جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء
الدراسات العليا

المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع تطبيق عملي

مقدمة الى مجلس / كلية الادارة والاقتصاد في جامعة القادسية وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم في الاحصاء

من قبل
شذى عواد الفتلاوي

باشراف

أ . م . د مهند فائز السعدون

١٤٤٣هـ ٢٠٢٢م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(قَالَ يَا قَوْمِ أَرَأَيْتُمْ إِنْ كُنْتُ على بَيِّنَةٍ مِنْ
رَبِّي وَرَزَقَنِي مِنْهُ رِزْقًا حَسَنًا وَمَا أُرِيدُ أَنْ
أُخَالِفَكُمْ إِلَى مَا أَنْهَاكُمْ عَنْهُ إِنْ أُرِيدُ إِلَّا
الْإِصْلَاحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ
عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ)

صدق الله العظيم

(سورة هود /الآية ٨٨)

الشكـــــر والتقديـــر

الحمد لله على إعطائي الإرادة والطاقة و الصبر على انجاز هذا العمل

أود أن أعرب عن خالص امتناني وإعجابي بالامتنان الى السيد رئيس جامعة القادسية الدكتور كاظم جبر الجبوري والسيد مساعد رئيس الجامعة للشؤون العلمية الدكتور رحيم جبار الحمزاوي والى السيد مدير قسم الدراسات العليا في رئاسة الجامعة الدكتور مصطفى رديف

كما أود أن أعرب عن تقديري الى السيد مدير قسم الدراسات والتخطيط في رئاسة الجامعة الدكتور حسن سامي عريبي والى موظفي وموظفات القسمين المذكورين والى السيدة عميدة كلية الادارة والاقتصاد الدكتورة سوسن كريم هودان والى المعاون العلمي الدكتور طاهر ريسان والى موظفي وموظفات قسم الدراسات العليا في كلية الادارة والاقتصاد وشكر الامتنان الى كل منتسبي كلية الادارة والاقتصاد والى كل اساتذة قسم الاحصاء

والى مشرفي الاستاذ المساعد الدكتور مهند فائز السعدون لرؤيته الجليلة والتوجيهات والاهتمامات والاقتراحات التي كانت مفيدة لاستكمال هذه الرسالة

خالص الشكر لعائلتي الحبيبة ، ولا سيما بلدي

واخواتي واخواتي والاقارب والجيران ومع.

خالص شكري لصديقاتي العزيزات شيماء ،هديل وزينب على دعمهم وتشجيعهم أخيرًا ، أود أن أشكر كل من شارك في أي جهة

بطريقة أو بأخرى أثناء العمل

ومن الله التوفيق والسداد . . . . .

الباحثه

الاهـــــــــداء

الى سيد البشرية الى الرسول العظم محمد(صلى الله عليه واله وسلم)

إلى سيدتي ومولاتي فاطمة الزهراء (عليها السلام)

إلى الغالية التي عجزت الكلمات عن وصفها. إلى منبع الحنان

أمي الغالية (رحمها الله)

إلى من غرس هذه البذرة فكان من ثمارها هذا الجهد المتواضع

والدي العزيز(رحمه الله)

إلى قرة عيني وسبب سعادتي بنت الغالية

فاطمة

الى اخواتي واخوتي

إلى كل من شجعني وآزرني لإكمال هذه المسيرة الغراء حباً وإحتراماً أهدي

جهدي المتواضع

شذى

المستخلص.

ان هذه الرسالة تناولت المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً اذ تم اجراء تجربة محاكاة لدراسة سلوك النموذج وفق سيناريوهات متعددة استخدام نماذج بلاك شولز الاعتيادية ،نماذج بلاك –شولز بوجود تخلف زمني بحد drift ،ونماذج بلاك- شولز بوجود التخلف في حد التقلبات (diffusion) وذلك بالاعتماد على طريقة اويلر العددية.

اضافة الى ذلك تم اجراء تحليل لنماذج بلاك – شولز وحسب السيناريوهات المتبعة في دراسة المحاكاة اعتماداً على بيانات واقعية متمثلة بأسعار صرف الدولار في السوق العراقي الموازي. من خلال رسم مسارات pathways لأسعار الصرف اضافة الى بعض الاحصاءات المهمة المتعلقة بسعر الصرف تبين ان النماذج المستخدمة قد اعطت حلولاً عددية واعدة وان البيانات قد كانت قابلة للتطبيق من خلال هذه النماذج المختلفة.

المحتويات

جـــــــــدول رموز

الاسم باللغة الانكليزية	الرمز
Stochastic differential equation	SDE
Stochastic delay differential equation	SDDE
Geometric Brownian Motion	GBM
Autoregressive conditional heterogeneity	ARCH
Generalied Autoregressive conditional heterogeneity	GARCH
Wiener process	W(t)
Filtration	F(t)
Euler-Maruyama	E-M
Minimum	Min.
Maximum	Max.
First Quartile	١st. Qu.
Third Quartile	٣rd. Qu.

الفصل الاول

منـهجيـة الرسالـة والدراسات السابقة

١-١ المقدمة Introduction

نحتاج في الكثير من المجالات العلمية لبناء نماذج رياضية لمحاولة فهم سلوك وهيكلية الانظمة وعادة ما تضم هذه النماذج دوال تمثل كميات معينة (functions) وأضافة الى مشتقاتها (Derivatives) في هذا النماذج , إذ ان هذا النوع من النماذج الرياضية يسمى بالنموذج المحدد (Deterministic) تكون فيه قيم المعلمات معلومة ومشتقاتها عادية وبالتالي يمكن تسمية مثل هذه النماذج بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary differential equation) من هنا يمكننا ان نميز النماذج العشوائية عن النماذج الاعتيادية من خلال احتوائها على عملية عشوائية ممايؤدي الى حل يمثل ايضا عملية عشوائية المحدد (Deterministic)، وبهذا يصبح لدينا ما يسمى بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية العشوائية اعتمادا على وجود او عدم وجود حد الخطأ .اي يمكن القول ان دراسة النماذج العشوائية يكون افضل مقارنة بنظرائها من النماذج المحددة وهذا واضح في الكثير من الظواهر الحقيقية التي تفتقر عند دراستها بالإلمام بجميع المعلومات المتوفرة عن هذه الظاهرة.

ان النماذج العشوائية (المعادلات التفاضلية العشوائية) Stochastic Differential Equation (SDE) تعد اداة فعالة ومهمة بسبب مرونتها التكيفية في تمثيل الظواهر على سبيل المثال في مجال علوم الحياة ,والفيزياء والعلوم الهندسية ،والاسواق والمال كونها هذه الظواهر تتصف بياناتها بالتقلبات غير المنتظمة عبر الزمن. لكون هذه وأشار الكثير من الباحثين الى وجود علاقات سببية تؤثر في سلوك نماذج المعادلات التفاضلية العشوائية ومن اهم هذه العلاقات هو الاعتماد الزمني لفترة وقوع حدث معين في المستقبل على الفترة الزمنية الحالية لنفس الحدث مما يعني ان التغير في نظام معين في المستقبل يعتمد على تأثير الزمن الحالي. وبالاعتماد على ما أشار اليه الباحثون (Mohammed) في عام ١٩٨٤ ونفس الباحث في عام ١٩٨٩ ،(Buckwar) في عام ٢٠٠٠، يمكن القول ان بإضافة حد اخر للمعادلات التفاضلية العشوائية مثل حد التباطؤ الزمني او التخلف الزمني (time-delay) فإننا سوف نحصل على ما يسمى بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا Stochastic Delay Differential Equations (SDDE).

وهي صيغة او معادلة رياضية لوصف نظام لظاهرة معينة تعتمد حالاتها ومعلوماتها الحالية على الحوادث والمعلومات التاريخية بأزمان سابقة لنفس الحادثة .إذ اشار الباحثون (Tapaswi ١٩٩٩, Beretta ١٩٩٨, Bocharov ٢٠٠٠, Eurich ١٩٩٦, Longtin ١٩٩٠, Peterka ٢٠٠٠) الى امكانية تطبيق هذا النوع من المعادلات SDDE في علوم الحياة والفيزياء الحياتية ,الفيزياء (Masoller ٢٠٠٢, Buldú ٢٠٠١) ،الاقتصاد والمال (Chang ١٩٩٩, Hobson ١٩٩٨, Arriojas ٢٠٠٧)، بالهندسة (Di Paola ٢٠٠١, Grigoriu ١٩٩٧). وتضمنت هيكلة الرسالة اربعة فصول:

تضمن الفصل الاول مقدمة عامة، مشكلة الرسالة ، هدف الرسالة ، والاستعراض المرجعي لبعض الدراسات السابقة ذات العلاقة بموضوع الرسالة. بينما تناول الفصل الثاني مفهوم المعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا من خلال التطرق لتعاريف ونظريات مهمة، وقد تم ايضا تناول وجود ووحدانية حل كل من المعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا اضافة لطريقة اويلر العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية. اما الفصل الثالث فتناول جانب دراسة تجارب المحاكاة اضافة الى تحليل لبيانات حقيقية تمثلت باسعارالصرف الموازي للعملة العراقية مقابل الدولار في السوق الموازي. واخيرا الفصل الرابع تم تخصيصه للاستنتاجات والتوصيات المستحصله من الرسالة.

١-٢ مشكلة الرسالة Thesis Problem

ان مشكلة الدراسة تمثلت بوجود الحاجة الماسة لتحليل البيانات المتمثلة بحركة اسعار صرف الدينار العراقي مقابل الدولار في سوق العراق الموازي. إذ يتطلب تحليل سلوك حركة اسعار الصرف صياغة معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنيا كون لأن اسعار الصرف بطبيعة حركتها وكيفية تداولها تعتمد على البيانات السابقة التاريخية(الحدث الماضي) . إذ ان مشكلة التقلبات بأسعار الصرف ومتوسط معدل نموها في سوق العراق يتطلب الحاجه لصياغة نموذج رياضي يصف سلوك حركتها.

١-٣ هدف الرسالة Thesis Objectives

تهدف هذه الرسالة الى تطبيق منهجية المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا في اسعار الصرف في سوق العراق الموازي من خلال نموذج بلاك – شولز بهدف التعرف على سلوك حركة اسعار الصرف من خلال ما يأتي:

١- اجراء تجربة محاكاة من خلال ثلاث مراحل الاول تناول دراسة سلوك حركة اسعار الصرف من خلال نموذج بلاك – شولز الاعتيادي، الثاني تناول دراسة سلوك حركة اسعار الصرف من خلال نموذج بلاك – شولز بوجود تخلف زمني بحد متوسط معدل نمو العوائد، والثالث تناول دراسة سلوك حركة اسعار الصرف من خلال نموذج بلاك – شولز بوجود تخلف زمني بحد التقلبات.

٢- اجراء تحليل لبيانات واقعية تمثل أسعار الصرف في السوق الموازي للتعرف على طبيعة تقلباتها وسلوك تحركها باستخدام نموذج بلاك – شولز ونفس افتراضات الفقرة (١) في اعلاه.

١-٤ الاستعراض المرجعي Literature Review

تناولت العديد من الدراسات والبحوث العلمية في مجال الرياضيات والاحصاء التطبيقي موضوع المعادلات التفاضلية العشوائية، ولكن في نفس الوقت توجد ندرة في الدراسات ومنها العربية على وجه الخصوص التي تتناول موضوع المعادلات التفاضلية العشوائية التي تتصف بالتخلف الزمني (delay) او (Time lag) ولهذا سوف يتم استعراض مجموعة من الدراسات والبحوث العلمية المتعلقة بموضوع الرسالة وكالاتي:

- في عام ١٩٨٤ أشار الباحث (Mohammed) في كتاب المعادلات التفاضلية الدالية العشوائية (Stochastic functional differential equations) الى المعادلات العشوائية المتخلفة زمنياً وبهذا يعد اول من تطرق الى هذا النوع من المعادلات العشوائية، بمعنى اخر تعد أساسا في دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا .

- في عام ١٩٨٩ قدم الباحث(Mohammed) بحثا مطولا عن الانظمة التفاضلية العشوائية بوجود الذاكرة ،فقد درس مجموعة من الامثلة الواقعية التي يمكن فيها دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية بوجود التخلف الزمني اي بوجود عامل الذاكرة والاعتماد على البيانات التاريخية السابقة للحالة التطبيقية ويعد هذا البحث هو أساساً لتحفيز الكثير من الباحثين في دراسة المعادلات التي تتصف بالتأخير الزمني.

- في عام ٢٠٠٠ تطرق الباحث Buckwar الى مشكلة الحل العددي للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا ذات صيغة Itô الاتية :

$$dx(t) = f(x(t), x(t-\tau))dt + g(x(t), x(T-\tau))dw \quad , t \in [٠, T]$$

فقد ركز الباحث في الحصول على تقريبات للحلول القوية (strong solutions) للمعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا اعلاه باستخدام التحليل العددي .

- في عام ٢٠٠٣ طور الباحث Arriojas وأخرون صيغة رياضية لأسعار العقود الاوربية عندما تتبع اسعار الاسهم في البورصات الاوربية المعادلة التفاضلية العشوائية غير الخطية . فقد تم في هذا البحث اقتراح نموذج عشوائي متخلف زمنيا لتطوير سلوك اسعار الاسهم وبين النموذج المقترح مرونة حسابية في تمثيل البيانات الحقيقية للأسواق وبالتالي اعطاء صيغة رياضية واضحة لتمثيل اسعار العقود.

- في عام ٢٠٠٣ قدم الباحث (Ivanov) واخرون بحثا للاستقرارية العشوائية وبعض التطبيقات للمعادلات العشوائية المتخلفة زمنيا وتقديم الحلول العددية المستقرة لهذا النوع من المعادلات من خلال وضع فرضيات ونظريات الموجودة والوحيدة الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا ،على سبيل المثال خاصية ماركوف لحلول هذه المعادلات اضافة الى التقريبات العددية للحلول وتقدير المعالم من خلال اجراء التطبيقات في مجال التمويل والاحياء.

- في عام ٢٠٠٥ قام الباحث Stoica باقتراح نموذج لأسواق المال (financial market) من خلال معادلة عشوائية متخلفة زمنيا .إذ بين بان الشخص الاعتيادي (trader) الذي يتداول الاسهم يتوقع ان اسعار الاسهم تتبع تقلبات تخضع لعمليات Black Scholes لكن المطلع في الاسواق (insider) يعلم بأن كلاً من معدل التغير (drift) والتقلبات (Volatility) لعملية اسعار الاسهم تتأثر بالوقائع التي حدثت قبل بدء فترة التداولات .فقد قدم الباحث بديل الصيغة Black Scholes المتخلفة زمنيا من خلال اثبات الاستقرارية لأسعار العقود الاوربية عندما تكون المعاملات (Coefficients) المتخلفة زمنيا تقترب لحالة عدم التخلف ،اي ثبت ان التعامل بالاعتماد على الفترات الزمنية السابقة (time –delay) تعطي انموذجاً اكثر استقراراً للمتداول الاعتيادي الذي يتوقع ان هناك ديناميكية لحركة الاسعار التي تتبع تقلبات عملية Black Scholes.

- في عام ٢٠٠٥ قدم الباحث Kazmerchnk وأخرون بحثا لتنقيح الصيغة المقترحة لهم في بحث سابق بخصوص نموذج Black-Scholes للأسعار فقد تم اقتراح نموذج GARCH(١,١) للعملية العشوائية لأسعار الاسهم بالاعتماد على البيانات التاريخية اي انه تم الاعتماد على المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً.

- في عام ٢٠٠٤ افترض الباحث (Reiss) المعادلات التفاضلية الخطية في حالة وجود تخلف زمني محدود (bounded time) اعتمادا على الضوضاء البيضاء التجمعية (additive white noise) وكان الهدف من هذا البحث هو تقدير اقصى وقت للتباطؤ من خلال المشاهدات عند اعطاء حل واحد للعملية X بافتراض وجود انحراف (drift) لا معلمي في المعادلة التفاضلية وتبين وجود قفزة لمعادلة التغاير في حالة الاستقرارية في المشتقة الثالثة وفقا لمكان التباطؤ الزمني .إذ تم الحصول على مقدار التباطؤ الزمني.

- في عام ٢٠٠٥ درس الباحث (Wahi) المعادلات التفاضلية المتخلفة زمنياً ودرس حالة تطبيقها في حركة الاهتزازات لأدوات مكائن معينة .فقد افترض وجود تطبيقات للمعادلات التفاضلية التباطؤية في عمليات الانتاج بضمنها الروبوتات وأدوات التحكم والبصريات وعلم الاحياء ,علم البيئة, الاقتصاد ومجالات اخرى .وتم استخدام التقارب بالتحليل العددي للحصول على الحلول للمعادلات التفاضلية التباطؤية .

- في عام ٢٠٠٦ قدم الباحثان (Rassian و Mao) بحثا يوضحا فيه استخدام نظرية Khasminski التقليدية لإيجاد الحلول المثلى للمعادلة التفاضلية العشوائية .فقد بين الباحثان تعميم النظرية Khasminski واختباراتها ليتم تطبيقها على المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا .إذ يتم اجراء تحليل كمي على السلة الغذائية لنموذج بيانات وتبين نجاح تطبيق النموذج المقترح على هذا النوع من الامثلة العملية.

- في عام ٢٠٠٦ اقترح الباحثان (Ferrante وRovira) مشكلة Cauchy للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا المشتقة من الحركة البراونية الجزئية بمعلمة Hurst

$(H > \frac{١}{٢})$وقد تم اثبات وجود ووحدانية الحل لهذه المشكلة مع تطبيق عددي.

- في عام ٢٠٠٧ اقترح الباحثان (Kuchler & Planton) انموذجاُ مشتركاُ (joint) للتخلفات الزمنية والاثار العشوائية (random effects) لتوضيح التقلبات غير المنتظمة والتقلبات الدورية الحاصلة في اسعار السلع بهدف تفسيرها من الناحية الاقتصادية والمالية. إذ فسر النموذج التغيرات الدورية والتأثيرات غير منتظمة في اسعار السلع نتيجة للتفاعل بين الاخطاء الخارجية والتخلف الزمني الناجم عن الزمن بين بدء الانتاج والتسليم. تمت هيكلة النموذج على شكل معادلة عشوائية متخلفة زمنيا، إضافة الى ذلك تم تقدير معالم النموذج وتقدير الدوال المقترحة. حيث كانت المعادلة العشوائية المقترحة بالصيغة الاتية:

$$dy(t) = -\Psi y(t-r)dt + \sigma dw(t)$$

إذ ان $y(t)$ هو اللوغاريتم للسعر الطبيعي $t \geq ٠$, $r \in [٠, \infty]$, وان المعلمة

$\Psi \in (-\infty, \infty)$.

- في عام ٢٠٠٩ قدمت الباحثة (Swords) اطروحة دكتوراه تناولت موضوع المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا فقد تعاملت مع هذا النوع من المعادلات من خلال دراسة سلوكها المحاذي (asymptotic) وللمعادلات من النوع $It\hat{o}$ وقد تم التطرق الى بعض الطرق العددية التي تقلل الخطأ وتحافظ على خصائص المحاذات للمعادلة المستمرة(Continuous) ثم تطبيق هذا النوع من المعادلات في اسواق المال التي يستخدم فيها العملاء الاسعار السابقة (التاريخية) . واثبتت الباحثة ان الطرق المقترحة تعطي حلولاً تقريبية للمعادلة المستمرة اضافة الى تمتعها بالجهد الحسابي الكافي مقارنةًبالطرق الاخرى.

-في عام ٢٠٠٩ قدم الباحث El-Borai واخرون عملاً بحثياً حول المعادلات التفاضلية العشوائية الجزئية المتخلفة زمنياً. في هذا البحث مناقشة عملية الحركة البروانية الجزئية بوجود معلمةHurst $(H > \frac{١}{٢})$.فقد تم وضع صيغ رياضية لوجود ووحدانية حل هذه المعادلات التفاضلية اضافة الى توثيق براهين هذه الصيغ وتم افتراض ،معلمة التقلبات (diffusion) محددة من الصفر اضافة الى ذلك تم وضع نظرية لهذا الافتراض وبأهميتها من اجل ايجاد حلول تقريبية مستقرة.

- في عام ٢٠٠٩ قدمت الباحثة (Jassim) رسالة ماجستير لحلول المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا الخطية الاعتيادية فقد كان الهدف من الرسالة هو دراسة التفاضل والتكامل العشوائي اضافة الى بعض العمليات الرياضية والصيغ الرياضية منها صيغ الموجودة والوحيدة (existences and uniqueness) لحلول المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا واستخدام طريقة Euler لحل مثل هذه المعادلات. اضافة الى التحليل العددي لهذه المعادلات وتعديل بعض الطرق الموجودة الخاصة بحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً . إذ بينت الباحثة ان حل هذا النوع من المعادلات لا يختلف عن حل المعادلات التفاضلية العشوائية الاعتيادية اعتمادا على الحلول العددية والحلول التحليلية.

-في عام ٢٠١٠ قدم الباحثان Dehghan وPourghaabar بحثاً عن حل معادلة بلاك شولز للأسعار .إذ قدم الباحثان طريقتين لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة بلاك- شولز . إذ يمكن تطبيق هذه الطريقتين للمعادلات التفاضلية المتجانسة وغير المتجانسة و تم كذلك الحصول على حلول من خلال صيغ تقريبية محددة. اضافة الى ذلك تم الاعتماد على النتائج العددية بهدف المقارنة مع الحلول النظرية بهدف التأكيد على صحة الطرائق المقترحة.

-وفي عام ٢٠١٠ قدم الباحث *Turner* بحثاً عن نموذج بلاك –شولز وبعض امتداداته .فقد اشتق الباحث نموذج بلاك –شولز للأسعار *(European-option)* من خلال حساب القيمة المتوقعة للمداولة .إذ افترض ان اسعار الاسهم تتبع توزيع *(lag-normal)*،وباستخدام صيغة $It\hat{o}$ تم تبرير الكثير من العمليات الحسابية.

-في عام ٢٠١٢ قدم الباحثان *Takala* و*Shinde* بحثاً عن نماذج بلاك -شولز وتطبيقاتها . تناول هذا البحث دراسة اسعار الاسهم ونمذجتها بنموذج بلاك شولز ،فقد تم تطوير صيغة بلاك –شولز اضافة الى ذلك تم تطوير المعادلات التفاضلية الجزئية لبلاك –شولز .ومن خلال اجراء تطبيق عملي تم الحصول على حل النموذج من خلال معادلة بلاك –شولز وتم تمثيل النتائج بأشكال بيانية.

-في عام ٢٠١٣ قدم الباحث Shevchenko بحثاً على المعادلات التفاضلية العشوائية المختلطة المتخلفة زمنياً اعتماداً على ما يسمى بعمليات Holder العشوائية المستمرة وعملية Wiener . وتحت فروض معينة على معالم المعادلة التفاضلية العشوائية ودوالها تم الحصول على الحل الوحيد لهذه المعادلات .اضافة الى ذلك تم وضع شروط كافية من اجل الحصول على العزوم المختلفة من اجل الحصول على هذه الحلول الوحيدة.

-في عام ٢٠١٣ قدم الباحث *Rosli* واخرون بحثاً عن طرائق تايلر العشوائية في المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً. فقد وضح هذا البحث المشتقات المنتظمة عالية الرتب لطرائق الحل العددي باستخدام توسيع تايلر العشوائي من اجل ايجاد حل المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً يوجد تخلف زمني $(lagr > ٠)$.اضافة الى ذلك تم افتراض ان توسيع تايلر العشوائي للعملية التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مبتور عند حدود معينة من اجل الحصول على رتبة لتقارب الحل العددي.وقد تم التطرق الى طريقة *Euler* و*Milsten* في عملية ايجاد الحلول من خلال دراسة محاكاة.

-في ٢٠١٣ قد الباحث*Shen* واخرون بحثاً عن المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً بوجود قفزات في معلمة التقلبات تسمى *(mean-jump)*. في هذا البحث تم تطوير بعض منها ما يسمى *(Stochastic Maximum Principles)* والتي تعبر من اهم الطرائق لحل مشكلة السيطرة العشوائية المثلى *(Stochastic Optimal Control)* تم أدراج تجربة محاكاة لدراسة سلوك الطريقة المقترحة واثبتت التقارير امكانية مقارنة هذه الطريقة مع الطرائق العددية الموجودة الاخرى

-في عام ٢٠١٤ قدم الباحث *Keenen* واخرون بحثاً حول تقدير التقلبات في صيغة بلاك-شولز بوصفها نموذجاً لأسعار المبادلات التجارية الاكثر انتشاراً .إذ يعد حد التقلبات حداً عشوائياً وغير محدد .ففي هذا البحث تم الاعتماد على مجموعة من الطرائق لتقدير التقلبات ،مثل طريقة السلاسل الزمنية ،الطرائق اللامعلمية ،طرائق التمهيد وغيرها .إذ تم توسع صيغة دالة التراكم التوزيع الطبيعي وغيرها .فقد اهتم تايلر بهدف الحصول على دالة التقلبات .في هذا البحث تم التطرق الى نموذج السلاسل الزمنية *ARCH,GARCH* .وقدم تم التطرف الى تحليل عددي بهدف المقارنة بين طرائق التقدير المختلفة و تم التطرق الى افضلية بعض الطرائق في تقدير معلمة التقلبات.

- في عام ٢٠١٤ تطرق الباحث (Cordoni) وأخرون للمعادلات العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنيا والتركيز على كيفية تطبيقها في الاسواق المالية عند وجود قفزات (Jumps) . و تمت دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية وتحويلاتها عبر الزمن ومدى تأثيرها بالأزمان السابقة على حالتها الحالية ،مما يعني انه لا يمكن تجاهل التغيرات بالعملية العشوائية بالأزمان السابقة لدراسة سلوك العملية العشوائية المالية, وكانت الصيغة الرياضية لمثل هذا النوع من المعادلات كالاتي:

$$\begin{cases} dx(t) = \mu\big(t, x(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t)\big)dw(t) + \int_R y(x(t), z)\widehat{N}(dt, dz); \ t \in [\cdot, T] \\ x\cdot = x(\theta) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ; \qquad \theta \in [-r, \cdot] \end{cases}$$

-في ٢٠١٥ نشر الباحث Abou –ELELa واخرون بحثاً يتعلق باستقرارية حلول المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من الدرجة الثانية .إذ تمت صياغة معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنياً من الدرجة الثانية وتم تقديم حلول لهذا النوع من المعادلات التفاضلية الحل الاول كان متعلقاً بالاستقرارية المحاذية العشوائية للحصول على الحل العشوائي للمعادلة المفروضة بالدراسة عندما تكون قيم معالم معينة مساوية للصفر ، والحل الثاني ناقش حدود الحلول بوصفها حلولاً عشوائية محددة بفترة منتظمة وهذا عند وجود بعض الافتراضات لبعض معالم المعادلة المقترحة .إذ تم تعزيز الاقتراح بأمثلة عددية اثبتت كفاءة النتائج المستحصل عليها.

-في عام ٢٠١٦ قدم الباحث Gomez واخرون بحثاً علمياً يتعلق بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً وتدارسوا موضوع استقرارية الحل لهذا النظام من المعادلات التفاضلية مع تطبيق عملي لها .ففي هذا البحث تم تدارس ان معلمة االتخلف الزمني تحتلف

بالزمن لبعض الانظمة الحركية .إذ ان مبدأ الحركية dynamics يمكن استخدام مفاهيمه العلمية لاشتقاق شروط تفرض من اجل الحصول على حلول مستقرة للتوازن في النظام العشوائي .وذلك تم من خلال طرح طرائق نظرية ،اضافة الى تطبيقها في شبكات الاعمال المنتظمة الجينية وحصلوا على نتيجة انه العشوائية في معلمة التخلف الزمني يمكن تحسينها من اجل الحصول على الاستقرارية الحل.

- في عام ٢٠١٨ قدم الباحث Schewtzow بحثا حول المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا اعتمادا على الحركة البروانية (Brownian motion) و قدم الباحث براهين رياضية هي الموجودة والوحيدة الحل لهذا النوع من المعادلات تحت افتراض ان هناك رتابة (Monotonicity) لمعالم المعادلة.

-في عام ٢٠١٨ قدم الباحثان *Khan* و *Ali* بحثاً حول طريقة عددية معينة لحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً .و افترض الباحثان ان ايجاد حل وحيد للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً عادة مايكون عملية صعبة لذلك تم تبني طرائق عددية لايجاد الحلول على مدى سنين منها *Euler* وطرائق اخرى .ولكن نظر لعدم استقرارية الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً تطلب الامر الكثير من الدراسات والاعتناء بهذا الموضوع ،لذلك تم اقتراح طريقة عددية تسمى *(Legendre Speclral-Collocation)* والتي اعطت سرعة واضحة بتنفيذ الحل العددي .و تم اثبات نجاح هذه الطريقة العددية من خلال بعض الامثلة العددية.

-في عام ٢٠١٨ قدم الباحث *Sawangtong* واخرون بحثاً عن الحل التحليلي لمعادلة بلاك – شولز .إذ بين الباحثون ان نماذج بلاك شولز تستحدم لدراسة سلوك اسعار الاسهم في اسواق المال .فقد اقترح الباحثون نسخة معدلة من نماذج بلاك –شولز عدم وجود تحمين لأسعار الاصول .اضافة الى ذلك فأن الحل التحليلي للنموذج المقترح تم دراسته من خلال تحويل بلاس.

-في سنة ٢٠١٩ قدم الباحث AKhtari بحثاً يتعلق بالحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً بأفتراض ان معلمة التخلف الزمني تتمتع بصيغة اعتيادية (State-dependet) وتمت دراسة التقارب للحلول العددية اضافة الى استقراريتها هذه الحلول في هذا البحث تم افتراض ان معلمة التخلف تأخذ قيما عشوائية ،حيث تم دراسة التقارب واستقرارية الحل واختبارها من خلال معيار متوسط مربعات الاستقرار المحاذي .وتم دراسة الحالة من خلال بعض الامثلة العددية التي من خلالها ثم نوضح الية عمل الطريقة المقترحة.

-في عام ٢٠٢٠ قدم الباحث Chen بحثاً عن نماذج بلاك-شولز في نمذجة اسعار الاسهم .حيث وضح بعض نقاط الضعف على نموذج بلاك-شولز .اضافة الى ذلك حدد الباحث بعض القيود التي عندما لا تعمل نماذج بلاك –شولز في بعض اسواق المال .وقد تدارس الباحث فروض نموذج بلاك –شولز مثل اتباع الاسعار لتوزيع (*lag-normal*) وبعض الخصائص الاخرى ومتى يمكن حذف هذه الفروض ومعالجتها.

–في عام ٢٠٢١ قدم الباحث Zhang واخرون بحثاُ حول الاستقرار المحاذي في حالة وجود تغير بالزمن بالمعادلات العشوائية التفاضلية المتخلفة زمنياً مستفيداً من طريقة ماركوف .إذ تم فرض بعض الشروط بهدف الحصول على الاستقرار المحاذي لحل هذا النوع من المعادلات التفاضلية .وبين الباحثون ان الطريقة المقترحة لايجاد الحل المستقر احادي يعتمد على عملية الحركة البروانية وان الزمن المتغير .تم تعريف افتراضهم هذا من خلال بعض الامثلة العددية لتوضيح كفاءة النتائج.

من كل ما تم توضيحه من الدراسات السابقة اعلاه لوحظ وجود الكثير من الدراسات الاجنبية التي اهتمت بدراسة موضوع المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا، توجب دراسة هذا الموضوع وتسليط الضوء عليه. في هذه الرسالة سيتم الاشارة الى استعمال المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا في دراسة سلوك اسعار الصرف الموازي للدينار العراقي مقابل الدولار النوع من المعادلات التفاضلية.

الفصل الثانـي

الجـــــــــــانب النظري

٢-١ مقدمة:

في هذا الفصل ستتطرق الباحثة الى معلومات اساسية عامة وتعاريف تتعلق بالمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً (SDDE), إذ سيتم استعراض مفهوم المعادلات التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equation (SDE) كونها منطلقاً لفهم SDDE المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً ،حيث يمكن القول ان SDE هي حالة خاصة من عائلة SDDE وكما سنلاحظهما لاحقاً.

٢.٢ المعادلات التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equation:

في هذا المبحث سنتطرق الى بعض التعاريف المهمة الاساسية لفهم المعادلات التفاضلية العشوائية :

تعريف-١:الحقل $\sigma -$ $(\sigma - \text{field})$(Krishnan V,٢٠١٣):

بافتراض أن لدينا Collection غير محدود وقابل للعد من المجموعات الجزئية Subsets $A_j \subset \Omega$،

.. ,... ,١,٢ = $\forall j$ ، والمشار له بالرمز F، عندئذٍ فأن المجموعة F تدعى الحقل $\sigma -$ اذا تحققت الشروط الآتية:

١) اذا $A_j \in F$ عندئذٍ فأن $A_j^c \in F$.

٢) اذا $\{A_j, j = ١,٢, \dots \dots\} \in F$ عندئذٍ فأن $\bigcup_{j=١}^{\infty} A_j \in F$.

تعريف- ٢:العملية العشوائية Stochastic Process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$

هي مجموعة من المتغيرات العشوائية المعرفة في فضاء الاحتمال (Ω, F, P) المعرفة عبر الزمن .إذ ان Ω هي مجموعة فضاء العينة ،F هي $\sigma -$ field تعرف بأنها مجموعة تتألف من مجموعات جزئية وهي جزء من Ω،P هي المقياس الاحتمالي Probability Measure والمعرف على (Ω,F).

تعريف -٣:المقياس الاحتمالي Probability measure(Al-Bayaty٢٠٠٨):

يعرف المقياس الاحتمالي بأنه دالة مجموعة Set function (P) والمعرف على الحقل – σ (F) مجموعات جزئية على فضاء العينة Ω بحيث يحقق الفرضيات الآتية:

١) P(A)≥ ٠ .

٢) $P(\Omega) = ١$.

٣) $P(\cup_{n=١}^{\infty} A_n) = \sum_{n=١}^{\infty} P(A_n)$.

تعريف -٤:الاستقرارية Stationary (Al-Bayaty ٢٠٠٨)

العملية العشوائية $\{X(t)\}_{t\geq .}$ يقال بأنها مستقرة اذا :

$$Pr\{X_١(t) \leq x_١, X_٢(t) \leq x_٢ \ldots, X_m(t) \leq x_m\}=$$

$$Pr\{X(t_١ + \theta) \leq x_١, X(t_٢ + \theta) \leq x_٢, \ldots, X(t_m + \theta) \leq x_m\}$$

لكل قيم $t_i \geq ٠$ وقيم x_i، i=١,٢,٣,...m ولجميع قيم $\theta \geq ٠$ تمثل الوقت (*time*).

حيث أن t :تمثل الزمن و θ : هي وحدة زمنية وربما تكون قيمة لعدد حقيقي او عدد صحيح وتعتمد قيمتها على العملية التصادفية اذا كانت مستمرة او متقطعة.

تعريف -٥: عملية الحركة البراونية Brownian motion process

:(Friedman ١٩٧٥)

تدعى ايضاً عملية *Wiener* وهي عملية عشوائية يرمز لها *W(t)* حيث أن $t \geq ٠$ وتتحقق الشروط الأتية:

١) عندما $w_{(.)} = ٠$ فأن $t = ٠$.

٢) لكل $٠ \leq t_. \leq t_١ \leq \cdots \leq t_n$ فأن المتغيرات العشوائية $\Delta W_n = W_t(n + ١) - W_t(n), \quad ١ \leq n \leq k$ هي متغيرات مستقلة فيما بينها وان Δw_n تمثل *future increments* زيادات مستقبلية عن القيم السابقة *past*.

٣) اذا كان $t \leq s \leq ٠$ فأن المتغير *W(t)-W(s)* يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطμ وتباين $\sigma_t^٢$ وأن:

$$E\left[W_{(t)} - W_{(S)}\right] = (t-s)\mu_t$$

$$E\left[W_{(t)} - W_{(s)}\right]^٢ = (t-s)\sigma_t^٢$$

عندما μ، σ_t قيم حقيقية ، $\sigma_t > ٠$.

وتعبر اساساً لتطوير المعادلات التفاضلية العشوائية.

تعريف-٦:عملية الضوضاء البيضاء White noise process

: [Klebaner ٢٠٠٥]

تعرف عملية الضوضاء البيضاء $Y(t)$ بأنها اشتقاق لعملية الحركة البراونية ورياضياً تحسب بالشكل الأتي:

$$Y(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \acute{W}_{(t)}$$

تعريف-٧:المعادلة التفاضلية العشوائية Stochastic Differential Equation (SDE) :$[Zong, ٢٠١٥]$

وهي معادلة تفاضلية يكون فيها احد حدودها او اكثر على شكل ضوضاء بيضاء *(White noise)* اي (عملية عشوائية)وبالتالي اعتبار الحل لهذه المعادلة التفاضلية بمثابة عملية عشوائية ان *SDE* تأخذ الشكل الأتي:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dw(t) \ldots (١.١)$$

حيث أن *X(t)* هي عملية عشوائية عند الزمن $t \geq ٠$

وأن $\{W(t), t \geq ٠\}$هو عملية الحركة البروانية وأن μ تمثل مقياساً لمتوسط معدل النمو (*growth*)عند الزمن *t* للعملية العشوائية *X(t)*تدعى أيضاً(*drift*) وكذلك فأن σ تدعى بالتقلبات (*volatility*)وتمثل مقياس للانحرافات المعيارية لمتغير العملية العشوائية.

ان المعادلة (١.١) يمكن اعادة كتابتها على شكل تكامل(*Integral*) كالاتي:

$$X(t+s) = X(t) + \int_t^{t+s} \mu(X(g), g)dg + \int_t^{t+s} \sigma\,(X(g), g)dw(g) \quad (١.٢)$$

اعتماداً على شروط عملية الحركة البروانية ،حيث أن $X(t)$ تمثل الحالة الحالية للعملية العشوائية وأن $X(t+١)$ تمثل الحالة المستقبلية للعملية العشوائية وتدعى هذه الخاصية خاصية ماركوف *Markov property*. أن الصيغة (١.٢) تدعى بالتكامل العشوائي *Stochastic Integral* .

من المعادلات (١.١) و(١.٢) نستنتج أن المعادلة التفاضلية هي معادلة رياضية تضم الدوال $\mu(.)$ و $\sigma(.)$ مشتقات هذه الدوال تمثل معدل التغير *rate of change* وبهذا يمكننا القول أن المعادلات التفاضلية تقدم اساس رياضي لهيكلة العلاقة بين الدوال بالمتمثلة ب (*quantities*) ومشتقاتها (*derivatives*).

<u>تعريف-٨: الترشيح Filtration</u> (*Klebaner* ٢٠٠٥)

لنفرض أن لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω, F, F_t, P) ولتكن $T > ٠$ ولنفرض ان $٠ \le t \le T$ فأنه يوجد $\sigma - field$ ، $F_t \le t$ ، $F_t \subset F$ لكل $s \le t$ فأن $F_s \le F_t$ عندئذ فأن $\{F(t)\}_{٠\le t \le T}$ تدعى Filtration .

<u>تعريف-٩: Martingales</u> (Evans, ٢٠٠٦)

تلعب Martingles دوراً مركزياً في النظرية الحديثة للعمليات العشوائية وحساب التفاضل والتكامل العشوائي .

و لنفرض أن لدينا مجموعة الترشيح Filtration $\{F(t)\}_{٠\le t\le T}$ والعملية العشوائية $\{X(t)\}_{t\ge ٠}$ ولنفرض $\{X(t)\}$ متكيفة مع مجموعة الترشيح $\{F(t)\}$ عندئذ فأن:

١. $\{X(t)\}$ تدعى عملية Martingales اذا كانت لكل t يوجد $\mu(t)$ قابل للتكامل اي ان $E|\mu(t)| < \infty$ لكل $٠ \le s < t \le T$.

٢. وان $E[\mu(t)|F(s)] = \mu(s)$ حيث ان $\mu(t)$ هي عملية Martingales في $[٠,\infty)$ قابلة للتكامل وMartingales تحتفظ بالخصائص عندما $٠ \le s < t \le T$

تعريف-١٠ : صيغة (Itô –formula) (Evans, ٢٠٠٦)

لنفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

$$dx(t) = A(t, Xt)dt + B(t, X(t))dw(t)$$

حيث أن $A \in L^{١}(٠, T), B \in L^{٢}(٠, T)$

وان $L^{١}$ يمثل norm- $\|.\|^{١}$ وان $L^{٢}$ يمثل norm- $\|.\|^{٢}$.

وافرض أن $U: R \times [٠, T] \longrightarrow R$ هو متغير مستمر

وأن المشتقات الجزئية $\frac{\partial^{٢} u}{\partial x^{٢}}$ ، $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}$ ، $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}}$ موجودة ومستمرة وكذلك لنفرض أن

$y(t) = u(x(t), t))$ عندئذ فأن $y(t)$ يمتلك معادلة تفاضلية عشوائية .

$$dy = (\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{١}{٢}\frac{\partial^{٢} u}{\partial x^{٢}}B^{٢})dt + \frac{\partial u}{\partial x}Bdw \; \ldots \ldots \ldots \; (١.٣)$$

أن الصيغة (١.٣) تسمى صيغة $It\hat{O}$ أو قاعدة السلسلة $It\hat{o}$ ($It\hat{O}$ chain rule)

Lemma-١: لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية الاتية:

$$dx(t) = B\big(t, x(t)\big)dt + r\big(t, x(t)\big)dw(t) \; \ldots \; (١.٤)$$

ولنفرض ان

$$B(t, x) = \mu x \quad , \qquad r(t, x) = \sigma x$$

وبهذ فان المعادلة (١.٤) سوف تصبح بالصيغة الاتية:

$$ds(t) = B\big(t, s(t)\big)dt + r\big(t, s(t)\big)dw(t) \; \ldots . \; (١.٥)$$

بشرط $X(t) = x$; $t \geq ٠$ و $X \in R$

نبحث عن الحل X(T) الذي يحقق الشرط X(t) ويحقق المعادلة (١.٥) ولايجاد الحل نكامل ال SDE في (١.٥) كالاتي:

$$\int_t^T dx(u) = \int_t^T B\big(u, x(u)\big)du + \int_t^T r\big(u, x(u)\big)dw(u)$$

$$X(T) - X(t) = \int_t^T B\big(u, x(u)\big)du + \int_t^T r\big(u, x(u)\big)dw(u)$$

$$X(T) = \underbrace{x}_{initial\ condition} + \underbrace{\int_t^T B\big(u, x(u)\big)du}_{\substack{ordinary\ integral \\ (lebesque\ integral)}} + \underbrace{\int_t^T r\big(u, x(u)\big)dw(u)}_{I\hat{t}O\ integral}$$

٢-٣: وجود ووحدانية حل المعادلات التفاضلية العشوائية

The Existence and Uniqueness of the solution of Stochastic Differential Equations

يعد ايجاد حل المعادلة التفاضلية العشوائية من المواضيع صعبة المهمة في الواقع التطبيقي لوجود عامل العشوائية وبالتالي فأن وجود حل وحيد يعد امراً صعباً يتطلب وضع شروط اضافية على عملية ايجاد الحلول ومن خلال ماتقدم يمكن تعريف SDE وبشكل رياضي حيث ان التعريف الآتي للمعادلة SDE مهم لفهم نظرية وجود ووحدانية الحل SDE:

تعريف- ١١ : ($ALAD\hat{G}LI$ ٢٠١٧) :

بافتراض أن الفضاء الاحتمالي للعملية العشوائية هو (Ω, F, P) وأن المجموعة $Filtration$ $[F_t]$ معرفة على $0 \le t \le T$ وأن الحركة البروانية $W_j(t)$ هي ذات بعد j ،

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_j(t))^T$$

ومعرفة على نفس الفضاء الاحتمالي ،عندئذ فأن SDE تعرف بالصيغة الاتية:

$$\begin{cases} dX(t) = g\big(t, X(t)\big)dt + u\big(t, X(t)\big)dW(t) & ; \quad 0 \le t \le T \\ X(0) = x. & \quad t \le 0 \end{cases} \quad \dots$$

(٦ .١)

إذ ان $X(0)$ هو متغير عشوائي ذو البعد i ، عندئذ فأن دوال المعادلة (٦ .١) تعرف بالشكل الاتي:

$$g: t \in [0, T] \times R^i \longrightarrow R^i$$

$$u: t \in [٠, T] \times R^i \longrightarrow R^{i\times j}$$

إذ أن *g(.)* هي دالة *drift* وأن *u(.)* هي دالة *diffusion* (*Volatility*) .

أن قيم *X(t)* المعرفة بالفضاء R^i التي تحقق المعادلة (١.٦) تدعى بحل المعادلة *SDE*. بعد التطرق الى التعريف الرياضي للمعادلة العشوائية التفاضلية *SDE* يمكننا الان استعراض النظرية التالية لتوضيح وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية العشوائية *SDE*.

نظرية-١ : (ALADAĞLI ٢٠١٧) :

ليكن $T > ٠$ تمثل الوقت النهائي (*Final time*) وان الدوال الآتية هي دوال مستمرة.

$$g: [٠, T] \times R^i \longrightarrow R^i$$

$$u: [٠, T] \times R^i \longrightarrow R^{i\times j}$$

يوجد اعداد ثابتة محددة (*finite constant*) m و n بحيث أن لكل $t \in [٠, T]$ ولكل $x, y \in R^i$ فان معلمة متوسط معدل التغير (*drift*) ومعلمة التقلبات (*Volatility*) تحقق الشروط الاتية:

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| + \|u(t,x) - u(t,y)\| \le m\|x - y\| \dots\dots\dots (١.٧)$$

$$\|g(t,x)\| + \|u(t,x\| \le n(١ + \|x\|) \dots\dots\dots. (١.٨)$$

وبافتراض أن القيمة الاساسية $x.$ هي متغير عشوائي معرف على R^i بحيث أن $\mathrm{E}\big(\|x.\|^٢ < \infty\big)$.

عندئذ يمكنا القول أن المعادلة التفاضلية العشوائية *SDE* تمتلك حلاً وحيداً هو X في الفترة $[٠, T]$ وتحقق الشرط الاتي.

$$\mathrm{E}\big[sup\|X(t)\|^٢\big] < \infty \dots (١.٩)$$

$$٠ \le t \le T$$

أن الشروط (١.٧ و ١.٨) يعني ان الدالة g و u تحقق استمرارية ليبشيتز المنتظمة (*Uniform Lipschitz Continuity*) بالنسبة للمتغير العشوائي x بينما الشرط (١.٩) يتضمن الدوال g و u التي تحقق شرط النمو الخطي *Linear growth* . يمكن التعرف على تفاصيل النظرية اعلاه والبرهان في كل (٢٠٠٣) *ϕksendal* , و(٢٠٠٧) *Iamberten and Lapeyre*.

تعريف -١٢ : (الحركة البراونية الهندسية) Geometric Brownian Motion (Wang ٢٠١٦)

وتعد العملية العشوائية للحركة البراونية الهندسية (*GBM*) من اشهر العمليات العشوائية لأسعار الاسهم فأذا فرضنا أن سعر السهم (*stock price*) عند الزمن $t \geq ٠$ هو *s(t)* وتتغير عشوائياً عندئذ فأن ديناميكية سعر السهم معطاة بالشكل الاتي:

$$\frac{\mathrm{ds(t)}}{\mathrm{s(t)}} = \mu\, dt + \sigma\, dw(t) \ldots\ldots\ldots (١.١٠)$$

ولإيجاد الحل الوحيد نحتاج قيمة ابتدائية (اساسية) ، لذلك نفرض ان $s(٠) = s_{.} > ٠$ هو القيمة الابتدائية لسعر السهم لذلك سيكون لدينا المعادلات الاتية:

$$\begin{cases} ds(t) = \mu\, s(t)d(t) + \sigma\, s(t)dw(t) & t \geq ٠ \ \ldots\ldots . (١.١١) \\ s(٠) = s_{.} \end{cases}$$

و باستخدام صيغة $It\hat{o}$ (١.٣) والنظرية (١) فـأنه يمكننا كتابة الصيغة (١.١١) بالصيغة الاتية:

$$s(t) = s(٠)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^{٢}}{٢}\right)t + \sigma w(t)} \ldots\ldots\ldots\ldots . . (١.١٢)$$

ان الصيغة (١.١٢) تعد الحل للعملية العشوائية للحركة البروانية الهندسية وأن الوسط والتباين ل *s(t)* هو ((ALADAĞLI (٢٠١٧.

$$E[s(t)] = s(٠)e^{\mu t}$$

$$Var[s(t)] = s(٠)e^{٢\mu t(٢t-١)}$$

و تعتبر العملية العشوائية *GBM* انموذجاً جيداً لأسعار الاصول *(Asset prices)* وتتصف بالخصائص الاتية:

١-أن العوائد المتوقعة تكون مستقلة عن قيم أسعار الاسهم.

٢- ان العملية العشوائية *GBM* تعتمد فقط على اسعار الاسهم الحقيقية والتي تكون قيماً غير سالبة.

٣-عملياتها الحسابية سهلة جداً ولها حلول تحليلية.

وعادة ما يتم استخدام نموذج *GBM* لتتبع التغيرات في أسعار الاصول من خلال نموذج *Black .Scholes* (*Black and Scholes (*١٩٧٣*)and Merton (*١٩٧٣*), Zheng (*٢٠١٥).
و سيتم لاحقا تخصيص مبحث لتعريف نموذج *Black-Scholes*.

٢-٤:المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

Stochastic Delay Differential Equations (SDDE)

من واقع التداولات في اسواق الاسهم وفي حالة توفر معلومات كثيرة عن عمليات التداول فأن الاشخاص المتداولين لأسعار الاسهم والاصول اضافة الى الاشخاص المطلعين بالأسواق الذين يدركون تأثيرات توفر هذه المعلومات على حركات الاسواق والتداولات وبالابتعاد أكثر من افتراضات السوق التقليدية فأنه يمكن مغادرة فكرة الاعتماد على العملية العشوائية GBMالتي اساسها مستند على خاصية ماركوف Markov process والتي يكون فيها الحدث المستقبلي يعتمد على حالة الحدث الحالي.

ومن هذا المنطلق فأن الاعتماد على معلومات والبيانات التاريخية السابقة لحالة الدراسة له اهمية في التأثير على اتخاذ القرار بشراء او بيع الاسهم او الاصول. لذلك انبثقت الحاجه لدراسة نماذج اكثر واقعية مع حركات اسواق الاسهم والاصول وهذا ما حفز الباحثين على اضافة عوامل اخرى لتحليل حركة الاسواق بشكل افضل مما ادى الى اقتراح المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياًSDDE والتي ادخلت حداً اضافياً في معادلتها التي تحتوي على عامل time-Delay او Memory اي عامل التباطؤ الزمني او التخلف الزمني والتي يرمز لها بالزمزλ.وبهذا يمكننا تعريف العملية SDDE بما يأتي :

تعريف-١٣:

بافتراض ان الفضاء الاحتمالي هو (Ω, F, P) و $(F_t)_{t\geq ٠}$ تحقق شروط Filtration وكذلك W(t) تمثل العملية البراونية ومعرفة ايضاً على نفس الفضاء الاحتمالي ،عندئذ فأن SDDE لأسعار الاسهم s(t) معرفة كالاتي:

$$\begin{cases} dS(t) = \mathrm{g}(S(t), S(t-\lambda), t)\, dt + u(S(t), S(t-\lambda), t) dW(t); & t \geq ٠ \\ S(t) = \Psi(t)\,; & t \in [-\lambda, ٠] \end{cases} \quad ....(١.١٣)$$

إذ إن معلمة التخلف الزمني هي ٠ ≤ λ وان الدوالg وu معرفتان كالاتي:

$$g: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

$$u: R \times R \times R_+ \longrightarrow R$$

$$R_+ = [٠, \infty)$$

ان وجود الحل والتأكد من وحدانية سيتم مناقشته بالمبحث الآتي.

وان المسار الابتدائي (Initial path) $\psi(t): [-\lambda, ٠] \longrightarrow R^n$ يتم افتراضه ليكون متغيراً مستمراً ومعرفة بالدالة القابلة للقياس $\Psi(t)$بحيث يحقق الشرط $t \in [-\lambda, ٠]$.

$$[E(sup|\psi(t)|)^P]^{\frac{١}{P}} < \infty$$

٢-٤-١: وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية العشوائية المختلفة زمنياً

:(The Existence and Uniqueness of the SDDE Solution)

في هذا المبحث سيتم مناقشة نظرية وجودية ووحدانية الحل في المعادلات SDDE وقبلها سيتم اعطاء بعض التعاريف الضرورية بوصفها قيوداً على الدوال g وu ودالة القيمة الابتدائية $\psi(t)$ لضمان وحدانية الحل في SDDE .

تعريف -١٤:لنفرض ان فضاء الاحتمالية هو (Ω, F, P) وان $\{F_t\}_{t\geq}$. عندئذ فان المعادلة SDDE معرفة بالشكل الاتي:

$$\begin{cases} dS(t) = g(S(t), S(t-\lambda), t)dt + u(S(t), S(t-\lambda), t)dWt\,; & ٠ \leq t \leq T \\ S(t) = \psi(t) & ; \quad -\lambda \leq t \leq ٠ \end{cases} \quad ....(١.١٤)$$

إذ ان العملية العشوائية $S(t)$ ذات قيمة حقيقية (real-valued) ومعرفة بالمجال

$$S(t): [-\lambda, T] \times \Omega \longrightarrow R$$

وتدعى بالحل القوي Strong solution إذا كانت S(t) قابلةً للقياسmeasurable و مستمرة وأن F_t هي Adapted process وتحقق المعادلة (١.١٤) almost surely.

ملاحظة -١: ان صيغة $It\hat{o}$ للمعادلة SDDE (١.١٤)عند وجود الحل S(t) تكتب بالشكل الاتي:

$$\mathrm{S(t)} = \psi(٠) + \int_{٠}^{t} \mathrm{g(r, S(r), S(r-\lambda))dr} + \int_{٠}^{t} \mathrm{u(r, S(r), S(r-\lambda))dW(r)}$$

ان التكامل اعلاه هو تكامل عشوائي Stochastic integral لوجود الحد الثاني وكما تم توضيحه في تعريف صيغة $\mathrm{I}t\hat{o}$ (ALADAĞLI ٢٠٠٧) .

تعريف - ١٥: لنفرض أن لدينا حل strong solution اخر للعملية S(t) وهو $\bar{S}(t)$ عندئذ فأن

$$\Pr[S(t) = \bar{S}(t) \quad , \forall t \in [-\lambda, T]] = ١$$

عندئذ يمكن القول أن الحل القوي S(t) هو pathwise unique اي انه حل قوي وحيد المسار.

تعريف-١٦: أن الدوال g وu في المعادلة (١.١٤) تحقق شروط Local Lipschitz اذا كان لكل عدد صحيح i ≥ ١ يوجد ثابت موجب k_i بحيث ان

$$|g(x_١, y_١, t) - g(x_٢, y_٢, t)| \vee |u(x_١, y_١, t) - u(x_٢, y_٢, t)| \\ \leq k_i[|x_١ - x_٢| + |y_١ - y_٢|]$$

$$x_{1}, x_{2}, y_{1}, y_{2} \in R$$

وان $|x_{1}| \vee |y_{1}| \vee |x_{2}| \vee |y_{2}| \leq i$

و

$$|x| \vee |y| = \max(|x|, |y|)$$

تعريف - ١٧: الدوال g, u في المعادلة (١.١٤) تحقق شرط النمو الخطي Linear Growth اذا وجد ثابت موجب k بحيث ان

$$|g(x,y,t)| \vee |u(x,y,t)| \leq k(1 + |x| + |y|)$$

لكل قيم $(x,y,t) \in R_{1} \times R_{2} \times R_{+}$

نظرية -٢: بتوفر شرط Local lipschitz وشرط النمو الخطي Linear Growth فأن المعادلة (١.١٤) تمتلك حلاً قوياً وحيد المسار Pathwise unique strong solution وهذا الحل لديه الخاصية الأتية :

$$\mathrm{E}\left[sup|S(t)|^{2}\right] < \infty \quad \text{لكل} \; 0 < \mathrm{T} < \infty \quad ; -\lambda \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}$$

٢-٤-٢ : الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

في المباحث السابقة تعرفنا الى مجموعة من النظريات والتعاريف المهمة الضرورية لفهم هيكيلية عمل المعادلات التفاضلية العشوائية SDE والمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا SDDE. في هذا المبحث سوف نستعرض احد اهم الطرائق العددية (Numerical method) في ايجاد الحل التقريبي المعادلة SDDE اضافة للتعرف على اهم مميزات هذه الطريقة العددية .وقبل التطرق لطريقة الحل العددي التقريبي للمعادلات SDDE سوف نتطرق اولاً الى الطريقة العددية للحل التقريبي للمعادلات SDE. هذه الطريقة هي طريقة اويلر – ماروياما (Euler-Maruyama E-M) والتي تعد احد اهم طرائق ايجاد الحل العددي التقريبي للمعادلات SDE [Han, ٢٠٠٥].

٢-٤-٢-١ : طريقة اويلر – ماروياما للمعادلات التفاضلية العشوائية SDE

تعد طريقة (EM) من اشهر طرائق ايجاد الحلول العددية التقريبية للمعادلات التفاضلية العشوائية SDE وتستخدم هذه الطريقة التفاضل والتكامل العشوائي Stochastic Calculus. ان ازدياد الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية SDE متأتٍ من ندرة الحلول الواضحة (explicit) للمعادلات SDE في الواقع العملي .لذلك سوف نتطرق الى نظرية الحل العددي التقريبي الاتية:

نظرية -٣: طريقة اويلر- ماروياما الصريحة Euler-Maruyama Explicit method (Han٢٠٠٥)

لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية:

$$\mathrm{d}X(t) = g\big(t, X(t)\big)dt + u\big(t, X(t)\big)dW(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١.١٥)$$

إذ ان t هو الزمن المعرف ضمن الفترة $[a, b]$ وان الشرط الاساسي لحل المعادلة (١.١٥) هو $X(t_{٠}) = x.$ ولنفرض اننا سوف نقسم الفترة $[٠, T]$على شكل الاتي:

$$٠ = t_{٠} < t_{١} < \cdots < t_N = T$$

ولنعرف $\Delta t_n = t_{n+١} - t_n$

وان $\Delta W_n = W(t_{n+١}) - W(t_n) = W(\Delta t_{n+١})$ تمثل الزيادات (*increments*) الحاصلة بعملية الحركة البراونية.

لكل $n = ٠,١,٢, \ldots, N - ١$

وان $t_n = a + nh$

حيث ان $h = \frac{b-a}{N}$ تمثل uniform step size time

بهذا فأن سلسلة الحلول العددية التقريبية يمكن اعطائها الشكل الاتي:

$$X_{n+١} = X_n + g(t_n, x_n)h + u(t_n, x_n)\Delta W_n \qquad \ldots(١.١٦)$$

تسمى بطريقة اويلر – ماروياما الصريحة وتمثل الحل التقريبي للزمن المتقطع (time discrete approximation solution). للاطلاع على المزيد عن هذه النظرية يمكن الاطلاع على المصادر (Jassim ٢٠٠٦, ALADAĞLI ٢٠١٧, and Zheng ٢٠١٥).

من النظرية اعلاه يمكن القول ان الزيادات المسقلة independent increments (ΔW_n) تتوزع بالشكل الاتي:

$$\Delta W_n \sim N(\cdot, t_{n+١} - t_n)$$

او

$$\Delta W_n \sim \sqrt{t_{n+١} - t_n}\, N(\cdot,١)$$

أن العمل بالحل بطريقة اويلر(١.١٦) يتطلب توليد متغيرات عشوائية من التوزيع الطبيعي بمتوسط (صفر) وتباين ($h = t_{n+١} - t_n$).

الباحثة (Jassim, ٢٠٠٦) تدارست طريقة اويلر الضمنية (Implicit Euler's method), و افترضت في حال اذا كانت لدينا المعادلة العشوائية (SDE) (١.٦) فان سلسلة الحلول العددية باعتماد الافتراض في النظرية (٣) معطاة بالشكل الاتي:

$$X_{n+١} = X_n + g(t_{n+١}, X_{n+١})h + u(t_{n+١}, X_{n+١})\Delta W_n \qquad ; n = \cdot,١, \dots, N-١$$

ان الحل اعلاه يسمى طريقة اويلر الضمنية.

٢-٤-٢-٢: طريقة أويلر – ماروياما للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً

في هذا المبحث سيتم التطرق الى طريقة اويلر في حل المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً الاتية :

$$dx(t) = g\big(t, x(t), x(t-\lambda)\big)dt + u(t, x(t), x(t-\lambda))dw(t) \dots\dots (١.١٧)$$

وتحت افتراض ان الحل الأساس الاولي هو

$$x(t) = \psi_\cdot(t); t_\cdot - \lambda \le t \le t_\cdot$$

حيث ان $t_\cdot$ هو زمن الاساس وان λ هي عدد ثابت.

النظرية الآتية توضح حل المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً باستخدام طريقة اويلر.

نظرية -٤: (Jassim ٢٠٠٦):

لنفرض ان لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً الاتية:

$$\begin{cases} dx(t) = g(t, x(t), x(t-\lambda))dt + u(t, x(t), x(t-\lambda))dw(t) & ; t \in [a,b] \\ x(t_{\cdot}) = \psi_{\cdot}(t) & ; \quad t_{\cdot} - \lambda \le t \le t_{\cdot} \end{cases}$$

لنفرض اننا سوف نقسم الفترة $[a,b]$ على مايأتي:

$$\cdot = t_{\cdot} < t_{١} < \cdots < t_N = T$$

ولنفرض ان

$\Delta t_n = t_{n+١} - t_n = h$ تمثل الزيادات *Increments* في الزمن وان h هي *Uniform* *step size* والمعرفة بالاتي:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

وان $\Delta w_n = w(t_{n+١}) - w(t_n)$ تمثل الحركة البروانية المعيارية، وان

$$n = \cdot, ١, ٢, \ldots, N - ١ \quad , t_n = a + nh$$

وبهذا فأن سلسلة chain الحلول العددية يمكن ان تعطى بالشكل الاتي:

$$X_{(n+١)} = X_n + g(t_n, X_N, \psi_{n-\lambda})h + u(t_n, X_n, \psi_{n-\lambda})\Delta w_n \;;$$

$$\cdot \le n \le N - ١$$

لمزيد من المعلومات عن النظرية (٤) والبرهان انظر المصدر (٢٠٠٦ ، Jassim).

تعريف - ١٨ : نموذج بلاك – شولز (Black – Scholes Model)

في سنة ١٩٧٣ قدم الباحثان Fisher Black و Myron Scholes بحثين علميين رائدين في مجال الاداوات المالية المتعلقة بالأصول (assets) التي يمكن تداولها بأسواق المال من خلال

مصطلح العقد (option) وما يتعلق بها من اسعار العقود (options prices). إذ افترض الباحثان ان حركة اسواق الاسهم تتبع الافتراض الاتي:

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t \quad \dots.(١.١٨)$$

فقد اقترح الباحثان نموذجا رياضيا يدعى نموذج Black –Scholes وهو اساس لصيغة نظرية تهتم بتحديد اسعار الخيارات المتعلقة بالقيمة المالية للسهم (stock). إذ ان الفكرة الاساسية لنموذج Black –Scholes تفترض ان الخيار (option) للأصول المتداولة بأسواق المال تكون بمعدل فائدة خالٍ من المخاطرة (risk-free interest rate)، وبهذا فان سعر الخيار هو دالة بعنصر التقلب (Volatility) للسهم (stock). ان نموذج Black-Scholes يصف ويوضح سلوك الاسعار بالزمن المستمر إذ يفترض نموذج Black-Scholes ان حركة السوق لا يمكن التنبؤ بها وان المعدل المئوي للتغير (Percentage rate) يتوزع توزيعاً طبيعاً وكذلك فأن مستوى اسعار الاصل عند فترة انتهاء الخيار تتوزع حسب توزيع log normal . لنفترض ان سعر السهم s_t يمتلك التوزيع الاتي:

$$P(S_t) = \frac{١}{\sqrt{٢\pi(T-t)\sigma s_t}} exp\left[\frac{-(\log(S_t)-\mu)}{٢(T-t)\sigma^{٢}}\right] \dots\dots\dots (١.١٩)$$

إذ ان $s_t > ٠$ وان T هو وقت انهاء التعاقد (شراء او بيع) وσ هي معلمة التقلب من خلال الصيغة اعلاه يمكن ان تكون القيمة المتوقعة لسعر السهم هي :

$$\mathrm{E}(s_t) = \mathrm{e}^{\mu + \frac{T-t}{٢}\sigma^{٢}}$$

وبالاعتماد على الصيغ (١.١٨ و ١.١٩) وبفرض ان $y_t = \log s_t$ حيث s_t هي process Itô فأن الحل (solution) للعملية s_t معطى بالاتي :

$$S_t = S.\ \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^{٢}}{٢}\right) r + \sigma\, w_t\right\} \qquad \dots..(١.١٩)$$

حيث ان الحل (١.١٩) يمثل حل نموذج بلاك – شولز.

الــفصــل الثالث

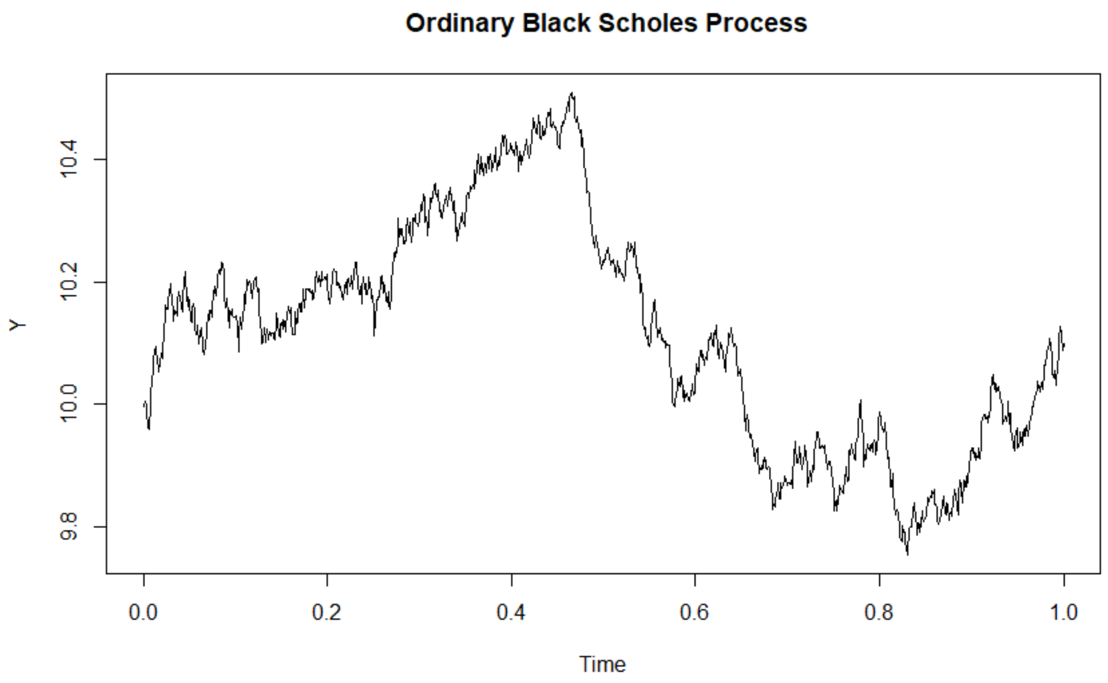
المحاكاة والتطبيق العملي

٣-١: تجربة المحاكاة

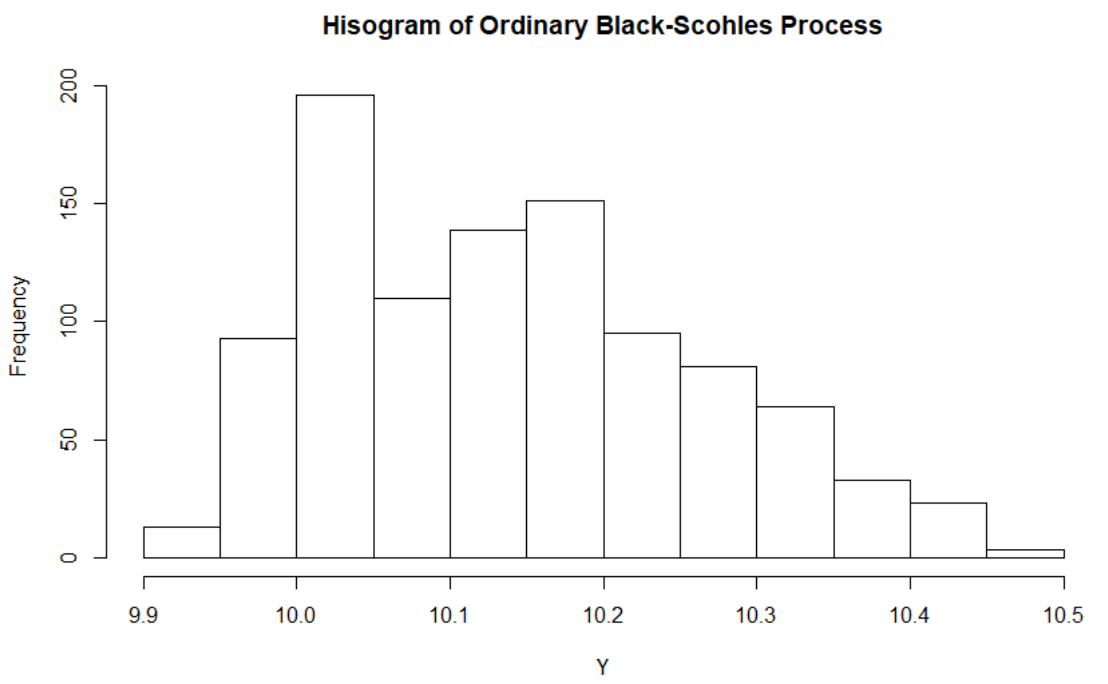
المحاكاة تقنية تعليمية تستخدم من اجل اعطاء سيناريوهات متعددة عما يمكن ان يسلكه العالم الواقعي الذي يصعب افتراضه ربما بسبب الكلفة المادية العالية أو او صعوبة الحصول على البيانات او شحة الموارد البشرية. ومنذ منتصف القرن العشرين ازداد اهتمام الباحثين بتقنية واساليب المحاكاة لكونها فعاله نسبيا في عمليات التجريب التعليمية لاسيما بعد ظهور التقنيات البرمجية بالحواسيب؛ حيث أصبح اجراء عملية محاكاة للتجارب والعمليات الحسابية المختلفة تتم من خلال الحواسيب. في هذا المبحث سوف نستخدم اسلوب المحاكاة باستخدام طريقة اويلر-ماريوما العددية لدراسة سلوك مسارات الحلول من خلال اراء اربعة سيناريوهات لتجربة المحاكاة علما انه لا توجد صيغة حل محددة (closed form) للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة ، زمنيا اضافة الى ذلك سوف ندرس تأثير القيم المبدئية على ايجاد حل هذه المعادلات. وقد تم ايجاد الحلول العددية باستخدام البرمجة بلغة R.

١- تجربة المحاكاة الاولى

في هذا المثال تم افتراض عملية بلاك – شولز الاعتيادية (Ordinary Black- Scholes) الموضحة بالمعالة (١.١٨). الشكل ٣-١ يوضح مسار الحل التقريبي لمتغير سعر السهم (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان (µ=٠.٠٣, σ=٠.٠٥, $y_{.}$ = ١٠) من خلال استخدام طريقة اويلر العددية. اما الشكل ٣-٢ فيوضح المدرج التكراري لحل نموذج بلاك – شولز والذي يبين اتباع الحل بطريقة اويلر للتوزيع الطبيعي اللوغارتمي.



شكل ٣-١: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز بطريقة اويلر



شكل ٣-٢: المدرج التكراري لسعر السهم لنموذج بلاك – شولز الاعتيادي

الجدول رقم ٣-١ يمثل خلاصة احصاءات مهمة لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز الاعتيادي.

جدول ٣-١: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

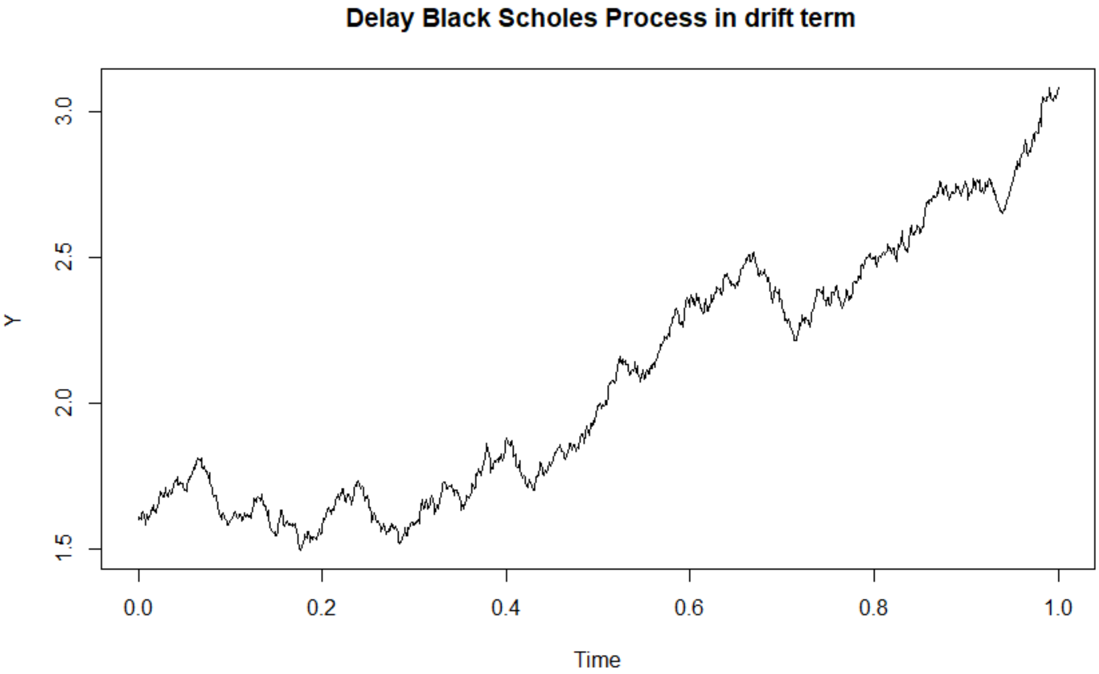
Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
٩.٨٤١	١٠.٠١٨	١٠.١٩٥	١٠.١٩٥	١٠.٣٧٢	١٠.٥٥٠

يوضح الجدول ٣-١ ان متوسط سعر السهم هو ١٠.١٩٥ وانه ٥٠% من قيم سعر السهم في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين (١٠.٠١٨ و ١٠.٣٧٢). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من اسعار الاسهم اقل من ١٠.٣٧٢ ، وان ٥٠٪ اكثر من ١٠.١٩٥ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر سهم اقل من ١٠.٠١٨ يؤشر على هبوط الاسعار مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار المناسب بشأن عملية التداول.

٢- تجربة المحاكاة الثانية

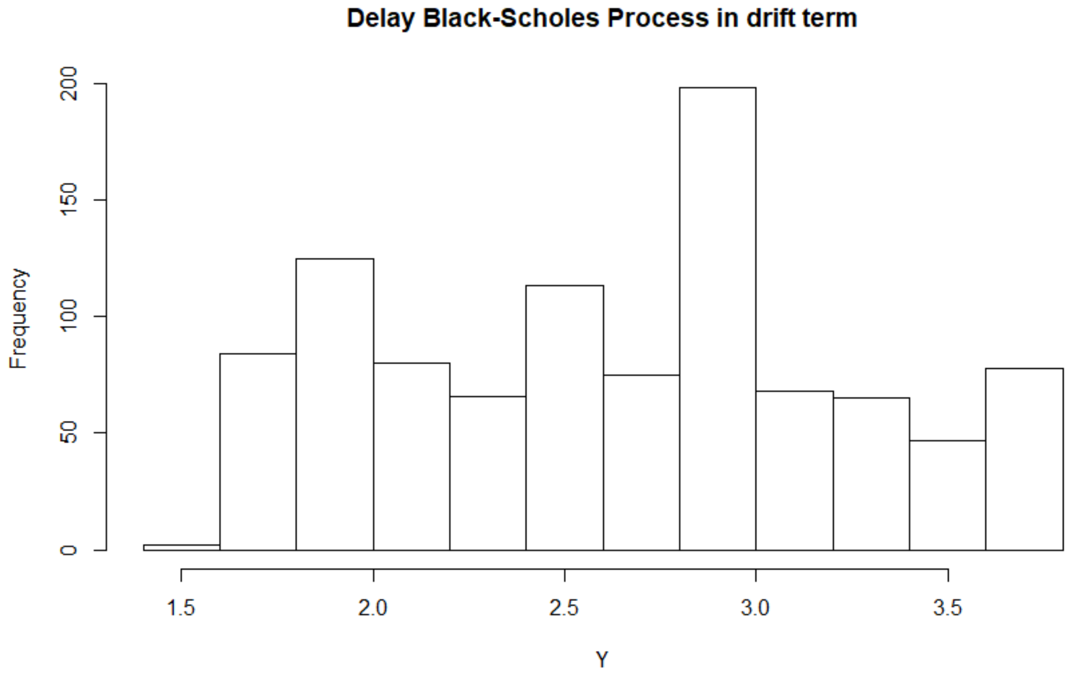
في هذا المثال تم افتراض عملية بلاك – شولز (delay Black- Scholes in drift) الموضحة بالمعالة الآتية التي تصف تأثير التخلف الزمني بحد متوسط معدل نمو(drift) سعر السهم فقط. الشكل ٣-٣ يوضح مسار الحل التقريبي لمتغير سعر السهم (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان (μ=٠.٠٠٣, σ=٠.٥, $y_{\cdot}$ =١.٢٣,λ= -٠.٥, T=١) باستخدام طريقة اويلر العددية. اما الشكل ٣-٤ فيوضح المدرج التكراري لحل نموذج بلاك – شولز والذي يبين اتباع الحل بطريقة اويلر للتوزيع الطبيعي اللوغارتمي .

$$ds_t = \left(\mu s_t + ٢e^{-١}(s_t - \lambda)\right) + ٣.٢e^{-١})dt + \sigma dwt,$$



شكل ٣-٣: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز المتخلف زمنيا بحد متوسط معدل النمو

كذلك نلاحظ انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتصاعد المسار، إذ عند القيمة (t==٠) نجد ان قيمة السهم كانت (y=١.٧)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتزايد بالمسار بين (t=٠) و (t=١).



شكل ٣-٤: المدرج التكراري لسعر السهم لنموذج بلاك – شولز المتخلف زمنيا بحد متوسط معدل النمو

الجدول رقم ٣-٢ يمثل خلاصة احصاءات مهمة لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز المتخلفة زمنيا بحد متوسط معدل النمو.

جدول ٣-٢: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
١.٥٩٨	٢.٠٣٧	٢.٧٤٢	٢.٦٣٠	٣.٠٩١	٣.٧٣٠

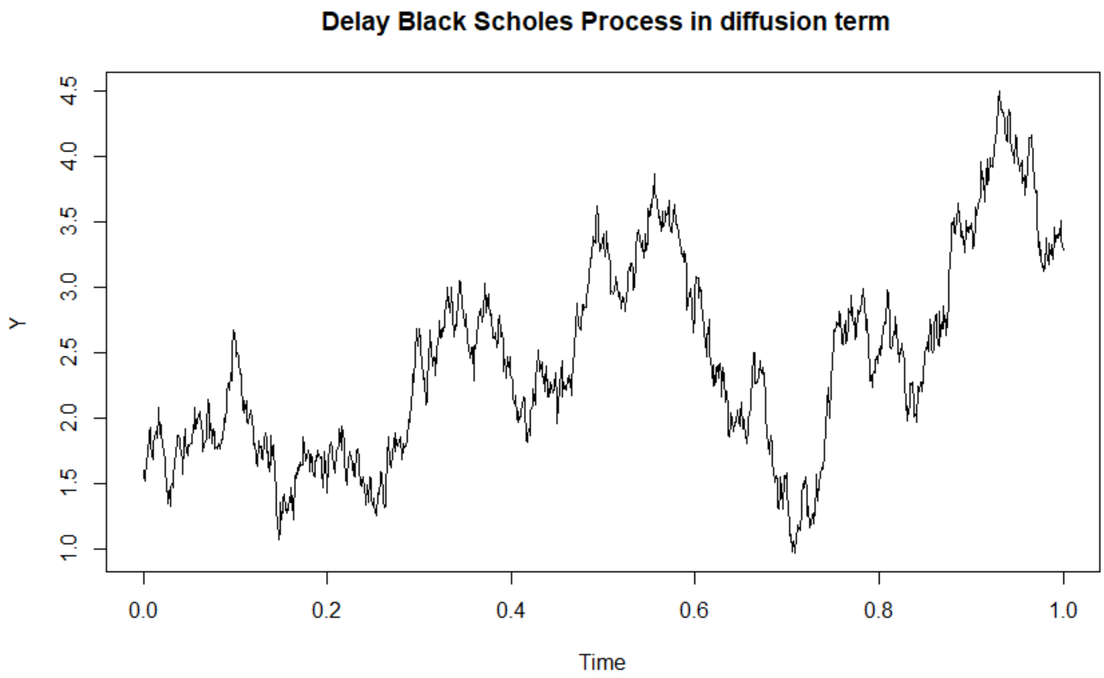
يوضح الجدول ٣-٢ ان متوسط سعر السهم هو ٢.٦٣٠ وانه ٥٠% من قيم سعر السهم في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين (٢.٠٣٧ و ٣.٠٩١). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من سعر الاسهم اقل من ٣.٠٩١، وان ٥٠٪ اكثر من ٢.٧٤٢ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر سهم اقل من ٢.٠٣٧ يؤشر على هبوط الاسعار مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار

المناسب بشأن عملية الشراء اوالبيع. إذ ان اقل سعر للتداول هو ١.٥٩٨ واعلى سعر للتداول هو ٣.٧٣٠ ، اضافة الى ذلك نلاحظ تقارب هذه القيم من الوسط الحسابي مما يعني عدم تأثر متوسط معدل نمو الاسعار بمعلمة التخلف الزمني.

٣- تجربة المحاكاة الثالثة

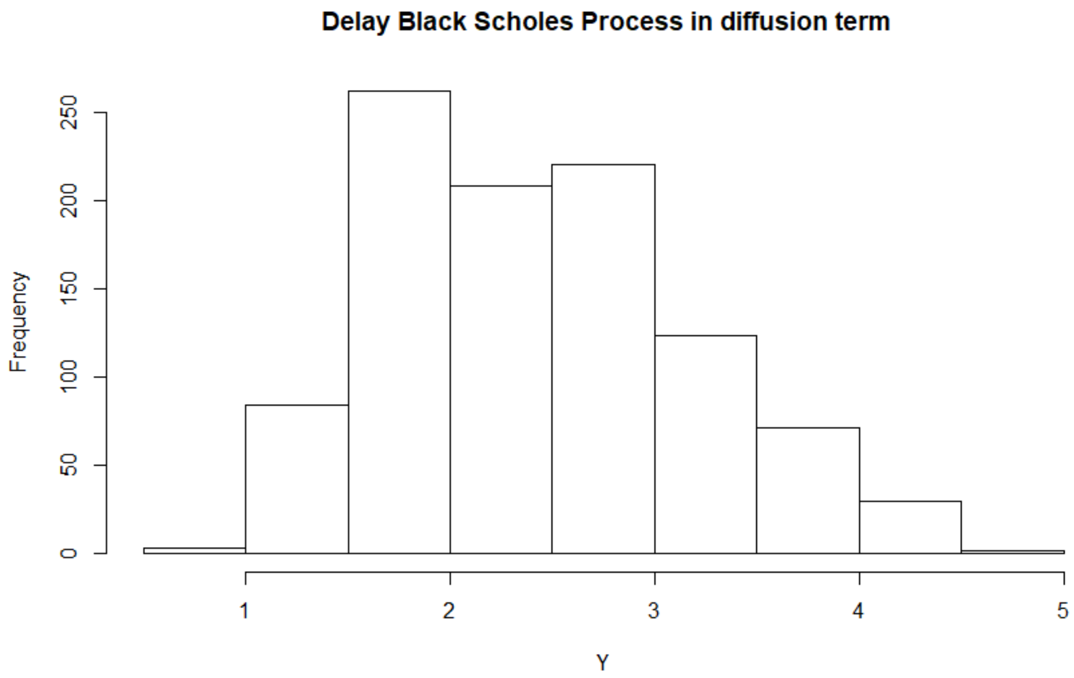
في هذا المثال تم افتراض عملية بلاك – شولز بوجود معلمة التخلف الزمني في حد التقلبات (delay Black- Scholes in diffusion) الموضحة بالمعادلة الآتية التي تصف تأثير التخلف الزمني بحد التقلبات فقط. الشكل ٣-٤ يوضح مسار الحل التقريبي لمتغير سعر السهم (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان (μ=٠.٠٠٣, σ=٠.٥, $y_{\cdot}$ =١.٢٣,λ= -٠.٥, T=١) باستخدام طريقة اويلر العددية. اما الشكل ٣-٦ فيوضح المدرج التكراري لحل نموذج بلاك – شولز والذي يبين اتباع الحل بطريقة اويلر للتوزيع الطبيعي اللوغارتمي.

$$ds_t = (\mu s_t)dt + \big(\sigma s_t + b(s_t - \lambda)\big)dwt,$$



شكل ٣-٥: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز المتخلف زمنيا بحد التقلبات

كذلك نلاحظ انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتصاعد المسار، إذ عند القيمة (t==٠) نجد ان قيمة السهم كانت (y=١.٧)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتذبذب بالمسار بين (t=٠) و (t=١) نتيجة التغيرات الحاصلة بحد التقلبات اثر معلمة التخلف الزمني.



شكل ٣-٦: المدرج التكراري لسعر السهم لنموذج بلاك – شولز المتخلف زمنيا بحد التقلبات

الجدول رقم ٣-٣ يمثل خلاصة احصاءات مهمة لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز المتخلفة زمنيا بحد التقلبات.

جدول ٣-٣: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

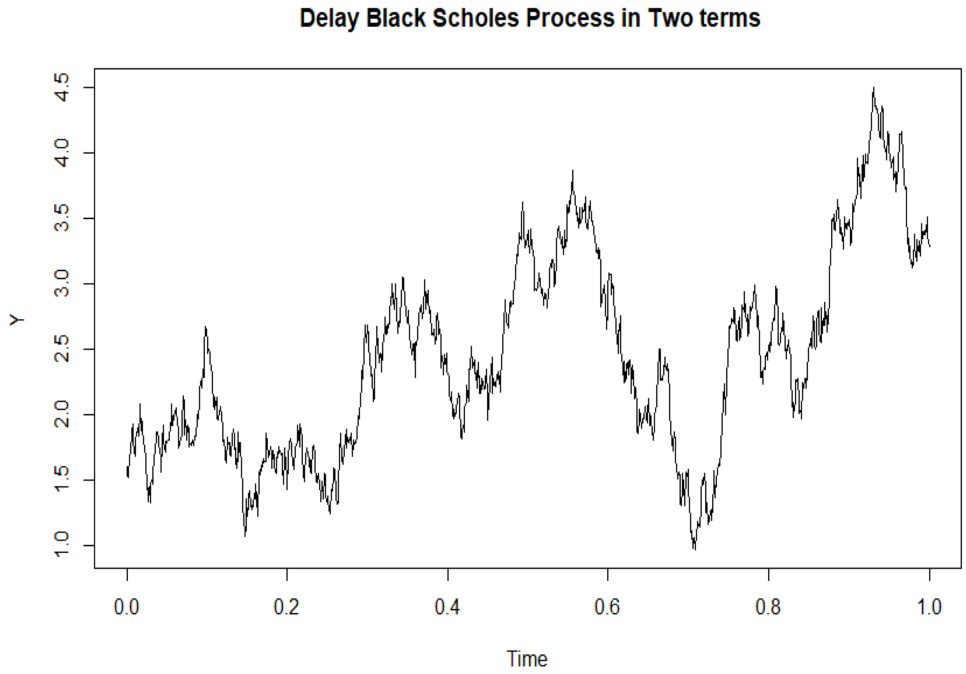
Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
٠.٩٧٤	١.٨٠٩	٢.٣٥٤	٢.٤٣٩	٢.٩٣٠	٤.٥٠٢

يوضح الجدول ٣-٣ ان متوسط سعر السهم هو ٢.٤٣٩ وانه ٥٠% من قيم سعر السهم في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين (١.٨٠٩ و ٢.٩٣٠). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من سعر الاسهم اقل من ٢.٩٣٠، وان ٥٠٪ اكثر من ٢.٣٥٤ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر سهم اقل من ١.٨٠٩ يؤشر على هبوط الاسعار مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار المناسب بشأن عملية الشراء اوالبيع. إذ ان اقل سعر للتداول هو ٠.٩٧٤ واعلى سعر للتداول هو ٤.٥٠٢ وبهذا نلاحظ تذبذب الاسعار واضح من الفرق بين اقل قيمة واعلى قيمه لأسعار الاسهم ومدى ابتعادها عن وسطها الحسابي وكل هذا بسبب تأثير معلمة التخلف الزمني في حد التقلبات.

٤- تجربة المحاكاة الرابعة

في هذا المثال تم افتراض عملية بلاك – شولز بوجود معلمة التخلف الزمني في حد متوسط معدل النمو والتقلبات (delay Black- Scholes in drift and diffusion) الموضحة بالمعادلة الآتية التي تصف تأثير التخلف الزمني بحدي متوسط معدل النمو و التقلبات. الشكل ٣-٧ يوضح مسار الحل التقريبي لمتغير سعر السهم (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان ($\mu=٠.٠٠٣$, $\sigma=٠.٥$, $y_{.}=١.٢٣$, $\lambda=-٠.٥$, $T=١$) باستخدام طريقة اويلر العددية.

$$ds_t = (\mu s_t + ٢e^{-١}(s_t - \lambda) + ٣.٢e^{-١})dt + \sigma^{٢}(s_t + ٣(s_t - \lambda))dwt,$$



شكل ٣-٧: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز المتخلف زمنيا بحدي متوسط معدل النمو والتقلبات

كذلك نلاحظ انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتصاعد المسار، إذ عند القيمة (t==٠) نجد ان قيمة السهم كانت (y=١.٧)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتذبذب بالمسار بين (t=٠) و (t=١) نتيجة التغيرات الحاصلة بحد التقلبات اثر معلمة التخلف الزمني.

الجدول رقم ٣-٤ يمثل خلاصة احصاءات مهمة لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز المتخلفة زمنيا بحد التقلبات.

جدول ٣-٤: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
٠.٩٧٥	١.٨٠٩	٢.٣٥٤	٢.٤٤٠	٢.٩٣١	٤.٥٠٤

يوضح الجدول ٣-٤ ان متوسط سعر السهم هو ٢.٤٤٠ وانه ٥٠% من قيم سعر السهم في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين(١.٨٠٩و ٢.٩٣١). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من

سعر الاسهم اقل من ٢.٩٣١، وان ٥٠٪ اكثر من ٢.٣٥٤ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر سهم اقل من ١.٨٠٩ يؤشر على هبوط الاسعار مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار المناسب بشأن عملية الشراء اوالبيع. حيث ان اقل سعر للتداول هو ٠.٩٧٥ واعلى سعر للتداول هو ٤.٥٠٤ . وبهذا نلاحظ تذبذب الاسعار واضحاً من الفرق بين اقل قيمة واعلى قيمه لاسعار الاسهم ومدى ابتعادها عن وسطها الحسابي وكل هذا بسبب تأثير معلمة التخلف الزمني في حد التقلبات.

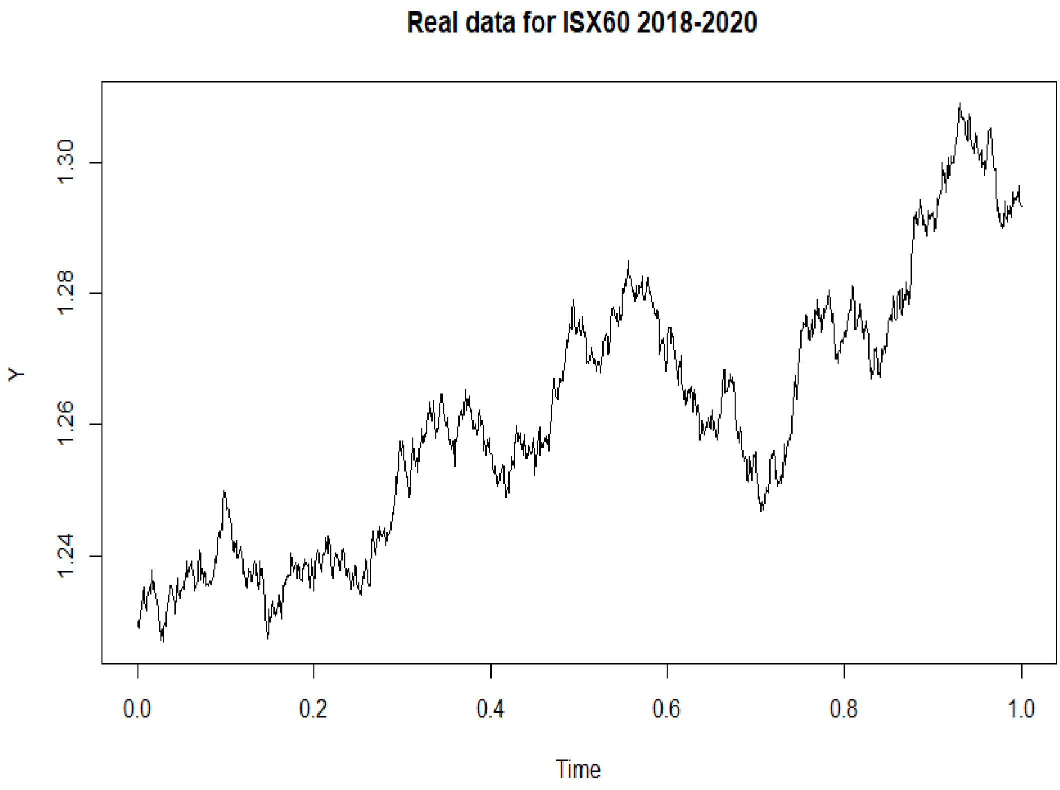
٣-٢: تحليل البيانات الحقيقية

في هذا المبحث تناولنا تطبيقا عمليا للمعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنيا على بيانات حقيقية لدراسة تأثير التخلف الزمني في هذا النوع من المعادلات التفاضلية. إذ تم الاعتماد على بيانات تمثل اسعار صرف الدينار العراقي مقابل الدولار الامريكي بالسوق الموازي لسعر البنك المركزي العراقي. المتداولين بأسعار الصرف الموازي يعلمون جيدا بان اسعار البيع المستقبلية لا تعتمد على الاسعار الحالية فقط وانما تتأثر بأسعار الفترات الزمنية السابقة. لذلك تم افتراض ان اسعار الصرف الموازي تتبع نموذجا عشوائيا يعتمد على معلومات تاريخيه متمثلة بمعلمة التخلف الزمني. لذلك سوف ندرس سلوك نموذج سعر الصرف الموازي بوجود ثلاث حالات هي وجود التخلف بحد متوسط معدل نمو الاسعار , وجود التخلف بحد تقلبات السعر, ووجود التخلف الزمني في كل من متوسط معدل نمو الاسعار والتقلبات. إذ تم الاعتماد على اسعار الصرف الموازي المنشورة رسميا ببيانات وزارة التخطيط وللفترة من ٢٠١٤-٢٠١٩ وعلى اساس يومي. وبناءً على هذه المعلومات تم فرض صيغة رياضية تمثل البيانات من خلال معادلة تفاضلية عشوائية متخلفة زمنيا بافتراض خطية التخلف الزمني ودمجها بنموذج الحركة البراونية الهندسية لأسعار الصرف في نماذج بلاك- شولز. النموذج ادناه يوضح العملية العشوائية لأسعار الصرف الموازي:

$$\mathrm{ds_t} = (\mu \mathrm{s_t} + ٢\mathrm{e}^{-١}(\mathrm{s_t} - \lambda) + ٣.٢\mathrm{e}^{-١})\mathrm{dt} + \sigma^{٢}(\mathrm{s_t} + ٣(\mathrm{s_t} - \lambda))\mathrm{dwt}$$

تم افتراض عملية بلاك – شولز بعدم وجود معلمة التخلف الزمني الموضحة بالمعالة اعلاه التي تصف تأثير التخلف الزمني بحد متوسط معدل النمو والتقلبات تساوي صفراً. الشكل ٣-٨ يوضح

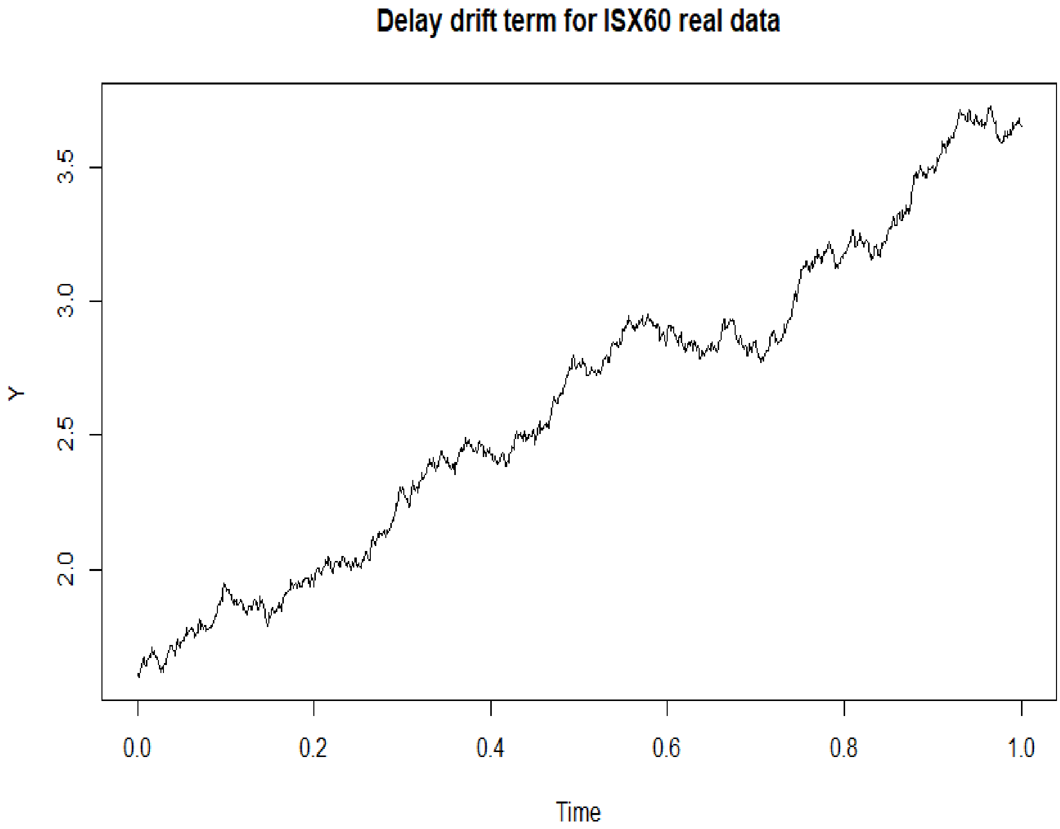
مسار الحل التقريبي لسعر الصرف (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان $(\sigma = ٠.٠٥, \mu = ٠.٠٣, S. = ١.٢٣, T = ١)$ باستخدام طريقة اويلر العددية.



شكل ٣-٨: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز بعدم وجود التخلف الزمني

كذلك نلاحظ من الشكل اعلاه انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتصاعد المسار، حيث عند القيمة (t=٠) نجد ان قيمة السهم كانت (y=١.٢٢٧)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتزايد بالمسار بين (t=٠) و (t=١).

ثانيا تم افتراض عملية بلاك – شولز بوجود معلمة التخلف الزمني في حد متوسط معدل النمو لأسعار الصرف (drift) الموضحة بالمعالة اعلاه التي تصف تأثير التخلف الزمني بحد متوسط معدل النمو. الشكل ٣-٩ يوضح مسار الحل التقريبي لسعر الصرف (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان ($\mu=٠.٠٠٠٣$, $\sigma= ٠.٥$, $s. = ١.٢٣$,$\lambda= ٠$, $T=١$) باستخدام طريقة اويلر العددية.



شكل ٣-٩: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز المتخلف زمنيا بحد متوسط معدل النمو

نلاحظ من الشكل اعلاه انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتصاعد المسار، و عند القيمة (t=٠) نجد ان قيمة سعر الصرف كانت (y=١.٢)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتزايد بالمسار بين (t=٠) و (t=١).

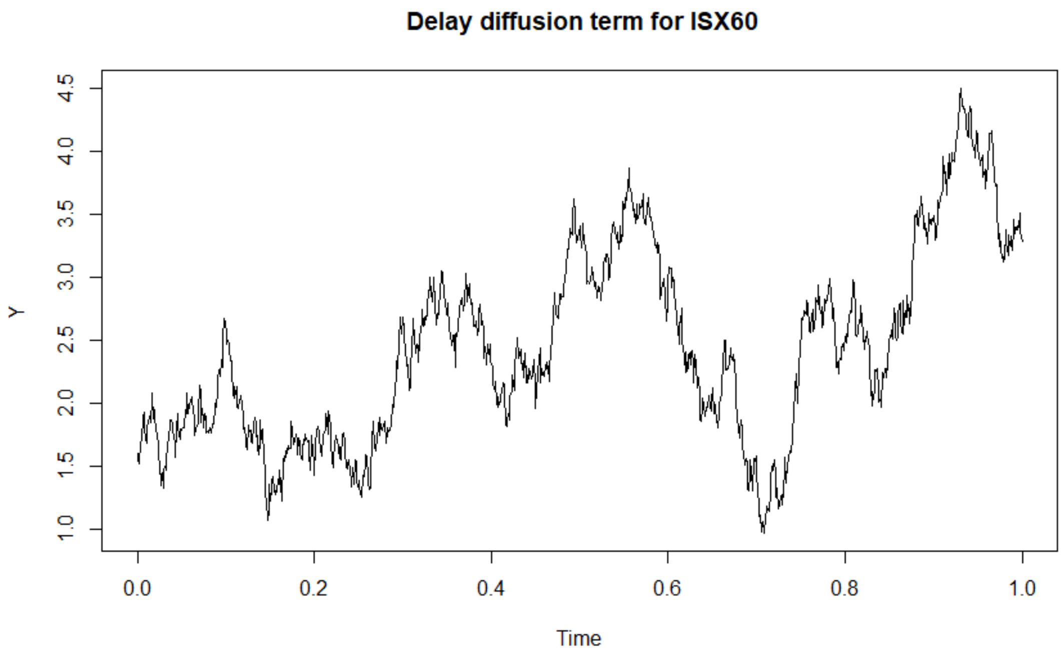
الجدول رقم ٣-٥ يمثل خلاصة احصاءات مهمه لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز المتخلفة زمنيا بحد متوسط معدل النمو.

جدول ٣-٥: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
١.٥٩٨	٢.٠٧٣	٢.٧٤٢	٢.٦٣٠	٣.٠٩١	٣.٧٣٠

يوضح الجدول ٣-٥ ان متوسط سعر الصرف هو ٢.٦٣٠ وانه ٥٠% من قيم سعر الصرف في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين(٢.٠٧٣ و ٣.٠٩١). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من سعر الصرف اقل من ٣.٠٩١، وان ٥٠٪ اكثر من ٢.٧٤٢ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر للصرف اقل من ٢.٠٧٣ يؤشر على هبوط الاسعار مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار المناسب بشأن عملية الشراء او البيع. إذ ان اقل سعر للتداول هو ٠.٩٧٥ واعلى سعر للتداول هو ٤.٥٠٤ . وبهذا نلاحظ تذبذب الاسعار واضحاً من الفرق بين اقل قيمة واعلى قيمه لأسعار الاسهم ومدى ابتعادها عن وسطها الحسابي.

ثانيا تم افتراض عملية بلاك – شولز بوجود معلمة التخلف الزمني في حد التقلبات لأسعار الصرف (diffusion) الموضحة بالمعالة اعلاه التي تصف تأثير التخلف الزمني بحد التقلبات. الشكل ٣-١٠ يوضح مسار الحل التقريبي لسعر الصرف (y) الذي تم الحصول عليه من حل نموذج بلاك – شولز وبافتراض ان (T=١ ,٠ =λ, ١.٢٣ = $s_{\cdot}$, σ=٠.٥ , μ=٠.٠٠٣) باستخدام طريقة اويلر العددية.



شكل ٣-١٠: يمثل مسارحل نموج بلاك- شولز المتخلف زمنيا بحد التقلبات

نلاحظ من الشكل اعلاه انه عند الزمن (t=٠) فان مسار الحل يتناقص لكن بالزمن (t=١) يتذبذب المسار، إذ عند القيمة (t=٠) نجد ان قيمة سعر الصرف كانت (y=١.٦)، بينما نلاحظ ان سعر السهم يتذبذب بالمسار بين (t=٠) و (t=١).

الجدول رقم ٣-٦ يمثل خلاصة احصاءات مهمه لأسعار الاسهم لنتائج الحل العددي التقريبي بطريقة اويلر لنموذج بلاك- شولز المتخلفة زمنيا بحد التقلبات.

جدول ٣-٦: خلاصة احصاءات الحل العددي التقريبي

Min.	١st. Qu.	Median	Mean	٣rd. Qu.	Max.
٠.٩٧٤	١.٨٠٩	٢.٣٥٤	٢.٤٣٩	٢.٩٣٠	٤.٥٠٢

يوضح الجدول ٣-٦ ان متوسط سعر الصرف هو ٢.٤٣٩ وانه ٥٠% من قيم سعر الصرف في العملية العشوائية لنموذج بلاك – شولز تقع بين(١.٨٠٩و ٢.٩٣٠). اضافة الى ذلك، ٧٥٪ من سعر الصرف اقل من ٢.٩٣٠، وان ٥٠٪ اكثر من ٢.٣٥٤ . وبهذا يمكن الاستنتاج ان اي سعر للصرف اقل من ١.٨٠٩ يؤشر على حرة التداولات مما يتطلب انتباه المتداولين لاتخاذ القرار المناسب بشأن عملية الشراء او البيع. إذ ان اقل سعر للتداول هو ٠.٩٧٤ واعلى سعر للتداول هو ٤.٥٠٢ . وبهذا نلاحظ تذبذب الاسعار واضحاً من الفرق بين اقل قيمة واعلى قيمه لأسعار الاسهم ومدى ابتعادها عن وسطها الحسابي.

الفصـــل الرابــــــع

الاستنتاجات والتوصيات

٤.١. الاستنتاجات:-

من خلال تطبيق اساليب المحاكاة تم دراسة سلوك نموذج بلاك –شولز الاعتيادي ،نموذج بلاك شولز بوجود معلمة التخلف الزمني بحد معدل النمو (*drift*) ،ونموذج بلاك شولز لوجود معلمة التخلف الزمني في حد التقلبات (*diffusion*) ومن خلال نتائج المحاكاة ثم يرسم مسارات *pathways* لحلول النماذج اعلاه اضافة الى تقدير لعرض الاحصاءات المهمة المتعلقة للتعامل مع السيناريوهات المختلفة لمعلمة التخلف الزمني . اضافة الى ذلك تم تطبيق النماذج اعلاه على بيانات حقيقية تمثل اسعار الصرف الدولار في اسواق العراق الموازي إذ أبدت النماذج اعلاه مرونة في تمثيل سلوك اسعار الصرف واعطت نتائج واقعية تعكس مدى ملاءمتها للبيانات المدروسة.

٤.٢. التوصيات:-

نوصي بما يأتي:

١- تطوير نماذج بلاك –شولز من خلال الاعتماد على نظرية بيز في تقدير معالم هذا النموذج.
٢- دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع وجود قفزات (*jump*)
٣- دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً من خلال عمليات ليفي الجزئية (*Fractional lévy process*).
٤- اضافة الى دراسة سلوك نماذج بلاك شولز بوجود معلمة تخلف زمنية عشوائية (*random delay*).
٥- دراسة علاقة المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً مع *Hurst-index* .
٦- اعتماد اسلوب المعادلات التفاضلية العشوائية المتخلفة زمنياً لدراسة حركة اسعار الاسهم في سوق العراق للاوراق المالية.

المصـــــــــــــــادر

المصـــــــــادر

١-Abou-El-Ela, A. M. A., A. I. Sadek, A. M. Mahmoud, and R. O. A. Taie .On the Stochastic Stability and Boundedness of Solutions for Stochastic Delay Differential Equation of the Second Order. Hindawi Publishing Corporation Chinese Journal of Mathematics ,Volume ٢٠١٥, Article ID ٣٥٨٩٣٦, ٨ pages.

٢-Akhtari, Bahar, ″ Numerical solution of stochastic state-dependent delay differential equations: convergence and stability″.,Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran,٢٠١٩.

٣-ALADAĞLI, E-EZGI, ″Stochastic Delay Differential Equations″. A Thesis submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University., ٢٠١٧.

٤-Al-Bayaty, N. A., "Stochastic Nonlinear Control Stabilizability Based on Inverse Optimality", M.Sc. Thesis, Department of Mathematics, College of Science, Al-Nahrain University, Baghdad, Iraq, ٢٠٠٨.

٥-Arriojas, M.,Y.Hu,S-E. Mohammed ,and G.Pap, A delayed Black and Scholes formula, Stochastic Analysis and Applications ,٢٥(٢),pp.٤٧١-٤٩٢,٢٠٠٧.

٦-Beretta, E., V. Kolmanovskii, and L. Shaikhet, Stability of epidemic model with time delays influenced by stochastic perturbations, Mathematics and Computers in Simulation, ٤٥(٣), pp. ٢٦٩–٢٧٧, ١٩٩٨.

٧-Black, Fischer and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy, pages ٦٣٧–٦٥٤, ١٩٧٣a.

٨-Black,Fischer and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy, pages ٦٣٧–٦٥٤, ١٩٧٣b.

٩-Bocharov, G. A. and F. A. Rihan, Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, ١٢٥(١), pp. ١٨٣–١٩٩, ٢٠٠٠.

١٠-Buckwar, Evelyn, ″Introduction to the numerical analysis of stochasthic delay differential equations″. Department of Mathematics, the Victoria University of Manchester,٢٠٠٠

١١-Buldú, J. M., J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, M. Torrent, and J. Sancho, Effect of external noise correlation in optical coherence resonance, Physical Review E, ٦٤(٥), p. ٠٥١١٠٩, ٢٠٠١.

١٢-Chang, M.H. and R. K. Youree, The European option with hereditary price structures: basic theory, Applied Mathematics and Computation, ١٠٢(٢), pp. ٢٧٩–٢٩٦, ١٩٩٩.

١٣-Cordoni, Francesco, Luca Di Persio.,Immacolata Oliva.,″Stochastic delay differential eqations with jumps and applications in mathematical finance″.٢٠١٤.

١٤-Dehghan, Mehdi and Somayeh Pourghanbar.Solution of the Black-Scholes Equation for Pricing of Barrier Option. AMS Subject Classifications: ٦٥M٩٩. Z. Naturforsch. ٦٦a, ٢٨٩ – ٢٩٦ (٢٠١١).

١٥-Di Paola, M. and A. Pirrotta, Time delay induced effects on control of linear systems under random excitation, Probabilistic Engineering Mechanics, ١٦(١), pp. ٤٣–٥١, ٢٠٠١.

١٦-El-Borai, Mahmoud M., Khairia El-Said El-Nadi, Hoda A. Fouad .On some fractional stochastic delay differential equations. Computers and Mathematics with Applications ٥٩ (٢٠١٠) ١١٦٥-١١٧٠.

١٧-Eurich, C.W. and J. G. Milton, Noise-induced transitions in human postural sway, Physical Review E, ٥٤(٦), p. ٦٦٨١, ١٩٩٦.

١٨-Evans L. C., "An Introduction to Stochastic Differential Equations", Version ١٢, Lecture Notes, Short Course at SIAM Meeting, July, ٢٠٠٦.

١٩-Ferrante, Marco, Carles Rovira.,″Stochastic dely differential equations driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > \frac{١}{٢}$″,Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata,Universita degli Studi Padova,via Belzoni ٧,I-٣٥١٣١ Padova ,Italy,Facultat de Matematiques ,Universitat de Barcelona ,Gran Via ٥٨٥,٠٨٠٠٧ Barcelona ,Spain.,٢٠٠٦.

٢٠-Fridman A., "Stochastic Differential Equations and Applications", Vol.١, Academic Press, Inc., ١٩٧٥.

٢١-Gomez, Marcella M., Mehdi Sadeghpour, Matthew R. Bennett, Gábor Orosz, and Richard M. Murray. Stability of Systems with Stochastic Delays and Applications to Genetic Regulatory Networks. SIAM J Appl Dyn Syst. ٢٠١٦ ; ١٥(٤): ١٨٤٤–١٨٧٣. doi:١٠.١١٣٧/١٥M١٠٣١٩٦٥.

٢٢-Grigoriu, M., Control of time delay linear systems with Gaussian white noise, Probabilistic Engineering Mechanics, ١٢(٢), pp. ٨٩–٩٦, ١٩٩٧.

٢٣-Han S., "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations", M.Sc. Thesis, University of Edinburgh and Heriot-Watt, ٢٠٠٥.

٢٤-Hobson, D. G. and L. Rogers, Complete models with stochastic volatility, Mathematical Finance, ٨(١), pp. ٢٧–٤٨, ١٩٩٨.

٢٥-Ivanov, A.F.,Y.I.Kazmerchuk and A.V.Swishchuk.,″Stochastic Stability and Application of Stochastic Delay Differential Equation″.

٢٦-Jassim, Hussna .A.,″ Solution of Stochastic Linear OrdinaryDelay Differential Equations″., the College of Science of Al-Nahrain University, the Degree of Master of Science in Mathematics,٢٠٠٩.

٢٧-Krishnan, Venkatarama. *Nonlinear filtering and smoothing: An introduction to martingales, stochastic integrals and estimation*. Courier Corporation, ٢٠١٣.

٢٨-Kazmerchuk, Yuriy, Anatoli Swishchuk and Jinhong WU.,″A Continuous –Time Garch Model For Stochastic Volatility With Delay″. Canadian applied Mathematics Quarterly,٢٠٠٥.

٢٩-Keenan, Rebecca, Rachel Lane, Josh Matti, Hui Gong. Estimating the Volatility in the Black-Scholes Formula.

٣٠-Khan, Sami Ullah and Ishtiaq Ali. Application of Legendre spectral-collocation method to delay differential and stochastic delay differential equation. AIP advances ٨, ٠٣٥٣٠١ (٢٠١٨).

٣١-Klebaner F. C., "Introduction to Stochastic Calculus with Application", Imperial College Press, ٢٠٠٥.

٣٢-Longtin, A., J. G. Milton, J. E. Bos, and M. C. Mackey, Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset, Physical Review A, ٤١(١٢), p. ٦٩٩٢,١٩٩٠.

٣٣-Mao, Xuerong,Matina Johon Rassias.,″Khasminskii –Type Theorems for Stochastic Differential Delay Equtions″.,Department of Statistics and Modelling Science, Universtiy of Strathclyde ,Glasgow,U.K.,٢٠٠٦.

٣٤-Masoller, C., Numerical investigation of noise-induced resonance in a semiconductor laser with optical feedback, Physica D: Nonlinear Phenomena, ١٦٨, pp. ١٧١–١٧٦, ٢٠٠٢.

٣٥-Mohammed , S.E.A.,″Stochastic Functional Differential Equations, Pitman(Advanced Publishing Program), Boston,MA,١٩٨٤.

٣٦-Mohammed, Salah-Eldin A.. ,″Stochastic Differential Systems with Memory″. ,Southern Illinois University Carbondale.,١٩٩٨.

٣٧-Peixin Wang. Application of Stochastic Differential Equations to Option Pricing. Master of Arts, Graduate Faculty of the University of Kansas. ٢٠١٦.

٣٨-Peterka, R. J., Postural control model interpretation of stabilogram diffusion analysis, Biological cybernetics, ٨٢(٤), pp. ٣٣٥–٣٤٣, ٢٠٠٠.

٣٩-Plation, U.Kuchler,E.,″Time Delay and Noise Explaining Cyclical Fluctuation in Price of Commodities.,″ ٢٠٠٧.

٤٠-Rosli, Norhayati, Arifah Bahar, Yeak Su Hoe, and Haliza Abdul Rahman .Stochastic Taylor Methods for Stochastic Delay Differential Equations. MATEMATIKA, ٢٠١٣, Volume ٢٩, Number ١c, ٢٤١-٢٥١.

٤١-Ruo, Chen,.The Black-Scholes Option Pricing Model. November ٢٠, ٢٠٢٠. http://cklixx.peoplewm.edu.

٤٢-Sawangtong, Panumart, Kamonchat Trachoo, Wannika Sawangtong and Benchawan Wiwattanapataphee. The Analytical Solution for the Black-Scholes Equation with Two Assets in the Liouville-Caputo Fractional Derivative Sense. Mathematics ٢٠١٨, ٦, ١٢٩.

٤٣-Scheutzow, Michel., ″Stochastic Delay Equations.″,٢٠١٨. http://page.math.tu-berlin.de.

٤٤-Shinde, A.S. and K.C. Takale. Study of Black-Scholes model and its applications. Procedia Engineering ٣٨ (٢٠١٢) ٢٧٠ – ٢٧٩. Published by Elsevier Ltd.

٤٥-Shen, Yang, Qingxin Meng, Peng Shi, Maximum principle for mean-field jump–diffusion stochastic delay differential equations and its application to finance. Automatica. June ٢٠١٤. ٥٠(٦):١٥٦٥–١٥٧٩.

٤٦-Shevchenko, Georgiy. Mixed stochastic delay differential equations. ٢٠١٠. Mathematics Subject Classification. ٦٠H١٠, ٣٤K٥٠, ٦٠G٢٢.

٤٧-Stoica, George, ″A Stochastic Delay Financial Model″., the A Merican Mathematicals Society,٢٠٠٤.

٤٨-Tapaswi, P. and A. Mukhopadhyay, Effects of environmental fluctuation on plankton allelopathy, Journal of Mathematical biology, ٣٩(١), pp. ٣٩–٥٨, ١٩٩٩.

٤٩-Turner, Evan. The Black-Scholes model and extensions. ٢٠١٠. www.math.unchicago.edu

٥٠-Zhang, Xiaozhi, Zhangsheng Zhu, and Chenggui Yuan. Asymptotic stability of the time-changed stochastic delay differential equations with Markovian switching. Open Mathematics ٢٠٢١; ١٩: ٦١٤–٦٢٨.

٥١-Zong , Xiaofeng , Fuke Wu, chengming Huang ., ″Theta Schemes for SDDE with non –globally Lipschitz Continuous coefficients″. a Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing,٢٠١٤.

٥٢-ϕksendal B., "Stochastic Differential Equations; An Introduction with Applications", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, ٢٠٠٣. Lamberton, D. and B. Lapeyre, Introduction to stochastic calculus applied to finance, CRC press, ٢٠٠٧**.**

Abstract……………………………………………………………….

This thesis deals with time-lag stochastic differential equations was developed by adding a term to the model to represent the past cases, and thus this model becomes more flexible in application. A simulation study to study the behavior of the model according to repetitive scenarios through the use of normal Black-Scholes models, Black-Scholes models in the presence of time lag in drift, and Black-Scholes models in the presence of lag in the drift limit, depending on Euler's numerical method. In addition, a statistical analysis of Black-Scholes models was conducted, according to the scenarios used in the simulation study, based on realistic data, the triangle of dollar exchange rates in the parallel Iraq. By drawing pathways for exchange rates, in addition to some important statistics related to the exchange rate. Dragon that the models used has given possible solutions and that the data was applicable through these different models.

Republic of Iraq

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of AI-Qadisiyah

College of administration and Economics
Department of Statistic
Graduate studies

STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AN APPLICATION

A thesis submitted to the Council of College of Administration Economics University of Al-Qadisiyah in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Statistics

by
Shatha Awwad Al Fatlawy

Supervisor
Assist.Prof. Muhannad F. Al-Saadony

٢٠٢٢ A.D. **١٤٤٣ A.H.**