بين اداء اسلوب بيز في تقدير معالم كل من
 المعادلة العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا والعملية العشوائية المسماة بالحركة البروانية الهندسية, حيث
 سنفترض ان عملية الحركة الروانية الهندسية تمتلك المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

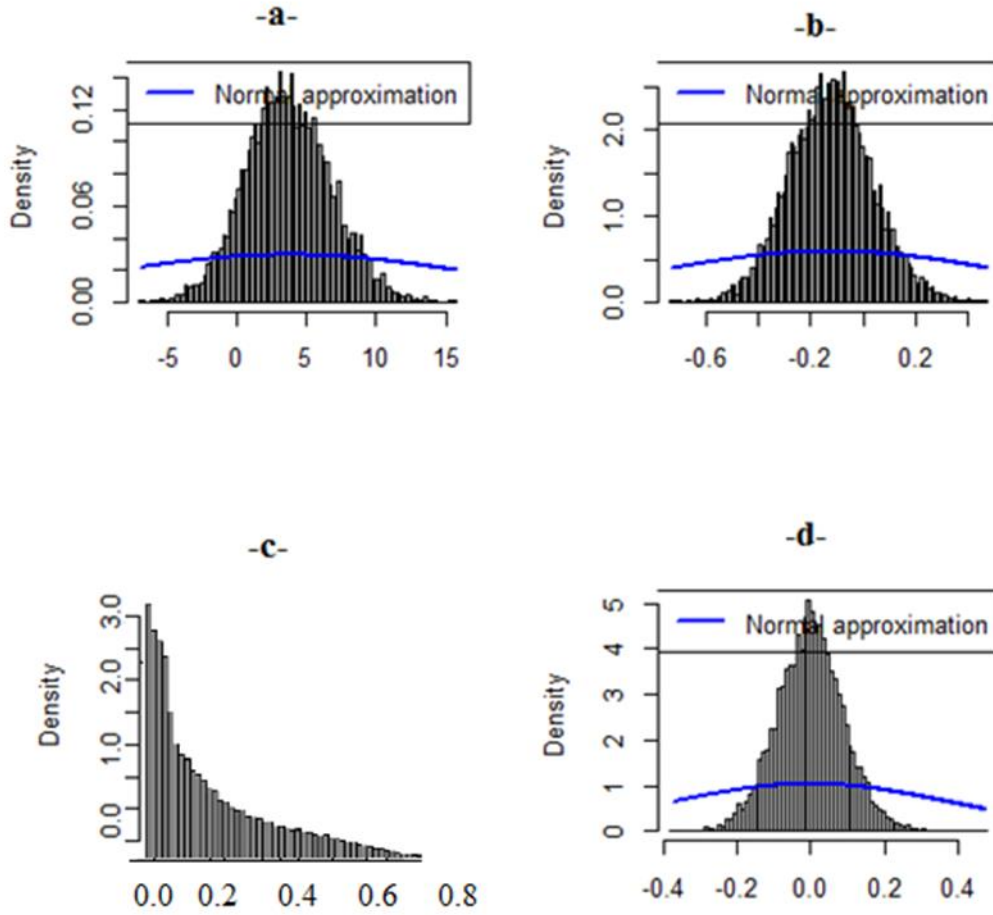
$$dS(t) = a.S(t)dt + c.S(t)dW(t), -\tau \leq t \leq T. \dots (13)$$

في هذه التجربة سنفترض انه تم تنفيذ خوارزمية متروبولس- كبس لكل معلمة من خلال توليد 13000
 (iteration) او عينة حجم مشاهداتها 200 مشاهدة من قيم العملية العشوائية $S(t)$ حيث تم استبعاد اول
 1000 تكرار من اجل الحصول على استقرار عمل الخوارزمية في عملية توليد البيانات كمايلي:

تجربة المحاكاة: اولا في هذه التجربة تم اولا توليد مشاهدات من دالة الكثافة (transition
 density) للعملية العشوائية المفترضة في الدالة (2-6) وبحجم 200 مشاهدة, حيث تم اعتبار
 هذه الدالة بمثابة توزيع للبيانات (likelihood function) عند استخدام الخوارزميات الحسابية
 في توليد قيم المعالم من التوزيعات اللاحقة. في هذه التجربة تم افتراض ان التوزيع المسبق يتبع
 التوزيع الطبيعي $N(0,11)$ للمعلمة a والتوزيع المسبق الطبيعي $N(0,11)$ للمعلمة b والتوزيع
 المسبق $N(0,10)$ للمعلمة d عند التوليد من خوارزمية كبس. كذلك تم استخدام التوزيع المسبق
 $IG(5,1)$ للمعلمة c عند التوليد من خوارزمية متروبولس - هاستنك ضمن خوارزمية كبس
 مستخدما توزيعا مقترحا للعمل بهذه الخوارزمية يتبع التوزيع الطبيعي $N(d_i, \sigma_d^2 = 0.2)$.
 الاشكال البيانية التالية تمثل رسم trace plot , حيث يستخدم هذا الرسم كأداة لتشخيص التقارب
 في عملية توليد العينات في خوارزمية كبس وتتبع حالة استقرار العينات المتولدة من التوزيع
 اللاحق اي ان هذا الرسم البياني يوضح التمازج (mixing) بين التوزيع المسبق وتوزيع
 البيانات. وتم رسم المدرج التكراري Histogram للمعالم المقدره يستخدم كأداة لمعرفة نوع
 التوزيع اللاحق من خلال الرسم. وثانيا تم توليد 200 مشاهدة من العملية العشوائية (1-3) التي
 تمثل العملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية GBM بافتراض وجود معلمتين فقط هما
 (a, c) يتبعان نفس التوزيعات المشار اليهما اعلاه في المعادلة SDDE كتوزيعات مسبقه
 وتوزيعات لاحقة. وتم رسم كل من trace plot و المدرج التكراري للحكم على اداء
 الخوارزمية.

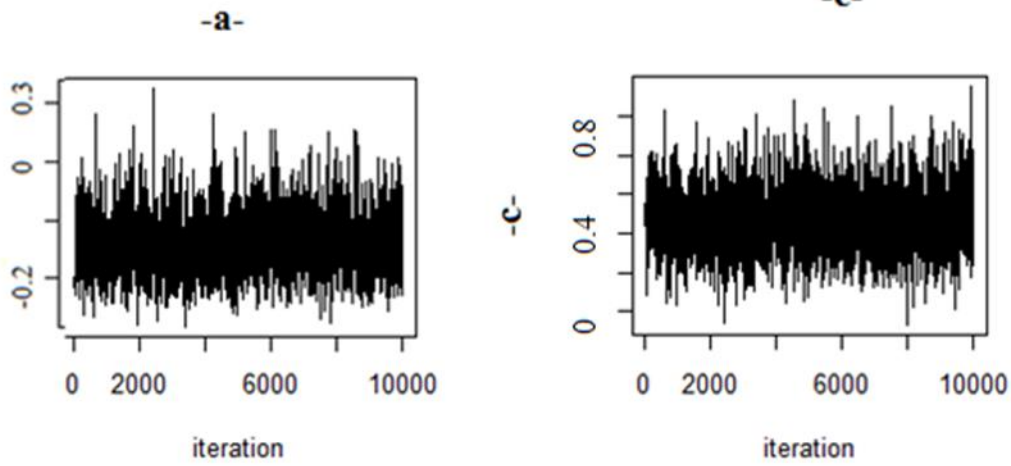


شكل 1: رسم trace plot للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الاولى للعملية SDDE
من خلال الشكل (1) نجد ان هناك اربعة رسوم تمثل مخطط trace plot كل معمة من المعالم المقدره, حيث يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لاتعاني تباطؤ في توليد العينات ولاتعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



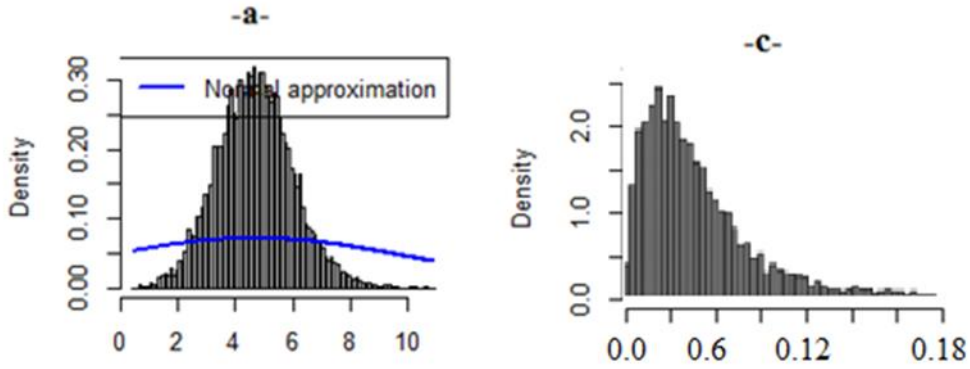
شكل 2: رسم المدرج التكراري للمعالم a,b,c,d لتجربة المحاكاة الاولى للعملية SDDE.

الرسومات في الشكل (2) توضح ان المعالم a, b, d تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعامل تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري. الرسومات التالية توضح رسم trace plot والمدرج التكراري لمعالم الحركة البروانية الهندسية (a, c).



شكل 3: رسم trace plot للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الاولى للعملية GBM.

حيث يلاحظ من هذا الشكل ان جميع المعالم تم توليد قيمها من خوارزمية لاتعاني تباطؤ في توليد العينات ولا تعاني من توقفات (flat bits) اثناء التوليد.



شكل 4: رسم المدرج التكراري للمعالم a, c لتجربة المحاكاة الاولى للعملية GBM

توضح ان المعلمة a تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ماينطبق مع الجانب النظري الذي يفترض بان هذه المعامل تتبع التوزيع الطبيعي. وكذلك يمكن الاستنتاج ان المعلمة c تتبع توزيع معكوس كما وهذا ايضا ماينطبق مع الجانب النظري.

جدول (1) يبين قيم المعالم المقدرة وقيم المعيار DIC لتجربة المحاكاة الاولى

Models	A	b	C	D	DIC
SDDE	-0.923	1.1	0.4	-0.58	29.04
(s.e.)	(0.592)	(0.611)	(0.071)	(0.067)	
GBM	-0.10	0	0.5	0	216.11
(s.e.)	(0.057)	(0)	(0.0078)	(0)	

من الجدول (1) الذي يبين تقدير معالم بيانات اسعار صرف الدولار في السوق الموازي نجد ان قيمة معيار DIC اقل لنموذج SDDE مما عليه لنموذج GBM مما يعني ان نموذج المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا يلائم هذا النوع من البيانات اكثر من ملائمة النموذج التقليدي . GBM

الاستنتاجات

تعتبر النماذج العشوائية وخصوصا المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني *SDDE* من اوسع النماذج العشوائية انتشاراً المجالات التطبيقية وخصوصا البيانات المالية (اسعار الصرف او اسعار الاسهم.... الخ). ان مرونة دوال المعادلات التفاضلية العشوائية ذات معلمة التخلف الزمني من الناحية الرياضية ومن ناحية تمثيل العمليات العشوائية للظواهر المالية حين ان وجود معلمة التخلف الزمني يساهم في فهم هذه حركة البيانات المالية كونها تستغل البيانات التاريخية في رسم صورة واضحة عن تحركات البيانات المالية. هذا البحث تطرق الى المعادلات التفاضلية العشوائية ذات التخلف الزمني, حيث تم ادراج مجموعة من التعاريف والنظريات ساهمت اى حد كبير في فهم الية عمل هذا النوع من المعادلات التفاضلية. وتم استعراض تجربتين للمحاكاة من اجل فهم سوك هذا النوع من المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود التخلف الزمني في حد معدل النمو وفي حد التقلبات، ونموذج الحركة البروانية الهندسية من خلال استخدام نظرية بيز في تقدير معالم النماذج المشار اليها. ومن خلال استخدام معيار انحرافات المعلومات *DIC* تبين تفوق المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود معامل التخلف الزمني على نموذج الحركة البروانية الهندسية في جميع تجارب المحاكاة.

المراجع

اولا- المراجع العربية

- 1- العذاري, فارس مسلم، الوكيل علي عبد الحسين. العمليات التصادفية. وزارة التعليم العالي العراقية. جامعة بغداد 1991.
 - 2- كاظم, شذى عواد.(2022). المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع تطبيق عملي.رسالة ماجستير, قسم الاحصاء, كلية الادارة والاقتصاد, جامعة القادسية.
- ### ثانيا- المراجع الانكليزية

- [1] ALADAĞLI, E-EZGI, (2017). "Stochastic Delay Differential Equations". A Thesis submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University.
- [2] Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022a). Simulation Analysis Based on Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences, 2312-9883 *QJAE*, Volume 24, Issue 1.
- [3] Awwad, S. and Al-saadony, M.(2022b). Iraqi Exchange pricing Analysis with Stochastic Delay Differential Equations. Al-Qadisiyah Journal for Administrative and Economic Sciences,*QJAE*, Volume 24, Issue 2.
- [4] Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000). Bayesian Theory, John Wiley and Sons, New York.
- [5] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1973). Bayesian Inference in Statistical Analysis, John Wiley and Sons, New York.
- [6] Buckwar, E., (2000). Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations. Department of Mathematics, the Victoria University of Manchester,.
- [7] Carlsson, J., Moon, K. S., Szepessy, A., Tempone, R., and Zouraris, G. (2010). Stochastic differential equations: Models and numerics. Lecture notes.

- [8] Casella, G. and George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *American Statistician*, 46, 167–174.
- [9] Evans, L. C. (2013). *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society. Department of Mathematics, University of California, Berkeley.
- [10] Han, S. (2005). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. M.Sc. Thesis, University of Edinburgh and Heriot-Watt.
- [11] Jassim, Hussna .A.," Solution of Stochastic Linear Ordinary Delay Differential Equations"., the College of Science of Al-Nahrain University, the Degree of Master of Science in Mathematics,2009.
- [12] Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [13] Kutoyants, Y. A. (2005). On delay estimation for stochastic differential equations. *Stochastics and Dynamics*, 5(02), 333-342.
- [14] Wang,P. (2016). *Application of Stochastic Differential Equations to Option Pricing*. Master of Arts, Graduate Faculty of the University of Kansas.
- [15] Rao, B. P. (2008). Parametric estimation for linear stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motion. *Random Operators and Stochastic Equations* 16(1):27-38.
- [16] Wang, P. (2016). *Application of stochastic differential equations to option pricing* (Doctoral dissertation, University of Kansas).
- [17] Zheng, Y. (2015). *Asset pricing based on stochastic delay differential equations* (Doctoral dissertation, Iowa State University).