



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية الادارة و الاقتصاد
قسم الاحصاء

تقدير دالة المعولية لتوزيع Lindley ذو المعلمتين للمرضى المصابين بفايروس COVID-19

رسالة مقدمة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة القادسية

وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الاحصاء

قَدَمَتَهَا

زهراء خالد جعفر العذاري

بإشراف

أ. د. محمد حبيب الشاروط



وَإِذَا سَأَلَكَ عِبَادِي عَنِّي فَإِنِّي قَرِيبٌ أُجِيبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ إِذَا دَعَانِ

فَلْيَسْتَجِيبُوا لِي وَلْيُؤْمِنُوا بِي لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُونَ ۝

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة - الآية (186)

الإهداء ...

إلى... أنا

أهدي ثمرة جهدي الى تعبتي وسهري وذاتي ...

فأنا ممنونة لقوتي لنفستي ولظروفي التي أسعفتني أو قد تكون مرادت قوتي ..

لنفسني تنفائي فالله يسمع صوتك ..

• نزهراء

شكر وإمتنان ...

لكل شكر قصيدة ولكل قام مقام ولكل نجاح شكر وتقدير فجزيل الشكر اهديه الى الخالق الذي أفاض علي من نعمة وجميل عطاءه أحمده واثنى عليه لجلال وجهه وعظيم سلطانه ،

اما بعد ..

فأعترافاً بالجميل كان الزاماً علي ان اتقدم بجزيل الشكر وعظيم الامتنان الى أستاذي الدكتور المشرف (أ.د.محمد حبيب الشاروط) أذني أشرف على هذه الرسالة حتى خرجت بثوبها الحالي وعلى ما قدمه لي من دعم و حسن رعاية وخالص توجيه

كما أوجه شكري الى الأساتذة رئيس واعضاء لجنة المناقشة لموافقهم على مناقشة الرسالة فلهم كل الثناء على ذلك

وأقدم بالشكر والامتنان الى دكتور الفاضل (أ.د أحمد نعيم) الذي طالما أمدني بالدعم العلمي والمعنوي وامتناني إلى أساتذة قسم الاحصاء

وأشكر الأستاذ الفاضل (بشار خالد) لما قدمه لي من مساعده لغرض اكمال متطلبات الرسالة ،

وحبي وخالص تقديري الى من البسني ثوب العلم ببركة أنفاسه أبي وأغننتني بتراتيل دعائها امي شكرا الى الاخاء والحب (اخوتي واخواتي) إلى سكن الحياة وعوني (زوجي وبناتي)

و أود أن أقدم شكري واحترامي إلى جميع زملائي في العمل وفي مرحلة الماجستير

حبي وامتناني الى صديقاتي رفيقات دربي وأخيرا شكرا لكل من ساندني بدعاء وسؤال ، وأسأل المولى أن يوفق الجميع ..

هلا نزهراء

تمثلت هذه الدراسة في معرفة وتقدير أزمنة البقاء للمرضى المصابين بفيروس كوفيد-19 باستخدام بعض التوزيعات الاحتمالية المهمة ،

لدراسة مشكلة تفشي وباء كورونا تهدف هذه الرسالة الى تقدير دالة البقاء لواحدٍ من التوزيعات المهمة في نمذجة أزمنة البقاء وهو توزيع ليندلي ذو المعلمتين (TPLD Two Parameters) (Lindely Distribution) باستخدام صيغتين معروفتين لهذا التوزيع وصيغة أخرى مقترحة من قبل الباحث يرمز لها (NTPLD) ومقارنتها مع دالة البقاء لتوزيعات أخرى مثل توزيع ليندلي بمعلمة واحدة وتوزيع ويبيل وتوزيع فريجت باستخدام خمس من طرائق التقدير هي طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة المقدرات التجزئية وطريقة العزوم في حالة التحيز باستخدام المحاكاة بطريقة المونت-كارلو والمقارنة بين طرائق التقدير المذكورة لاختيار الأفضل باستخدام متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) والمفاضلة بين التوزيعات باستخدام المعايير $(-2LnL)$ ومعيار اكاكي للمعلومة (AIC) ومعيار اكاكي المصحح (AICC) ومعيار حنان-كوين (HQIC) وقد أظهرت نتائج المقارنة تفوق النموذج المقترح الجديد (NTPLD) على باقي النماذج المستعملة يليه الانموذج ويبيل (WD) وظهرت نتائج تجارب المحاكاة أن طريقة الامكان الأعظم قد حققت افضلية لنموذج المقترح الجديد (NTPLD) بحجوم العينات الكبيرة (100, 150) ، وتفوق طريقة (bml) لنموذج (TPLD2) عند احجام العينات المتوسطة والصغيرة (10,25,50). وكذلك سجلت طريقة (per) حققت افضلية لها عند الانموذج (FD) عند حجوم العينات المتوسطة (75,50,25) . وتفوق طريقة العزوم لنموذج (WD) عند حجوم العينات (10, 25, 50) وفي المرحلة الأخيرة من تجارب المحاكاة تمت المقارنة بين طريقة الامكان الاعظم مع طريقة بيز القياسية للتعرف على الطريقة الافضل في تقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع ليندلي المقترح (NTPLD) وقد أظهرت نتائج تجارب المحاكاة تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز القياسية في تقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع (NTPLD) بنسبة افضلية بلغت (80%) عند جميع حجوم العينات عدا حجم العينه (25) تفوقت بها طريقة بيز القياسية، اما في الجانب العملي فقد تم اجراء تطبيق عملي علي بيانات واقعية تمثل اوقات بقاء المرضى المصابين

بفايروس **COVID-19** في المستشفى لحين الوفاة في مدينة الديوانية والذي تبين منه بان القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة الامكان الاعظم اقرب من القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة بيز عند البيانات الحقيقية وأظهرت نتائج تقدير دالة البقاء بأن كلما قلت مدة بقاء المريض في المستشفى ، زاد من احتمال بقائه على قيد الحياة والعكس صحيح .

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
i	الآية
ii	الاهداء
iii	شكر وتقدير
-ivvi	المستخلص
vi	قائمة المحتويات
ix	فهرست الجداول
xi	فهرست الاشكال
xvi	جدول الرموز و الاختصارات
2-11	الفصل الأول : منهجية الرسالة
2-4	1-1 المقدمة
4	2-1 مشكلة الرسالة
4	3-1 هدف الرسالة
5-11	4-1 الاستعراض المرجعي
12-63	الفصل الثاني: الجاني النظري
13	1-2 تمهيد
13	2-2 دالة الكثافة الاحتمالية للفشل
14	3-2 دالة الكثافة التجميعية للفشل
14-15	4-2 دالة المعولية (البقاء)
15-16	5-2 دالة المخاطرة
16-45	6-2 التوزيعات الاحصائية (Statistical Distributions)
16-17	1-6-2 توزيع ليندلي بمعلمه واحده (Lindley distribution) (LD)
17-31	2-6-2 توزيع ليندلي بمعلمتين (Two Parameters Lindley Distribution)
20-21	1-2-6-2 دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع ليندلي بالمعلمتين
21-22	2-2-6-2 دالة البقاء للتوزيع ليندلي بالمعلمتين
22-23	3-2-6-2 دالة المخاطرة للتوزيع ليندلي بالمعلمتين
23-24	4-2-6-2 العزم ذو الدرجة r حول نقطة الأصل
25	5-2-6-2 الوسيط لتوزيع ليندلي بمعلمتين (The Median of TPLD)
25-26	6-2-6-2 المنوال لتوزيع ليندلي بالمعلمتين (The Mode of TPLD)

26-27	7-2-6-2 توزيع الاحصاءات المرتبة لتوزيع ليندلي بمعلمتين
27-28	8-2-6-2 الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ليندلي بمعلمتين The Moment Generating Function of TPLD
28-29	9-2-6-2 خاصية فقدان الذاكرة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين
29	10-2-6-2 خاصية اعادة الذات (Self-reproducing)
29-43	3-6-2 صيغه مقترحه جديدة لتوزيع ليندلي بمعلمتين (NTPLD)
31-32	1-3-6-2 دالة التوزيع التراكمي لتوزيع (NTPLD)
33	2-3-6-2 دالة البقاء لتوزيع (NTPLD)
33-34	3-3-6-2 دالة المخاطرة لتوزيع (NTPLD)
34-35	4-3-6-2 متوسط وقت الفشل (MTTF) لتوزيع (NTPLD)
35	5-3-6-2 العزم اللامركزي الراني حول نقطة الأصل لتوزيع (NTPLD)
35-36	6-3-6-2 العزم المركزي حول المتوسط لتوزيع (NTPLD)
37	7-3-6-2 معامل الاختلاف لتوزيع (NTPLD) Coefficient of variation (C.V)
38	8-3-6-2 معامل الالتواء (NTPLD) Coefficient of Skewens (C.S)
39	9-3-6-2 معامل التفلطح (NTPLD) Coefficient of Kurtosis (C.K)
40	10-3-6-2 الوسيط لتوزيع (NTPLD)
40	11-3-6-2 المنوال لتوزيع (NTPLD)
41	12-3-6-2 الدالة المولدة للعزوم (NTPLD)
42	13-3-6-2 الاحصاء المرتب لتوزيع ليندلي بالمعلمتين المقترح
43	14-3-6-2 خاصية فقدان الذاكرة
43	15-3-6-2 خاصية إعادة الذات
44	7-2 توزيع Weibull
45	8-2 توزيع Frechet
46-57	9-2 طرائق التقدير
46-47	1-9-2 طريقة الامكان الأعظم Maximum Likelihood Method
48	2-9-2 طريقة العزوم (Moments Method)
49-50	3-9-2 طريقة المقدرات التجزئية (Percentiles estimators)
50-54	4-9-2 طريقة العزوم في حالة التحيز (Length- biased Moments Method)

54-57	5-9-2 طريقة بيز القياسية (Standard Bayesian method)
57-58	13-2 معايير المقارنة (Comparison Criteria)
57	1-13-2 معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملية Integrated Mean (square) Error
58	2-13-2 اختبار $-2\text{Ln}L(\hat{\theta} \setminus t)$
58	3-13-2 اختبار اكيكي Akaike's Test (AIC)
58-59	4-13-2 اختبار اكيكي المتسق (CAIC)
59	5-13-2 اختبار بيز اكيكي Bayes Akaike's Test
59	6-13-2 اختبار Hannan-Quinn information Criterion
60-138	الفصل الثالث: الجانب التجريبي
61	1-3 تمهيد
61	2-3 مفهوم المحاكاة
61-66	3-3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة
66-119	4-3 مناقشة نتائج تجارب المحاكاة
120-121	5-3 تقدير دالة البقاء لتوزيع لندي الجديد المقترح (NTPLD) بتقدير بيز
122-138	6-3 مناقشة نتائج المحاكاة بتقدير بيز لتوزيع (NTPLD)
138	7-3 المقارنة بين تقدير بيز وطريقة الامكان الأعظم
139-148	الفصل الرابع: الجانب التطبيقي
140	1-4 تمهيد
140-141	2-4 نبذة عن مرض COVID-19
142	3-4 البيانات الحقيقية
143	4-4 اختبار ملائمة البيانات
143-144	5-4 المفاضلة بين توزيع ليدنلي ذي المعلمتين الجديد NTPLD وتوزيعات
144-148	6-4 تحليل البيانات الحقيقية: (Real data analysis)
149-151	الفصل الخامس: الاستنتاجات والتوصيات
150-151	1.5 الاستنتاجات Conclusions
151	2.5 التوصيات Recommendations
152-157	المصادر
158-165	الملاحق
A-B	Abstract

فهرست الجداول

رقم الجدول	عنوان الجدول	الصفحة
1-3	قيم المعلمات الافتراضية	62
2-3	مختصرات طرائق التقدير	67
3-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الاولى	68-71
4-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الثانية	73-77
5-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الثالثة	79-82
6-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الرابعة	84-88
7-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الخامسة	90-93
8-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة السادسة	95-99
9-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة السابعة	101-104
10-3	دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلومات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة للتجربة الثامنة	106-110
11-3	عدد مرات ونسب ونسب الافضلية لكل انموذج حسب معايير الافضلية	111
12-3	يبين عدد مرات ونسب الافضلية لكل طريقة من طرائق تقدير دالة البقاء حسب معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل انموذج	112
13-3	قيم المعلمات الافتراضية	120
14-3	قيم دالة المعولية (البقاء) الحقيقية والمقدره بموجب طريقتي	122-124

	التقدير بيز و mle التجربة الاولى	
126-128	قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle التجربة الثانية	15-3
129-131	قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle التجربة الثالثة	16-3
132-134	قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle التجربة الرابعة	17-3
135-137	قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle التجربة الخامسة	18-3
138	عدد مرات الافضلية ونسب الافضلية لكل لكل من طريقة بيز وطريقة الامكان الاعظم في جميع تجارب المحاكاة	19-3
142	أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب مرض كورونا بالأيام للمرضى الراقدين بمستشفى الديوانية التعليمي	1-4
143	نتائج اختبار ملائمة البيانات	2-4
144	نتائج اختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية	3-4
145-147	قيم دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي الامكان الأعظم و بيز	4-4

فهرست الاشكال

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
20	سلوك منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (TPLD2)	1-2
21	سلوك منحى دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (TPLD2)	2-2
22	سلوك منحى دالة المعولية لتوزيع (TPLD2)	3-2
23	سلوك منحى دالة المخاطرة لتوزيع (TPLD2)	4-2
33	سلوك منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NTPLD)	5-2
34	سلوك منحى دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (NTPLD)	6-2
35	سلوك منحى دالة المعولية (البقاء) لتوزيع (NTPLD)	7-2
35	يبين سلوك منحى دالة المخاطرة للتوزيع المقترح (NTPLD)	8-2
40	سلوك منحى يبين سلوك معامل الاختلاف لتوزيع (NTPLD)	9-2
41	منحى يبين سلوك معامل الالتواء لتوزيع (NTPLD)	10-2
42	منحى يبين سلوك معامل التفرطح لتوزيع (NTPLD)	11-2
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=10$	1-3
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=25$	2-3
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=50$	3-3
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=75$	4-3
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=100$	5-3
114	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعمله واحدة عند حجم عينة $n=150$	6-3
115	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=10$	7-3
115	منحى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير	8-3

	للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=25$	
115	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=50$	9-3
115	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=75$	10-3
115	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=100$	11-3
115	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=150$	12-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=10$	13-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=25$	14-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=50$	15-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=75$	16-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=100$	17-3
116	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=150$	18-3
117	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=10$	19-3
117	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=25$	20-3
117	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=50$	21-3

117	منحنى دالة البقاء المعولية المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=75$	22-3
117	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=100$	23-3
117	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=150$	24-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=10$	25-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=25$	26-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=50$	27-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=75$	28-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=100$	29-3
118	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج ويبيل عند حجم عينة $n=150$	30-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=10$	31-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=25$	32-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=50$	33-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=75$	34-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=100$	35-3
119	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للأنموذج فريجت عند حجم عينة $n=100$	36-3
125	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للأنموذج NTPLD عند حجم عينة $n=10$	37-3
125	منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للأنموذج	38-3

	NTPLD عند حجم عينة n=25	
125	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=50	39-3
125	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=75	40-3
125	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=100	41-3
125	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=150	42-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=10 التجربة الثانيه	43-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=25 التجربة الثانيه	44-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=50 التجربة الثانيه	45-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=75 التجربة الثانيه	46-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=100 التجربة الثانيه	47-3
128	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=150 التجربة الثانيه	48-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=10 التجربة الثالثه	49-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=25 التجربة الثالثه	50-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n= 50 التجربة الثالثه	51-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n= 75 التجربة الثالثه	52-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n= 100 التجربة الثالثه	53-3
131	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n= 150 التجربة الثالثه	54-3
134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n= 10 التجربة الرابعه	55-3

134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=25$ التجربة الرابعه	56-3
134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n= 50$ التجربة الرابعه	57-3
134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n= 75$ التجربة الرابعه	58-3
134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n= 100$ التجربة الرابعه	59-3
134	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n= 150$ التجربة الرابعه	60-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=10$ التجربة الخامسه	61-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=25$ التجربة الخامسه	62-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=50$ التجربة الخامسه	63-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=75$ التجربة الخامسه	64-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=100$ التجربة الخامسه	65-3
137	منحنى دالة البقاء المقدره بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=150$ التجربة الخامسه	66-3
147	منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدره بموجب طريقتي الامكان الأعظم وبيز	1-4

الاختصارات

الرمز	المعنى
a	معلمة الشكل (shape parameter)
b	معلمة القياس (scale parameter)
t	الزمن لحين الفشل
T	متغير عشوائي يمثل وقت حدوث الفشل
f(t)	دالة الكثافة الاحتمالية
F(t)	دالة الكثافة التجميعية
R(t)	دالة المعولية
h(t)	دالة المخاطرة
Mle	طريقة الإمكان الاعظم
Mom	طريقة العزوم
Per	طريقة المقدرات التجزئية
Pml	طريقة العزوم في حالة التحيز
LD	انموذج ليندلي بمعلمة واحدة
TPLD1	انموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الاول
TPLD2	انموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني
NTPLD	انموذج ليندلي بمعلمتين المقترح
WD	انموذج ويبيل
FD	انموذج فريجت
\hat{R}_{Real}	المعولية الحقيقية
\hat{R}_{Mle}	المعولية (دالة البقاء) المقدره بطريقة الأمكان
\hat{R}_{Mom}	المعولية (دالة البقاء) المقدره بطريقة العزوم
\hat{R}_{Per}	المعولية (دالة البقاء) المقدره بطريقة المقدرات التجزئية
\hat{R}_{bml}	المعولية (دالة البقاء) المقدره بطريقة العزوم في حالة التحيز

1

الفصل الاول

منهجية الرسالة

1-1 المقدمة: (Introduction)

يسلط علم الاحصاء الضوء على دراسة الظواهر الحيوية ذات السلوك العشوائي والتي لها تأثير مهم في حياة الكائن والمجتمع ، وتعد دراسة تلك الظواهر ومعرفة التوزيعات الاحتمالية (**Probability Distributions**) التي تتبعها من الأمور المهمة لمعرفة وتشخيص سلوكها العشوائي، ان دراسة الظواهر تكون مرتبطة بدراسة التوزيعات الاحتمالية وما تؤول اليه من نتائج احتمالية. ففي نظرية أزمنة البقاء ، يتم دراسة عمر نظام أو مكون أو فرد والذي يمكن أن يكون جهازاً كهربائياً أو إلكترونياً أو ميكانيكياً أو كيميائياً أو كائناً حياً، فهناك العديد من الأنظمة الطبيعية مثل البشر والنباتات والحيوانات وما إلى ذلك والتي يتم تضمينها في تحليل أزمنة البقاء. لذلك يعد تحليل ونمذجة بيانات أزمنة البقاء من الامور المهمة للغاية في العلوم التطبيقية مثل الهندسة والصحة والعلوم والدراسات الطبية الحيوية والديموغرافيا ودراسة المعولية (الموثوقية). توجد العديد من توزيعات أزمنة البقاء في الأدبيات الإحصائية مثل التوزيعات الأسية وتوزيع ويبل وكاما والتوزيعات اللوغاريتمية الطبيعية وغيرها من التوزيعات التي استعملت لنمذجة أزمنة البقاء لكن لكل من هذه التوزيعات مزايا وعيوباً اعتماداً على عدد المعلمات المتضمنة فيها، أو على شكل التوزيع ، أو دالة المخاطرة أو دالة المعولية (البقاء).

إن الاهتمام المتزايد للبحوث والدراسات الحديثة بموضوع المعولية جاء نتيجة للدور الذي يضطلع به هذا العلم في التعامل مع الأعمار سواء للمعدات أو للكائنات الحية فالمعولية ونظرية البقاء تتشابهان في إيجاد طول العمر أو مدة الحياة سواء أكان لماكنة أو لنظام أو لكائن حي، أي أن لهما خاصية واحدة وهي قياس طول مدة الحياة، فالتشابه الموجود بينهما هو أن في نظرية البقاء تعالج مشكلة المقارنة بين أوقات بقاء المرضى الراقدين أثناء العلاج الذي يُعدُّ متغيراً عشوائياً أو المقارنة بين فترات بقاء الحيوانات التجريبية عند إعطائها معالجات مختلفة، أما نظرية المعولية فإن المشكلة المشابهة لمشكلة نظرية البقاء تظهر عندما يكون من الضروري المقارنة بين توزيع الحياة قبل وبعد إصلاح أو تغيير المعدات والمكائن ومعرفة أوقات العطل لهذه المعدات والمكائن وكذلك معرفة عُمر الوحدات التي لم تعطل إذ يلاحظ أن وقت العطل ومدة البقاء هما أيضاً متغيران عشوائيان، أما الاختلافات التي تحكمها فتكمن في أمثالية نظام المعولية في الأنظمة

المتعددة الأجزاء لأن مثل هذه الامثلية تتمثل في عدد ومواقع أجزاء هذا النظام وسهولة إيجاد البديل لهذه الأجزاء والمعالجة السريعة لها مما يجعل هذا النظام أمثل، أما في نظرية البقاء فلا توجد مثل هذه الامثلية لأن النظام هنا عبارة عن كائن حي تكمن فيه الصعوبة والندرة في ترتيب أجزائه لإيصاله إلى حالة الأمثلية.

ان دراسة دوال تحليل البقاء على قيد الحياة (**Survival functions**) اخذت حيزاً كبيراً لدى الباحثين لما تشكله من أهمية كبيرة في دراسة معدل احتمال بقاء الكائنات الحية على قيد الحياة، بعد مدة محددة من الزمن.

من هنا ظهرت الحاجة إلى اعتماد دالة البقاء في دراسة وتحليل الظواهر وفقاً لطبيعة البيانات الإحصائية وبالتالي القيام بعملية التقدير اعتماداً على الطرائق الإحصائية. لذا جاءت هذه الرسالة لدراسة دالة البقاء لواحداً من التوزيعات المهمة في نمذجة أزمنة البقاء وهو توزيع ليندلي بمعلمتين (**Two Parameters Lindely Distribution**) وذلك بالإخذ بنظر الاعتبار شكلين من هذا التوزيع يعتمدان على اختلاف شكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع واستخراج دالة البقاء للتوزيع ومقارنتها بتوزيعات أخرى هي توزيع ليندلي بمعلمة واحدة وتوزيع ويبيل وتوزيع فريجت فضلاً عن اقتراح صيغه لتوزيع لندي بمعلمتين من خلال افتراض معكوس المعلمات المستخدمة للتوزيع واشتقاق دالة التوزيع الاحتمالية **F(t)** ودالة معدل الخطورة **h(t)** ودالة البقاء **R(t)** باستعمال خمس من الطرائق في التقدير هي طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة المقدرات التجزئية وطريقة العزوم في حالة التحيز وطريقة بيز باستخدام تجارب المحاكاة مونت-كارلو والمقارنة باستعمال المعايير متوسط مربعات الخطأ التكاملية (**IMSE**) و (**-2LnL**) ومعيار (**HQIC**) ومعيار اكاكي للمعلومة (**AIC**) للتوصل الى افضل تقدير لدالة البقاء من بين التوزيعات المستعملة، وكذلك اجراء تطبيق عملي علي بيانات واقعية تمثل اوقات بقاء المرضى المصابين بفايروس **COVID-19** في مستشفى الديوانية لحين الوفاة.

وقد تضمنت هيكله الرسالة خمسة فصول كالآتي:

الفصل الأول تضمن المقدمة ، هدف الرسالة ، مشكلة الرسالة والاستعراض المرجعي لأهم البحوث وبعض الدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع الرسالة.

الفصل الثاني تضمن الجانب النظري الذي تطرق الى مفهوم دالة المعولية (البقاء) وكذلك عرضاً لأهم التوزيعات الاحتمالية المستعملة وطرائق تقدير دالة المعولية (البقاء).

الفصل الثالث فقد شمل الجانب التجريبي، إذ تضمن تجربة محاكاة باستعمال المحاكاة مونت-كارلو لاجاد تقديرات دالة المعولية (البقاء) .

الفصل الرابع تضمن الجانب التطبيقي، حيث استعملت بيانات واقعية تمثل اوقات بقاء المرضى المصابين بفايروس COVID-19 في المستشفى لحين الوفاة.

الفصل الخامس شمل أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تمخضت عنها الرسالة وتم التوصل اليها في الجانبين التجريبي والتطبيقي. و المصادر و الملاحق

2-1 مشكلة الرسالة: (Problem of the thesis)

تزايد الاهتمام بموضوع المعولية دفع الكثير من الباحثين الى الكشف عن توزيعات إحصائية جديدة لتمثيل أوقات البقاء تنافس في عملها التوزيعات المعروفة إضافة الى تفشي وباء استفحل ليكون جائحة نتج منها حالة من الهلع والخوف على مستوى الكرة الأرضية لأرتباطها بالوفيات المتزايدة وبمدة زمنية قصيرة بعد الإصابة وذلك دفع الكثير من الباحثين الى دراسة سلوك هذا الوباء من خلال دراسة متغيرات هذه الظاهرة ومن أهمها أوقات الرقود في المستشفى وتمثيلها من خلال توزيع مقترح جديد لتوزيع لندلي بمعلمتين ينافس التوزيعات الأخرى وربما اكثر كفاءه منها .

3-1 هدف الرسالة : (Aim of the thesis)

تهدف الرسالة الى تقدير دالة البقاء وفقاً لتوزيع ليندلي بمعلمتين ومقارنتها من خلال اقتراح صيغة جديدة للتوزيع باستخدام دالة التوزيع المختلط بفرض أن هناك خلط لتوزيعين هما (الاسي) و(كاما) حيث أن التوزيعين هما بمعلمة قياس (scale) وليس (rate) ودراسة نظرية المعولية من خلال توظيف التوزيع المقترح ودراسة إداء التوزيع المقترح بعدد من دوال البقاء المرتبطة بتوزيعات المعروفة (لندلي بمعلمه واحده ، وبيل بمعلمتين ، فرجت) والحكم على الأداء من خلال بعض المعايير المعروفة منها (IMSE,- 2LnL,AIC, HQIC,BAIC).

• البرامجيات التي اعتمدت لتحليل البيانات

تم اعتماد البرنامج الاحصائي ماتلاب والروتينات الفرعية المرتبطة به لتحليل بيانات الرسالة عن طريق استعمال الدالة (fsolve) .

4-1 الاستعراض المرجعي: (Literature Review)

قدم الباحث لندي (Lindley, 1958) ، توزيعه الذي سمي بإسمه ودرس خصائصه وعلاقته بتوزيعات أوقات الحياة الأخرى ، ودوره في نمذجة بيانات أوقات الانتظار كبديل للتوزيع الاسي وتوزيع كاما (Lindley, 1985). تلاه بعد ذلك الكثير من الدراسات والبحوث وتطويرات لتوزيع لندي بمعلمة واحدة ندرج بعضاً من تلك الدراسات والبحوث وابتداءً من سنة (2008) ولحد الان وكالاتي:

في عام (2008) قارن ¹⁶ (M. E et al) توزيع ليندي بمعلمة واحدة مع التوزيع الأسي، من خلال دراسة الخصائص الاساسية للتوزيع والتي تضمنت العزوم ، الدالة التجميعية، الدالة المميزة ، دالة معدل الفشل، دالة متوسط وقت البواقي، الانحرافات المتوسطة ، منحني لورنز، الترتيب التصادفي، دالة الانتروبي، التوزيع المقارب للإحصاءات المرتبة المتطرفة . واستعمل طريقة الامكان الاعظم في التقدير عن طريق تجارب محاكاة ، وكذلك استعمال مجموعة بيانات حقيقية تمثل اوقات الانتظار بالدقائق لـ (100) زبون في بنك . وتوصلوا الى ان توزيع ليندي الانموذج الافضل لملاءمة من التوزيع الأسي في تمثيل اوقات الانتظار للعملاء .

في عام (2011) قارن ²¹ (Krishna & Kumar) توزيع ليندي بمعلمة واحدة مع التوزيع الأسي وتوزيع كاما والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي، وتم استعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز في تقدير معلمات التوزيع واستخرجا تقدير دالة المعولية ودالة المخاطرة ومتوسط وقت الفشل وفترة الثقة للمعلمة ، وباستعمال تجارب محاكاة مونت-كارلو وعند احجام عينات (n=40,50,80,100) ، قارنا بين التوزيعات باستعمال المعايير الاحصائية (متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومعيار -2LnL ومعيار AIC ومعيار ومعيار HQIC ومعيار BIC) . وتوصلا بان توزيع ليندي هو الأفضل في

دراسة المعولية من بقية التوزيعات المدروسة، وكذلك تم استعمال بيانات عينة مراقبة من النوع الثاني .

في العام نفسه اقترح ¹⁵ (Ghitany, M. E & et. al) توزيع ليندلي الموسع بمعلمتين ودرسوا الخصائص الرياضية للتوزيع مثل دالة البقاء ودالة المخاطرة وقارنوا التوزيع المقترح مع توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع ويبيل وتوزيع القوة الاسية (power-exponential) ، وتم استعمال طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات التوزيع، وباستعمال تجارب محاكاة مونت-كارلو و عن طريق المعايير الاحصائية (معيار $-LnL$ ، معيار $k-s$ و $p-value$) . وتوصلا إلى أن توزيع ليندلي الموسع أفضل من بقية التوزيعات المدروسة واكثر مرونة من توزيع ليندلي بمعلمتين، وكذلك تم استعمال بيانات حقيقية تمثل خزائر غينيا المصابة بعصيات درنة خبيثة .

في عام (2013) قدم ³⁸ (Shanker, R & Mishra, A) توزيع ليندلي بمعلمتين (TPLD)، والذي يعد توزيع ليندلي بمعلمة واحدة حالة خاصة منه وتم ايجاد خصائص هذا التوزيع مثل العزوم ودالة معدل الفشل و دالة متوسط حياة البواقي . وتم استعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم في تقدير معلمات التوزيع . وقارنا بين توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة باستعمال احصاءة $Chi-square$. وتوصلا إلى أن توزيع ليندلي بمعلمتين افضل من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة . وتم ملاءمة مجموعات مختلفة من بيانات تمثل أوقات الانتظار (بالدقائق) لـ 100 زبون بنك وفترات البقاء على قيد الحياة (بالأيام) لـ (72) خنزير غينيا مصاباً بعصيات درنة خبيثة و بيانات وفيات لأنواع الطيور الشحور ، وأثبتنا ان توزيع ليندلي بمعلمتين اكثر ملاءمة من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة لمجموعات البيانات كافة.

في نفس العام قدم ⁴¹ (Shanker, R et al) توزيع ليندلي بمعلمتين (TPLD)، لنمذجة بيانات زمن البقاء والانتظار وتم ايجاد خصائص هذا

التوزيع مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة و الاحصاءات المرتبة و منحنيات لورنز وبونفيروني (**Lorenze & Bonferroni**) ودالة ريني انتروبي (**Renyi Entropy**) ومعولية الاجهاد-المتانة. وقدروا معلمات الانموذج باستعمال طريقة الامكان الاعظم . وقارنا بين توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة باستعمال احصاءة **Chi-square** . وتوصلا إلى أن توزيع ليندلي بمعلمتين افضل من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة . وتم ملاءمة مجموعات مختلفة من بيانات تمثل أوقات الانتظار (بالدقائق) لـ 100 زبون بنك وفترات البقاء على قيد الحياة (بالأيام) لـ (72) خنزيراً غنياً مصاباً بعصيات درنة خبيثة و بيانات وفيات لأنواع الطيور الشحور ، واثبتا ان توزيع ليندلي بمعلمتين الجديد اكثر ملاءمة من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة لمجموعات البيانات كافة.

في العام نفسه قدم ³⁷ (**Shanker, R & Amanuel, A. G**) توزيعاً شبه ليندلي بمعلمتين (**QLD**) كحالة خاصة من توزيع ليندلي بمعلمتين، وقد وجدوا بان خصائص توزيع شبه ليندلي بمعلمتين (**new two parameters Quasi Lindley distribution**) اكثر مرونة من خصائص توزيع ليندلي والتوزيع الاسي . وتم استعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم في تقدير معلمات توزيع شبه ليندلي . وتوصلا إلى أن توزيع شبه ليندلي اكثر مرونة وفضل من توزيع ليندلي بمعلمتين والتوزيع الاسي .

في عام (2016) ناقش ³⁶ (**Shanker R&Sharma, S**) توزيع ليندلي بمعلمتين (**TPLD**) ، اذ قاموا باستخراج الخصائص الرياضية للتوزيع مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة و الاحصاءات المرتبة و منحنيات لورنز وبونفيروني (**Lorenze & Bonferroni**) ودالة ريني انتروبي (**Renyi Entropy**) ومعولية الاجهاد-المتانة. وقدروا معلمات الانموذج باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وقارنوا توزيع ليندلي بمعلمتين مع التوزيع الاسي وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة عن طريق مجموعات من

بيانات حقيقية عن طريق المعايير - AIC - (سميرنوف كولمكروف) ($-2\ln L$) - $BIC - AICc$. وتوصلوا الى ان توزيع ليندلي بمعلمتين افضل من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة والتوزيع الاسي بمعلمة واحدة في نمذجة اوقات الحياة لمختلف مجالات المعرفة.

في عام (2017) ناقش ⁴⁰ (Shanker R et al) خصائص توزيع ليندلي بمعلمتين (TPLD) مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة و الاحصاءات المرتببة و منحنيات لورنز و ونفيروني (Lorenze & Bonferroni) ودالة رينزي انتروبي (Renyi Entropy) ومعولية الاجهاد-المتانة. وقدروا معلمات الانموذج باستعمال طريقة الامكان الاعظم . وقارنوا توزيع ليندلي بمعلمتين مع توزيعات (ليندلي العمومي - كما - ويبل - التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي - ليندلي بمعلمة واحدة - الاسي بمعلمة واحدة) عن طريق استعمال المعايير ($-2\ln L - AIC$ - سميرنوف كولمكروف) لمجموعتين من البيانات الحقيقية ، وتوصلوا الى ان توزيع ليندلي بمعلمتين يعطي ملاءمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.

في العام 2017 قدم ⁴² (Shanker R et al) توزيع ليندلي ذا ثلاثة معلمات (TPLD) وقدم خصائص التوزيع وباستخدام طريقة الامكان الأعظم وطريقة العزوم تم تقدير معلمات التوزيع الثلاثة ودالة البقاء والمخاطرة وكذلك اقترحوا خوارزمية لتوليد المتغيرات العشوائية لهذا التوزيع واوضحوا ان هذا التوزيع أكثر مرونة من توزيعات اوقات الحياة الأخرى مثل توزيع ويبل والتوزيع الاسي و كما.

في عام (2018) قدرت ⁴ (عبدالله، ثائر نجم) معلمة القياس لتوزيع ليندلي باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز ، وقارنت بين الطريقتين باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) من خلال تجارب محاكاة مونت-كارلو ، وتوصلت الى أفضل طريقة بيز عند احجام العينات

الصغيرة وأفضلية طريقة الإمكان الأعظم عند أحجام العينات المتوسطة والكبيرة. ومن ثم استثمرت المقدر الأفضل في دراسة وتحليل أوقات الانتظار لعملاء مصرف الرشيد/الجامعة المستنصرية. وأوصت الباحثة بتوظيف توزيع ليندلي في تقدير دالة المعولية ودالة البقاء للأنظمة غير المتجانسة.

في العام نفسه قام ⁴⁵(Tomy, L) بأجراء مسح حول توزيع ليندلي وامتداده وفئاته، اذ قام بدراسة توزيع ليندلي بمعلمة واحدة وبمعلمتين و توزيع شبه ليندلي (Quasi-Lindley) وتوزيع ليندلي العمومي (GLD) وتوزيع (Akash) بمعلمة واحد وبمعلمتين وتوزيع ليندلي العمومي الموسع (EGLD) وتوزيع ليندلي للقوة (Power Lindley) وتوزيع ليندلي القوة الموسع (EPLD) وتوزيع ليندلي القوة الاسي وتوزيع ليندلي المبتور وتوزيع معكوس ليندلي وتوزيع ليندلي المتقطع وتوزيع (poisson-Akash) المتقطع وتوزيع ليندلي المحول وتوزيع ليندلي بواسون وتوزيع ليندلي الملتف (Wrapped Lindley) وتوصل الى ان توزيع ليندلي والتوزيعات من فئاته اكثر مرونة في التعامل مع بيانات الفشل ولاسيما في دراسات المعولية .

في العام نفسه قدم ⁴⁶(Udoudo, U& Etuk, E) توزيع شبه ليندلي الجديد الموسع بثلاث معلمات (ENQLD)، وتم استخراج خصائص التوزيع الجديد وتمت مقارنته مع توزيع شبه ليندلي الموسع بمعلمتين وتوزيع شبه ليندلي بمعلمتين عن طريق استعمال المعايير (SSE – –lnL – AIC – BIC) باستعمال طريقة الامكان الاعظم، وتوصلوا الى ان توزيع شبه ليندلي الموسع الجديد بمعلمتين يعطي ملاءمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة .

في عام (2019) اقترح ³⁴(Kumar, C., & Jose, R) صنفاً جديداً من التوزيعات اسماها توزيع ليندلي المزدوج (DLD) بثلاث معلمات (θ, μ, σ) ، اذ قاما باستخراج خصائص التوزيع المهمة وقدر معلمة الموقع للتوزيع الموسع (DLD) باستعمال طريقة الامكان الاعظم (MLE) ، وعن طريق

تجارب محاكاة مونت-كارلو قارنا التوزيع الموسع الجديد مع توزيع لابلاس بمعلمتين (μ, σ) باستعمال معايير المقارنة (كولمكروف سميرنوف -AIC- BIC- AICc) عند احجام عينات (n=100,200,500) ، وتوصلا إلى أن توزيع ليندلي المزدوج الجديد افضل من توزيع لابلاس ولاسيما في حقل الاحصاء الهندسي.

في عام (2020) قام ¹⁸ (*Hafez, E. H et al*). بدراسة محاكاة وتطبيق بيانات حقيقية تمثل بيانات مراقبة من النوع الثاني لتجربة صناعية على المصابيح، اذ تم استعمال اختبار (كولمكروف- سميرنوف) لغرض ملاءمة البيانات وتبين ان لها توزيعاً ليندلياً ، وفي تجارب المحاكاة تم تقدير معالم توزيع ليندلي باستعمال طريقة الامكان الأعظم وطريقة بيز في ظل دالة خسارة متماثلة ، لكل من معالم التوزيع. وتوصلوا بان طريقة بيز في التقدير افضل من طريقة الامكان الاعظم في تقدير معالم توزيع ليندلي بمعلمتين.

في العام نفسه اقترح ³⁹ (*Shanker, R & Rahman, U*) توزيع ليندلي بمعلمتين جديد ، وتم استخراج الاحصاءات الوصفية للتوزيع ، والاحصاءات المرتبة، ومصفوفة معلومات فيشر، وحدود الثقة للتوزيع ، وتم تقدير معالم التوزيع المقترح باستعمال طريقة الامكان الأعظم ، وقارنوا توزيع ليندلي بمعلمتين مع توزيعات (ويبل-توزيع ليندلي بمعلمتين 1-توزيع ليندلي بمعلمتين 2-توزيع شبه ليندلي-توزيع شبه ليندلي الجديد-توزيع ليندلي بمعلمة واحدة-التوزيع الاسي بمعلمة واحدة) عن طريق استعمال المعايير ($AICc - BIC - AIC - -2\ln L$) لمجموعة من البيانات الحقيقية ، وتوصلوا الى ان توزيع ليندلي بمعلمتين الجديد يعطي ملاءمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.

في العام نفسه قدم ¹⁴ (*Ganaie. R. A & et al*) توزيعاً شبه ليندلي الجديد الموزون بثلاث معالم (*WNQLD*)، وتم استخراج خصائص التوزيع الجديد وتمت مقارنته مع توزيع شبه ليندلي بمعلمتين عن طريق استعمال

المعايير ($-2\ln L - AIC - BIC - AICc$) لمجموعتين من البيانات الحقيقية ، وتوصلوا الى ان توزيع شبه ليندلي بمعلمتين الجديد الموزون يعطي ملاءمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.

في عام (2021) قدم ⁷(Algarni, A) امتداداً لتوزيع ليندلي الموسع وهو توزيع ليندلي المعمم (EGLD) باستعمال طريقة مارشال اولكن (Marshal-Olkin method)، وتم استخراج خصائص التوزيع الجديد ودالة المعولية ودالة المخاطرة، وقارن التوزيع الجديد مع توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع ليندلي الموسع باستعمال المعايير ($-\log L$ ، كولمكروف-سميرنوف - p -value ، MSE) وتم التوصل الى ان التوزيع المعمم الجديد (EGLD) يمتلك مرونة اكثر من باقي التوزيعات في دراسة المعولية.

في العام نفسه قدم ¹¹(Ches, C et. al.) توزيع ليندلي بمعلمة واحدة المطور (MLD) والمشتق من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة ، ليوفر مقايضة بسيطة بين التوزيع الاسي وتوزيع ليندلي، وتم استخراج خصائص التوزيع الجديد وتمت مقارنته مع توزيع ليندلي بمعلمة واحدة والتوزيع الاسي عن طريق استعمال المعايير ($-2\ln L - AIC - BIC - AICc$) لمجموعة من البيانات الحقيقية ، وتوصلوا الى ان توزيع ليندلي الجديد يعطي ملاءمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.

2

الفصل الثاني

الجانب النظري

1-2 تمهيد: (Preface)

تعد دراسة دالة البقاء ذات فوائد عديدة ولها استعمالات كثيرة في الحياة العملية ، ومن خلال دراسة المعولية للكثير من المكونات والوحدات مثل الاجهزة الكهربائية والمعدات وغيرها التي تعود بفائدة للفرد والمجتمع ، فمعرفة المعولية لكل ماكنة في أي معمل أو منشأ يجعل بالإمكان التنبؤ بالعدد الأمثل الكلي للمكائن العاملة والعاطلة في أي وقت، إضافة إلى فوائد أخرى كثيرة منها مقارنة معولية المنتج الحالي مع معولية المنتج السابق كي يمكن معرفة مدى التطور أو التدهور في المنتج، فضلاً عن أن للمعولية أهمية في حماية ودرء الخطر عن حياة الانسان، إذ أنها مهمة في حل مشكلات نظرية البقاء (Survival Theory) وتحليل جداول الحياة .

سيتم في هذا الفصل عرض المفاهيم الاساسية في نظرية البقاء والدوال المرتبطة بها ، وكذلك عرض للتوزيعات الاحتمالية المستعملة في الرسالة وطرائق تقدير دالة البقاء .

(علماً أن جميع الاشتقاقات لتوزيع ليندلي بمعلمتين TPLD2 هي من عمل الباحث)

2-2 دالة الكثافة الاحتمالية للفشل: (Failure Probability Density Function)

هي احتمال ان تفشل أو تتوقف الوحدة (المركبة) عن العمل خلال الفترة $(t < T < t + \Delta t)$ بغض النظر عن قيمة Δt ، باعتبار أن T متغير عشوائي موجب يمثل وقت حدوث الفشل ويمكن التعبير عنها رياضياً كما يأتي: [8][19]

$$f_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} ; t \geq 0 \quad \dots (2-1)$$

$$\Delta t = T_2 - T_1 \quad \text{إذ أن}$$

وتتصف دالة الفشل الاحتمالية $f_T(t)$ بالخصائص الآتية:

$$\int_0^{\infty} f_T(t) dt = 1 \quad -1$$

$$f_T(t) \geq 0 \quad -2$$

-3 دالة وحيدة القيمة عند كل قيمة من قيم أوقات الفشل t .

2-3 دالة الكثافة التجميعية للفشل (Failure Cumulative Probability Density Function)

هي احتمال أن تفشل أو تتوقف الوحدة (المركبة) عن العمل حتى الوقت t والتي يطلق عليها دالة الاحتمال التجميعي للفشل حتى الوقت t . وهي دالة غير متناقصة عن اي وقت من أوقات الفشل مجالها خط الاعداد الحقيقية المقابل للفترة $[0,1]$.

[33].

ويعبر عنها رياضياً بما يأتي: [8]

$$F_T(t) = p_r(T \leq t) = \int_0^t f(u)du ; t \geq 0 \quad \dots (2-2)$$

وتتمتع هذه الدالة بالخصائص الآتية :

- دالة موجبة دائماً أي أن، $0 \leq F_T(t) \leq 1$
- $F_T(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$
- $F_T(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$
- دالة رتيبة غير متناقصة، إذ أن $f(t_1) \leq f(t_2)$ لكل $t_1 < t_2$.
- دالة مستمرة من جهة اليمين إذ أن: $\lim_{0 < h \rightarrow 0} F(t + h) = F_T(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_T(t) = f_T(t) \text{ ماعدا عندما } T=0 \text{ و } T=1.$$

2-4 دالة البقاء : (Survival Function)

وهي احتمال بقاء الوحدة التجريبية تعمل على الأقل للوقت t . إذ أن $t > 0$ ، أي إذا كان T هو المتغير العشوائي الذي يمثل وقت البقاء للوحدة التجريبية فان $R(t)$ تمثل احتمال بقاء المفردة تعمل لمدة قادمة [3] (2007، الياسري). وتُعرّف أيضاً كدالة لاستمرار عمل النظام (المركبة) بانقضاء زمن دوري بمقدار t ، وتُعرّف أيضاً بأنها عبارة عن مقياس لقابلية أو قدرة أي جزء من أجزاء نظام معين أو نظام كلي على العمل بصلاحيته تامة من دون توقف. ونظرياً يمكن تعريف المعولية بأنها احتمال عمل الجهاز تحت الشروط الخاصة باستخدام المستهلك لهذا الجهاز [44].

فاذا رمزنا لدالة البقاء بالرمز $R(t)$ فان: [19]

$$R(t) = p(T > t) = 1 - P(T \leq t) = \int_t^{\infty} f_T(t) dt \quad ; \quad t \geq 0 \quad \dots (2-3)$$

إذ أن :

$f_T(t)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للفشل (p.d.f) للمتغير العشوائي t .

فإذا كانت $F_T(t)$ تمثل دالة الكثافة التجميعية للفشل (C. D. F) للمتغير العشوائي t سيكون لدينا :

$$F_T(t) = p(T \leq t) = \int_0^t f_T(t) dt$$

$$F_T(t) = 1 - \int_t^{\infty} f_T(t) dt$$

$$F_T(t) = 1 - R(t) \quad \dots (2-4)$$

إذ أن:

$$F_T(t) + R(t) = 1$$

و ان دالة الكثافة التجميعية للفشل $F_T(t)$ محددة في الفترة $[0, t]$

ويمكن ذكر أهم خصائص دالة البقاء $R(t)$ بما يأتي :

- احتمال البقاء الوحدة او النظام خلال الزمن $t=0$ يساوي 1 اي ان $R(0) = 1$
- احتمال البقاء الوحدة او النظام خلال الزمن $t = \infty$ يساوي صفرًا اي ان $R(\infty) = 0$ ،
بمعنى انه كلما زاد الزمن كانت الوحدة او النظام اكثر عرضة للفشل ، اي تقل معوليته.
- $0 \leq R(t) \leq 1$
- تكون $R(t)$ دالة رتيبه متناقصة مع الزمن .
- الدالة $R(t)$ مستمرة ولجميع قيم t .

5-2 دالة المخاطرة: (Hazard Function)

تعرف دالة المخاطرة بانها الغاية لنسبة الفشل في الفترة $(t, t + \Delta t)$ عندما

تقترب الفترة (Δt) من الصفر ورياضياً فان $h(t)$ تعطى بالصيغة الآتية: [6]

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{R(t)} \left[\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \quad \dots (2-5)$$

وبحسب تعريف المشتقة الاولى للدالة $R(t)$ فان :

$$h(t) = \frac{1}{R(t)} * \frac{-d}{dt} R(t) \quad \dots (2-6)$$

بعد تبسيط المعادلة اعلاه نحصل على:

$$h(t) = \frac{-d}{dt} \ln R(t) \quad \dots (2-7)$$

ومن الصيغ اعلاه (2-5) و (2-6) و (2-7) يمكن ربط علاقة بين دالة المخاطرة وكل من دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يمثل الزمن ودالة البقاء هي كالاتي :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad \dots (2-8)$$

6-2 التوزيعات الإحصائية Statistical distribution

يوجد هناك عدد كثير من التوزيعات الاحتمالية التي يمكن ان تكون دالة الكثافة الاحتمالية لها نموذج يستخدم لأزمنة الحياة (life time) وسوف نتطرق في هذه الرسالة الى بعض من هذه التوزيعات المهمة :

1-6-2 توزيع ليندلي بمعلمة واحدة (LD) (Lindley distribution)

يعد توزيع ليندلي (Lindley Distribution) واحداً من التوزيعات المستمرة ذات الأهمية الكبيرة في دراسة المعولية ونظرية البقاء، التي تمتاز بإمكانية كبيرة في تمثيل الانظمة المختلفة التي تتألف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك المرونة العالية لهذا التوزيع كأنموذج للفشل. [36]

قدم توزيع ليندلي بمعلمة واحدة والمعروف بتوزيع ليندلي من قبل الباحث (Lindely, 1985) وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية: [16]

$$f(t; b) = \frac{b^2}{(b+1)} (1 + t) e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0 \quad \dots (2-9)$$

إذ أن المعلمة b تمثل معلمة القياس (scale Parameter).

ويمكن تعريف دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$F(t; b) = 1 - \left[1 + \frac{bt}{(b+1)} \right] e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0 \quad \dots (2-10)$$

كما تعرف دالة البقاء للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$R(t) = \left[1 + \frac{bt}{(b+1)} \right] e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0 \quad \dots (2-11)$$

وبتطبيق المعادلة (2-8) يمكن الحصول على دالة المخاطرة للتوزيع كما مبين بالصيغة الآتية :

$$h(t) = \frac{b^2 (1+t)}{(b+1)+bt} \quad \dots (2-12)$$

وان العزم من الدرجة r حول نقطة الأصل يحسب بالصيغة الآتية :

$$\mu'_r = \frac{r! (b+r+1)}{b^r(b+1)} \quad \dots (2-13)$$

وعندما $r=1$ نحصل على العزم الاول حول نقطة الأصل :

$$\mu'_1 = \frac{b+2}{b(b+1)} \quad \dots (2-14)$$

وعندما $r=2$ نحصل على العزم الثاني حول نقطة الأصل :

$$\mu'_2 = \frac{2(b+3)}{b^2(b+1)} \quad \dots (2-15)$$

ومن المعادلتين (2-14) و (2-15) نحصل على التباين لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة وكالاتي:

$$V(t) = \frac{2(b+3)}{b^2(b+1)} - \left(\frac{b+2}{b(b+1)} \right)^2 \quad \dots (2-16)$$

وقد بين [16] (Ghitany M. E & et al, 2008) بأن توزيع ليندلي بالمعلمة الواحدة أفضل من التوزيع الأسّي في نمذجة بيانات أوقات البقاء . كما بين (Shanker & et al, 1995) أن معدل الخطورة (Hazard rate) في توزيع ليندلي يكون متزايداً مما يقلل من متوسط فترة البقاء (الحياة المتبقية) عكس التوزيع الأسّي الذي يكون معدل الخطورة له ثابت بمرور الزمن. [38], [40], [41]

2-6-2 توزيع ليندلي بمعلمتين

(Two Parameters Lindley Distribution)

اقترح توزيع ليندلي بمعلمتين من قبل [41] (Shanker et al, 2013) كإ نموذجاً لدراسة أزمنة البقاء على قيد الحياة ودراسات المعولية. وهو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الناتجة من خلط توزيع $Gamma(2, b)$ مع توزيع $Exponential(b)$ باستعمال صيغة الخلط الآتية: [41]

$$f(t; a, b) = p f_1(t) + (1 - p)f_2(t) \quad \dots (2-17)$$

أذ أن $f_1(t)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي بالصيغة الآتية:

$$f_1(t) = be^{-bt} \quad ; t > 0 \quad \dots (2-18)$$

وأن $f_2(t)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كما (2,b) بالصيغة الآتية:

$$f_2(t) = b^2te^{-bt} \quad ; t > 0 \quad \dots (2-19)$$

وبالتعويض عن المعادله (2-18) والمعادله (2-19) في المعادلة رقم (2-17) ينتج الآتي :

$$f(t; a, b) = pbe^{-bt} + (1 - p)b^2te^{-bt}$$

وبافتراض ان معلمة الخط هي :

$$p = \frac{b}{b+a} \quad \dots (2-20)$$

إذ أن :

b معلمة القياس (scale parameter)

a معلمة الشكل (shape parameter) .

فيمكن تعريف دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي بمعلمتين بالصيغة الآتية :

$$f(t; a, b) = \frac{b^2}{b+a} (1 + at) e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0, a > -b \quad \dots (2-21)$$

علما أن :

إذا كانت **a=1** نقلص التوزيع الى توزيع ليندلي بمعلمة واحدة

وإذا كانت **a=0** سوف نحصل على توزيع التوزيع الأسى بالمعلمة **b**

وتعرف دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$F(t; b) = 1 - \left[\frac{b+a+abt}{(b+a)} \right] e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0, a > -b \quad \dots (2-22)$$

وعليه فيمكن الحصول على دالة البقاء لتوزيع ليندلي بمعلمتين كما مبين بالصيغة الآتية:

$$R(t) = \left[\frac{b+a+abt}{(b+a)} \right] e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0, a > -b \quad \dots (2-23)$$

ومن خلال العلاقة بين دالة البقاء ودالة الفشل ودالة الخطورة في المعادلة (2-8) يمكن ايجاد دالة

المخاطرة للتوزيع كما مبين في الصيغة الآتية :

$$h(t) = \frac{b^2(1+at)}{b+a+abt} \quad \dots (2-24)$$

وان العزم من الدرجة **r** حول نقطة الأصل هو:

$$\mu'_r = E(T)^r = \frac{\Gamma(r+1)(b+a+ar)}{b^r(b+a)} \quad ; r = 1, 2, \dots \quad \dots (2-25)$$

ومن معادلة (2-25) وعندما **r=1** نحصل على العزم الاول حول نقطة الأصل :

$$\mu'_1 = \frac{b+2a}{b(b+a)} \quad \dots (2-26)$$

وعندما **r=2** نحصل على العزم الثاني حول نقطة الأصل :

$$\mu'_2 = \frac{2(b+3a)}{b^2(b+a)} \quad \dots (2-27)$$

ويمكن احتساب التباين لتوزيع ليندلي بالمعلمتين كما مبين في الصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\ \text{Var}(T) &= \frac{2(b+3a)}{b^2(b+a)} - \left(\frac{2(b+3a)}{b^2(b+a)}\right)^2 \quad \dots (2-28) \end{aligned}$$

في عام (2016) اقترح كلٌّ من [36] (*Shanker, R & Sharma, S*) صيغة مطورة جديدة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين من خلال إفتراض معلمة الخط (P) والمعرفة بالصيغة (2-20) كما مبين بالآتي: [36],[38]

$$P = \frac{ba}{ba+1} \quad \dots (2-29)$$

وباستعمال صيغة الخط المعرفة في المعادلة (2-29) أمكن الوصول الى صيغة جديدة لتوزيع ليندلي بمعلمتين وكما مبين في ادناه :

$$\begin{aligned} f(t; a, b) &= \frac{ab}{ab+1} b e^{-bt} + \left(1 - \frac{ab}{ab+1}\right) b^2 t e^{-bt} \\ &= \frac{ab}{ab+1} b e^{-bt} + \left(\frac{ab+1-ab}{ab+1}\right) b^2 t e^{-bt} \\ &= \frac{ab}{ab+1} b e^{-bt} + \frac{1}{ab+1} t b^2 e^{-bt} \\ &= \frac{b^2}{ab+1} (a + t) e^{-bt} \\ \therefore f(t; a, b) &= \frac{b^2}{ab+1} (a + t) e^{-bt} \quad ; t > 0, b > 0, ab > -1 \quad \dots (2-30) \end{aligned}$$

والصيغة (2-30) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي بمعلمتين الاكثر شيوعاً في الأونة الأخيرة.

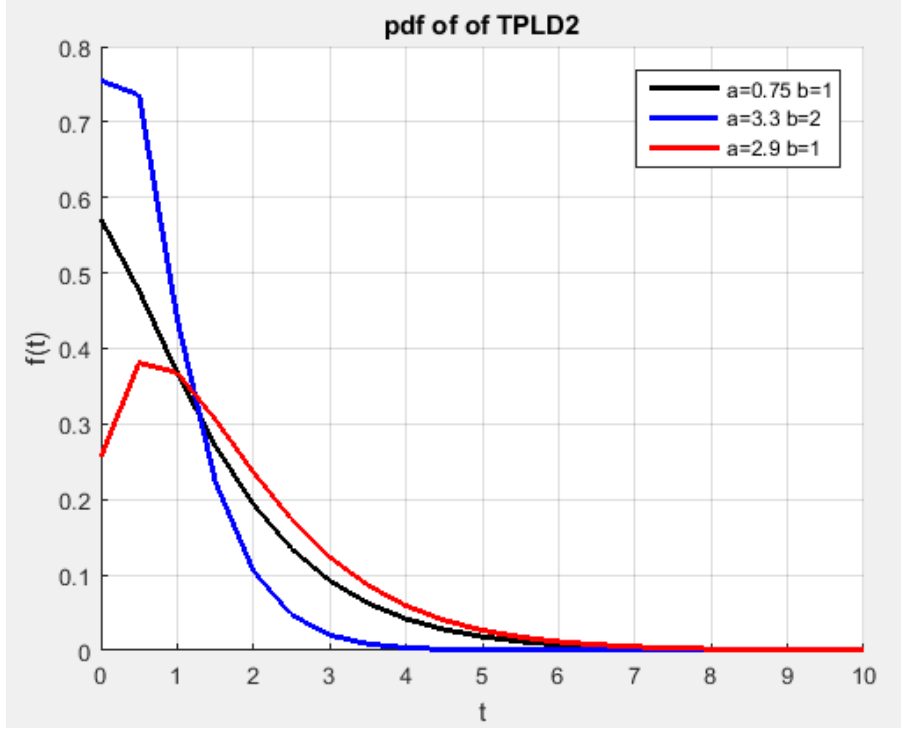
إذ أن:

a معلمة الشكل (shape parameter)

b معلمة القياس (scale parameter)

ومن أجل التعريف بين الصيغة الأولى لتوزيع لندي بمعلمتين المنشوره في عام 2013 والصيغة الثانية المنشورة في عام 2016 سنستخدم الرموز (TPLD1), (TPLD2)

والشكل (1-2) يبين سلوك منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (TPLD2) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



شكل (1-2) سلوك منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (TPLD2)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-6-2-1 دالة التوزيع التراكمية (CDF) للتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2):

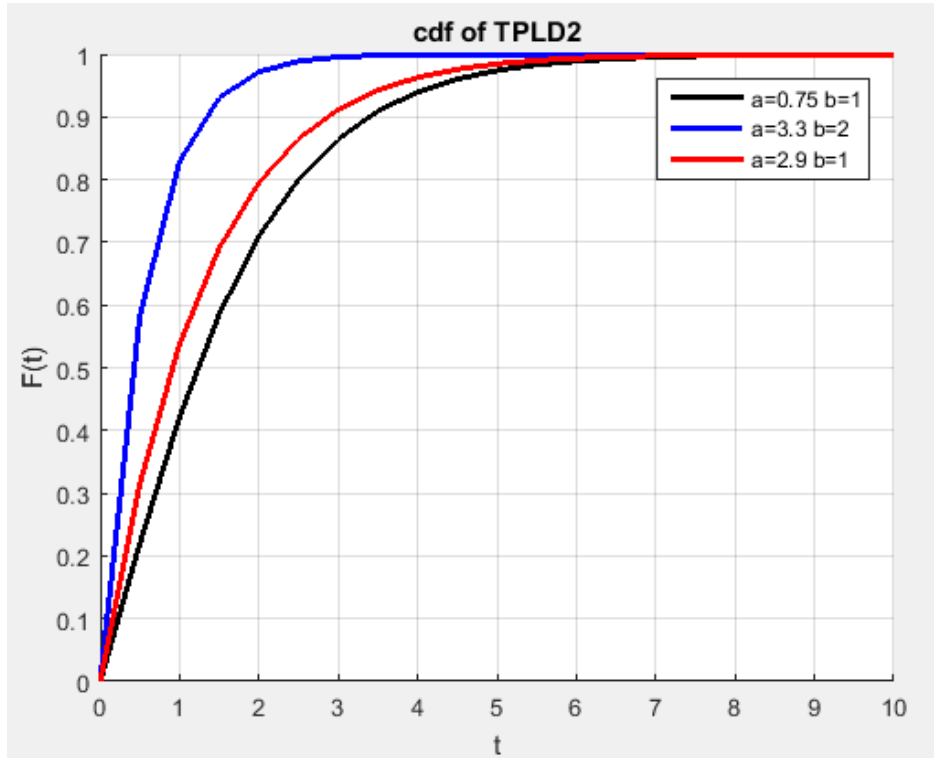
تعرف دالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع ليندلي بالمعلمتين كما مبين بالصيغة الاتية :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P_r(T \leq t) \\
 &= \int_0^t \frac{b^2}{ab+1} (a+u)e^{-bu} du \\
 &= \frac{b^2}{ab+1} \left[\int_0^t ae^{-bu} du + \int_0^t u e^{-bu} du \right] \\
 &= \frac{b^2}{ab+1} \left[\left(\frac{-ae^{-bt}}{b} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{-e^{-bt}(bt+1)}{b^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] \\
 &= 1 - \left(\frac{abe^{-bt}}{ab+1} + \frac{(bt+1)e^{-bt}}{ab+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \left[\frac{ab + bt + 1}{ab + 1} \right] e^{-bt}$$

$$F(t; a, b) = 1 - \left[\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right] e^{-bt} ; t > 0, b > 0, ab > -1 \quad \dots (2-31)$$

والشكل (2-2) يبين سلوك منحنى دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (TPLD2) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



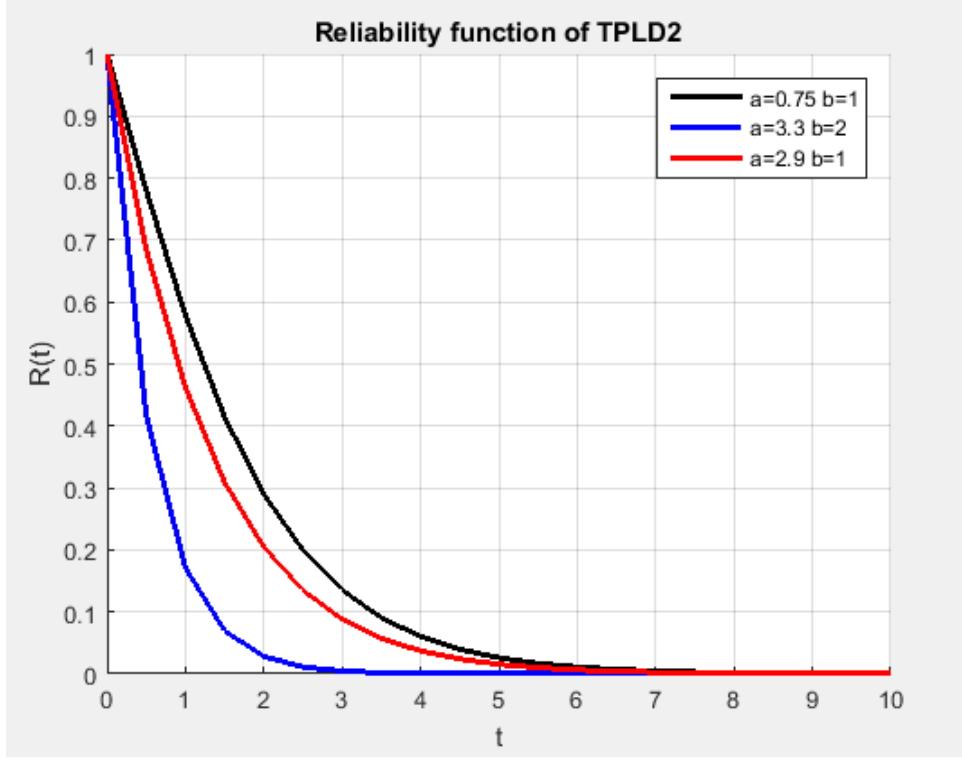
شكل (2-2) سلوك منحنى دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (TPLD2)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-2-6-2 دالة البقاء للتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2):

يمكن كتابة دالة البقاء للتوزيع كما مبين بالصيغة الآتية :

$$R(t) = \left[\frac{1+ab+bt}{(ab+1)} \right] e^{(-bt)} ; t > 0, b > 0, ab > -1 \quad \dots (2-32)$$

والشكل (3-2) يبين سلوك منحنى دالة البقاء لتوزيع (TPLD2) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



شكل (3-2) سلوك منحنى دالة البقاء لتوزيع (TPLD2)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

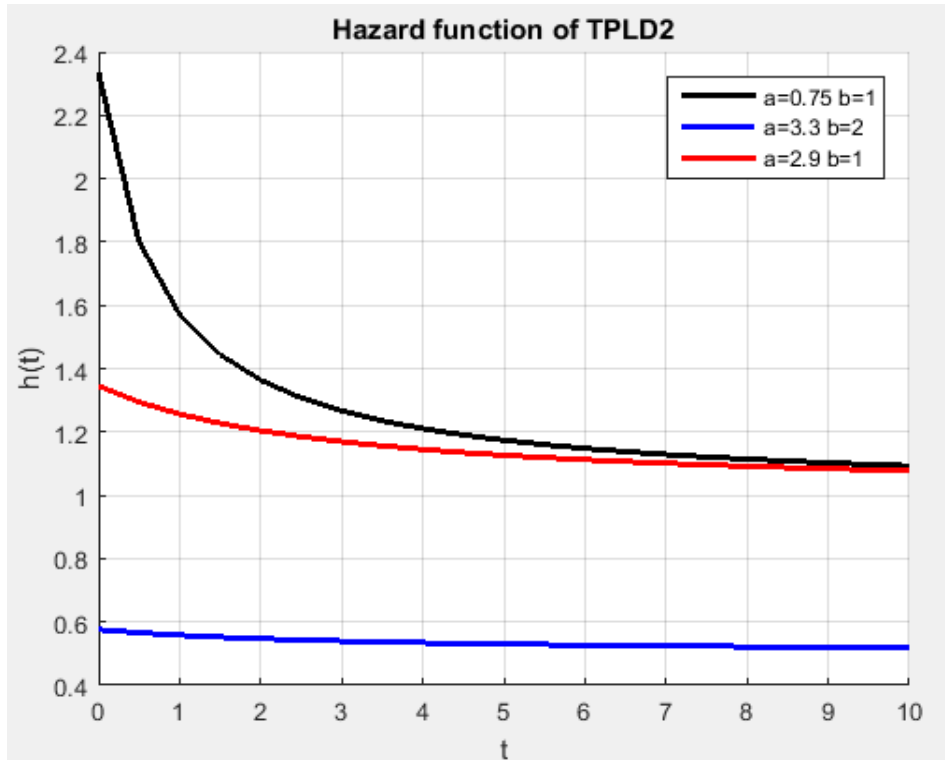
3-2-6-2 دالة المخاطرة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2):

تعرف دالة المخاطرة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين كما مبين بالصيغة الآتية :

$$h(t) = \frac{\left(\frac{1+ab+bt}{ab+1}\right) e^{-bt}}{b^2 (a+t)e^{-bt}}$$

$$h(t) = \frac{1+ab+bt}{ab^2+tb^2} \quad \dots (2-33)$$

والشكل (4-2) يبين سلوك منحنى دالة المخاطرة لتوزيع (TPLD2) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



شكل (4-2) سلوك منحنى دالة المخاطرة لتوزيع (TPLD2)

(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

4-2-6-2 العزم ذو الدرجة r حول نقطة الأصل (TPLD2):

يعرف العزم من الدرجة r لتوزيع ليندلي بالمعلمتين حول نقطة الأصل بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned}
 \mu'_r = E(T^r) &= \int_0^{\infty} t^r f(t; b, a) dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^r \frac{b^2}{ab+1} (a+t) e^{-bt} dt \\
 &= \frac{b^2}{ab+1} \int_0^{\infty} t^r (a+t) e^{-bt} dt \\
 &= \frac{b^2}{ab+1} \left[a \int_0^{\infty} e^{-bt} t^{r+1-1} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} t t^{r+2-1} dt \right] \\
 &= \frac{b^2}{ab+1} \left[\frac{a \Gamma(r+1)}{b^{(r+1)}} + \frac{\Gamma(r+2)}{b^{(r+2)}} \right] \\
 &= \frac{b^2 \Gamma(r+1)}{ab+1} \left[\frac{ab+r+1}{b^{r+2}} \right] \\
 \therefore \mu'_r &= \frac{r! (ab+r+1)}{b^r (ab+1)} \quad r = 1, 2, 3, \dots \dots \quad \dots (2-34)
 \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-34) وعندما $r=1$ نحصل على العزم الاول حول نقطة الأصل :

$$\mu'_1 = \frac{ab+2}{b(ab+1)} \quad \dots (2-35)$$

وعندما $r=2$ نحصل على العزم الثاني حول نقطة الأصل :

$$\mu'_2 = \frac{2(ab+3)}{b^2(ab+1)} \quad \dots (2-36)$$

وعندما $r=3$ نحصل على العزم الثالث حول نقطة الأصل :

$$\mu'_3 = \frac{3!(ab+4)}{b^3(ab+1)} = \frac{6(ab+4)}{b^3(ab+1)} \quad \dots (2-37)$$

وعندما $r=4$ نحصل على العزم الرابع حول نقطة الأصل :

$$\mu'_4 = \frac{4!(ab+5)}{b^4(ab+1)} = \frac{24(ab+5)}{b^4(ab+1)} \quad \dots (2-38)$$

وعليه فان التباين لتوزيع ليندلي بالمعلمتين يعرف كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= E(T) - (E(T))^2 \\ \text{Var}(T) &= \frac{2(ab+3)}{b^2(ab+1)} - \left(\frac{ab+2}{b(ab+1)} \right)^2 \quad \dots (2-39) \end{aligned}$$

ويمكن ايجاد المعدل لحين الحصول على الفشل لتوزيع لندي بالمعلمتين (MTTF) كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{MTTF} &= \int_0^{\infty} R(t) dt \\ \text{MTTF} = E(T) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right) e^{-bt} dt \\ &= \frac{1+ab}{ab+1} \int_0^{\infty} e^{-bt} dt + \frac{b}{ab+1} \int_0^{\infty} t e^{-bt} dt \\ &= \frac{1}{b} + \frac{b}{ab+1} \left[\frac{1}{b^2} \Gamma(2) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \text{MTTF} = \frac{ab+2}{(ab+1)b} \quad \dots (2-40)$$

2-6-2-5 الوسيط لتوزيع لندلي بمعلمتين (TPLD2) The Median of

يعرف الوسيط للتوزيع بأنه قيمة المتغير العشوائي التي تفصل بيانات التوزيع الى نصفين متساويين أو هي قيمة المتغير العشوائي التي تقسم التوزيع الاحتمالي الى قسمين متساويين ويمكن احتساب الوسيط من خلال مساواة الدالة التجميعية كالآتي :

$$F(m) = \frac{1}{2} \quad \dots (2-41)$$

ولاحتمساب الوسيط لتوزيع لندلي بالمعلمتين تتم من خلال جعل الدالة التراكمية الاحتمالية للتوزيع تساوي النصف وحل المعادلة لإيجاد قيمة m وكالآتي :

$$\rightarrow 1 - \left[\frac{1 + ab + bm}{ab + 1} \right] e^{-bm} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-bm}{b + 1} e^{-bm} = 0.5$$

وبأخذ ال \ln للطرفين نحصل على

$$\ln \left[\frac{-bm}{b+1} e^{-bm} \right] = \ln(0.5) \quad \dots (2-42)$$

ونلاحظ بان المعادلة (2-42) بأنها معادلة غير خطية ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طرائق عدديه تكرارية .

2-6-2-6 المنوال لتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2) The Mode of

يعرف المنوال للتوزيع الاحتمالي بأنه قيمة المتغير العشوائي التي تتكرر أكثر من غيرها في التوزيع أو القيمة الأكثر شيوعاً ويمكن إيجادها من التوزيعات المستمرة بانها نقطة أو نقاط النهاية العظمى لمنحني الدالة.

ويمكن ايجاد المنوال لتوزيع ليندلي بالمعلمتين كالآتي:

$$f(t; a, b) = \frac{b^2}{ab + 1} (a + t) e^{-bt}$$

$$f'(t) = \frac{b^2}{ab + 1} [(a + t)(-b)e^{-bt} + e^{-bt}(1)]$$

$$= \frac{b^2}{ab + 1} e^{-bt} (1 - ab - bt)$$

$$f'(t) = 0$$

$$\frac{b^2}{ab+1} (1-ab-bt)e^{-bt} = 0$$

$$(1-ab-bt) = 0 \text{ أما}$$

أو يهمل $e^{-bt} = 0$ لأن $t = \infty$ كمية غير معرفه

$$\frac{bt}{b} = \frac{1-ab}{b} \rightarrow t = \frac{1-ab}{b}$$

$$f''(t) = (1-ab-t)(-be^{-bt}) + e^{-bt}(-b)$$

$$= \left[1-ab-b \left(\frac{1-ab}{b} \right) be^{-b \left(\frac{1-ab}{b} \right)} + e^{-b \left(\frac{1-ab}{b} \right)} (-b) \right]$$

$$= (1-ab-a+ab) (-be^{-(1-ab)} + e^{-(1-ab)}(-b))$$

$$= -be^{-(1-ab)} < 0$$

وعليه يمكن ان نستنتج بأن المنوال ليندلي بالمعلمتين والذي تحقق أعظم قيمة للدالة هو :

$$t_{\text{mode}} = \frac{1-ab}{b}, ab < 1 \quad \dots (2-43)$$

7-2-6-2 توزيع الاحصاءات المرتبة لتوزيع ليندلي بمعلمتين (TPLD2)

Order Statistics distribution

لنفرض $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ متغيرات تمثل عينة عشوائية من أزمنة البقاء حجمها n مسحوبة من توزيع لندي بمعلمتين ، وعلى فرض أن $T_K = t_{(K)}$ حيث $K=1,2,\dots,n$ تمثل الاحصاءات المرتبة للتوزيع فيمكن احتساب توزيع الإحصاءة المرتبة T_K كالآتي :

$$f_{t_k}(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(y_k) \{1-F(y_k)\}^{n-k} f(y_k)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i F^{k+i-1}(y_k) f(y_k) \quad \dots (2-44)$$

كما يمكن احتساب التوزيع التراكمي للإحصاءة المرتبة y_k كالآتي:

$$F_Y(y_k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F^j(y_k) \{1-F(y_k)\}^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n}{i} \binom{n-k}{i} (-1)^i F^{j+1}(y_k); K=1,2,3,\dots,n \quad \dots (2-45)$$

وبتطبيق المعادلتين (2-44) و (2-45) يمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي (p.d.f) والتوزيع التراكمي (C.D.F) للإحصاءه المرتبة y_k في توزيع ليندلي بالمعلمتين TPLD :

$$f_y(y) = \frac{n! b^2 (a+t) e^{-bt}}{(ab+1)(k-1)!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \left[1 - \frac{1+ab+bt}{ab+1} e^{-bt} \right]^{k+i-1} \quad \dots (2-46)$$

وان:

$$F_Y(y) = \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n-k}{i} (-1)^i \left[1 - \frac{1+ab+bt}{ab+1} e^{-bt} \right]^{j+1} \quad \dots (2-47)$$

2-6-7-8 الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ليندلي بمعلمتين (TPLD2)

The Moment Generating Function

يمكن ايجادها وفق الصيغة الآتية :

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{b^2}{ab+1} (a+x) e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^2}{ab+1} \int_0^{\infty} (a+x) e^{-(b-t)x} dx$$

$$= \frac{b^2}{ab+1} \frac{1}{(b-t)} + \frac{b^2}{ab+1} \int_0^{\infty} x e^{-(b-t)x} dx$$

$$= \frac{b^2}{ab+1} \left[\frac{a}{(b-t)} + \frac{1}{(b-t)^2} \right]$$

طالما أن:

$$\frac{a}{b-t} = \frac{a}{b \left(1 - \frac{t}{b}\right)} = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{b}} \right)$$

ليكن $Z = \frac{t}{b}$ ، فإن

$$\frac{a}{b-t} = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{1-Z} \right)$$

$$\left[\frac{1}{1-Z} = 1 + Z + Z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \right]$$

$$\therefore \frac{a}{b-t} = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b} \right)^k$$

طالما أن:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-t)^2} &= \frac{1}{\left[b \left(1 - \frac{t}{b} \right) \right]^2} = \frac{1}{b^2 \left(1 - \frac{t}{b} \right)^2} \\ &= \frac{1}{b^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b} \right)^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} \left(\frac{t}{b} \right)^k \end{aligned}$$

فأن:

$$\begin{aligned} \therefore M_X(t) &= \frac{b^2}{ab+1} \left[\frac{a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b} \right)^k + \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} \left(\frac{t}{b} \right)^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{ab+1+k}{ab+1} \right) \left(\frac{t}{b} \right)^k \end{aligned} \quad \dots (2-48)$$

وبما أن :

$$\mu'_r = M'_X(t) \Big|_{t=0} ; r = 1, 2, 3, \dots$$

فيمكن إيجاد العزوم من الدرجة r لتوزيع ليندلي بالمعلمتين من الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ المعرفة بالمعادلة (2-48) كالآتي :

$$\mu'_r = \frac{r!(ab+r+1)}{b^r(ab+1)} \quad \dots (2-49)$$

9-2-6-2 خاصية فقدان الذاكرة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2)

Memorylessness property

افتراض ان مدة البقاء تتوزع لتوزيع ليندلي بالمعلمتين ، فإن العمر المقبل يكون $(t+\delta)$ وهذا لا يعتمد على عمره السابق T ويمكن ان يعبر عن ذلك رياضياً بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} P_r[(T > t + \delta) \mid T > t] &= \frac{P_r(T > t + \delta)}{P_r(T > t)} = \frac{R(t+\delta)}{R(t)} \\ &= \frac{\left(\frac{1+ab+b(t+\delta)}{ab+1} \right) e^{-b(t+\delta)}}{\left(\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right) e^{-bt}} \\ &= \frac{1+ab+b(t+\delta)}{1+ab+bt} e^{-b\delta} \end{aligned} \quad \dots (2-50)$$

نلاحظ من معادلة (2-50) ان الدالة الناتجة مختلفة عن دالة بقاء توزيع ليندلي بالمعلمتين أي أن التوزيع للفترة المقبلة لا يتوزع ليندلي بمعلمتين أي انه لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة .

2-6-2-10 خاصية اعادة الذات لتوزيع ليندلي بالمعلمتين (TPLD2)

(Self-reproducing)

تعني بأنه إذا رتبت أوقات الفشل بشكل تصاعدي (t_1, \dots, t_n) فإن اصغر عمر لـ (t) يتوزع ليندلي بمعلمتين (هذا يعني انه يعيد نفسه) والعكس صحيح ، ويمكن اثباته رياضياً بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} F(t) &= P_r[T_{(1)} \leq t] \\ &= 1 - P_r[T_{(1)} > t] \\ P_r[T_{(1)} > t] &= P_r[T_{(1)} > t, T_{(2)} > t, \dots, T_{(n)} > t] \\ &= [R(t)]^n \end{aligned} \quad \dots (2-51)$$

$$\begin{aligned} F_{T_{(1)}} &= 1 - [R(t)]^n \\ &= 1 - \left[\left(\frac{1 + ab + bt}{ab + 1} \right) e^{-bt} \right]^n \\ F_{T_{(1)}} &= 1 - \left[\left(\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right)^n e^{-nbt} \right] \end{aligned} \quad \dots (2-52)$$

بما ان توزيع اصغر عمر لـ t هي ليس دالة ال CDF للتوزيع (أي لا يتوزع توزيع لندي) ، أذن Two parameter Lindley distribution لايمتلك خاصية إعادة الذات .

2-6-3 الصيغة مقترحة جديدة لتوزيع ليندلي بمعلمتين (NTPLD)

(New type of two parameter Lindley distribution)

اقترحت الباحثة صيغة اخرى لتوزيع ليندلي بالمعلمتين من خلال افتراض نفس صيغة الخلط المعرفة سابقاً بالصيغة (2-17) لكن بافتراض ان دالة الكثافة الاحتمالية في التوزيع الأسّي تعرف بالصيغة الآتية :

$$f_3(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t}{b}}, \quad t > 0 \quad \dots (2-53)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كما بالمعلمتين $(2, b)$ معرفة بالصيغة الآتية :

$$f_4(t) = \frac{1}{b^2} t e^{-\frac{t}{b}}, \quad t > 0 \quad \dots (2-54)$$

وبافتراض نفس معلمة الخلط المعرفة في الصيغة (2-29) ، يمكن اقتراح صيغة بديلة لتوزيع ليندلي بالمعلمتين والمبينة بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} f_{\text{NTPLD}}(t; a, b) &= \left(\frac{ba}{ba+1} \right) \frac{1}{b} e^{-\frac{t}{b}} + \left(1 - \frac{ba}{ba+1} \right) \frac{1}{b^2} t e^{-\frac{t}{b}} \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) \\ \therefore f_{\text{NTPLD}}(t; a, b) &= \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} \quad , \quad t > 0 \quad \dots (2-55) \end{aligned}$$

إذ أن:

a معلمة الشكل (Shape Parameter)

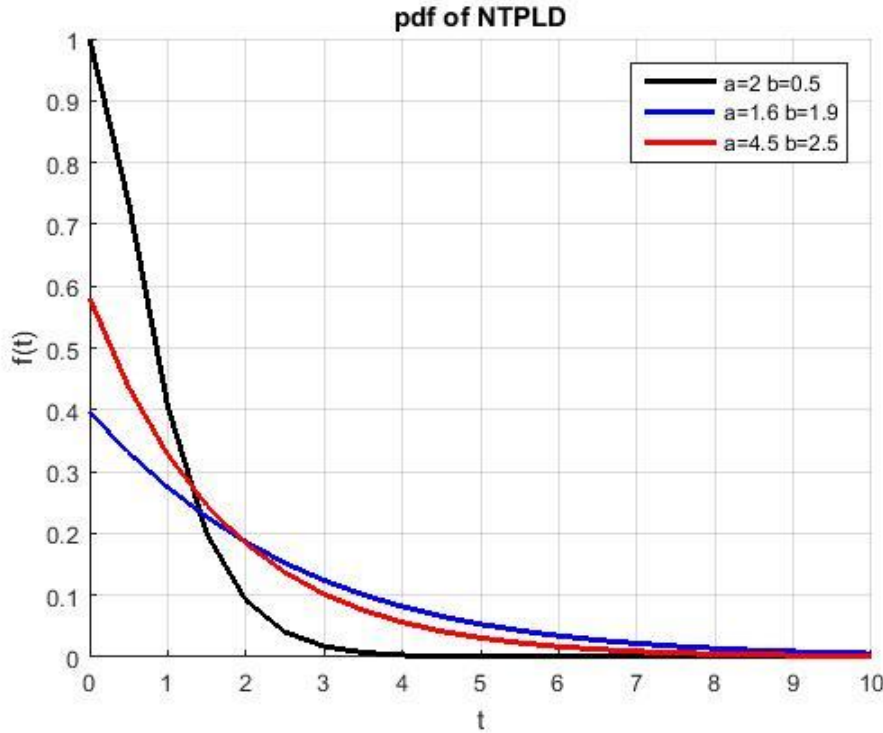
b معلمة القياس (Scale Parameter)

ويمكن اثبات ان الصيغة (2-55) هي دالة احتمالية أي أن تكامل هذه الدالة على مجال تعريفها مساوية الى الواحد الصحيح وهي موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي t وذلك عن طريق اجراء التكامل لكل حدود الدالة وكالاتي:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} \quad , \quad t > 0 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} dt \\ &= \frac{1}{b^2(ab+1)} \int_0^{\infty} (ab^2 + t) e^{-\frac{t}{b}} dt \\ &= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[\int_0^{\infty} ab^2 e^{-\frac{t}{b}} dt + \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \\ &= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[\frac{ab^2 e^{-\frac{t}{b}}}{-1/b} \Big|_0^{\infty} + (b^2 \Gamma_2) \right] \\ &= \frac{1}{b^2(ab+1)} [ab^3 + b^2] \end{aligned}$$

$$\frac{b^2(ab + 1)}{b^2(ab + 1)} = 1$$

والشكل (5-2) يبين سلوك منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس b ومعلمة الشكل a .



شكل (5-2) سلوك منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

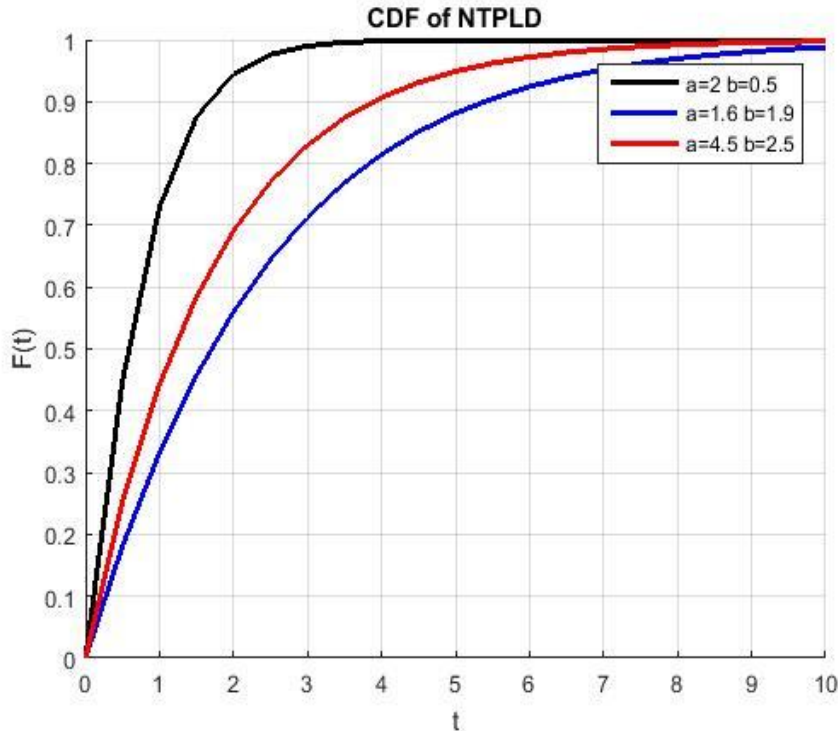
2-3-6-1 دالة التوزيع التراكمي لتوزيع (NTPLD):

يمكن احتساب دالة التوزيع التراكمي $F(t)$ لتوزيع ليندلي الجديد (NTPLD) كالآتي :

$$\begin{aligned} F(t) &= P_r(T \leq t) \\ &= \int_0^t \frac{1}{ab + 1} \left(a + \frac{u}{b^2} \right) e^{-\frac{u}{b}} du \\ &= \frac{1}{(ab + 1)b^2} \left[\int_0^t ab^2 e^{-\frac{u}{b}} du + \int_0^t u e^{-\frac{u}{b}} du \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(ab+1)b^2} \left[\frac{ab^2 e^{-\frac{u}{b}}}{-1/b} \Big|_0^t + \left(-bu e^{-\frac{u}{b}} \Big|_0^t - \left[-b^2 e^{-\frac{u}{b}} \Big|_0^t \right] \right) \right] \\
&= \frac{1}{(ab+1)b^2} \left[ab^3 \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right) + \left(-b e^{-\frac{t}{b}} (b+t) + b^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{(ab+1)b^2} \left[ab^3 \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right) + \left(b^2 - b^2 e^{-\frac{t}{b}} - bte^{-\frac{t}{b}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{(ab+1)b^2} \left[b^2 + ab^3 - b^2 e^{-\frac{t}{b}} - bte^{-\frac{t}{b}} - ab^3 e^{-\frac{t}{b}} \right] \\
&= \frac{b^2(ab+1) - be^{-\frac{t}{b}}(b+t+ab^2)}{b^2(ab+1)} \\
&= 1 - \frac{e^{-\frac{t}{b}}(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} \\
\therefore F_{NTPLD}(t) &= 1 - \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}} \quad \dots (2-56)
\end{aligned}$$

والشكل (6-2) يبين سلوك منحنى دالة الكثافة التجميعية للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.

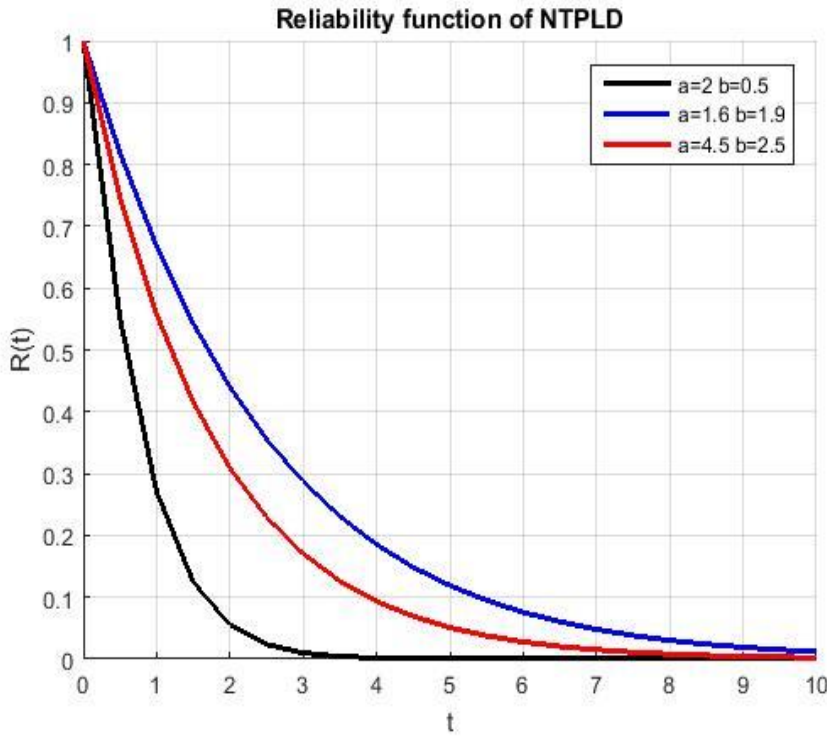


شكل (6-2) سلوك منحنى دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-3-6-2 دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) : Reliability(survival) function

$$\begin{aligned}
 R(t) &= 1 - F(t) \\
 &= 1 - \left[1 - \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}} \right] \\
 \therefore R(t) &= \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}} \quad \dots (2-57)
 \end{aligned}$$

والشكل (7-2) يبين سلوك منحنى دالة البقاء للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس b ومعلمة الشكل a .



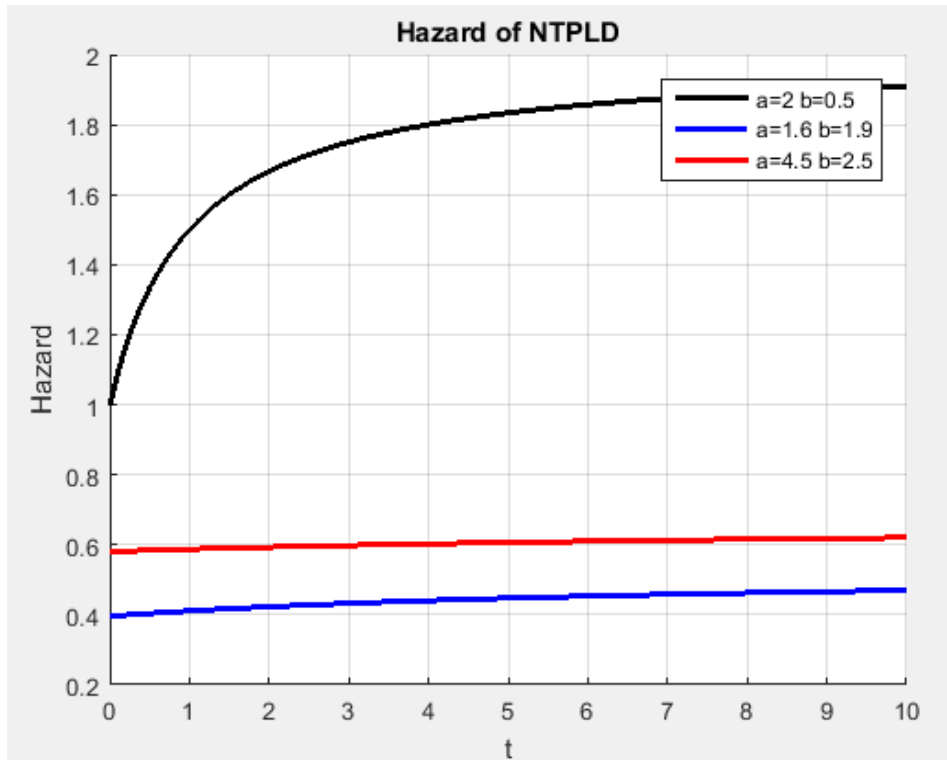
شكل (7-2) سلوك منحنى دالة البقاء لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-3-6-3 دالة المخاطرة لتوزيع (NTPLD) (Hazard function):

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\
 &= \frac{\frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}}}{\left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}}} \\
 &= \frac{a + \frac{t}{b^2}}{\frac{b+t+ab^2}{b}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{ab^2+t}{b^2}}{\frac{b+t+ab^2}{b}} \\ \therefore h(t) &= \frac{ab^2+t}{b(b+t+ab^2)} \end{aligned} \quad \dots (2-58)$$

والشكل (8-2) يبين سلوك منحنى دالة المخاطرة للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس b ومعلمة الشكل a .



شكل (8-2) منحنى دالة المخاطرة لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-6-3-4 متوسط وقت الفشل (MTTF) لتوزيع (NTPLD) :

$$\begin{aligned} \text{MTTF} &= E(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-t/b} du \\ &= \frac{b(ab+1)}{b(ab+1)} \int_0^{\infty} e^{-t/b} du + \frac{1}{b(ab+1)} \int_0^{\infty} u e^{-t/b} du \\ &= b + \frac{1}{b(ab+1)} (b^2 + \Gamma_2) \\ &= 1 + \frac{1}{b(ab+1)} \end{aligned} \quad \dots (2-59)$$

2-3-6-5 العزم اللامركزي الرائي (حول نقطة الأصل) لتوزيع (NTPLD):

$$\begin{aligned}
 E(T^r) &= \int_0^{\infty} t^r f(t; b, a) dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^r \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2}\right) e^{-\frac{t}{b}} dt \\
 &= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[ab^2 \int_0^{\infty} t^r e^{-\frac{t}{b}} dt + \int_0^{\infty} t^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \\
 \therefore E(T^r) &= \frac{1}{b^2(ab+1)} [ab^2(b^{r+1} \Gamma_{r+1}) + (b^{r+2} \Gamma_{r+2})]
 \end{aligned}$$

$$\therefore E(T^r) = \mu'_r = \frac{1}{ab+1} [ab^{r+1} \Gamma_{r+1} + b^r \Gamma_{r+2}] \quad \dots (2-60)$$

ومن معادلة (2-60) عندما $r=1$:

$$\mu'_1 = \frac{ab^2+2b}{ab+1} = E(T) \quad \dots (2-61)$$

وعندما $r=2$:

$$\mu'_2 = \frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} = E(T^2) \quad \dots (2-62)$$

ويمكن احتساب التباين لتوزيع ليندلي بالمعلمتين المقترح كما مبين في الصيغة الآتية:

$$\begin{aligned}
 Var(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\
 Var(T) &= \frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} - \left(\frac{ab^2+2b}{ab+1}\right)^2 \quad \dots (2-63)
 \end{aligned}$$

2-3-6-6 العزم المركزي (حول المتوسط) لتوزيع (NTPLD):

$$\begin{aligned}
 E(t - \mu)^r &= \int_0^{\infty} (t - \mu)^r f(t; b, a) dt \\
 &= \int_0^{\infty} (t - \mu)^r \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2}\right) e^{-\frac{t}{b}} dt \\
 &= \frac{1}{ab+1} \left[\int_0^{\infty} (t - \mu)^r \left(a + \frac{t}{b^2}\right) e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \\
 &= \frac{1}{ab+1} \left[\int_0^{\infty} a(t - \mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt + \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t - \mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \quad \dots (2-64)
 \end{aligned}$$

بأخذ الجزء الأول من معادلة (2-64) كالاتي:

$$\begin{aligned}
 1) \int_0^{\infty} a(t-\mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt &\Rightarrow \\
 a \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i t^{r-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 a \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \int_0^{\infty} t^{r-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 a \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \int_0^{\infty} t^{r-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \therefore \int_0^{\infty} a(t-\mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt = a \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \int_0^{\infty} t^{(r-i+1)-1} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = a \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \Gamma(r-i+1) b^{r-i+1} \dots (2-65) &
 \end{aligned}$$

وبأخذ الجزء الثاني من معادل (2-64) كالاتي:

$$\begin{aligned}
 2) \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t-\mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt &\Rightarrow \\
 \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} (t-\mu)^r t e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i t^{r-i} t e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i t^{r-i+1} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \int_0^{\infty} t^{r-i+1} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \therefore \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t-\mu)^r e^{-\frac{t}{b}} dt = \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \Gamma(r-i+2) b^{r-i+2} \dots (2-66) &
 \end{aligned}$$

وبتعويض معادلة (2-65) ومعادلة (2-66) في معادلة (2-64) نحصل الى العزم المركزي

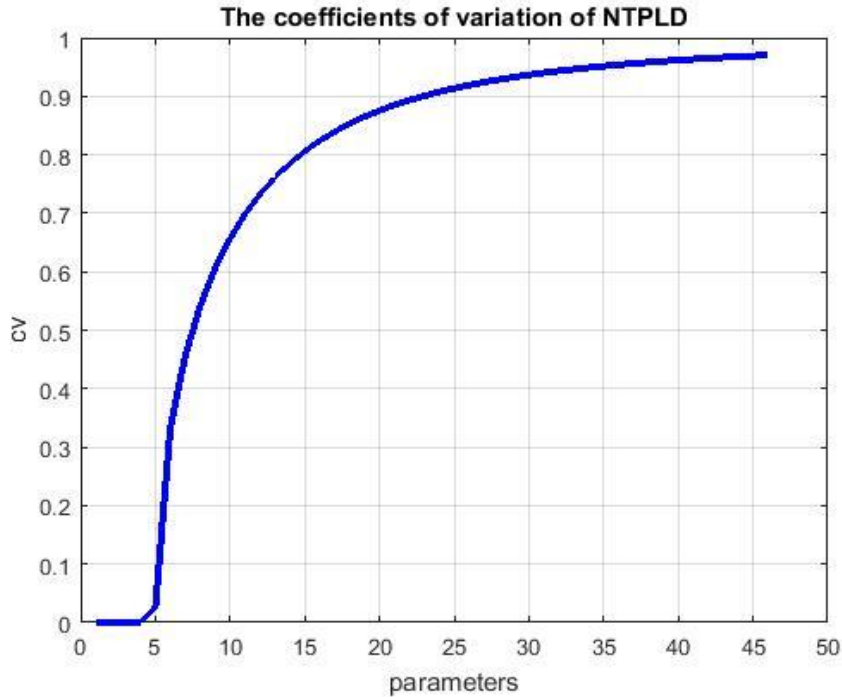
حول المتوسط الحسابي وكالاتي:

$$\therefore E(t-\mu)^r = \frac{1}{ab+1} \left[a \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \Gamma(r-i+1) b^{r-i+1} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-\mu)^i \Gamma(r-i+2) b^{r-i+2} \right] \dots (2-67)$$

2-6-3-7 معامل الاختلاف لتوزيع (NTPLD) : (C.V) Coefficient of variation

$$\begin{aligned}
C.V &= \frac{\sigma_t}{\mu_t} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} - \left[\frac{ab^2+2b}{ab+1}\right]^2}{\frac{ab^2+2b}{ab+1}}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} - \left[\frac{ab^2+2b}{ab+1}\right]^2}{\left[\frac{ab^2+2b}{ab+1}\right]^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1}}{\left[\frac{ab^2+2b}{ab+1}\right]^2} - 1} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1}}{\frac{(ab^2+2b)^2}{(ab+1)^2}} - 1} \\
&= \sqrt{\frac{(ab+1)(2ab^3+6b^2)}{(ab^2+2b)^2} - 1} \quad \dots (2-68)
\end{aligned}$$

الشكل (9-2) يبين سلوك معامل الاختلاف للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



شكل (9-2) سلوك معامل الاختلاف لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

2-6-3-8 معامل الالتواء (NTPLD) (C.S) Coefficient of Skewens

$$C.S = \frac{\mu'_3}{\mu'_2}$$

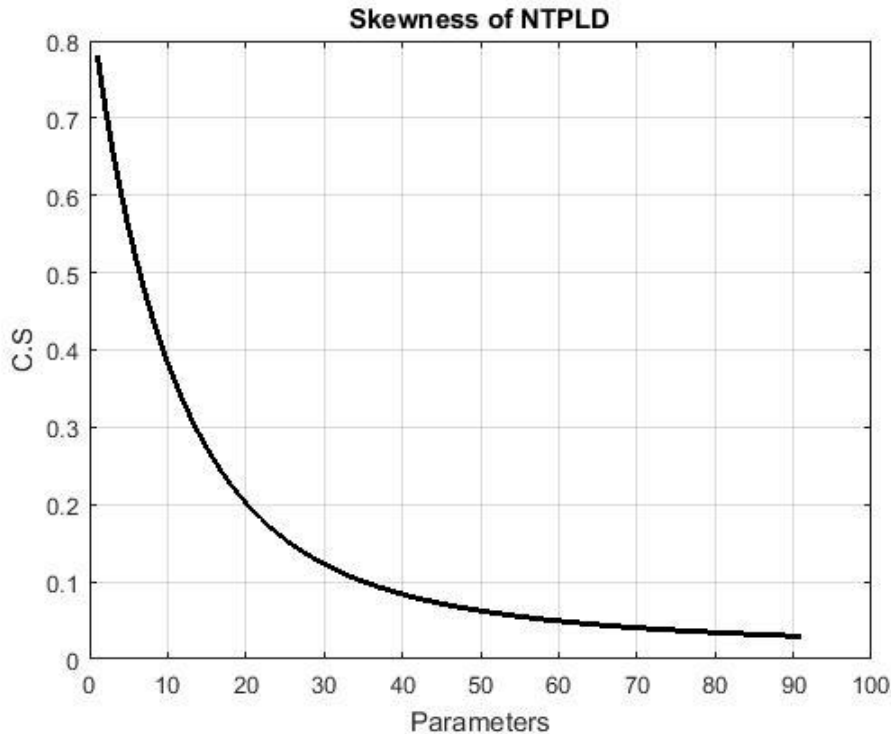
إذ أن :

μ'_3 العزم اللامركزي الثالث حول نقطة الأصل

μ'_2 العزم اللامركزي الثاني حول نقطة الأصل

$$\begin{aligned} C.S &= \frac{\frac{6ab^4+24b^3}{ab+1}}{\left(\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1}\right)^2} \\ &= \frac{6ab^4+24b^3}{ab+1} \cdot \frac{(ab+1)^2}{(2ab^3+6b^2)^2} \\ &= \frac{(ab+1)(ab^4+24b^3)}{(2ab^3+6b^2)^2} \end{aligned} \quad \dots (2-69)$$

والشكل (2-10) يبين سلوك منحنى الالتواء للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



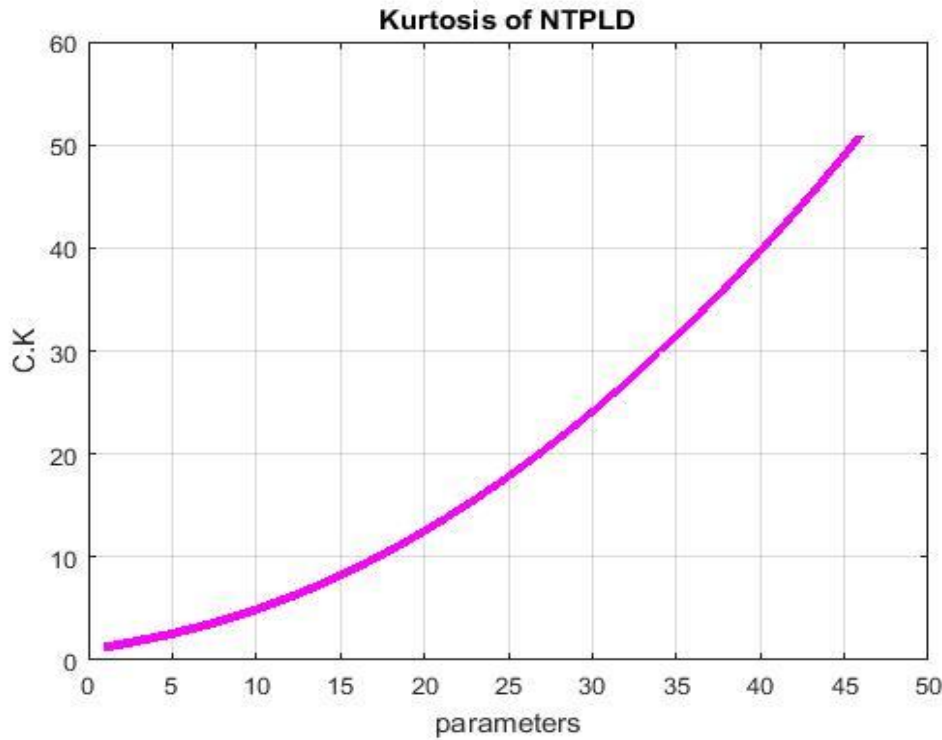
شكل (2-10) منحنى يبين سلوك معامل الالتواء لتوزيع (NTPLD)

(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

Coefficient of Kurtosis (C.K) (NTPLD) 9-3-6-2

$$\begin{aligned}
 C.K &= \frac{E(t-\mu_t)^4}{\sigma^4} \\
 &= \frac{\left[a \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (-\mu)^i \Gamma(5-i) b^{5-i} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (-\mu)^i \Gamma(6-i) b^{6-i} \right]}{(ab+1) \left(\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} \right)^4} \\
 C.K &= \frac{\left[a(ab+1)^3 \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (-\mu)^i \Gamma(5-i) b^{5-i} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (-\mu)^i \Gamma(6-i) b^{6-i} \right]}{(2ab^3+6b^2)^2} \dots(2-70)
 \end{aligned}$$

والشكل (11-2) يبين سلوك معامل التفلطح للتوزيع المقترح (NTPLD) عند قيم مختلفة لمعلمة القياس **b** ومعلمة الشكل **a**.



شكل (11-2) منحنى يبين سلوك معامل التفرطح لتوزيع (NTPLD)
(المصدر: عمل الباحثة بالاعتماد على برنامج MatLab)

10-3-6-2 الوسيط لتوزيع (NTPLD)

$$F(t; a, b) = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{(b + t + ab^2)}{b(ab + 1)} e^{-\frac{t}{b}} = 0.5$$

$$\frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}} = 0.5 \quad \dots (2-71)$$

ونلاحظ بان المعادلة (2-71) بأنها معادلة غير خطية ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طرائق عدديه تكرارية.

11-3-6-2 المنوال لتوزيع (NTPLD)

يتم حساب دالة المنوال mode للمتغير t حسب المعادلة الآتية :

$$\frac{\partial \ln f(t;a,b)}{\partial t} = 0 \quad \dots (2-72)$$

$$\begin{aligned} \ln f(t; a, b) &= \ln \left(\frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{ab+1} \right) + \ln \left(a + \frac{t}{b^2} \right) - \frac{t}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(t;a,b)}{\partial t} &= \frac{1}{b^2 \left(a + \frac{t}{b^2} \right)} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{b^2 \left(\frac{ab^2+t}{b^2} \right)} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{ab^2+t} - \frac{1}{b} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln f(t;a,b)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{ab^2+t} - \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{1}{ab^2+t} = \frac{1}{b}$$

$$b = ab^2 + t$$

$$t_{mode} = b - ab^2 \quad \dots (2-73)$$

12-3-6-2 الدالة المولدة للعزوم لتوزيع (NTPLD)

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$\mu_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{x}{b^2}\right) e^{-\frac{x}{b}} dx$$

$$= \frac{1}{ab+1} \int_0^{\infty} \left(\frac{ab^2+x}{b^2}\right) e^{-\frac{x}{b}+tx} dx$$

$$= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[\int_0^{\infty} (ab^2+x) e^{-x\left(\frac{1}{b}-t\right)} dx \right]$$

$$= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[\int_0^{\infty} ab^2 e^{-x\left(\frac{1}{b}-t\right)} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x\left(\frac{1}{b}-t\right)} dx \right]$$

$$= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[\frac{ab^2}{\left(\frac{1}{b}-t\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{b}-t\right)^2} \right]$$

$$= \frac{a}{(ab+1)\left(\frac{1}{b}-t\right)} + \frac{1}{b^2(ab+1)\left(\frac{1}{b}-t\right)^2}$$

$$= \frac{a}{(ab+1)} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}-t\right)} + \frac{1}{(b^2(ab+1))} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}-t\right)^2}$$

$$= \frac{a}{(ab+1)} \frac{1}{b\left(1-\frac{t}{b}\right)} + \frac{1}{b^2(ab+1)} \frac{1}{b^2\left(1-\frac{t}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{b(ab+1)} \frac{1}{(1-z)} + \frac{1}{b^4(ab+1)} \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\left[\frac{1}{1-Z} = 1 + Z + Z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \right]$$

$$M_X(t) = \frac{a}{b(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} Z^k + \frac{1}{b^4(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} Z^{2k}$$

$$= \frac{a}{b(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^k + \frac{1}{b^4(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^{2k}$$

$$= \frac{a}{b(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^k + \frac{1}{b^4(ab+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} \left(\frac{t}{b}\right)^{2k} \quad \dots (2-74)$$

2-6-3-13 الاحصاء المرتب لتوزيع ليندلي بالمعلمتين المقترح (NTPLD):

Order Statistic of NTPLD

لنفرض $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ تمثل عينة عشوائية من أزمنة البقاء حجمها n مسحوبة من توزيع ليندلي بمعلمتين وعلى فرض أن $T_K = t_{(K)}$ حيث $K=1, 2, \dots, n$ تمثل الاحصاءات المرتبة للتوزيع فيمكن احتساب توزيع الإحصاء المرتبة y_K كالآتي :

$$\begin{aligned} f_t(t_k) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(t_k) \{1 - F(t_k)\}^{n-k} f(t_k) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i F^{K+i-1}(t_k) f(t_k) \quad \dots (2-75) \end{aligned}$$

كما يمكن احتساب التوزيع التراكمي للإحصاء المرتبة t_k كالآتي:

$$\begin{aligned} F(t_k) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F^j(t_k) \{1 - F(t_k)\}^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-k}{i} (-1)^i F^{j+1}(t_k); K = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots (2-76) \end{aligned}$$

وبتطبيق المعادلتين (2-75) و (2-76) يمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي (PDF) والتوزيع التراكمي (CDF) للإحصاء المرتبة t_k في توزيع لندي بالمعلمتين NTPLD كالآتي :

$$\begin{aligned} f_t(t_k) &= \frac{n! \left(a + \frac{t}{b^2}\right) e^{-bt}}{(ab+1)(k-1)!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \left[1 - \frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} e^{-by} \right]^{k+i-1} \\ f_t(t_k) &= \frac{n! (b^2+t)e^{-bt}}{b^2(ab+1)(k-1)!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \left[1 - \frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} e^{-bt} \right]^{k+i-1} \quad \dots (2-78) \end{aligned}$$

وان :

$$F(t_k) = \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-k}{i} (-1)^i \left[1 - \frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} e^{-bt} \right]^{j+1} \quad \dots (2-79)$$

2-6-3-14 خاصية فقدان الذاكرة (Memorylessness property of NTPLD)

بافتراض ان مدة البقاء تتوزع لتوزيع ليندلي بالمعلمتين ، فإن العمر المقبل يكون $(t+\delta)$ وهذا لا يعتمد على عمره السابق T ويمكن ان يعبر عن ذلك رياضياً بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} P_r[T > t + \delta \setminus T > t] &= \frac{P_r(T > t + \delta)}{P_r(T > t)} = \frac{R(t + \delta)}{R(t)} \\ &= \frac{\left(\frac{b + (t + \delta) + ab^2}{b(ab + 1)}\right) e^{-\frac{(t + \delta)}{b}}}{\left(\frac{b + t + ab^2}{b(ab + 1)}\right) e^{-bt}} \\ &= \frac{b + (t + \delta) + ab^2}{b + t + ab^2} e^{-b\delta} \end{aligned} \quad \dots (2-80)$$

نلاحظ من معادلة (2-80) ان الدالة الناتجة مختلفة عن دالة البقاء لتوزيع ليندلي بالمعلمتين أي أن التوزيع للفترة المقبلة لا يتوزع ليندلي بمعلمتين أي انه لا يمتلك خاصية فقدان الذاكرة .

2-6-3-15 خاصية اعادة الذات (Self-Redundancy) NTPLD :

تعني بأنه إذا رتبنا أوقات الفشل بشكل تصاعدي (t_1, \dots, \dots, t_n) فإن توزيع اصغر عمر $L(t)$ يتوزع ليندلي بمعلمتين (هذا يعني انه يعيد نفسه) والعكس صحيح ، ويمكن إثباته رياضياً بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} F(t) &= P_r[T_{(1)} \leq t] \\ &= 1 - P_r[T_{(1)} > t] \\ P_r[T_{(1)} > t] &= P_r[T_{(1)} > t, T_{(2)} > t, \dots, \dots, T_{(n)} > t] \\ &= [R(t)]^n \end{aligned} \quad \dots (2-81)$$

$$\begin{aligned} F_{T_{(1)}} &= 1 - [R(t)]^n \\ &= 1 - \left[\left(\frac{b + t + ab^2}{b(ab + 1)} \right) e^{-bt} \right]^n \\ F_{T_{(1)}} &= 1 - \left[\left(\frac{b + t + ab^2}{b(ab + 1)} \right)^n e^{-nbt} \right] \end{aligned} \quad \dots (2-82)$$

بما ان توزيع اصغر عمر $L(t)$ هي ليس دالة ال **CDF** للتوزيع (أي لا يتوزع لتوزيع لنديلي) ، أذن **Two parameter Lindley distribution (NTPLD)** لا يمتلك خاصية إعادة الذات .

2-7 توزيع ويبل : (Weibull Distribution)

أُشتق هذا التوزيع من قبل العالم السويدي (Waloddi Weibull, 1939) ويعد واحداً من أهم التوزيعات الاحتمالية في دراسة المعولية ودوال البقاء ونمذجة اوقات الفشل للأجهزة والمعدات الكهربائية والمكان. [13],[25]

فالمتغير العشوائي T له توزيع ويبل (*Weibull Distribution*) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له كالاتي:

$$f(t; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t^\alpha) \quad ; t > 0 \quad \dots (2-83)$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل (*Shape Parameter*) و $\lambda > 0$ معلمة القياس (*Scale Parameter*) ، وان T يمثل المتغير العشوائي الوقت لحين الفشل.

إذا كان $t \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية *Cumulative Distribution Function* له هي :

$$F(t, \alpha, \lambda) = P(X \leq x) = \int_0^t f(u) du = 1 - \exp(-\lambda t^\alpha) \quad ; t \geq 0 \quad \dots (2-84)$$

وتعرف دالة المعولية (البقاء) للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$R(t) = \exp(-\lambda t^\alpha) \quad ; t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad \dots (2-85)$$

كما تعرف دالة المخاطرة للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$h(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} \quad t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad \dots (2-86)$$

وان العزم ذو المرتبة r حول نقطة الأصل هو:

$$ET^r = \int_0^\infty t^r f(t) dt = \frac{r \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha \lambda^\alpha} \quad ; r = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (2-87)$$

$$ET^2 = \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\alpha \lambda^\alpha} \quad \text{فان } r=2 \quad , \quad ET = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha \lambda^\alpha} \quad \text{فان } r=1$$

ويمكن احتساب التباين للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\ \text{Var}(T) &= \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\alpha \lambda^\alpha} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha \lambda^\alpha}\right)^2 \quad \dots (2-88) \end{aligned}$$

8-2 توزيع فريجت: (Frechet Distribution)

قُدِمَ هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي (Maurice Frechet) عام (1828-1973) ويعد من توزيعات أزمان الفشل (Failure times) ويستخدم في نمذجة معدلات الفشل وله تطبيقات واسعة في نمذجة العديد من الاحداث مثل الزلازل والهزات الارضية، الفيضانات، سقوط الامطار، سرعة الرياح، اختبارات الحياة، وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات الاطفال الرضع والدراسات البيولوجية وتحليل الاشارات الضوئية وبناء نماذج الأخطاء، وهو من التوزيعات المناسبة للملاءمة الجيدة لعينات البقاء على قيد الحياة. [20],[25]

فاذا كان المتغير العشوائي z له توزيع ويبل، فانه المتغير العشوائي $T = \frac{1}{z}$ له توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الاتية :

$$f(t; \alpha, \beta) = \alpha \beta t^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta t^{-\alpha}) ; t \geq 0 ; \alpha, \beta > 0 \quad \dots (2-89)$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل Shape Parameter و $\beta > 0$ معلمة القياس Scale Parameter ، وان المتغير العشوائي t يمثل الوقت لحين الفشل ، واذا كان $T \sim \text{Frechet}(\alpha, \beta)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية له (Cumulative Distribution Function) هي : [5],[22]

$$F(t; \alpha, \lambda) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du = \exp(-\beta t^{-\alpha}) ; t \geq 0 \quad \dots (2-90)$$

وتعرف دالة المعولية (البقاء) للتوزيع بالصيغة الاتية :

$$R(t) = 1 - \exp(-\beta t^{-\alpha}) ; t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad \dots (2-91)$$

كما يمكن وصف دالة المخاطرة للتوزيع بالصيغة الاتية :

$$h(t) = \alpha \beta t^{-(\alpha+1)} \frac{\exp(-\beta t^{-\alpha})}{1 - \exp(-\beta t^{-\alpha})} ; t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad \dots (2-92)$$

اما العزم ذو المرتبة (r) حول نقطة الاصل لتوزيع فريجت فيحسب كالآتي:

$$Et^r = \int_0^\infty t^r f(t) dt = \beta^{-\frac{r}{\alpha}} \Gamma(1 - \frac{r}{\alpha}) ; r = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (2-93)$$

اذا كان $r > \alpha$ فان العزوم للتوزيع غير موجود، وعندما $0 < r \leq \alpha$ فان العزوم غير موجودة ، وعندما يكون $0 < \alpha \leq 2$ فان العزوم موجودة ولكن التباين غير موجود.

$$Et = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \quad r=1 , \quad Et^2 = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) \quad \text{فان } r=1$$

2-9 طرق التقدير (NTPLD) :

2-9-1 طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method)

قدمت طريقة الإمكان الأعظم لأول مرة من قبل الباحث (Fisher, 1922) وتعد هذه الطريقة من الطرق المهمة في التقدير لأنها تعطي مقدرات لها خصائص جيدة مثل خاصية الثبات (Invariant) ، الكفاءة والكفاية وأحياناً خاصية الاتساق ، وان مبدأ هذه الطريقة يكمن في إيجاد مقدر المعلمة (المعلمات) الذي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ، وان صياغة دالة الامكان كانت عن طريق مجموعة من الافكار التي اشتملت على المعلمة (Parameter) والاتساق (Consistency) والكفاءة (Efficiency) بالإضافة الى التقدير (estimation) ، [30] .

وتعد دالة الامكان (Likelihood function) دالة احتمالية مشتركة لـ p من المتغيرات العشوائية والتي تستعمل في تقدير المعلمات وهي:

$$L = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \quad \dots (2-94)$$

وان (P) من المعادلات الناتجة من المشتقة الجزئية للوغاريتم دالة الامكان وبمساواتها بالصفر بالشكل الآتي:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_p} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots (2-95)$$

وبحل المعادلات (2-95) نحصل على مقدرات الامكان الاعظم (MLEs) :

$$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p$$

فاذا كانت لدينا عينة عشوائية (T_1, T_2, \dots, T_n) من توزيع (NTPLD) بدالة كثافة احتمالية كما في معادلة (2-55) ، فان دالة الامكان يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i, a, b)$$

$$L = \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b}} \quad \dots (2-96)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (2-96) ينتج:

$$\ln L = -n \ln(ab + 1) + \sum_{i=1}^n \ln \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} \quad \dots (2-97)$$

وللحصول على مقدرات **a** و **b** نأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة (2-97) بالنسبة (**a**, **b**) على التوالي ومساواتها الى الصفر نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \frac{-an}{ab+1} - \sum_{i=1}^n \frac{2 \frac{t_i}{b^3}}{a + \frac{t_i}{b^2}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b^2} \\ &= \frac{-an}{ab+1} - \sum_{i=1}^n \frac{2t_i}{b^3 \left[\frac{ab^2+t_i}{b^2} \right]} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b^2} \\ \therefore \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b^2} - \frac{\hat{a}n}{\hat{a}b+1} - \sum_{i=1}^n \frac{2 \sum_{i=1}^n t_i}{b(\hat{a}b^2+t_i)} = 0 \quad \dots (2-98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \frac{-bn}{ab+1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a + \frac{t_i}{b^2}} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \frac{-bn}{ab+1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{ab^2+t_i}{b^2}} \\ \therefore \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n \frac{b^2}{\hat{a}b^2+t_i} - \frac{\hat{b}n}{\hat{a}b+1} = 0 \quad \dots (2-99) \end{aligned}$$

ونلاحظ من المعادلتين (2-98) و (2-99) بأنها معادلة غير خطية ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طرائق عدديه تكرارية لغرض إيجاد مقدر \hat{b}_{mle} و \hat{a}_{mle} . وبعد ذلك يكون مقدر الامكان الاعظم لدالة البقاء لتوزيع (NTPLD) كالآتي:

$$\hat{R}_{mle}(t_i) = \frac{(\hat{b}_{mle}+t_i+\hat{a}_{mle}\hat{b}_{mle}^2)}{\hat{b}_{mle}(\hat{a}_{mle}\hat{b}_{mle}+1)} e^{-\frac{t_i}{\hat{b}_{mle}}} \quad \dots (2-100)$$

2-9-2 طريقة العزوم: (Moments Method)

تعتمد طريقة العزوم على ايجاد k من عزوم المجتمع بدلالة k من المعلمات ، ثم مساواة عزوم المجتمع بما يقابلها من عزوم العينة وبذلك نحصل على k معادلات (بعدد المعلمات) ، بحل المعادلات الناتجة نحصل على المقدرات المطلوبة. [36]

ان العزم الأول والثاني لتوزيع (NTPLD) كالآتي :

$$\mu_1 = \frac{ab^2+2b}{ab+1}$$

$$\mu_2 = \frac{2ab^3+6b^2}{ab+1}$$

وان العزم الأول والثاني للعينة كالآتي :

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$$

وبمساواة عزوم المجتمع مع عزوم العينة نتجت لدينا المعادلتان الآتيتان :

$$\frac{ab^2+2b}{ab+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \dots (2-101)$$

$$\frac{2ab^3+6b^2}{ab+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \dots (2-102)$$

ونلاحظ من معادلة (2-101) و (2-102) بأنها معادلة غير خطية ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طرائق عدديه تكرارية لغرض إيجاد مقدر \hat{b}_{mom} و \hat{a}_{mom} . وبذلك يكون مقدر العزوم لدالة البقاء لتوزيع (NTPLD) كالآتي:

$$\hat{R}_{mom}(t_i) = \frac{(\hat{b}_{mom} + t_i + \hat{a}_{mom} \hat{b}_{mom}^2)}{\hat{b}_{mom}(\hat{a}_{mom} \hat{b}_{mom} + 1)} e^{-\frac{t_i}{\hat{b}_{mom}}} \quad \dots (2-103)$$

2-9-3 طريقة المقدرات التجزئية: (Percentiles estimator)

أُقرحت طريقة المقدرات التجزئية (Per) لأول مرة من قبل العالم الانكليزي (Kao, 1959) عن طريق التقريب الرسومي لأفضل المقدرات الخطية غير المتحيزة . وفكرة هذه الطريقة هي ايجاد دالة الامكان للتوزيع عن طريق مساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الاحتمالي (CDF) بمقدر لا معلمي لدالة التوزيع التراكمية (Wi) والتي تأخذ صيغاً مختلفة، ومن ثم ايجاد مقدر المعلمة (المعلمات) بأخذ المشتقة الجزئية لدالة الامكان الناتجة لكل معلمة مراد تقديرها ومساواتها بالصفر وحل المعادلات الناتجة للحصول على المقدرات التجزئية للمعلمات.

فاذا كانت (T1 , T2, ,Tn) تتوزع وفق توزيع (NTPLD)، فان العينة المرتبة
 $(t_{1(1)}, t_{2(2)}, \dots, t_{n(n)})$ ، تمثل الاحصاءات المرتبة للعينة فان: [28],[12],[48]

$$Wi = F(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2-104)$$

إذ ان Wi هو مقدر لامعلمي لدالة الكثافة الاحتمالية التراكمية ياخذ عدة صيغ مقترحة منها:

$$Wi = \frac{i}{n+1}$$

$$Wi = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \quad \dots (2-105)$$

بتطبيق معادلة (2-104) ينتج :

$$Wi = 1 - \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}} \quad \dots (2-106)$$

ويأخذ المجموع لمربع اللوغاريتم الطبيعي ينتج :

$$\ln Wi = \ln \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}} \right)$$

$$\ln Wi - \ln \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}} \right) = 0 \quad \dots (2-107)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\ln Wi - \ln \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}} \right) \right)^2 = 0 \quad \dots (2-108)$$

وباشتقاق المعادلة (2-108) بالنسبة للمعلمة (b) و (a) على التوالي ومساواتها للصفر نحصل على المعادلتين الاتيتين :

$$\sum_{i=1}^n \left[\ln(W_i) - \ln \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)e^{-\frac{t}{b}}}{b(ab+1)} \right) \right] \frac{b(ab+1) \left(-\frac{t(b+t+ab^2)}{b^2} e^{-\frac{t}{b}} + e^{-\frac{t}{b}} (1+2ab) \right) - (b+t+ab^2) e^{-\frac{t}{b}} 2ab}{b^2(ab+1)^2 \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)e^{-\frac{t}{b}}}{b(ab+1)} \right)} = 0 \quad \dots (2-109)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\ln(W_i) - \ln \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)e^{-\frac{t}{b}}}{b(ab+1)} \right) \right] \frac{(b^2 e^{-\frac{t}{b}}) - (b+t+ab^2) \left(e^{-\frac{t}{b}} \right)^2 b^2}{b^2(ab+1)^2 \left(1 - \frac{(b+t+ab^2)e^{-\frac{t}{b}}}{b(ab+1)} \right)} = 0 \quad \dots (2-110)$$

والتي لا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طرائق عدديه تكرارية لغرض إيجاد مقدر \hat{b}_{per} و \hat{a}_{per} . وبالتعويض عن قيم المعلمات المقدره نحصل على مقدر العزوم لدالة البقاء لتوزيع (NTPLD) كالآتي:

$$\hat{R}_{per}(t) = \frac{(\hat{b}_{per} + t + \hat{a}_{per} \hat{b}_{per}^2)}{\hat{b}_{per}(\hat{a}_{per} \hat{b}_{per} + 1)} e^{-\frac{t}{\hat{b}_{per}}} \quad \dots (2-111)$$

4-9-2 طريقة العزوم في حالة التحيز : (Length-biased Moments Method)

أُقرحت هذه الطريقة من قبل [27] (Nanuwong & Bodhisuwan, 2014)، ومبدأ هذه الطريقة يعتمد على إيجاد العزم ذي الدرجة $(r+1)$ ، $E(T^{r+1})$ وقسمته على العزم الأول للتوزيع $E(T)$ لإيجاد العزم الذي يمثل طول التحيز (Length biased) $E_L(T^r)$ واستخراج عدة مقاييس إحصائية مثل المتوسط الحسابي والتباين ومعامل الالتواء ومعامل النقلح والحصول على أفضل ملاءمة (*fitting*) من خلال مقارنة عدة قيم افتراضية لمعاملات التوزيع، واختيار المقدرات التي تحقق أصغر قيمة لمعامل الالتواء والنقلح للتوزيع وكما يأتي: [27]

$$E_L(T^r) = \frac{E(T^{r+1})}{E(T)} \quad r = 1, 2, 3 \dots \quad \dots (2-112)$$

اذ أن :

$$\begin{aligned} E(T^{r+1}) &= \int_0^{\infty} t^{r+1} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{r+1} f(t; b, a) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{r+1} \frac{1}{ab+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} t^{r+1} \frac{1}{ab+1} \left(\frac{ab^2+t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{r+1} \frac{1}{b^2(ab+1)} (ab^2+t) e^{-\frac{t}{b}} dt \\
&= \frac{1}{b^2(ab+1)} \left[ab^2 \int_0^{\infty} t^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt + \int_0^{\infty} t^{r+2} e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \\
&= \frac{1}{b^2(ab+1)} [ab^2 (b^{r+2} \Gamma_{r+2}) + (b^{r+3} \Gamma_{r+3})] \\
&= \frac{ab^2 (b^{r+2} \Gamma_{r+2})}{b^2(ab+1)} + \frac{(b^{r+3} \Gamma_{r+3})}{b^2(ab+1)} \\
E(t^{r+1}) &= \frac{1}{(ab+1)} \left[a(b^{r+2} \Gamma_{r+2}) + \frac{(b^{r+3} \Gamma_{r+3})}{b^2} \right] \quad \dots (2-113)
\end{aligned}$$

وبقسمة المعادلة (2-113) على المعادلة (2-61) ينتج الآتي:

$$\begin{aligned}
E_L(T^r) &= \frac{E(T^{r+1})}{E(T)} \\
&= \frac{\frac{1}{(ab+1)} \left[a(b^{r+2} \Gamma_{r+2}) + \frac{(b^{r+3} \Gamma_{r+3})}{b^2} \right]}{\frac{ab^2+2b}{ab+1}} \\
&= \frac{\left[a(b^{r+2} \Gamma_{r+2}) + \frac{(b^{r+3} \Gamma_{r+3})}{b^2} \right]}{\frac{ab^2+2b}{ab+1}} \\
&= \frac{[ab^{r+4} \Gamma_{r+2} + b^{r+3} \Gamma_{r+3}]}{b^2(ab^2+2b)} \\
&= \frac{b^2 [ab^{r+2} \Gamma_{r+2} + b^{r+1} \Gamma_{r+3}]}{b^2(ab^2+2b)} \\
&= \frac{ab^{r+2} \Gamma_{r+2} + b^{r+1} \Gamma_{r+3}}{ab^2+2b} \quad \dots (2-114)
\end{aligned}$$

وعندما $r=1$ نحصل على:

$$\mu'_{l1} = \frac{2ab^3+6b^2}{ab^2+2b} = E_l(T) = \mu_l \quad \dots (2-115)$$

وعندما $r=2$:

$$\mu'_{l2} = \frac{6ab^4+24b^3}{ab^2+2b} = E_l(T^2) \quad \dots (2-116)$$

وعندما $r=3$:

$$\mu'_{l3} = \frac{24ab^5+120b^4}{ab^2+2b} = E_l(T^3) \quad \dots (2-117)$$

وان التباين يكون كالآتي:

$$\sigma^2_L = E_l(t^2) - (E_L(t))^2 \quad \dots (2-118)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2_L &= \frac{6ab^4 + 24b^3}{ab^2 + 2b} - \left(\frac{2ab^3 + 6b^2}{ab^2 + 2b} \right)^2 \\
&= \frac{6ab^4 + 24b^3}{ab^2 + 2b} - \frac{(ab^3 + 6b^2)^2}{(ab^2 + 2b)^2} \\
&= \frac{(ab^2 + 2b)(6ab^4 + 24b^3) - (ab^3 + 6b^2)^2}{(ab^2 + 2b)^2} \quad \dots (2-119)
\end{aligned}$$

وان معامل الاختلاف في حالة التحيز يكون كالآتي:

$$C.V = \frac{\sqrt{\sigma^2_L}}{E_l(t)} \quad \dots (2-120)$$

$$\begin{aligned}
C.V &= \frac{\sqrt{\frac{(ab^2 + 2b)(6ab^4 + 24b^3) - (ab^3 + 6b^2)^2}{(ab^2 + 2b)^2}}}{\frac{2ab^3 + 6ab^4}{ab + 1}} \\
&= \frac{(ab + 1)\sqrt{(ab^2 + 2b)(6ab^4 + 24b^3) - (ab^3 + 6b^2)^2}}{(ab^2 + 2b)(2ab^3 + 6ab^4)} \quad \dots (2-121)
\end{aligned}$$

وان معامل الانتواء في حالة التحيز يكون كالآتي:

$$C.S = \frac{\mu'_{13}}{\mu'_2{}^2} \quad \dots (2-122)$$

$$\begin{aligned}
C.S &= \frac{\frac{24ab^5 + 120b^4}{ab^2 + 2b}}{\left(\frac{6ab^4 + 24b^3}{ab^2 + 2b} \right)^2} \\
&= \frac{24ab^5 + 120b^4}{(ab^2 + 2b) \frac{(6ab^4 + 24b^3)^2}{(ab^2 + 2b)^2}} \\
&= \frac{((ab^2 + 2b)(4ab^5 + 120b^4))}{(6ab^4 + 24b^3)^2} \quad \dots (2-123)
\end{aligned}$$

وان معامل التفلطح في حالة التحيز يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$C.K = \frac{E(x - \mu)^4}{\sigma^4_L} \quad \dots (2-124)$$

$$\sigma^4_L = \sigma^2_L \sigma^2_L = \frac{\left((ab^2 + 2b)(6ab^4 + 24b^3) - (ab^3 + 6b^2)^2 \right)^2}{(ab^2 + 2b)^4} \quad \dots (2-125)$$

وان العزم المركزي الرائي (حول المتوسط الحسابي) في حالة التحيز يمكن اشتقاقه كالاتي:

$$\begin{aligned}
 E(t - \mu_{11})^{r+1} &= \int (t - \mu)^{r+1} f(t; b, a) dt \\
 &= \int_0^{\infty} (t - \mu_{11})^{r+1} \frac{1}{ab + 1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} dt \\
 &= \frac{1}{ab + 1} \left[\int_0^{\infty} (t - \mu_{11})^{r+1} \left(a + \frac{t}{b^2} \right) e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \\
 &= \frac{1}{ab+1} \left[\int_0^{\infty} a(t - \mu'_{11})^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt + \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t - \mu'_{11})^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt \right] \quad \dots (2-126)
 \end{aligned}$$

نجد أولاً تكامل الجزء الأول من المعادلة (2-126) وكالاتي:

$$\begin{aligned}
 1) \int_0^{\infty} a(t - \mu'_{11})^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt &\Rightarrow \\
 a \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i t^{r+1-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = a \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i \int_0^{\infty} t^{r+1-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 \therefore \int_0^{\infty} a(t - \mu_{11})^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt &= a \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu_{11})^i \int_0^{\infty} t^{(r+1-i+1)-1} e^{-\frac{t}{b}} dt \\
 &= a \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(r - i + 2) b^{r-i+2} \quad \dots (2-127)
 \end{aligned}$$

نجد الآن تكامل الجزء الثاني من المعادلة (2-126) وكالاتي:

$$\begin{aligned}
 2) \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t - \mu)^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} (t - \mu)^{r+1} t e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i t^{r+1-i} t e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i t^{r+2-i} e^{-\frac{t}{b}} dt & \\
 = \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i \int_0^{\infty} t^{r+2-i} e^{-\frac{t}{b}} dt &
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{t}{b^2} (t - \mu'_{11})^{r+1} e^{-\frac{t}{b}} dt = \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i \Gamma(r+3-i) b^{r+3-i} \dots (2-128)$$

نعوض المعادلة (2-127) و (2-128) في معادلة (2-126) ينتج الآتي:

$$\therefore E(t - \mu_{11})^r = \frac{1}{ab+1} \left[a \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(r-i+2) b^{r-i+2} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-\mu'_{11})^i \Gamma(r+3-i) b^{r+3-i} \right] \dots (2-129)$$

و نحصل على معامل التفلطح بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} C. K &= \frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4_L} \\ &= \frac{\frac{1}{ab+1} \left[a \sum_{i=0}^5 \binom{4+1}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(6-i) b^{6-i} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(7-i) b^{7-i} \right]}{\left(\frac{(ab^2+2b)(6ab^4+24b^3) - (ab^3+6b^2)^2}{(ab^2+2b)^4} \right)^2} \\ &= \frac{(ab^2+2b)^4 \left[a \sum_{i=0}^5 \binom{4+1}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(6-i) b^{6-i} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} (-\mu_{11})^i \Gamma(7-i) b^{7-i} \right]}{(ab+1) \left((6ab^3+6ab^4) - (2ab^4+24ab^5)^2 \right)^2} \dots (2-130) \end{aligned}$$

2-9-5 طريقة بيز القياسية: (Standard Bayesian method)

تفترض المدرسة البيزية أن المعلمة (المعلمات) المجهولة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي تعد كمتغيرات عشوائية وان هنالك معلومات سابقة عنها (اولية) تصاغ تلك المعلومات على شكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الاولية (**Prior Probability function**) إذ يتم التعرف على هذه المعلومات من بيانات وتجارب سابقة او من النظرية التي تحكم الظاهرة. وايضاً تعتمد نظرية بيز على المعلومات الحالية للعينة التي يمكن ان تمثل بدالة الامكان (**Likelihoods Function**) الخاصة بالملاحظات. ودمج دالة الكثافة الاحتمالية الاولية للمعلمات مع دالة الامكان الاعظم للملاحظات الحالية نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق (**Posterior**). وفي طريقة بيز نستعمل دالة خسارة (Loss Function) وهي دالة

يمكن من خلالها قياس الخسارة الناتجة من اتخاذ القرار بالاعتماد على قيمة $(\hat{\theta})$ بينما القرار الواجب اتخاذه يعتمد على (θ) . [12],[2],[1]. ويمكن ذكر العناصر الأساسية لطريقة بيز هي :

- 1- الدالة الاحتمالية لتوزيع البيانات $f(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta)$ ومنها نحصل على دالة الامكان للمشاهدات الحالية $l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta)$.
- 2- معرفة الاحتمال السابق (prior distribution) (قبل المعاينة) $\pi(\theta)$
- 3- الاحتمال اللاحق (Posterior Distribution) (بعد المعاينة) $h(\theta_i | t_1, t_2, \dots, t_n)$ باستعمال صيغة بيز العكسية (Bays Inversion Formula) وكالاتي:

$$h(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta)}{\int l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta) d\theta} \quad \dots (2-131)$$

[14], [3], [1].

وللحصول على مقدر بيز القياسي يجب استعمال احدى دوال الخسارة الشائعة ومنها دالة الخسارة التربيعية وصيغتها كالاتي:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = a_0 (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad \dots (2-132)$$

إذ أن a_0 هو ثابت موجب نفرض بانه يساوي واحداً لأنه لا يؤثر في ايجاد مقدر بيز حيث يُحذف عند الاشتقاق لمقدر بيز بالنسبة لهذه الدالة ، فتصبح صيغة دالة الخسارة التربيعية بالشكل الآتي:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad \dots (2-133)$$

فان مقدر بيز القياسي في ظل دالة الخسارة التربيعية الذي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن كالاتي :

$$\begin{aligned} Risk &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= \int_{\forall \theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 h(\theta_i | t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \\ &= \int_{\forall \theta} (\hat{\theta}^2 - 2\theta \hat{\theta} + \theta^2) h(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \\ &= \hat{\theta}^2 - 2\theta E(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) + E(\theta^2 | t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \dots (2-134) \end{aligned}$$

وباشتقاق المعادلة (2-134) بالنسبة لـ $\hat{\theta}$ ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\hat{\theta} - \theta)^2}{\partial \hat{\theta}} &= 0 \\ &= 2\hat{\theta} - 2E(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \\ \therefore \hat{\theta}_{SBayes} &= E(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \dots (2-135) \end{aligned}$$

إذ أن:

$\underline{\theta}$ متجه المعلمات المراد تقديرها

$\hat{\underline{\theta}}$ متجه المعلمات المقدرة

$\hat{\underline{\theta}}_{SBayes}$ متجه المعلمات المقدرة بموجب طريقة بيز القياسية اللامعلوماتية في ظل دالة الخسارة التربيعية

ونلاحظ ان مقدر بيز القياسي $\hat{\underline{\theta}}_{SBayes}$ للمعلمات $\underline{\theta}$ ما هو الا متوسط التوزيع اللاحق (Posterior mean) للمعلمة العشوائية ($\underline{\theta}$) ، لذلك فان مقدر بيز القياسي لدالة البقاء هو التوقع الشرطي اللاحق لدالة البقاء أي أن : [10],[29]

$$\hat{R}_{SBayes}(t_1, t_2, \dots, t_n) = E(R|t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \dots (2-136)$$

افترض ان التوزيعات الأولية للمعلمات b و a كالآتي:

$a \sim \text{Gamma}(a_1, b_1)$

$b \sim \text{Gamma}(a_2, b_2)$

وأن تكون دالة التوزيع الاولي (Prior Distribution) لكل معلمة كالآتي:

$$\pi_1(b) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} b^{a_1-1} e^{-a_1 b} \quad \dots (2-137)$$

$$\pi_2(a) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} a^{a_2-1} e^{-a_2 a} \quad \dots (2-138)$$

وأن التوزيع الاولي المشترك (Joint Prior) يكون كالآتي: [9]

$$\pi(b, a) = \pi_1(a)\pi_2(b)$$

$$\pi(b, a) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} b^{a_1-1} e^{-a_1 b} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} a^{a_2-1} e^{-a_2 a} \quad b_1, b_2, a_1, a_2, > 0$$

$$\pi(b, a) = \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} b^{a_1-1} a^{a_2-1} e^{-a_1 b} e^{-a_2 a} \quad a_1, a_2 > 0 \quad \dots (2-139)$$

وان دالة الإمكان للمشاهدات t_1, t_2, \dots, t_n بالشكل الآتي:

$$l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(t_i, a, b) \quad \dots (2-140)$$

$$l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) = \left(\frac{1}{ab+1} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2} \right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b}} \quad \dots (2-141)$$

فان التوزيع المشترك اللاحق (Joint Posterior distribution) للمعلمات a و b عند البيانات المشاهدة يمكن الحصول عليه كالاتي:

$$h(\underline{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(b, a)}{\int_b^\infty \int_a^\infty l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(b, a) db da}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{ab+1}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b}} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} b^{a_1-1} a^{a_2-1} e^{-a_1 b} e^{-a_2 a}}{\int_b^\infty \int_a^\infty \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b}} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} b^{a_1-1} a^{a_2-1} e^{-a_1 b} e^{-a_2 a} db da}$$

$$\therefore h(\underline{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a}}{\int_b^\infty \int_a^\infty \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a} db da} \dots (2-142)$$

وعليه فان مقدر بيز لمعلمات توزيع (NTPLD) في ظل دالة الخسارة التربيعية يمكن ان نحصل عليه كالاتي:

$$\hat{\theta}_{SBayes} = E(\underline{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\int_b^\infty \int_a^\infty (\underline{\theta} - \underline{\theta})^2 \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a} db da}{\int_b^\infty \int_a^\infty \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a} db da} \dots (2-143)$$

وبذلك يكون مقدر بيز لدالة البقاء لتوزيع (NTPLD) كالاتي:

$$\hat{R}_{SBayes} = E(R | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\int_b^\infty \int_a^\infty \left(\frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}}\right) \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a} db da}{\int_b^\infty \int_a^\infty \left(\frac{1}{ab+1}\right)^n b^{a_1-1} a^{a_2-1} \prod_{i=1}^n \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{b} - a_1 b - a_2 a} db da} \dots (2-144)$$

نلُحظ من المعادلة (2-144) انها ليس لها صيغة مغلقة للحل وغير محكمة نظرياً لاستخراج مقدر دالة البقاء لابد من استعمال اسلوب تقريبي عددي لحساب هذه التكاملات المعقدة وهو تقريب ليندلي (Lindley Approximation) كما في ملحق (C).

2-10 معايير المقارنة : (Comparison Criterians)

2-10-1 معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي : (Integrated Mean square Error)

تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين طرائق التقدير المطبقة. وصيغة هذا المقياس تكون كما يأتي:

$$IMSE(\hat{R}(t)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\hat{R}_i(t_j) - R_i(t_j) \right)^2 \right] \dots (2-145)$$

$$= \frac{1}{r_i} \sum_{i=1}^r MSE(\hat{R}(t_i)) \quad ; i=1,2,\dots,r \quad \dots (2-146)$$

اذ أن:

r : يمثل عدد مرات تكرار التجربة

n_i : معبرة عن حدود المتغير (t_i) أي من الحد الأدنى (Lower Bound) إلى الحد الأعلى (Upper Bound)

كما تم الاعتماد على المعايير التالية لغرض المقارنة بين النماذج الستة وهي (انموذج توزيع ليندلي بالمعلمة الواحدة ، انموذج توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة الأولى، انموذج توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة الثانية ، انموذج توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة المقترحة ، انموذج توزيع وييل ، و انموذج توزيع فريجت) وكما يأتي:

$$\underline{-2\text{Ln}L(\hat{\theta}|t) \text{ اختبار } 2-10-2}$$

$$AA = -2\text{Ln}L(\hat{\theta}|t) \quad \dots (2-147)$$

$L(\hat{\theta}|t)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

3-10-2 اختبار اكيي (AIC) Akaike's Test

اقترح اختبار اكيي (AIC) من لدن الباحث (Akaike's 1977)

$$AIC = -2L(\hat{\theta}|t) + 2p \quad \dots (2-148)$$

$L(\hat{\theta}|t)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

P : عدد المعلمات

$\hat{\theta}$: المعلمات المقدره .

4-10-2 اختبار اكيي المتسق (CAIC)

ان الصيغة لاختبار حسن المطابقة اكيي المتسق (CAIC) هي كما يأتي:

$$CAIC = -2L(\hat{\theta}|t) + \frac{2np}{n-p-1} \quad \dots (2-149)$$

و ان n تمثل حجم العينة.

Bayes Akaike's Test اختبار بيز اكيكى 5-10-2

معيار يستعمل كاختبار لحسن المطابقة (GOF) ويرمز له اختصاراً ب (BIC) ان الصيغة لهذا الاختبار هي :

$$BIC = -2L(\hat{\theta}|t) + p \log(n) \quad \dots (2-150)$$

وان :

$L(\hat{\theta}|t)$ تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

p : تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية. n تمثل حجم العينة.

Hannan-Quinn information Criterion اختبار 6-10-2

يرمز له اختصاراً (HQIC) وتكون الصيغة لهذا الاختبار هي كما يأتي:

$$HQIC = 2 \ln \left(\ln(n) \left(p - 2L(\hat{\theta}|t) \right) \right) \quad \dots (2-151).$$

3

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

3-1 تمهيد Preface

لقد تضمن هذا الفصل وصف لتجارب المحاكاة وعرض لاهم نتائج التجارب التي أجريت باستعمال اسلوب المحاكاة مونتني - كارلو Monte-Carlo Simulation لاختبار افضلية النماذج التي تم استعمالها عند طرائق التقدير التي عرضت في الجانب النظري من الرسالة باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي Integrated Mean Square Error (IMSE) عند أحجام العينات المفترضة وقيم المعلمات الافتراضية وكذلك اختيار الانموذج الافضل من بين النماذج المستعملة باستعمال المعايير $(-2\text{Ln}L, \text{AIC}, \text{AICc}, \text{BIC}, \text{HQIC})$.

3-2 مفهوم المحاكاة Simulation Concept

تعد عملية المحاكاة تطبيق لعمل الباحث الذي قام به على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة او قياس اداء معين لغرض دراسة السلوك وتعميم النتائج على الواقع الحقيقي ، اي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام افضل ما يكون و دراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت . وكثيرا ما نجد في الواقع الحقيقي ان هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الادراك للعملية الاصلية او الواقع الحقيقي من خلال محاكاة الانموذج، ومن الطبيعي ان درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة انموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي. [43]

3-3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة:

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الاتية:

3-3-1 المرحلة الأولى: اختيار القيم الافتراضية

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

1- تعيين حجوم العينات الافتراضية وكما يأتي:

$n = 10, 25, 50, 75, 100, 150$

2- اختيار قيم المعلمات الافتراضية (التجريبية) كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول رقم (1-3) قيم المعلمات الافتراضية

Theoretical Parameters	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0.75	1.5	0.4	2.9	3.3	3	5	0.1
b	1	0.5	2	1	1.5	2	5	5

3- تكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ (r = 1000) لكل تجربة.

2-3-3 المرحلة الثانية: توليد البيانات

1-2-3-3 توليد بيانات توزيع ليندلي بمعلمة واحدة (LD):

في هذه المرحلة يجري توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) وعلى وفق ليندلي ذي المعلمة الواحدة المعرف بالصيغة (2-9) ، وفقاً لطريقة الرفض والقبول (Reject & accept) وكما يأتي :
أ- توليد متغير عشوائي U_i يتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0, 1)

$$U_i \sim u(0, 1) , i = 1, 2, \dots, n .$$

U_i : يمثل متغير عشوائي مستمر يتم توليده باستخدام البرنامج الجاهز ماتلاب في الحاسبة الألكترونية على وفق الصيغة الآتية :

$$u = \text{rand}(1, n) \quad \dots (3-1)$$

ب- توليد المتغير العشوائي V_i الذي يتبع التوزيع الأسّي Exponential Distribution بالمعلمة b على وفق الصيغة الآتية:

$$V_i \sim \text{exp.}(b) , i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3-2)$$

V_i : يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي يتم الحصول عليه باستخدام البرنامج الجاهز ماتلاب في الحاسبة الألكترونية على وفق الصيغة الآتية :

$$v = \text{expnd}((1/a), 1, n) \quad \dots (3-3)$$

ج- توليد المتغير العشوائي W_i الذي يتبع توزيع كما Gamma Distribution بالمعلمتين (2, b) باستخدام البرنامج الجاهز ماتلاب في الحاسبة الألكترونية على وفق الصيغة الآتية:

$$W_i \sim \text{gamma}(2, b) , i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3-4)$$

W_i : يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع كما ويتم الحصول عليه باستخدام الحاسبة الألكترونية في برنامج ماتلاب على وفق الصيغة الآتية:

$$w = \text{gamrnd}(2, b, n); \quad \dots (3-5)$$

د- اذا كان $U_i \leq \frac{b}{b+1}$ فإن $t_i = V_i$ ، واذا كان غير ذلك فإن $t_i = W_i$.

3-3-2 توليد بيانات توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة الأولى (TPLD1):

في هذه المرحلة سيتم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) وفق توزيع ليندلي ذي المعلمتين المعروف بالمعادلة (2-18) باستعمال دالة (Lambert W function) والتي تنص على: [24],[32]

$$z = \omega e^{\omega z} \quad \dots (3-6)$$

فاذا كانت دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندلي بمعلمتين كالآتي:

$$F(t, a, b) = 1 - \left[\frac{b+a+abt}{b+a} \right] e^{-bt}$$

ولیکن $u \in (0,1)$ رقماً عشوائياً فإنه :

$$F(t, a, b) = u$$

$$u = 1 - \left[\frac{b+a+abt}{b+a} \right] e^{-bt} \quad \dots (3-7)$$

$$(b+a)(1-u)e^{bt} = (b+a+abt) \quad \dots (3-8)$$

وبضرب طرفي المعادلة (3-8) بـ $\frac{1}{a}$ ينتج :

$$\frac{(b+a)}{a} + bt = \frac{(b+a)}{a} (1-u)e^{bt} \quad \dots (3-9)$$

وبإضافة المقدار $-\frac{b+a}{a}(1-u)e^{bt}$ لطرفي المعادلة (3-9) نحصل على :

$$\frac{(b+a)}{a} + bt - \frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{bt} - \frac{b+a}{a} = \frac{(b+a)}{a}(1-u)e^{bt} - \frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{bt} - \frac{b+a}{a}$$

$$bt - \frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{bt} = -\frac{b+a}{a}$$

$$\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{bt} \right] = -bt - \frac{b+a}{a}$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $e^{-bt - \frac{b+a}{a}}$ ينتج :

$$\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{bt} \right] e^{-bt - \frac{b+a}{a}} = \left[-bt - \frac{b+a}{a} \right] e^{-bt - \frac{b+a}{a}}$$

$$\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a) \right] e^{-\frac{b+a}{a}} = \left[-bt - \frac{b+a}{a} \right] e^{-bt - \frac{b+a}{a}} \quad \dots (3-10)$$

ليكن $w = -bt - \frac{b+a}{a}$ فإن المعادلة (3-10) تصبح :

$$\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a) \right] e^{-\frac{b+a}{a}} = we^w \quad \dots (3-11)$$

ونلاحظ من معادلة (3-11) بان المقدار $-bt - \frac{b+a}{a}$ هي دالة لامبرت (Lambert W Function) للصيغة الحقيقية $e^{-\frac{b+a}{a}}(1-u)(b+a)$ فاننا نحصل على :

$$-bt - \frac{b+a}{a} = \mathbf{w}\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{-\frac{b+a}{a}}\right]$$

وهذا يعني انه لاي $b > 0$ و $t > 0$ فانه مباشرة يكون $-bt - \frac{b+a}{a} > 0$ ويمكن اختبار الآتي:

$$-\left(\left(bt + \frac{b+a}{a}\right)e^{-\left(bt + \frac{b+a}{a}\right)}\right) = -\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{-\frac{b+a}{a}} \in \left(\frac{1}{e}, 0\right) \quad \dots (3-12)$$

وطالما ان $u \in (0,1)$ فاننا نأخذ بالحسبان خصائص الجزء السالب من دالة لامبرت \mathbf{w} التي تصبح:

$$\mathbf{w}_{-1}\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{-\frac{b+a}{a}}\right] = -\left(bt + \frac{b+a}{a}\right) \quad \dots (3-13)$$

الذي يؤدي الى ان:

$$\mathbf{t}_i = -\frac{b+a}{ab} - \frac{1}{b}\mathbf{w}_{-1}\left[-\frac{1}{a}(1-u)(b+a)e^{-\frac{b+a}{a}}\right] \quad \dots (3-14)$$

3-2-3-3 توليد بيانات توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة الثانية (TPLD2) :

في هذه المرحلة سيتم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) وعلى وفق توزيع ليندلي ذي المعلمتين المعروف بالمعادلة (2-30) بالجانب النظري باستعمال دالة (Lambert W function) بنفس الاسلوب في النقطة 2 اعلاه كما مبين في الملحق رقم (A) التي تنص على الاتي :

$$z = \omega e^{\omega z} \quad \dots (3-15)$$

وطالما ان $u \in (0,1)$ فاننا نأخذ بالحسبان خصائص الجزء السالب من دالة لامبرت \mathbf{w} التي تصبح:

$$\mathbf{w}_{-1}\left[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}\right] = -(bt + (ab+1)) \quad \dots (3-16)$$

الذي يؤدي الى ان:

$$\mathbf{t}_i = -(ab+1) - \frac{1}{b}\mathbf{w}_{-1}\left[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}\right] \quad \dots (3-17)$$

3-2-3-4 توليد بيانات توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة المقترحة :

في هذه المرحلة سيتم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) وعلى وفق توزيع ليندلي ذي المعلمتين المعروف بالمعادلة (2-55) بالجانب النظري بالصيغة المقترحة باستعمال دالة (Lambert W function) كما مبين في الملحق رقم (B) والتي تنص على :

$$z = \omega e^{\omega z} \quad \dots (3-18)$$

وطالما ان $u \in (0,1)$ فاننا نأخذ بالحسبان خصائص الجزء السالب من دالة لامبرت w التي تصبح :

$$w_{-1}[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}] = -\left(\frac{t}{b} + (ab+1)\right) \quad \dots (3-19)$$

الذي يؤدي الى ان:

$$t_i - (ab+1) - bw_{-1}[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}] \quad \dots (3-20)$$

3-3-2-5 توليد بيانات توزيع ويبيل Weibull Distribution :

تم ايجاد معكوس دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ويبيل حسب الصيغة الآتية:

$$t_i = \left(-\frac{\ln(1-u)}{b}\right)^{\left(\frac{1}{a}\right)} \quad \dots (3-21)$$

3-3-2-6 توليد بيانات توزيع معكوس فريجت Frechet Distribution :

تم ايجاد معكوس دالة الكثافة التجميعية لتوزيع معكوس فريجت حسب الصيغة الآتية:

$$t_i = b \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{\left(-\frac{1}{a}\right)} \quad \dots (3-22)$$

3-3-3 المرحلة الثالثة :

في هذه المرحلة تم تقدير دالة (المعولية) البقاء لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة (LD) وتوزيع ليندلي بمعلمتين الشكل الأول (TPLD1) وتوزيع ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني (TPLD2) وتوزيع ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد (NTPLD) وتوزيع ويبيل (WD) وتوزيع فريجت (Frechet) بموجب الطرائق المستعملة في التقدير وكالاتي:

1- طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method):

تم الحصول على دالة المعولية (البقاء) بموجب طريقة الامكان الأعظم \hat{R}_{ML} بالصيغة (2-100) في الجانب النظري ضمن طرائق عددية تكراريه .

2- طريقة العزوم (Moments Methods) :

تم الحصول على مقدر دالة البقاء بموجب طريقة العزوم \hat{R}_{Mom} بالصيغة (2-103) في الجانب النظري ضمن طرائق عددية تكرارية.

3- طريقة المقدرات التجزئية (Percentiles Methods) :

تم الحصول على مقدر دالة البقاء بموجب طريقة المقدرات التجزئية \hat{R}_{Per} بالصيغة (2-111) في الجانب النظري ضمن طرائق عددية تكرارية.

4- طريقة العزوم في حالة التحيز (Length-biased Moments Method) :

تم الحصول على مقدر دالة البقاء بموجب طريقة المقدرات التجزئية \hat{R}_{Bml} في الجانب النظري الفقرة (2-9-4) ضمن طرائق عددية تكرارية.

3-3-4 المرحلة الرابعة: معايير الدقة والمقارنة :

وهي المرحلة الأخيرة أذ يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير دالة المعولية (البقاء) للتوزيعات الاحتمالية المستخدمة لغرض الوصول للتقدير الأكفأ من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة عن طريق معايير المقارنة وكما مبين في الفقرة (2-10) في الجانب النظري.

3-4 مناقشة نتائج تجارب المحاكاة :

سيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير دالة المعولية للنماذج المدروسة حسب الطرائق المبينة في الجانب النظري. أذ تم الحصول على هذه النتائج باعتماد برنامج كُتِبَ بلغة (Math lab. Ver.2015).

ولغرض توضيح مختصرات الرموز التي وردت في جداول تحليل نتائج تجارب المحاكاة فستكون كما يأتي:

جدول (2-3) مختصرات طرائق التقدير

المختصر	الطريقة	
R_{Real}	المعولية (دالة البقاء) الحقيقية	
\hat{R}_{Mle}	المعولية (دالة البقاء) المقدرة بطريقة الأماكن	
\hat{R}_{Mom}	المعولية (دالة البقاء) المقدرة بطريقة العزوم	
\hat{R}_{Per}	المعولية (دالة البقاء) المقدرة بطريقة المقدرات التجزئية	
\hat{R}_{bml}	المعولية (دالة البقاء) المقدرة بطريقة العزوم في حالة التحيز	
Model	1	انموذج ليندلي بمعلمة واحدة LD
	2	انموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الاول TPLD1
	3	انموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني TPLD2
	4	نموذج ليندلي بمعلمتين المقترح NTPLD
	5	انموذج وييل WD
	6	انموذج فريجت FD

وفيما يأتي نتائج تجارب المحاكاة في الجداول التي سيتم تحليلها وكما يأتي:

1- التجربة الأولى :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.75$ ، $b = 1$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (3-3)

(3-3) دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعاملات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج ($-2LnL$, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

($n=10,25,50,75,100,150$) عند القيمة الافتراضية للمعاملات $a=0.75$ ، $b = 1$

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		Risk _{Real}	Risk _{mle}		Risk _{mom}		Risk _{per}		Risk _{bml}		
		-2LnL	AIC		AICc		BIC		HQIC		
10	1			1.28068		1.59001		0.59301		2.16177	\hat{R}_{Per}
		0.71981	0.51636	0.00046	0.42703	0.00094	0.79079	0.00006	0.30766	0.00182	
		0.43228	0.89337		1.17769		0.30782		1.71791		
		12.71725	15.95156		17.56585		16.45673		6.92486		
	2		1.30766	1.05604	0.12330	0.94248	1.21539	0.99597	0.86037	1.89689	\hat{R}_{mle}
		0.48865	0.50617	0.00039	0.41924	0.00542	0.52323	0.00134	0.27808	0.05032	
		0.71058	0.69786		0.84661		0.65304		1.53560		
		12.60912	15.69964		17.41392		16.30481		6.90280		
	3		1.04060	0.99857	0.50060	1.10181	2.64572	0.90062	0.83430	1.72922	\hat{R}_{Mom}
		0.51992	0.50044	0.00047	0.51085	0.00016	0.47966	0.00218	0.33938	0.04022	
		0.60420	1.03120		1.09054		1.14119		2.05266		
		12.24377	15.69256		17.40684		16.29773		6.90177		
	4		0.34567	1.10235	1.79102	1.18453	0.50164	0.70439	0.82406	1.65859	\hat{R}_{Mom}
		0.42724	0.51359	0.00753	0.40945	0.00005	0.53551	0.01967	0.56047	0.01846	
		0.68730	0.56957		0.65142		0.87419		0.41834		
		11.38106	11.60770		16.32199		15.21287		5.23421		
	5		0.77526	1.17337	0.81401	1.11243	0.85373	0.60658	0.65396	1.09768	\hat{R}_{bml}
		0.54117	0.53001	0.00111	0.52123	0.00105	0.50912	0.00748	0.56803	0.00098	
		0.75000	0.83867		0.85194		0.87497		0.67954		
		12.90577	10.46627		12.98055		17.07144		7.94024		
6		6.02695	3.64287	0.66667	0.30764	0.51257	1.76874	0.61284	1.38325	\hat{R}_{bml}	
	0.37614	0.63682	0.14920	0.23536	0.03259	0.48566	0.01554	0.43828	0.00493		
	0.23378	0.00000		0.24715		0.18737		0.19669			
	22.80855	24.63756		25.13756		24.94015		7.99374			
Best Model											4

25	1		3.56910		0.72249		0.15041		0.79740	\hat{R}_{mom}	
		0.47959	0.06008	0.00213	0.49407	0.00067	0.91719	0.00221	0.45578		0.00081
		0.50171	3.21891		0.47755		0.04588		0.54369		
		29.44279	32.48173		33.02718		34.91948		9.17232		
	2		0.87372	1.97719	0.09593	0.97627	1.76665	0.97529	1.53474	1.07384	\hat{R}_{bml}
		0.49839	0.26365	0.05949	0.40704	0.00890	0.56886	0.00525	0.52232	0.00070	
		0.70814	1.60755		0.89735		0.59683		0.69407		
		29.30606	32.48051		33.02017		34.91819		9.17111		
	3		0.01094	0.93633	7.44657	0.55556	0.50851	0.96947	0.77331	1.24406	\hat{R}_{per}
		0.44574	0.55670	0.01543	0.50590	0.00532	0.47561	0.00112	0.37776	0.00594	
		0.68171	0.50822		0.46533		0.62409		0.90383		
		20.07803	19.09671		19.64217		21.53447		8.01584		
	4		0.51424	1.02543	3.03444	1.34886	-0.55383	0.49219	0.81768	1.61283	\hat{R}_{Mom}
		0.49232	0.52216	0.00099	0.47484	0.00006	0.45587	0.01078	0.58915	0.01081	
		0.66382	0.61456		0.62093		1.30251		0.42345		
		12.16420	14.42426		14.96971		16.86201		7.37737		
	5		0.73093	1.44278	0.72954	1.47227	0.73604	0.93863	0.64168	1.10907	\hat{R}_{per}
		0.50472	0.49447	0.00364	0.49368	0.00405	0.51166	0.00019	0.54236	0.00160	
		0.75000	1.01601		1.03867		0.70660		0.69187		
		28.59919	32.48010		33.02011		34.91800		9.17100		
	6		4.29921	2.46372	0.66668	0.30899	0.61756	1.08111	0.93942	0.81248	\hat{R}_{per}
		0.45467	0.78161	0.20303	0.29401	0.03579	0.48169	0.00188	0.40401	0.00417	
		0.26698	0.00001		0.32819		0.25081		0.32956		
		29.96727	29.68760		29.86151		29.90647		9.44815		
	Best Model										4
50	1		2.82558		0.82940		0.16635		0.94923	\hat{R}_{mom}	
		0.52552	0.14426	0.00170	0.48878	0.00012	0.92040	0.00197	0.44001		0.00018
		0.48566	2.45336		0.55495		0.05090		0.66156		
		57.76060	60.46158		60.71680		64.28551		10.86475		
	2		1.57753	1.00050	0.15841	0.85308	2.50808	1.27826	0.85210	1.84538	\hat{R}_{per}
		0.51438	0.56176	0.00263	0.48582	0.00105	0.50553	0.00053	0.32387	0.04313	
		0.70569	0.62163		0.73832		0.80953		1.47903		
		57.54536	60.46159		60.71690		64.28563		10.86485		
	3		0.87196	0.97495	0.95045	0.96327	2.09968	0.96548	0.82194	1.64349	\hat{R}_{mle}
		0.50735	0.50706	0.00008	0.50600	0.00052	0.46059	0.00274	0.35077	0.03032	
		0.65250	0.64634		0.64522		0.73743		1.24563		
		57.51419	60.46158		60.71610		64.28531		10.86411		
	4		0.98041	1.02810	3.35522	1.21764	0.31391	0.76947	0.83990	1.76661	\hat{R}_{mle}
		0.51602	0.50466	0.00007	0.47130	0.00251	0.49428	0.00134	0.63061	0.01616	
		0.65194	0.66148		0.68776		0.79448		0.38891		
		33.36995	33.49990		33.75522		37.32394		9.62808		
	5		0.62271	1.47770	0.79576	1.11578	0.86768	1.22746	0.66125	1.09078	\hat{R}_{Mom}

75		0.51643	0.55490	0.00505	0.50215	0.00077	0.48271	0.00335	0.54798	0.00115	\hat{R}_{per}		
		0.75000	0.89895		0.86501		1.02495		0.70583				
		60.51965	60.15575		60.41107		60.97980		12.17828				
	6		1.18529	1.10943	0.42850	5.01004	0.86692	1.18837	2.27274	1.55076			
		0.47417	0.46491	0.00656	0.92315	0.23688	0.49953	0.00169	0.51408	0.03347			
		0.30372	0.36691		0.11884		0.30459		0.19748				
		114.43258	115.42373		115.50706		117.33575		12.20793				
	Best Model											4	
	75	1		3.32481		0.75260		0.14524		0.83951			\hat{R}_{bml}
			0.49600	0.09246	0.00200	0.49473	0.00003	0.92559	0.00226	0.45448		0.00002	
			0.49536	2.96301		0.49763		0.04239		0.57433			
			85.70963	88.44244		88.60911		93.07741		11.84431			
2			1.48530	1.00300	0.15593	0.87403	0.39866	0.92080	0.85020	1.83334			
		0.50284	0.54309	0.00194	0.46966	0.00138	0.49376	0.00013	0.32551	0.03818			
		0.70745	0.63187		0.76055		0.71030		1.46991				
		85.49925	88.44211		88.60766		93.07131		11.84421				
3			0.04832	0.86909	0.42858	0.76554	1.58077	0.66559	0.76629	1.17460			
		0.38425	0.50825	0.01921	0.50160	0.01660	0.47955	0.01104	0.33382	0.00326			
		0.70219	0.49717		0.46614		0.45977		0.86222				
		84.62015	88.44115		88.60231		93.07712		11.84411				
4			0.79653	0.99089	3.30596	1.32689	1.05659	1.08224	0.82284	1.64991			
		0.50333	0.49767	0.00004	0.48330	0.00086	0.49966	0.00001	0.60355	0.01277			
		0.65532	0.66753		0.63655		0.64046		0.41344				
		41.03690	40.47738		40.64405		45.11236		10.22549				
5			0.83157	1.28894	1.01872	0.92253	1.13760	1.17982	0.60336	1.14287			
		0.57481	0.56375	0.00253	0.49229	0.00758	0.48760	0.01117	0.62921	0.00341			
		0.75000	0.96976		0.98244		1.24667		0.64822				
		47.33840	47.86891		48.03558		52.50389		10.57692				
6			1.81837	0.84029	0.66667	0.32748	0.79360	0.81566	7.65620	3.09060			
		0.54436	0.46610	0.02462	0.35409	0.04430	0.50215	0.00207	0.93681	0.22934			
		0.33906	0.66511		0.38111		0.38667		0.00000				
		171.38851	172.17248		172.22728		174.48997		13.21069				
Best Model											4		
100	1		0.75770		3.28652		0.15358		0.84669		\hat{R}_{bml}		
		0.49426	0.49056	0.000511	0.11025	0.00182	0.91966	0.00226	0.45060	0.00002			
		0.49453	0.50125		2.92190		0.04648		0.57973				
		114.47286	116.42318		116.54689		121.63352		12.53417				
	2		0.16952	0.83167	1.40677	1.00372	1.76523	1.13793	0.84805	1.81962			
		0.50703	0.48856	0.00049	0.54682	0.00183	0.51685	0.00026	0.31707	0.04217			
		0.70739	0.71177		0.63894		0.73015		1.45796				
		113.59210	116.42211		116.54677		121.61320		12.51411				
	3		0.01221	0.92601	0.42181	0.80391	1.25335	0.73262	0.77209	1.23232			
		0.39922	0.51218	0.01562	0.50190	0.01240	0.47574	0.00709	0.33314	0.00539			

	0.69627	0.52588	0.49083	0.49860	0.90947					
	61.72390	62.24904	62.37275	67.45938	11.25133					
4		0.86018	1.01475	3.73573	1.28996	0.45949	0.85603	0.83143	1.70975	
	0.51100	0.50548	0.00009	0.47636	0.00167	0.50092	0.00038	0.61996	0.01478	
	0.65391	0.65800	0.66230	0.72698	0.40019					
	55.14232	53.27298	53.39670	58.48332	10.92869					
5		0.72754	1.05973	0.49291	1.53395	0.73654	1.09920	0.70396	1.04846	
	0.49144	0.49853	0.00014	0.57277	0.01106	0.49501	0.00027	0.50700	0.00031	
	0.75000	0.76251	0.78805	0.79681	0.73122					
	112.37900	115.30427	115.42927	120.49451	12.51014					
6		0.86992	0.99685	0.66667	0.31992	1.53552	0.95679	3.39277	6.43268	
	0.51774	0.50848	0.00063	0.32200	0.04603	0.46451	0.01515	0.83925	0.15224	
	0.33093	0.36257	0.32813	0.54629	0.00050					
	228.12255	228.92150	228.96231	231.52667	13.91236					
Best Model										
									4	
150	1		1.02706		2.04733		0.17965		1.24489	
		0.51716	0.50861	0.00613	0.31251	0.00053	0.93248	0.00235	0.44855	0.00006
		0.67395	0.69789	1.64639	0.05207	0.89390				
		209.31166	209.94416	209.97119	212.95480	13.90726				
	2		1.41710	1.04345	0.13044	0.91655	1.56526	1.08333	0.86030	1.89646
		0.49579	0.52284	0.00086	0.43759	0.00384	0.51534	0.00051	0.28816	0.04893
		0.70887	0.67553	0.81657	0.69969	1.53227				
		169.45332	172.31414	172.46611	178.40001	13.49111				
	3		0.01507	0.93423	0.55301	0.78874	0.78804	0.75160	0.77329	1.24393
		0.40077	0.51426	0.01567	0.50034	0.01169	0.49826	0.01127	0.32904	0.00630
		0.69602	0.53349	0.49211	0.48201	0.92018				
		169.32269	172.31474	172.36637	178.31601	13.36924				
	4		0.83590	1.04362	2.97761	1.20722	0.35392	0.87788	0.83782	1.75284
		0.50112	0.50430	0.00011	0.45986	0.00213	0.50979	0.00037	0.62016	0.01716
		0.65734	0.63961	0.68270	0.69545	0.39252				
		83.74315	81.81311	81.89474	87.83438	11.98250				
	5		0.37207	1.59238	0.67227	0.99756	0.67760	1.03331	0.74777	1.00238
		0.47182	0.59991	0.02275	0.49945	0.00091	0.49640	0.00071	0.47253	0.00025
		0.75000	0.67034	0.67090	0.69696	0.74926				
		90.47424	91.01770	91.09933	97.03897	12.20080				
	6		1.53936	0.94577	0.66667	0.32569	0.69061	1.17078	3.53816	7.08515
		0.50445	0.42922	0.01844	0.31708	0.04168	0.54169	0.00162	0.88492	0.20246
		0.31347	0.53899	0.31536	0.28529	0.00023				
		170.39793	172.36411	172.46620	178.40121	13.49221				
Best Model										
									4	

يتضح من جدول (3-3) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم تقدير معولية انموذج (TPLD2) ومن ثم تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً تقدير معولية انموذج (FD)، وكذلك كانت افضل طريقة تقدير لدالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00005) ، وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (5.23421) .
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم تقدير معولية انموذج (TPLD2) واخيراً تقدير معولية انموذج (FD)، وكذلك كانت افضل طريقة تقدير لدالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00006) وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (7.37737) .
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (FD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00007) وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.62808) .
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزئية عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.22549) .

5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00002) وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.92869) .

6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00006) وحقق النموذج (NTPLD) اقل معيار عند (HQIC) بلغ (11.98250) .

2- التجربة الثانية :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=1.5$ ، $b = 0.5$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (3-4)

(3-4) دالة البقاء المقدر بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعاملات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي

(IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج (AIC, AICc, BIC, HQIC, $-2LnL$) عند احجام العينات المفترضة

(n=10,25,50,75,100,150) عند القيمة الافتراضية للمعاملات $a=1.5$ ، $b = 0.5$

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$		
		$-2LnL$	AIC		AICc		BIC		HQIC		
		10	1		0.23351		1.26442		1.58339		
		0.53570	0.92094	0.00208	0.58070	0.00003	0.52137	0.00000	0.51526	0.00001	
		1.07775	1.15410		0.86524		0.07168		1.18809		

	25.12255	24.37022		22.65593		23.76505		6.85456				
2		3.30361	1.11404	0.11211	1.21328	1.44340	0.35205	0.80874	2.75499	\hat{R}_{per}		
		0.41532	0.73070	0.11090	0.37639	0.00175	0.39802	0.00037	0.24257		0.03514	
		1.21326	0.50196		1.35297		1.24867		2.33585			
		3.29063	0.33715		2.05143		4.14232		3.89910			
3		2.96753	0.21470	0.76616	0.62892	0.98163	0.25438	1.50183	0.57891	\hat{R}_{bml}		
		0.26599	0.39138	0.01598	0.43084	0.03991	0.60538	0.11592	0.20664		0.00378	
		1.16201	0.28932		0.29106		0.43256		0.54335			
		2.84278	1.40311		3.11739		2.95764		0.44153			
4		0.30660	3.64791	1.29444	0.95571	1.39444	0.16291	1.57723	0.46664	\hat{R}_{bml}		
		0.26599	0.39138	0.01598	0.43084	0.03991	0.60538	0.11592	0.20664		0.00271	
		0.48145	3.26127		0.31043		0.44433		0.87405			
		2.19995	5.00321		6.71750		5.60838		3.86743			
5		0.10407	2.58384	0.18921	2.02968	0.17727	2.42390	1.40101	1.34423	\hat{R}_{per}		
		0.33194	0.55616	0.06154	0.50685	0.03557	0.46434	0.02668	0.11132		0.06382	
		1.02899	0.91170		0.79208		1.25363		2.32405			
		2.33857	1.31247		2.01676		2.00828		0.23049			
6	2.5,2	1.12558	1.93554	2.63616	2.13767	2.57372	1.79827	3.11291	1.65170	\hat{R}_{Mom}		
		0.55516	0.56210	0.01560	0.59453	0.00209	0.48823	0.00543	0.41945		0.02279	
		0.19615	0.27247		0.14729		0.26557		0.31019			
		39.15757	42.03262		43.74691		42.63779		9.04745			
Best Model										4		
25	1		1.93710		1.07002		0.26135		1.31137	\hat{R}_{mbl}		
			0.35997	0.27498	0.00009	0.48173	0.00016	0.89006	0.00310		0.40755	0.00003
			1.13785	1.55220		0.74206		0.09617			0.96229	
			97.49520	100.40922		100.95467		102.84697			11.51633	
	2		3.85738	0.34183	0.49273	0.52829	1.72780	0.57557	1.51169	0.88814	\hat{R}_{per}	
			0.56413	0.74383	0.03654	0.47611	0.00872	0.52090	0.00221	0.35935		0.04885
			0.29355	0.14695		0.36749		0.35085		0.62790		
			11.09129	14.41228		14.95774		16.85004		7.37544		
	3		2.90632	0.19993	0.76332	0.53989	1.28128	0.23631	1.50095	0.54187	\hat{R}_{mbl}	
			0.26496	0.40559	0.02045	0.46996	0.05823	0.59999	0.11404	0.23465		0.00102
			0.42100	0.19992		0.58747		0.13733		0.47191		
			7.86227	7.67041		7.84432		8.88928		6.13343		
	4		2.59788	0.26948	0.96706	2.94589	0.11109	1.86211	0.32820	0.77784	\hat{R}_{Mom}	
			0.29427	0.00120	0.12027	0.43355	0.02063	0.55885	0.07853	0.13072		0.03192
			0.49221	0.45554		0.27167		0.31351		1.02967		
			4.06087	6.04121		5.49575		3.60346		5.12107		
5		0.32727	2.10720	0.42239	2.12716	0.33938	2.31834	1.07350	1.38051	\hat{R}_{Mom}		
		0.44864	0.50076	0.00715	0.50245	0.00651	0.47404	0.00667	0.24890		0.04367	
		0.89090	1.10269		1.10889		1.42190		1.67858			
		71.98298	72.67300		72.12755		70.23525		10.55859			
6		0.89515	2.76578	2.76576	2.81796	2.00802	2.08820	2.85954	1.83866	\hat{R}_{per}		
		0.43473	0.60700	0.05488	0.58955	0.03625	0.46911	0.00245	0.38350		0.00367	

		0.18185	0.19034	0.05195	0.19487	0.20717					
		98.68251	100.74428	101.28973	103.18203	11.52313					
Best Model											
										4	
50	1		2.24785		0.96163		0.16507		1.14508	\hat{R}_{bml}	
		0.35622	0.25006	0.00015	0.50097	0.00026	0.93566	0.00403	0.44175		0.00009
		1.14276	1.85536		0.65042		0.04659		0.81501		
		22.87939	19.82051		19.56519		15.99647		7.99960		
	2		1.47243	1.05814	3.73819	1.17543	1.12851	1.62281	0.84513	2.88093	\hat{R}_{mle}
		0.49716	0.50418	0.00008	0.75671	0.07729	0.51752	0.00052	0.32313	0.03543	
		1.20281	1.14200		0.47980		1.15699		2.42149		
		16.09168	19.80938		19.55406		15.98534		5.40804		
	3		2.31177	0.26152	0.41545	0.47953	0.77985	0.46944	0.31792	0.75639	\hat{R}_{bml}
		0.16541	0.46097	0.10384	0.50159	0.14109	0.48381	0.12638	0.35243	0.05135	
		1.21671	0.26148		0.28770		0.29375		0.51586		
		18.03409	19.01107		18.75575		15.18702		5.29841		
	4		2.63091	0.31742	1.50706	0.48797	0.23320	1.31279	0.37555	0.90603	\hat{R}_{Mom}
		0.35061	0.00478	0.15939	0.43262	0.00735	0.51326	0.03517	0.21823	0.01947	
		0.47774	3.15023		0.32025		0.46799		0.83697		
		13.60842	12.54699		12.63033		14.45902		7.62096		
	5		0.43799	1.77793	0.57497	1.41043	0.54947	1.43504	0.96934	1.39796	\hat{R}_{per}
		0.52798	0.54374	0.00089	0.49712	0.00113	0.50759	0.00050	0.36300	0.03218	
		0.81663	0.94171		0.86053		0.84231		1.43327		
		25.51467	27.62202		27.87734		31.44607		9.21501		
	6		1.08272	2.13795	2.67963	2.07404	2.43206	2.05525	3.15157	1.61639	\hat{R}_{per}
		0.49658	0.57837	0.02162	0.51583	0.00064	0.51612	0.00043	0.32975	0.03164	
		0.21681	0.24989		0.18234		0.20579		0.34916		
		153.81150	153.10951		152.85419		149.28547		12.59018		
Best Model											
										4	
75	1		1.34325		1.49865		0.23731		2.00729	\hat{R}_{mom}	
		0.50725	0.54279	0.00002	0.50754	0.00000	0.93883	0.00246	0.41672		0.00010
		1.07985	0.93728		1.07861		0.07178		1.55252		
		35.33352	32.38619		32.21953		27.75122		9.43320		
	2		1.66803	0.65652	1.84683	1.10567	0.00297	1.26182	0.80378	2.73769	\hat{R}_{mle}
		0.48597	0.49540	0.00014	0.74281	0.08010	0.46817	0.00041	0.34315	0.02541	
		1.20635	1.13132		0.44384		1.26481		2.30103		
		29.55577	32.38345		32.21678		27.74847		7.76050		
	3		0.34856	0.82608	0.20671	0.54570	0.73540	0.50007	3.88843	0.28744	\hat{R}_{mle}
		0.17967	0.34059	0.03691	0.49770	0.12652	0.48683	0.11631	0.45624	0.09089	
		1.20340	0.56893		0.32275		0.31164		0.28741		
		29.11618	31.70283		31.53617		27.06786		7.40309		
	4		1.47190	0.69074	1.18181	0.29558	1.46268	0.20159	0.84784	0.35665	\hat{R}_{mle}
		0.33808	0.43985	0.01140	0.00520	0.15850	0.53441	0.04805	0.19979	0.02224	
		0.48123	0.29780		3.38543		0.40544		0.90771		
		17.45926	17.84687		17.90167		20.16436		6.57368		
	5		0.37601	1.88687	0.43696	1.69130	0.46156	1.32380	1.03998	1.38583	\hat{R}_{Mom}

100		0.47847	0.51364	0.00247	0.49533	0.00062	0.51708	0.00240	0.30272	0.03637	\hat{R}_{per}		
		0.85528	0.97035		0.91569		0.65476		1.57588				
		39.83613	42.42748		42.59414		47.06245		10.32437				
	6	1.02394	2.33821	2.68496	2.19478	2.59734	2.10853	3.09660	1.66601				
		0.46633	0.59313	0.03209	0.52118	0.00394	0.49715	0.00124	0.32505	0.02313			
		0.21573	0.22856		0.15257		0.17931		0.31596				
		233.97776	233.59100		233.42433		228.95603		13.69177				
	Best Model											4	
	100	1	1.56681		1.27677		0.16878		1.64037				\hat{R}_{mle}
			0.46042	0.44658	0.00000	0.51261	0.00003	0.95519	0.00315	0.43218		0.00001	
			1.09912	1.16090		0.89521		0.04260		1.22925			
			47.76966	44.95196		44.82824		39.74162		10.37642			
2		1.57214	1.02920	0.01577	1.01893	0.91018	1.51393	0.75855	2.57753		\hat{R}_{per}		
		0.47081	0.74925	0.09229	0.50156	0.00117	0.49846	0.00093	0.33645	0.02222			
		1.20987	0.41375		1.03520		1.11217		2.16638				
		42.75090	44.95191		44.82820		39.74157		8.45868				
3		0.37162	0.72040	0.98558	0.42602	0.21755	0.54994	1.65488	0.25001		\hat{R}_{mle}		
		0.16212	0.36746	0.06173	0.50431	0.14676	0.47067	0.12744	0.46953	0.11351			
		1.22092	0.49068		0.26527		0.33695		0.24997				
		40.74129	44.20571		44.08200		38.99537		9.46663				
4		1.21954	2.65868	1.65219	0.30441	1.22520	1.28342	0.36474	0.87140		\hat{R}_{mle}		
		0.36163	0.44865	0.00846	0.00620	0.17554	0.50671	0.03004	0.22824	0.02081			
		0.47619	0.34333		0.30597		0.47756		0.86922				
		25.26446	25.18297		25.22001		27.88345		5.23748				
5		0.53692	1.71200	0.58842	1.56641	0.55046	1.28201	0.91197	1.40869		\hat{R}_{per}		
		0.54575	0.51902	0.00152	0.50206	0.00237	0.53160	0.00083	0.39353	0.02666			
		0.79403	1.03551		0.99295		0.71605		1.33231				
		54.31386	57.15631		57.28002		62.36665		11.07470				
6		1.03490	2.28121	3.18242	2.28667	2.41462	2.06589	3.13398	1.63269		\hat{R}_{per}		
		0.47099	0.58607	0.03032	0.53997	0.00857	0.49312	0.00058	0.32254	0.02634			
		0.20911	0.23142		0.09787		0.19727		0.32483				
		314.47291	314.08888		313.96517		308.87854		14.48399				
Best Model											4		
150	1	0.74433		3.38875		0.19190		0.82789			\hat{R}_{mle}		
		0.62064	0.46448	0.00027	0.06590	0.00338	0.88683	0.00088	0.42249	0.00043			
		0.29113	0.49952		3.04616		0.06873		0.57394				
		537.56040	539.14155		539.16857		542.15218		15.79937				
	2	0.11698	1.13040	1.09950	1.24431	0.02818	1.46344	0.88608	3.02075		\hat{R}_{mle}		
		0.51005	0.49020	0.00047	0.74370	0.06478	0.45956	0.00304	0.33643	0.03656			
		1.20054	1.27831		0.50561		1.43637		2.53873				
		73.22866	70.08338		70.00175		64.06211		11.58457				
	3	0.31800	0.75655	1.26364	0.43089	0.86946	0.46559	1.95606	0.26158		\hat{R}_{mle}		
		0.17194	0.37058	0.05725	0.50333	0.13760	0.49604	0.13356	0.47210	0.10926			

	1.21084	0.51144	0.27409		0.29114		0.26154			
	67.26563	69.39139	69.99837		64.05873		10.07085			
4		1.50003	0.85308	1.61539	0.28232	0.18435	1.40146	0.34312	0.81233	
		0.32362	0.44099	0.01504	0.00412	0.14814	0.47913	0.03181	0.17650	0.02551
		0.48484	0.38401		0.82111		0.44374		0.96117	
		66.31319	69.08000		69.30975		63.37012		10.03247	
5		0.51204	1.44947	0.52218	1.52699	0.42090	1.81751	0.98947	1.39437	
		0.51397	0.51120	0.00004	0.50148	0.00021	0.53457	0.00135	0.34736	0.03225
		0.82919	0.80728		0.88970		0.96176		1.47639	
		83.03512	85.54173		85.62337		91.56301		12.07382	
6		1.05333	2.24976	2.94849	2.16176	2.47586	2.11180	3.15732	1.61097	
		0.47348	0.58619	0.02754	0.51290	0.00296	0.50921	0.00147	0.30571	0.03245
		0.21792	0.23755		0.14347		0.18938		0.34968	
		475.56525	475.03263		474.95100		469.01136		15.48494	
Best Model										
										4

يتضح من جدول (3-4) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) وكذلك يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (WD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزئية عند الانموذج (LD) لانه حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00000) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (0.23049) .
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانه حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00003) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (BIC) بلغ (3.60346) .
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (TPLD1) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك

كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (TPLD1) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00008) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (7.62096).

4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.0000) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (6.57368) .

5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00000) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (5.23748).

6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (WD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00004) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.03247).

3- التجربة الثالثة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=0$ ، $b=2$ ، فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (3-5)

(3-5) دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلمات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية

(IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج (-2LnL, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

(n=10,25,50,75,100,150) عند القيمة الافتراضية للمعلمات a=0.4 ، b=2

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$		
		-2LnL	AIC		AICc		BIC		HQIC		
10	1		2.71450		0.85027		0.23987		0.97957		\hat{R}_{per}
		0.74277	0.08489	0.00454	0.45306	0.00090	0.87059	0.00020	0.39324	0.00130	
		0.20453	2.36607		0.58262		0.09337		0.69961		
		42.90166	44.74849		45.24849		45.05108		9.22498		
	2		2.88589	0.16480	0.47687	2.62636	0.11833	2.43667	0.02135	0.49343	\hat{R}_{Mom}
		0.20658	0.03222	0.07948	0.41694	0.04497	0.44725	0.07100	0.01211	0.06805	
		0.38676	0.56666		0.16746		0.26169		1.83539		
		13.62145	10.96953		8.75525		9.56436		6.06155		
	3		2.78462	0.17449	18.48284	0.21016	4.46177	0.38609	0.02901	0.52201	\hat{R}_{per}
		0.15462	0.49806	0.15617	0.50229	0.16046	0.38644	0.08161	0.42052	0.11458	
		1.60673	0.17444		0.17459		0.29603		0.31841		
		4.79147	10.18274		8.46846		9.51157		3.28827		
	4		8.69642	2.16435	0.31968	1.25869	0.01682	2.40390	1.36308	4.83276	\hat{R}_{Mom}
		0.55378	0.75086	0.04531	0.54549	0.00011	0.46429	0.00931	0.33836	0.05448	
		1.70722	0.89249		1.85002		2.38733		4.06603		
		4.22957	4.78159		3.06730		4.17642		3.10245		
	5		0.52971	1.81778	0.49388	1.94532	0.52722	1.49133	1.11578	1.94263	\hat{R}_{Mom}
		0.54005	0.48425	0.00370	0.49303	0.00266	0.50820	0.00291	0.31496	0.06342	
		1.01951	1.14590		1.19841		0.84774		2.70092		
		0.29782	3.81699		5.53127		4.42216		2.86242		
6	3,2	1.13066	2.09687	4.46914	2.14550	2.84516	2.11376	3.42919	1.54502	\hat{R}_{per}	
	0.47414	0.57655	0.02606	0.49821	0.00387	0.52388	0.00274	0.25831	0.05128		
	0.20089	0.26312		0.07489		0.17786		0.41679			
	28.34860	27.47740		25.76312		26.87223		7.74788			
Best Model											4
25	1		2.39300		0.92197		0.20093		1.08548		\hat{R}_{per}
		0.76750	0.14602	0.00400	0.47043	0.00097	0.91021	0.00028	0.40602	0.00141	
		0.19714	2.02655		0.63186		0.06703		0.77992		
		107.99261	109.82112		109.99503		111.03999		11.71748		
	2		2.78238	0.18440	0.03691	0.55121	0.17193	1.95519	0.78076	4.43076	\hat{R}_{bml}
		0.29467	0.01112	0.12914	0.03510	0.09518	0.50515	0.05959	0.45295	0.02704	

	0.37213	0.90886		0.18513		1.58285		0.31942			
	37.06514	34.13879		33.59334		31.70104		4.55126			
3		2.05986	0.23771	2.54021	0.36155	0.91649	0.46895	0.05356	0.71766	\hat{R}_{bml}	
	0.12871	0.48504	0.15978	0.50737	0.18467	0.47817	0.16631	0.42763	0.13597		
	1.67959	0.23766		0.24275		0.29850		0.45042			
	25.48637	30.08851		33.56654		31.67424		5.78860			
4		1.70646	1.47580	0.20240	1.21751	0.32241	1.93304	0.93888	3.50906	\hat{R}_{per}	
	0.46219	0.73493	0.08771	0.49363	0.00118	0.47461	0.00019	0.34749	0.01597		
	1.72150	0.59663		1.51873		1.61126		2.97643			
	21.36762	25.11200		29.54305		27.65076		2.23509			
5		0.27475	2.16617	0.32541	1.95938	0.29910	2.41945	1.37084	1.92346	\hat{R}_{per}	
	0.45258	0.53002	0.00703	0.50847	0.00376	0.48771	0.00218	0.17648	0.09440		
	1.25794	1.03509		0.97919		1.48646		3.96714			
	6.89342	9.99504		10.54049		12.43279		6.49571			
6		1.22856	1.87979	4.63803	2.00171	3.81285	2.01952	3.49380	1.45788	\hat{R}_{per}	
	0.53861	0.55597	0.01366	0.51717	0.00445	0.53642	0.00132	0.25226	0.09049		
	0.20189	0.30224		0.09701		0.13753		0.52201	0.20189		
	82.61228	81.20381		80.65836		78.76606		10.95975			
Best Model										4	
50	1		2.63746		0.86579		0.21395		1.00228	\hat{R}_{per}	
		0.75007	0.15099	0.00387	0.48507	0.00081	0.89066	0.00028	0.43157		0.00115
		0.19919	2.26509		0.58386		0.07566		0.70602		
		216.50476	218.27496		218.35830		220.18699		13.49044		
	2		3.91880	0.20214	0.68045	3.88221	0.19282	1.99657	0.16462	0.61709	\hat{R}_{Mom}
		0.28567	0.78443	0.11527	0.42954	0.02146	0.53768	0.08070	0.04194	0.07928	
		0.37189	0.87189		0.20415		0.30854		1.39451		
		77.32571	74.06322		73.80790		70.23917		11.27329		
	3		2.91405	0.20136	1.86808	0.32638	3.13495	0.35649	0.04822	0.60107	\hat{R}_{bml}
		0.12262	0.47629	0.16642	0.50331	0.19919	0.44244	0.14667	0.39501	0.12394	
		1.70034	0.20131		0.20911		0.25290		0.38341		
		63.16187	69.05277		68.79745		65.22872		8.97018		
	4		1.64728	1.76097	0.28655	1.30133	0.69831	1.89942	1.12412	4.05862	\hat{R}_{Mom}
		0.47261	0.73875	0.07999	0.46862	0.00003	0.51517	0.00205	0.29694	0.03563	
		1.71588	0.75837		1.79629		1.49295		3.43721		
		18.07141	21.14431		21.39963		24.96836		8.63212		
	5		0.32332	2.07981	0.35563	1.95460	0.34382	2.11745	1.31312	1.92769	\hat{R}_{per}
		0.47192	0.51751	0.00246	0.50519	0.00135	0.49941	0.00094	0.20391	0.08985	
		1.20383	1.05791		1.02056		1.17027		3.66358		
		22.71657	34.13904		33.59358		31.70129		7.04930		
	6		1.23650	1.80948	3.79854	1.97056	2.50741	1.90026	3.46544	1.49689	\hat{R}_{Mom}
		0.55065	0.54547	0.01884	0.52849	0.00184	0.52350	0.00201	0.31840	0.06488	
		0.17871	0.30643		0.13489		0.25041		0.44472		

		172.07235	171.42246	171.16714	167.59842	12.91529					
Best Model										4	
75	1		0.74690		3.36863		0.13385		0.83150	\hat{R}_{Mle}	
		0.71191	0.49232	0.00055	0.08139	0.00429	0.93401	0.00070	0.45223		0.00076
		0.20797	0.49448		3.01061		0.03715		0.56921		
		325.03318	326.72550		326.78030		329.04299		14.49746		
	2		2.65994	1.70382	-0.24567	1.22542	0.21949	1.97858	1.08809	3.94880	\hat{R}_{per}
		0.50568	0.74546	0.06911	0.52406	0.00043	0.49232	0.00022	0.35745	0.02712	
		1.71517	0.68125		1.62787		1.79993		3.33143		
		117.11944	113.98985		113.82318		109.35488		12.33686		
	3		2.89417	0.19809	0.50037	0.45434	1.64459	0.31429	0.04653	0.59142	\hat{R}_{bml}
		0.06675	0.43122	0.15416	0.48552	0.22846	0.55892	7.54864	0.32172	0.10070	
		1.76125	0.19804		0.26624		0.35774		0.40501		
		102.57333	113.83024		113.66357		109.19526		11.26530		
	4		0.64952	2.18190	2.87524	0.19560	0.19244	1.94228	0.04505	0.58411	\hat{R}_{mle}
		0.27402	0.42884	0.02507	0.00001	0.11137	0.49380	0.06363	0.03391	0.07974	
		0.37392	0.39762		0.645551		0.32550		1.49245		
		102.48064	110.14411		109.97745		105.50914		11.24188		
	5		0.39504	1.94167	0.41646	1.86639	0.41700	1.56844	1.24039	1.93312	\hat{R}_{mle}
		0.49715	0.50505	0.00011	0.49807	0.00014	0.52446	0.00289	0.24589	0.07933	
		1.13576	1.05766		1.03357		0.76522		3.29251		
		29.24185	32.03497		32.20164		36.66995		9.73007		
6		1.19037	1.90832	3.67219	2.01282	2.67742	1.97626	3.43893	1.53227	\hat{R}_{per}	
	0.52763	0.55702	0.01932	0.52129	0.00116	0.52547	0.00038	0.30940	0.05548		
	0.18532	0.28816		0.13521		0.21735		0.41790			
	261.49285	260.99053		260.82386		256.35555		13.97494			
Best Model										5	
100	1				3.31472		0.15113		0.84139	\hat{R}_{Mle}	
		0.71347	0.49602	0.00055	0.09457	0.00414	0.92080	0.00063	0.45663		0.00076
		0.20667	0.49796		2.95090		0.04524		0.57506		
		433.49530	435.17816		435.21898		437.78333		15.20127		
	2		0.21960	1.16491	1.66134	1.69812	0.00603	1.99095	1.08446	3.93784	\hat{R}_{mle}
		0.50687	0.54358	0.00165	0.75728	0.07566	0.46712	0.00191	0.35199	0.02938	
		1.71456	1.48463		0.67733		1.98496		3.32034		
		157.02847	153.91494		153.79123		148.70460		12.96091		
	3		2.78343	0.18057	2.34348	0.28826	0.81165	0.50218	0.03385	0.53993	\hat{R}_{bml}
		0.06675	0.43122	0.15416	0.48552	0.22846	0.55892	4.54864	0.12172	0.10070	
		0.33211	0.18052		0.18788		0.27333		0.35246		
		144.33597	153.91010		153.78639		148.69976		12.34687		
	4		0.76494	2.62057	1.97772	0.21834	0.15687	2.27145	0.30752	3.16294	\hat{R}_{mle}
		0.31398	0.43155	0.01453	0.00002	0.13193	0.63256	0.11551	0.06323	0.07749	
		0.36661	0.32025		0.52125		0.24689		1.27091		
		140.50215	149.97732		149.85361		144.76698		10.43647		

5		0.38168	2.00313	0.36585	2.06479	0.37134	1.65041	1.25912	1.93171	\hat{R}_{mle}	
		0.48294	0.49450	0.00016	0.49964	0.00033	0.53594	0.00493	0.22583		0.08046
		1.15328	1.10391		1.12530		0.75263		3.39058		
		40.39814	43.41573		43.53944		48.62607		10.50168		
6		1.15983	1.98594	3.69038	2.05297	3.39208	1.97218	3.42321	1.55278	\hat{R}_{per}	
		0.51234	0.56540	0.02258	0.52219	0.00151	0.49332	0.00075	0.30295		0.05051
		0.18860	0.27603		0.12462		0.16976		0.40443		
		350.96274	350.56867		350.44496		345.35833		14.70590		
Best Model										5	
1		0.74296		3.39957		0.11489		0.82597		\hat{R}_{Mle}	
		0.70725	0.48621	0.00057	0.09469	0.00410	0.94833	0.00083	0.44686		0.00078
		0.20873	0.49202		3.04164		0.02882		0.56528		
		650.39016	652.08353		652.11056		655.09417		16.18040		
2		0.27154	2.15692	2.64151	1.78694	1.68959	2.49086	1.14030	4.10848	\hat{R}_{mle}	
		0.49865	0.50581	0.00007	0.74488	0.06961	0.50098	0.00013	0.32856		0.03372
		1.71421	1.74454		0.74123		1.79153		3.46945		
		236.99957	233.76601		233.68438		227.74474		14.09318		
3		2.74822	0.20999	1.06426	0.36155	0.10665	1.44600	0.13548	0.63934	\hat{R}_{per}	
		0.09154	0.46440	0.17095	0.50079	0.21365	0.18321	0.02200	0.39474		0.14268
		1.72283	0.20994		0.22477		1.12134		0.41078		
		223.21601	233.76490		233.68327		227.74363		13.51946		
4		0.67345	3.87887	2.91784	0.20196	0.14333	2.23669	0.16532	0.61658	\hat{R}_{mle}	
		0.28388	0.42872	0.02191	0.00001	0.11527	0.55441	0.08604	0.04507		0.07520
		0.37204	0.33332		0.20403		0.26625		1.39527		
		174.93766	182.01386		181.91129		176.43887		12.92885		
5		0.29004	2.19788	0.29846	2.12094	0.28969	2.15849	1.36551	1.92385	\hat{R}_{mle}	
		0.44044	0.50167	0.00442	0.50274	0.00448	0.50616	0.00501	0.17287		0.08956
		1.25295	1.12258		1.06404		1.07504		3.94165		
		62.67517	65.53461		65.61624		71.55588		11.52630		
6		1.09093	2.13993	2.85024	2.05293	2.55042	2.09338	3.33215	1.66489	\hat{R}_{Mom}	
		0.48156	0.57870	0.03107	0.50409	0.00061	0.52444	0.00253	0.33597		0.02520
		0.18547	0.25140		0.18012		0.19098		0.31451		
		529.71593	529.77821		529.69658		523.75694		15.69389		
Best Model										5	

يتضح من جدول (3-5) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ، وكذلك

- كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00011) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (AICc) بلغ (3.06730) .
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزئية عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00019) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (2.23509).
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00003) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (7.04930).
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الأعظم عند الانموذج (WD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.000011) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.73007) .
5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الأعظم عند

الانموذج (WD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.000016) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.43647).
 6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (TPLD1) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الأعظم عند الانموذج (TPLD1) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00007) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (11.52630).

4- التجربة الرابعة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=2.9$ ، $b=1$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (6-3)

(6-3) دالة البقاء المقدر بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعاملات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج ($-2LnL$, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

($n=10,25,50,75,100,150$) عند القيمة الافتراضية للمعاملات $a=2.9$ ، $b=1$

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$		
		$-2LnL$	AIC		AICc		BIC		HQIC		
10	1		2.79600		0.83480		0.29669		0.95705		\hat{R}_{Per}
		0.73459	0.15802	0.00351	0.48172	0.00076	0.81657	0.00010	0.43507	0.00105	
		0.20142	2.42271		0.55949		0.12862		0.66825		
		43.00039	44.76046		45.26046		45.06304		9.22553		
	2		0.77726	1.02585	0.19640	0.83563	4.43043	1.21003	2.91815	1.52283	\hat{R}_{per}
		0.55996	0.46718	0.00994	0.45912	0.01217	0.51262	0.00277	0.40778	0.02748	
		0.59328	0.73644		0.70452		0.74035		1.03945		
		27.77013	29.46891		31.18320		30.01287		8.29668		
	3		2.11853	2.27769	1.25914	2.67666	5.17687	8.39879	3.10813	4.82343	\hat{R}_{Mom}

25		0.75095	0.52679	0.07015	0.62883	0.06933	0.31175	0.24052	0.39856	0.16261	
		0.76740	0.77767		0.77775		2.22348		1.55381		
		27.35510	29.40770		31.12199		30.00408		8.26417		
	4		0.42557	0.96748	3.03209	1.49555	2.62779	1.54653	2.91080	1.32595	\hat{R}_{bml}
		0.41196	0.50740	0.01150	0.49389	0.00777	0.50648	0.01031	0.46982	0.00391	
		0.81173	0.63926		0.56692		0.53995		0.72846		
	5		2.78349	0.60950	4.89833	1.11101	2.73696	0.74360	0.22798	3.02694	\hat{R}_{per}
		0.60350	0.44964	0.02697	0.52791	0.00943	0.52167	0.00756	0.99011	0.23652	
		2.90000	4.40750		4.33669		3.71089		0.06485		
	6		4.17736	1.12437	4.32237	1.03568	1.95196	1.05351	3.07330	0.71535	\hat{R}_{Mom}
		0.44549	0.48320	0.00533	0.41639	0.00405	0.52094	0.00987	0.24265	0.04839	
		1.40757	1.19945		1.77736		0.87856		4.10780		
Best Model											4
25	1		3.46765		0.73452		0.12354		0.81416		\hat{R}_{Mom}
		0.70905	0.06526	0.00437	0.48358	0.00059	0.94130	0.00071	0.44259	0.00081	
		0.21018	3.11837		0.48791		0.03279		0.55844		
		108.11592	109.82031		109.99422		111.03918		11.71746		
	2		0.01236	0.94793	0.34870	0.74516	1.79781	0.75563	2.90394	1.12389	\hat{R}_{mom}
		0.38393	0.23795	0.02578	0.37918	0.00060	0.47649	0.00993	0.33878	0.00239	
		0.66684	0.93603		0.58131		0.47917		0.77530		
	3		1.91895	2.37384	1.38478	3.10192	3.27493	3.88462	3.12138	5.01653	\hat{R}_{mom}
		0.75323	0.49523	0.08707	0.50674	0.08206	0.39863	0.16008	0.34499	0.20785	
		0.76693	0.81383		0.89506		3.62954		4.74676		
	4		3.90530	1.04920	3.60794	0.92673	6.86156	0.89144	2.93768	1.97878	\hat{R}_{mle}
		0.49397	0.49119	0.00001	0.46592	0.00090	0.43191	0.00440	0.64691	0.02758	
		0.79642	0.79657		0.88066		0.98659		0.43676		
	5		66.50291	69.92444	70.46990	72.36220	72.36220	10.77486	10.77486	10.77486	\hat{R}_{per}
			2.44244	0.74793	3.07305	1.05576	2.74556	0.97028	0.33399	2.98264	
		0.50203	0.45439	0.00441	0.50611	0.00010	0.50579	0.00005	0.94812	0.25327	
	6		2.90000	2.89223	2.96946	2.79777	2.79777	0.21694	0.21694	0.21694	\hat{R}_{per}
		47.42967	53.47600		52.93054		51.03825		9.28924		
		5.46614	1.01928	3.97617	1.06357	2.67438	0.97133	3.08718	0.69021		
50	1	0.49380	0.44905	0.01187	0.50982	0.00326	0.48169	0.00043	0.25080	0.07016	\hat{R}_{per}
		1.38828	2.18742		1.37460		1.41379		4.75929		
		49.68538	47.33101		46.78556		44.89326		9.85012		
Best Model											5
50	1		3.19210		0.77076		0.11795		0.86516		\hat{R}_{Mom}
		0.72714	0.12785	0.00394	0.51270	0.00056	0.94710	0.00075	0.47264	0.00077	

	0.20274	2.81433		0.50528		0.02908		0.58814		
	102.73897	100.57827		100.32295		96.75423		11.82379		
2		0.22693	1.00883	0.27679	0.76793	3.38489	0.92625	2.91004	1.30439	\hat{R}_{per}
	0.48259	0.33674	0.02461	0.43676	0.00320	0.51919	0.00151	0.38267	0.01149	
	0.62805	0.86551		0.61363		0.55900		0.89084		
	100.01133	107.27129		107.01597		103.44725		11.29777		
3		1.82525	2.56805	1.01970	2.55597	3.52466	3.60237	3.14842	5.40612	\hat{R}_{Mom}
	0.77199	0.49926	0.09159	0.72094	0.09051	0.43251	0.13922	0.33242	0.22761	
	0.76516	0.56805		0.79104		3.36197		5.13494		
	99.67331	99.12837		99.38368		99.95241		10.55531		
4		1.55140	0.99288	4.23797	1.20628	4.59527	1.00006	2.92265	1.63506	\hat{R}_{per}
	0.46640	0.49780	0.00122	0.49174	0.00079	0.44756	0.00044	0.57202	0.01351	
	0.80227	0.72998		0.71294		0.85300		0.51831		
	99.50775	99.96917		99.22449		99.79322		10.55297		
5		2.53265	0.70123	3.30196	1.00760	2.03958	0.77531	0.30127	2.99634	\hat{R}_{Mom}
	0.53463	0.44860	0.01081	0.50538	0.00101	0.54186	0.00213	0.96038	0.23256	
	2.90000	3.42498		3.28252		2.51446		0.16646		
	136.06192	137.97247		138.22779		141.79651		12.55301		
6		3.77349	1.04926	3.68693	1.14456	3.09342	1.04179	3.05525	0.74737	\hat{R}_{per}
	0.45285	0.46945	0.00306	0.53488	0.01154	0.47686	0.00097	0.25633	0.04828	
	1.43375	1.46823		0.97148		1.31429		3.68393		
	216.62685	218.27321		218.35654		220.18523		13.49042		
Best Model										4
1		0.69937		3.78022		0.16476		0.76542		\hat{R}_{mle}
	0.68667	0.48449	0.00046	0.05774	0.00434	0.90043	0.00062	0.45061	0.00062	
	0.21345	0.46172		3.43440		0.05453		0.51987		
	325.05295	326.72548		326.78027		329.04296		14.49746		
2		0.32722	1.00785	0.25296	0.82420	2.57651	0.96221	2.91148	1.34499	\hat{R}_{per}
	0.47886	0.35597	0.01750	0.40933	0.00622	0.48777	0.00010	0.37226	0.01297	
	0.62431	0.82826		0.67543		0.59945		0.92115		
	204.61519	206.03129		206.19796		210.66627		13.56189		
3		1.55113	2.15718	1.15385	3.55205	2.98023	2.16829	3.09170	4.58125	\hat{R}_{per}
	0.72996	0.47557	0.07655	0.58328	0.06680	0.50959	0.05817	0.30485	0.20481	
	0.76918	2.15717		2.24958		1.90992		4.31372		
	203.91393	206.01738		206.18405		210.65236		13.56176		
4		4.13064	1.08448	2.40775	1.00743	6.66316	0.86347	2.92859	1.77615	\hat{R}_{mle}
	0.48867	0.49123	0.00002	0.49916	0.00013	0.42629	0.00478	0.60981	0.01779	
	0.79905	0.78071		0.77090		1.01442		0.48108		
	202.65988	206.00092		206.11759		210.61321		13.56111		
5		2.49911	0.74708	3.30239	1.09552	2.79394	1.01170	0.32097	2.98809	\hat{R}_{per}
	0.50242	0.44752	0.00510	0.50156	0.00027	0.51593	0.00021	0.95882	0.26595	
	2.90000	2.95545		3.11484		2.77349		0.18628		
	353.84017	364.67493		364.50826		360.03995		14.77995		

6		6.55077	1.01163	3.72516	1.02013	3.05405	0.95579	3.09439	0.67695	\hat{R}_{per}		
		0.52814	0.49084	0.01817	0.52955	0.00194	0.49234	0.00151	0.25456		0.08888	
		1.38921	2.53934		1.55466		1.71179		5.19710			
		356.31054	353.81351		353.64685		349.17854		15.92277			
Best Model										4		
100	1		0.66313		4.16000		0.08054		0.71597	\hat{R}_{mle}		
			0.68328	0.49438	0.00041	0.03813	0.00452	0.96528	0.00107		0.46377	0.00055
			0.21593	0.43437		0.83211		0.01642			0.48070	
			433.56164	435.17830		435.21911		437.78347			15.20127	
	2		1.22230	1.02266	0.15803	0.88170	2.92597	1.24242	2.92227	1.62573	\hat{R}_{mle}	
			0.57177	0.51351	0.00390	0.45224	0.01665	0.49480	0.00713	0.40081		0.03496
			0.57978	0.67539		0.76729		0.77818		1.10850		
	3		272.16120	274.11279		274.23650		279.32313		14.26679		
			3.02904	2.63749	1.77370	2.66928	3.42868	3.41645	3.16264	5.60900	\hat{R}_{mle}	
			0.78002	0.50856	0.09044	0.50533	0.09250	0.46342	0.12104	0.33854		0.22548
		0.76438	0.73476		2.66927		3.17041		5.33735			
	4		271.70192	274.06815		274.19187		279.27849		14.26646		
		2.99297	0.99366	10.01672	0.98728	4.09322	0.59740	2.94031	2.03500	\hat{R}_{mle}		
		0.55394	0.51917	0.00150	0.51276	0.00210	0.44063	0.01613	0.68806		0.02344	
		0.79154	0.80417		0.92782		1.32467		0.42577			
	270.58461	274.06593		274.18964		279.27627		14.26610				
5		3.83947	1.26336	2.49126	0.74500	1.94692	0.82339	0.31670	2.98988	\hat{R}_{mle}		
		0.49028	0.50512	0.00175	0.43659	0.00505	0.53858	0.00413	0.96741		0.28027	
		2.90000	3.31362		3.03648		2.21221		0.15970			
		455.95196	455.24322		455.11951		455.03288		18.46030			
6		6.09687	1.01513	3.55255	1.01673	2.59717	1.01054	3.09073	0.68370	\hat{R}_{per}		
		0.51905	0.49405	0.01364	0.52132	0.00125	0.53285	0.00050	0.24632		0.08861	
		1.44215	2.47920		1.60464		1.26563		5.05340			
		466.58436	466.04728		466.92356		466.83694		19.63855			
Best Model										4		
150	1		1.26417		1.61763		0.11787		2.20881	\hat{R}_{bml}		
			0.41002	0.63205	0.00063	0.56609	0.00032	0.96531	0.00391		0.48191	0.00007
			2.37251	0.84366		1.16153		0.03956			1.71214	
			826.57694	828.52165		828.49463		825.51102			23.87064	
	2		0.32740	0.71030	0.03001	0.98841	2.51333	0.88332	2.90601	1.18690	\hat{R}_{mle}	
			0.45840	0.45245	0.00114	0.29147	0.03464	0.49685	0.00177	0.39752		0.00445
			0.63802	0.54744		0.96084		0.54746		0.79863		
			409.19646	410.17646		410.25809		416.19773		15.24652		
	3		2.66242	2.41390	1.88539	2.45860	0.26531	3.69937	3.13313	5.18661	\hat{R}_{mle}	
			0.75863	0.52447	0.06587	0.48488	0.08834	0.50565	0.08006	0.31380		0.22055
			0.76633	2.12407		2.45859		2.50667		4.91646		
			406.72544	410.16724		410.24887		416.18851		15.24648		
	4.47988	1.08813	2.34637	1.01721	1.23886	0.99675	2.92909	1.78771	\hat{R}_{mle}			

4	0.48498	0.48480	0.00001	0.50003	0.00026	0.53515	0.00289	0.61222	0.01835	
	0.79896	0.78607		0.76104		0.69344		0.47826		
	405.04568	410.13141		410.24307		416.20211		15.24611		
5		2.34756	0.92724	2.28170	0.76916	2.76389	1.07682	0.37330	2.96615	\hat{R}_{mle}
	0.47291	0.50377	0.00140	0.45881	0.00204	0.50740	0.00148	0.92870	0.26236	
	2.90000	2.45044		2.64935		2.65267		0.29681		
	515.97521	515.55568		515.47405		515.53441		18.60011		
6		5.77147	1.01792	4.02084	1.04961	2.50532	1.01177	3.09232	0.68077	\hat{R}_{per}
	0.49912	0.45925	0.01221	0.51276	0.00340	0.51889	0.00091	0.23746	0.08161	
	1.44159	2.44755		1.55170		1.21914		5.02426		
	645.97875	645.52042		645.43879		645.49915		22.67553		
Best Model										4

يتضح من جدول (3-6) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00010) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (4.98049) .
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.28924) .
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزيئية عند

- الانموذج (NTPLD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00044) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.55297).
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00002) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (13.56111).
5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (LD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00041) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (14.26610).
6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (15.24611).

5- التجربة الخامسة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعلمات $a=3.3$ ، $b=1.5$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (3-7)

(7-3) دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلمات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية

(IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج (-2LnL, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

b=1.5 ، a=3.3 عند القيمة الافتراضية للمعلمات (n=10,25,50,75,100,150)

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method	
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE		
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$			
		-2LnL	AIC		AICc		BIC		HQIC			
10	1		1.19699		1.75078		0.27964		2.43760		\hat{R}_{bml}	
		0.40189	0.68619	0.00101	0.58524	0.00042	0.93330	0.00341	0.48957	0.00009		
		2.74043	0.77251		1.26884		0.08704		1.91200			
		28.57643	28.85745		30.57174		29.46262		8.24915			
	2		1.42897	1.08835	0.08030	1.02494	0.11548	0.69517	3.31002	1.76402		\hat{R}_{mom}
		0.41269	0.49218	0.00769	0.37439	0.00234	0.50983	0.01250	0.35205	0.00423		
		0.99316	0.71737		0.95678		0.60690		1.22494			
		20.26834	21.23415		22.94844		21.83932		7.58144			
	3		1.29654	1.02855	0.18102	1.30264	1.67368	0.94369	2.23769	1.78239		\hat{R}_{bml}
		0.16886	0.48113	0.11734	0.50317	0.13992	0.4953	0.12623	0.20910	0.02786		
		2.95301	0.73315		0.78032		0.68586		1.43483			
		14.35015	16.33782		15.83782		16.03524		2.45621			
	4		2.55601	0.22788	0.61461	3.29946	2.88501	8.26706	3.26925	0.57328		\hat{R}_{bml}
		0.10906	0.07112	0.01591	0.40287	0.09027	0.61052	0.25351	0.11671	0.01379		
		0.59057	4.31726		0.23274		0.11620		1.56866			
		4.91475	8.19377		6.47948		7.58860		5.17428			
	5		0.00000	2.72530	0.74927	4.89761	1.34947	3.02996	1.06001	0.28237	3.20935	\hat{R}_{per}
		0.63789	0.42857	0.05173	0.50241	0.02209	0.52541	0.01497	0.98318	0.18037		
		2.43157	3.15985		3.94371		2.91833		0.09833			
		33.69911	32.98420		23.26992		23.37903		6.86457			
	6		1.69012	1.35490	4.34473	1.62597	2.98508	1.40679	3.46501	1.19169		\hat{R}_{per}
		0.48558	0.48278	0.01907	0.51537	0.00416	0.45093	0.00225	0.32680	0.03147		
		0.39304	0.50571		0.20666		0.51834		0.94667			
		35.01029	36.00614		35.29185		35.40097		7.71427			
Best Model											4	
25	1		1.18692		1.77439		0.21442		2.47850		\hat{R}_{bml}	
		0.39356	0.68101	0.00103	0.57018	0.00039	0.95620	0.00390	0.47385	0.00018		
		2.74343	0.76529		1.29269		0.05568		1.95351			
		59.14993	57.89736		58.44281		60.33511		10.38510			
	2		4.09125	1.08183	-0.00293	1.10350	6.59574	1.31379	3.32089	2.03552	\hat{R}_{per}	
		0.47136	0.61775	0.02307	0.36773	0.01204	0.56194	0.00863	0.34617	0.01673		

50		0.96365	0.59684	1.02482		0.79823		1.37808		\hat{R}_{bml}	
		49.07391	50.85202		51.39747		53.28977		10.11566		
	3		2.39395	1.00162	1.82428	1.04083	1.63117	1.09064	3.15758		1.30030
		0.20623	0.49893	0.10519	0.50145	0.10735	0.49283	0.10204	0.33933		0.02565
		2.93734	0.77670		0.77832		0.80963		1.53486		
		42.31215	44.37370		44.19978		43.15482		4.84665		
	4		2.92999	0.20445	0.58664	3.72316	3.47390	9.56609	3.26867		1.71935
		0.42471	0.00102	0.71214	0.40863	0.10596	0.62140	0.28373	0.52961		0.01125
		0.59286	0.00153		0.20806		0.10153		1.75272		
		23.59476	26.77113		26.22568		24.33338		7.64156		
	5		2.25320	0.96449	3.22078	1.61301	3.47391	1.63966	0.43269		3.16264
		0.47020	0.43362	0.00718	0.50117	0.00115	0.48873	0.00057	0.93045		0.26567
		3.08532	2.25836		2.95775		3.17690		0.34041		
		75.58093	81.86397		81.31851		79.42622		10.73449		
	6		2.11932	1.22824	4.73612	1.42269	3.45860	1.44436	3.53836		1.04474
		0.57565	0.45586	0.02126	0.49862	0.00901	0.53699	0.00166	0.25189		0.11557
0.44902		0.74393		0.47414		0.51645		1.69238			
75.02465		72.99621		72.45075		70.55845		10.72638			
Best Model										4	
50	1		1.03703		2.38031		0.17315		3.55474	\hat{R}_{mom}	
		0.44682	0.76070	0.00121	0.53742	0.00010	0.96226	0.00343	0.42688		0.00028
		2.71440	0.61996		1.83415		0.07157		2.96116		
		156.16781	155.26164		155.42831		159.89662		12.98964		
	2		10.20312	1.03442	0.01007	1.08042	3.22052	1.36321	3.32420	2.11489	
		0.50753	0.69299	0.03673	0.40410	0.01238	0.57026	0.00419	0.37124	0.02028	
		0.94812	0.51217		1.09070		0.79617		1.48893		
		106.79545	106.60802		106.86334		110.43207		12.02855		
	3		3.43736	0.99737	2.09348	0.94271	1.03313	1.46639	2.98611	1.47814	
		0.25893	0.50447	0.07319	0.50748	0.07485	0.49193	0.06801	0.35230	0.01197	
		2.91290	0.94845		0.93582		1.06454		1.88145		
		97.48381	99.36047		99.61579		103.18452		11.88495		
	4		2.98139	0.21997	0.56668	3.38699	2.85375	9.33986	3.26903	0.55513	
		0.09241	0.00000	0.01107	0.39682	0.09583	0.63148	0.29212	0.07356	0.01008	
		0.59173	0.66673		0.22539		0.10326		1.63055		
		90.07638	90.83343		90.75010		88.92141		9.05484		
	5		0.00000	2.47728	0.85395	4.07112	1.52034	2.85196	1.27465	0.35738	3.18615
		0.54761	0.42993	0.02139	0.50251	0.00246	0.52519	0.00119	0.96404	0.23471	
		2.77372	2.59109		3.39810		2.59350		0.19166		
		154.13304	157.33101		157.07569		153.50697		12.57679		
	6		1.44322	1.52382	3.50034	1.74098	2.76895	1.63542	3.39407	1.32698	
		0.42607	0.51243	0.02022	0.53928	0.01709	0.50371	0.00730	0.33187	0.01130	
		0.43546	0.39759		0.22965		0.34828		0.66861		
		153.34765	152.96096		152.70564		149.13692		12.64146		
Best Model										4	

75	1		1.15598		1.85485		0.20077		2.61856	\hat{R}_{mom}	
		0.42520	0.70014	0.00095	0.57999	0.00031	0.96251	0.00364	0.48731		0.00045
		2.73395	0.73340		1.35987		0.04909		2.07851		
		146.28719	147.55837		147.72503		152.19334		12.88650		
	2		7.02359	1.00903	0.04904	0.96149	3.51667	1.65898	3.31958	2.00358	\hat{R}_{per}
		0.52415	0.68999	0.03229	0.47718	0.00333	0.51428	0.00023	0.42013	0.01285	
		0.93062	0.49329		0.91705		1.01174		1.36411		
	3		2.02909	1.02544	0.51277	1.24644	0.44425	1.28576	1.25768	3.90092	\hat{R}_{bml}
		0.18220	0.48486	0.10931	0.50191	0.12472	0.49926	0.12338	0.31596	0.02485	
		2.94253	0.77992		0.80394		0.82173		1.54076		
		84.06417	87.20523		87.03856		82.57025		12.23516		
	4		2.94356	0.20765	0.54671	3.60370	2.81309	9.88751	3.26874	1.52675	\hat{R}_{bml}
		0.08512	0.08977	0.01015	0.39960	0.10301	0.63212	0.30128	0.06853	0.00942	
		0.51299	0.21121		0.21243		0.09769		1.72925		
		55.22433	57.10587		56.85055		53.28182		11.36112		
	5		2.07134	1.01460	2.48063	1.46077	2.77348	1.63009	0.48465	3.14628	\hat{R}_{mle}
0.43265		0.44129	0.00385	0.49855	0.00515	0.50601	0.00635	0.89539	0.25603		
3.25877		2.07213		2.45407		2.72312		0.52452			
236.51559		262.73248		262.56581		258.09750		13.72258			
6		1.85257	1.29783	4.16063	1.51128	3.36392	1.46325	3.49632	1.12996	\hat{R}_{per}	
	0.52776	0.47454	0.01457	0.52336	0.00153	0.50600	0.00054	0.29251	0.06556		
	0.43060	0.59543		0.35533		0.47248		1.23231			
	234.42053	232.93285		232.76618		228.29787		13.74364			
Best Model										4	
100	1		1.13452		1.91929		0.24212		2.73144	\hat{R}_{mom}	
		0.41185	0.69555	0.00102	0.55518	0.00027	0.95323	0.00375	0.40048		0.00063
		2.73838	0.71714		1.42285		0.06762		2.19046		
		204.13309	203.86757		203.99128		209.07791		13.66958		
	2		0.07296	0.99402	3.40792	1.62124	2.20089	1.06211	3.31286	1.83667	\hat{R}_{mle}
		0.45667	0.41606	0.00287	0.51572	0.00446	0.56525	0.01383	0.38207	0.00642	
		0.97143	0.93108		0.73525		0.63960		1.26517		
	3		1.31623	2.32261	0.33157	1.60271	0.11472	1.91838	1.65036	1.01190	\hat{R}_{mle}
		0.20954	0.30405	0.01189	0.50342	0.10454	0.48955	0.09856	0.47167	0.08002	
		2.91998	1.93375		1.01789		1.17310		0.96960		
		182.10799	183.83970		183.79888		181.23453		13.18425		
	4		3.26899	1.55205	0.61136	3.46400	2.69126	9.23465	2.97817	0.21862	\hat{R}_{mle}
		0.09814	0.08905	0.01135	0.40365	0.09753	0.63109	0.28699	0.004311	0.01251	
		0.59149	0.51532		0.22288		0.10418		1.63790		
		115.84249	117.58785		117.46414		112.37751		12.16336		
	5		3.50040	1.58366	2.30492	0.90829	2.19268	1.20827	0.40590	3.17103	\hat{R}_{mle}
0.49381		0.49884	0.00010	0.43006	0.01015	0.52993	0.00333	0.94389	0.25603		
2.96960		3.09463		2.34558		2.10044		0.28100			

	314.82958	322.18894		322.06523		316.97860		14.41492			
6		2.56595	1.49395	1.60345	1.39914	2.82556	1.55833	3.40216	1.31182	\hat{R}_{mle}	
		0.48015	0.49715	0.00183	0.49888	0.01210	0.52136	0.00239	0.36917		0.01463
		0.43731	0.40416		0.46899	0.47861	0.71220		0.43731		
		313.75989	312.90458		312.78087		307.69424		14.40985		
Best Model										4	
1		3.02198		2.08361		0.18922		1.09030		\hat{R}_{mle}	
		0.44700	0.47039	0.00001	0.57077	0.00020	0.97121	0.00359	0.73619		0.00106
		2.72083	2.45263		1.56141		0.04288		0.66928		
		302.31130	301.03777		301.11941		307.05905		14.62427		
2		4.16178	1.46389	5.49366	1.04155	0.02229	1.03510	3.32031	2.02149	\hat{R}_{mle}	
		0.49732	0.51885	0.00052	0.65519	0.02850	0.42591	0.00647	0.38707		0.01394
		0.94569	0.89307		0.54052		1.01379		1.39901		
		292.11579	293.45187		293.53350		299.47314		14.57288		
3		1.27163	1.98416	0.31699	1.37792	0.18565	1.51839	2.49210	1.03884	\hat{R}_{mle}	
		0.17286	0.30299	0.02352	0.50199	0.13284	0.49273	0.12848	0.47565		0.10834
		2.93976	1.62005		0.86226		0.93385		0.81707		
		275.37203	276.76569		276.73866		273.75505		13.21126		
4		3.26865	1.51739	0.56107	3.70894	0.22776	7.29364	2.92597	0.20360	\hat{R}_{mle}	
		0.08577	0.08911	0.00958	0.40416	0.10671	0.64746	0.31921	0.00000		0.01022
		0.59322	1.76276		0.20769		0.09576		0.11741		
		175.10566	178.12447		178.04284		172.10320		12.20284		
5		3.13255	1.43868	2.31114	0.92178	3.91444	1.76041	0.40948	3.16991	\hat{R}_{mle}	
		0.50283	0.50048	0.00005	0.43582	0.01006	0.50222	0.00015	0.93523		0.23481
		2.97832	2.86459		2.33867		3.23166		0.31063		
		475.04470	488.88401		488.80237		482.86274		15.47918		
6		1.61667	1.40192	3.40670	1.58731	3.14695	1.54495	3.44036	1.23935	\hat{R}_{per}	
		0.47443	0.49493	0.01316	0.51826	0.00242	0.50137	0.00086	0.32069		0.02848
		0.43729	0.47958		0.34239		0.39926		0.87094		
		473.77245	472.84020		472.75857		466.81893		15.47975		
Best Model										4	

يتضح من جدول (7-3) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة عدم التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ

- تكاملي بلغ (0.00009) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (5.17428).
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00018) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (7.64156).
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00010) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.05484).
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (TPLD1) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزئية عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00023) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (11.36112).
5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج

(TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (WD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00010) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (12.16336) .

6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (12.20284).

6- التجربة السادسة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعلمات $a=2$ ، $b=3$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (8-3).

(8-3) دالة البقاء المقدر بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعلمات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي

(IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج ($-2LnL$, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

(n=10,25,50,75,100,150) عند القيمة الافتراضية للمعلمات $a=2$ ، $b=3$

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$		
		$-2LnL$	AIC		AICc		BIC		HQIC		
10	1		1.00953		2.62118		0.64137		3.99354		\hat{R}_{Mom}
		0.58914	0.77890	0.00044	0.50666	0.00007	0.87175	0.00103	0.37933	0.00049	
		1.47394	0.59389		2.05875		0.30649		3.38431		
		94.47492	78.40046		80.11474		79.00563		10.34004		
	2		2.76218	2.66496	-0.33552	1.19309	5.29760	3.88226	2.38949	5.67253	\hat{R}_{mle}
		0.70162	0.77416	0.00657	0.61045	0.00903	0.55343	0.02565	0.35782	0.13071	

	1.23137	1.10789		1.83678		2.49156		4.53276			
	4.51719	9.36314		13.36314		10.27090		5.36911			
		1.73261	1.32976	0.26198	2.17660	3.85082	2.26758	1.99915	2.99266		
	0.36540	0.49862	0.02112	0.51419	0.02720	0.40839	0.00230	0.36587	0.00000		
3	2.66229	1.32975		1.35183		2.06626		2.65494		\hat{R}_{bml}	
	4.25738	3.61386		3.11386		3.31127		0.75196			
		2.67183	0.05704	1.86195	5.27899	2.73002	5.41984	1.75906	1.96357		
	0.00725	0.00000	0.11811	0.18775	0.03453	0.61613	0.37259	0.00687	0.00008		
4	0.30727	0.22211		0.09729		0.02774		0.015422		\hat{R}_{bml}	
	2.48662	2.18916		2.47487		1.58399		1.17639			
		1.76932	1.24703	2.51627	2.56024	2.25327	2.30244	0.61712	3.15028		
	0.59565	0.41470	0.04991	0.50060	0.01079	0.49803	0.01199	0.82269	0.07091		
5	2.70361	1.92415		3.28499		2.87647		0.84391		\hat{R}_{Mom}	
	8.73370	28.08461		26.37033		27.47944		7.90760			
	3,2	1.23111	1.83696	4.54099	2.02100	2.06324	1.94848	3.48233	1.47380		
	0.53016	0.54679	0.01895	0.51737	0.00489	0.53855	0.00385	0.28886	0.07063		
6	0.18499	0.30199		0.08861		0.26729		0.46783		\hat{R}_{per}	
	37.37653	38.21900		36.50471		37.61382		8.54276			
	Best Model										
	4										
		1.25064		1.64156		0.23686		2.24968		\hat{R}_{bml}	
	0.46661	0.62376	0.00030	0.53449	0.00006	0.94494	0.00272	0.42610	0.00002		
	1.52444	0.83722		1.19077		0.06833		1.76042			
	79.29304	70.13067		70.67613		72.56842		10.78092			
2		1.58545	1.08074	2.49189	3.48678	1.79386	1.41379	2.04173	2.46838	\hat{R}_{Mom}	
	0.38944	0.73202	0.12877	0.38528	0.00038	0.51688	0.01792	0.31598	0.00620		
	1.43120	0.48408		1.29694		0.92466		1.85947			
	12.74952	15.84866		16.99151		19.50528		7.44454			
3		1.23829	1.07555	0.19768	1.86162	0.99563	1.25795	1.93813	2.46802	\hat{R}_{blm}	
	0.23399	0.46430	0.06100	0.50217	0.08574	0.54392	0.10978	0.28604	0.00338		
	2.67995	1.07547		1.15442		0.86705		2.14903			
	12.04768	12.31233		12.13842		11.09345		2.15249			
4		7.13861	1.16156	2.14807	9.49091	3.25603	5.95523	3.16805	2.17605	\hat{R}_{bml}	
	0.00923	0.01433	0.00110	0.18454	0.03178	0.62645	0.38219	0.00897	0.00010		
	0.30642	0.21124		0.10536		0.02886		0.32655			
	9.07999	9.58249		9.03704		7.14474		3.77174			
5		1.54515	1.30045	1.80774	2.41926	1.27621	1.75351	0.69162	3.14231	\hat{R}_{Mom}	
	0.50977	0.42229	0.02479	0.49016	0.00165	0.52677	0.00926	0.74058	0.06844		
	3.45240	1.75230		2.76298		1.66374		1.22879			
	81.74916	81.61252		81.06707		79.17477		10.83046			
6		1.08032	2.18217	3.23698	2.16115	3.07192	2.08592	3.33543	1.66104	\hat{R}_{per}	
	0.48599	0.58376	0.02700	0.54559	0.00475	0.51834	0.00133	0.32929	0.02942		
	0.19023	0.24797		0.12744		0.15867		0.32513			

		92.02786	95.11907	94.57362	92.68132	11.17500				
Best Model										4
50	1		1.67659		1.20180		0.16063		1.51946	
		0.36565	0.42060	0.00029	0.52850	0.00030	0.95400	0.00405	0.45214	0.00009
		1.57237	1.26744		0.83141		0.03978		1.12125	
		68.42608	57.35014		57.60546		61.17419		10.75547	
	2		1.70754	1.47008	3.19958	3.21333	0.01804	1.74452	2.12022	3.26933
		0.53161	0.73704	0.05244	0.48834	0.00233	0.45031	0.00812	0.38544	0.02677
		1.33632	0.59947		1.51127		1.72688		2.47536	
		25.26429	26.70918		26.62585		24.79716		4.96290	
	3		3.43389	1.15478	0.00225	2.30356	0.42010	1.66179	1.95755	2.63237
		0.24794	0.45402	0.04817	0.49868	0.07690	0.50810	0.07787	0.28042	0.00133
		2.67651	1.15475		1.33305		1.07589		2.30933	
		23.10873	26.94181		27.46354		32.67787		9.07936	
	4		8.45958	0.06049	2.08104	9.67464	3.98750	6.11698	2.76368	3.17312
		0.00877	0.01134	0.09969	0.18589	0.03266	0.63162	0.38939	0.0089	0.00009
		0.30660	0.67553		0.10336		0.02788		0.31691	
		21.99765	22.26814		22.01282		18.44409		7.47160	
5		1.48701	1.38518	1.79422	2.93985	1.58146	2.67989	0.72852	3.13836	
	0.47613	0.41138	0.01802	0.49894	0.00067	0.51243	0.00217	0.71797	0.07073	
	3.64849	1.79229		3.23392		2.70299		1.36599		
	182.03223	186.76110		186.50578		182.93705		13.03968		
6		1.13741	1.99159	3.20328	2.06921	2.50740	1.95765	3.37211	1.61705	
	0.51039	0.56391	0.02525	0.53102	0.00075	0.50721	0.00101	0.34891	0.03199	
	0.17605	0.26897		0.14172		0.22570		0.33449		
	171.56743	171.41837		171.16305		167.59432		12.85876		
Best Model										4
75	1		1.58047		1.26657		0.20413		1.62382	
		0.40931	0.46750	0.00189	0.53977	0.00022	0.93717	0.00352	0.47525	0.00006
		1.55789	1.20540		0.87903		0.05842		1.16528	
		61.35276	44.95928		45.12595		49.59426		10.44585	
	2		1.69782	1.52072	0.22214	1.24472	2.69091	3.78782	2.13095	3.37249
		0.53145	0.74209	0.05056	0.46917	0.00451	0.50423	0.00095	0.35855	0.03489
		1.34010	0.64376		1.58861		1.39878		2.57920	
		39.86086	41.11801		41.06322		38.80052		10.04111	
	3		1.53391	1.21552	0.06390	2.27665	1.68920	1.38552	1.97209	2.75783
		0.27373	0.46345	0.04126	0.50265	0.06472	0.50808	0.06264	0.29461	0.00056
		2.67174	1.21551		1.33997		1.06567		2.42972	
		34.79103	38.08883		38.42686		45.04130		9.26918	
	4		3.67185	2.05729	0.13833	2.86538	4.69553	2.18987	2.76019	3.16427
		0.00763	0.12111	0.15654	0.38892	0.14958	0.63337	0.39401	0.008611	0.00008
		0.30717	0.98665		0.05888		0.02633		0.33214	

100	5	34.18492	35.07019		34.90352		30.43521		9.14085		\hat{R}_{per}		
			1.59645	1.35961	2.33990	3.32536	2.18576	3.19369	0.69240	3.14223			
		0.51476	0.40241	0.02595	0.50349	0.00051	0.50905	0.00017	0.76490	0.07335			
		3.21575	1.87747		3.90202		3.59266		1.13155				
		271.12307	274.30295		274.13629		269.66798		14.07474		\hat{R}_{per}		
		1.08359	2.17646	3.46076	2.17338	2.62284	2.10364	3.35295	1.64025				
	0.46988	0.58130	0.03248	0.52439	0.00478	0.51622	0.00265	0.31308	0.02948				
	0.18775	0.24755		0.11117		0.18501		0.32953					
		260.92360	261.01370		260.84703		256.37872		13.95898		Best Model		
												4	
	100	1		1.85177		1.40552		0.20104		1.42238			\hat{R}_{mle}
			0.42612	0.44813	0.00001	0.52993	0.00013	0.94745	0.00346	0.52633		0.00012	
1.54680			1.40737		0.99506		0.05501		1.01038				
46.95716			47.58786		47.46414		2.37752		10.32593				
2			2.11852	3.14731	3.32816	1.22513	3.57744	1.97823	2.06995	2.76731	\hat{R}_{mle}		
		0.47207	0.46197	0.00045	0.74580	0.08603	0.51174	0.00184	0.36373	0.01378			
		1.38131	1.29753		0.51750		1.25264		2.07511				
		45.87672	49.34157		49.59157		57.15708		10.72644				
3			1.94799	2.55076	0.14476	1.98200	0.78664	1.44862	3.35527	1.11536	\hat{R}_{mle}		
		0.25010	0.29153	0.00222	0.50207	0.07737	0.51838	0.08375	0.46473	0.05340			
		2.67739	2.22887		1.20545		0.99442		1.11533				
		54.68178	55.52429		55.48347		52.91912		10.07839				
4		1.75959	0.16390	0.13957	1.92513	4.47570	5.31384	7.67184	0.05716	\hat{R}_{mle}			
	0.00765	0.00688	0.00008	0.38989	0.15054	0.63406	0.39523	0.13555	0.01119				
	0.30717	0.351151		0.05869		0.02625		0.77421					
	49.03237	32.22114		32.34485		37.43148		9.87144					
5		1.42717	1.45584	1.85741	3.80453	2.04309	4.02074	0.76502	3.13445	\hat{R}_{per}			
	0.43041	0.39893	0.01251	0.50492	0.00723	0.49450	0.00644	0.68788	0.07390				
	3.84478	1.82142		4.11408		4.69226		1.50778					
	361.57407	366.61058		366.48687		361.40024		14.79658					
6		0.00000	1.08435	2.19975	3.84782	2.19836	3.07615	2.10144	3.37326	1.61565	\hat{R}_{per}		
	0.46168	0.58388	0.03578	0.51843	0.00674	0.49714	0.00155	0.29175	0.03367				
	0.19174	0.24673		0.08730		0.15645		0.35071					
	350.55246	350.53569		350.41198		345.32535		14.70793					
Best Model										4			
150	1		1.89812		1.43341		0.17020		1.39680		\hat{R}_{bml}		
		0.48756	0.50174	0.00555	0.57777	0.05511	0.95857	0.00300	0.58470	0.00013			
		1.52690	1.43151		1.00411		0.04026		0.97113				
		83.44887	84.28672		84.25970		81.27609		10.97926				
	2		1.19326	1.25627	0.12572	1.14558	1.80623	1.88542	2.07618	2.83144	\hat{R}_{per}		
		0.48569	0.74536	0.07826	0.47387	0.00050	0.49950	0.00023	0.37351	0.01488			
		1.37179	0.52384		1.30760		1.29148		2.12165				

	72.57187	72.75656		72.67492		80.58970		11.67848			
3		1.97872	2.81535	1.95484	1.55172	0.73427	1.73360	2.59619	1.24344	\hat{R}_{mle}	
	0.29186	0.30896	0.00037	0.49003	0.04632	0.51017	0.05652	0.48333	0.04302		
	2.66697	2.48239		1.24657		1.21587		1.24343			
	68.12604	71.55780		71.72218		66.73529		11.49340			
4		2.11182	3.05656	0.13619	13.02529	4.84008	38.99919	1.64021	1.26914	\hat{R}_{mle}	
	0.00716	0.00651	0.00009	0.38862	0.14959	0.63562	0.39729	1.78666	1.16800		
	0.30733	0.33398		0.05814		0.02578		0.84172			
	24.99474	7.36816		7.44980		13.38944		6.58410			
5		2.13583	3.16250	1.56699	1.36640	2.30896	3.28967	0.70158	3.14124	\hat{R}_{mle}	
	0.50529	0.50220	0.00011	0.40586	0.02397	0.49349	0.00049	0.75192	0.07286		
	3.33273	3.64161		1.85417		4.00670		1.19266			
	540.02123	544.61058		544.52894		538.58931		15.77570			
6		1.12658	2.06815	3.39390	2.06976	3.20055	2.04189	3.39144	1.59316	\hat{R}_{per}	
	0.49437	0.57363	0.02524	0.51394	0.00101	0.50643	0.00033	0.30560	0.04094		
	0.19128	0.26375		0.14194		0.16343		0.37218			
	529.96677	529.77680		529.69517		523.75553		15.71398			
	Best Model										4

يتضح من جدول (3-8) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (TPLD2) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (WD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (TPLD2) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00000) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (1.17639).
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00002) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (3.77174).
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) و (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج

- (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (NTPLD) والانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00009) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (7.47160).
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (FD) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00006) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.14085).
5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (WD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم في حالة التحيز عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (9.87144).
6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00009) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (6.58410).

7- التجربة السابعة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=5$ ، $b=5$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (9-3)

(9-3) دالة البقاء المقدره بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعاملات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج ($-2LnL$, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة

$b=5$ ، $a=5$ عند القيمة الافتراضية للمعاملات ($n=10,25,50,75,100,150$)

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE	
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$		
		$-2LnL$	AIC		AICc		BIC		HQIC		
10	1		1.22438		1.69190		5.00000		2.33601		\hat{R}_{Per}
		0.36911	0.70012	0.00140	0.62755	0.00085	0.36911	0.00000	0.55016	0.00043	
		4.38655	0.78938		1.20559		4.38655		1.80402		
		72.57187	72.75656		72.67492		66.73529		10.97926		
	2		1.50177	3.00507	0.34788	1.16944	0.01601	7.58680	5.03849	6.19106	\hat{R}_{bml}
		0.52317	0.73743	0.06320	0.64557	0.02159	0.36190	0.03889	0.47081	0.00410	
		3.36352	1.12940		1.79303		7.57091		4.42086		
		21.30893	26.18426		25.68426		25.88168		7.06971		
	3		7.07727	7.37336	6.35149	4.91391	5.08640	6.28822	5.44184	5.59558	\hat{R}_{per}
		0.43106	0.34553	0.00968	0.50957	0.00803	0.37880	0.00359	0.49964	0.00603	
		2.66697	2.48239		1.24657		1.21587		1.24343		
		1.64672	2.84725		3.77033		4.39243		1.70804		
	4		2.17740	2.66443	5.37784	1.28697	9.20068	3.72228	5.01635	5.50867	\hat{R}_{bml}
		0.39444	0.73749	0.12496	0.54185	0.02392	0.54714	0.02480	0.35891	0.00138	
		3.58121	1.18946		1.97911		2.25208		4.04676		
		0.76831	1.63437		3.34865		2.23954		1.66468		
	5		1.60635	1.41919	7.20868	7.19844	3.75052	5.40709	0.73741	5.14034	\hat{R}_{Mom}
		0.39836	0.37768	0.03158	0.47578	0.00796	0.51615	0.01460	0.85443	0.24287	
		7.38457	1.97016		8.73263		5.37734		1.07852		
		75.81480	75.80385		75.08957		74.19868		11.77083		
	6		0.55117	25.46481	6.01819	5.60896	4.84142	5.31434	5.01888	4.95538	\hat{R}_{bml}
		0.39619	0.88551	0.30928	0.51192	0.02000	0.46634	0.00569	0.38587	0.00013	
		0.00091	0.10432		0.00009		0.00080		0.00093		
		79.60360	79.49064		79.77635		78.88547		12.81752		
Best Model											4
25	1		0.95374		4.11509		0.47415		6.79531		\hat{R}_{Mom}

	0.50152	0.87691	0.00175	0.55626	0.00004	0.95056	0.00257	0.41518	0.00009		
	4.29649	0.51663		3.43281		0.17657		6.06380			
	89.84555	88.34551		88.15450		88.11433		9.23121			
2		1.63354	2.88608	0.36431	1.22223	5.03073	5.95282	0.26660	3.27515	\hat{R}_{per}	
	0.44980	0.74093	0.09911	0.59519	0.02587	0.45801	0.00049	0.39126	0.00408		
	3.48645	1.22222		1.88576		3.04712		4.34960			
	68.88934	69.33291		69.15900		68.11404		10.23101			
3		5.99768	5.29749	4.15647	5.78323	4.91565	2.77855	5.05764	6.77677	\hat{R}_{bml}	
	0.37220	0.47084	0.01099	0.50621	0.02138	0.53480	0.02966	0.29702	0.00664		
	4.81795	3.29748		3.52184		2.59898		6.59490			
	2.07582	2.75075		3.29621		5.18851		1.76471			
4		8.17809	3.14215	6.34254	1.14003	0.01713	4.55414	5.04745	6.46572	\hat{R}_{bml}	
	0.52244	0.75869	0.06825	0.65875	0.02359	0.42500	0.01222	0.44171	0.00838		
	3.37968	1.24034		1.76077		4.53717		4.69475			
	1.41291	2.35557		3.06145		4.34704		0.12632			
5		1.59263	1.41015	3.80512	5.20165	5.03717	5.66754	0.73720	5.14034	\hat{R}_{per}	
	0.43045	0.38510	0.03546	0.51206	0.00794	0.48405	0.00384	0.83387	0.19122		
	8.36331	1.94168		6.36885		8.43661		1.23368			
	160.81190	167.62867		167.08321		165.19092		12.38468			
6		0.59310	16.58293	7.01595	4.98681	4.66698	4.93330	5.25337	4.39622	\hat{R}_{per}	
	0.52791	0.85523	0.16872	0.50278	0.00411	0.51561	0.00038	0.35929	0.03246		
	0.00086	0.11065		0.00005		0.00150		0.00134			
	140.70759	141.28220		140.73675		138.84445		12.12595			
Best Model										4	
50	1		1.14048		1.90056		5.00000		2.69856	\hat{R}_{bml}	
		0.49146	0.75916	0.00112	0.67691	0.00057	0.46176	0.00068	0.61477		0.00025
		4.35145	0.69920		1.37128		4.35444		2.11732		
		136.37223	140.70954		140.62620		138.79751		11.28721		
	2		3.01226	3.13025	0.36822	1.19772	5.92287	4.91830	5.04667	6.44189	\hat{R}_{Per}
		0.45776	0.73614	0.08648	0.60877	0.02691	0.51114	0.00323	0.36971	0.00880	
		3.46993	1.36018		1.85561		3.05751		4.78220		
		124.2764	124.3455		124.13244		125.11351		10.23133		
	3		4.96596	5.49610	3.16357	6.02407	4.94398	3.42094	5.07071	7.17437	\hat{R}_{mle}
		0.38629	0.46999	0.00809	0.50042	0.01607	0.49077	0.01259	0.29804	0.00936	
		4.81741	3.49609		3.70661		3.23955		6.99212		
		3.77585	4.89498		5.15030		8.71903		4.85407		
	4		1.66020	2.85125	4.36345	1.22550	5.47337	4.85114	5.02847	5.88303	\hat{R}_{bml}
		0.44768	0.74426	0.09947	0.59251	0.02482	0.51212	0.00483	0.39172	0.00365	
		3.49659	1.21366		1.88993		2.99278		4.29769		
		3.68552	4.52589		4.81160		8.13922		4.52669		
5		1.70887	1.35131	4.92027	4.97146	2.94244	3.97044	0.68998	5.14188	\hat{R}_{Mom}	
	0.49653	0.38504	0.04478	0.49786	0.00000	0.53601	0.00388	0.88248	0.18697		
	6.41875	1.98796		6.32886		4.01799		0.87698			
	320.36231	324.08350		323.82818		320.25945		14.18098			

6		0.57717	19.20495	5.90052	5.14711	3.95547	5.17883	5.16284	4.61368	\hat{R}_{Mom}	
		0.48325	0.86554	0.20600	0.51137	0.00211	0.54012	0.00443	0.37937		0.01287
		0.00089	0.10823		0.00020		0.00319		0.00114		
		301.09339	303.05577		302.80045		299.23172		14.08464		
Best Model										4	
1		1.01672		2.54875		0.25870		3.86109		\hat{R}_{bml}	
		0.44016	0.80633	0.00174	0.61122	0.00039	0.96270	0.00352	0.50636		0.00006
		4.33817	0.58791		1.96545		0.06916		3.22558		
		411.57121	422.13333		434.97778		412.76533		11.34322		
2		1.75269	3.29535	0.34786	1.13353	6.59667	5.61851	5.05750	6.77248	\hat{R}_{per}	
		0.50918	0.75108	0.06964	0.65635	0.02735	0.49510	0.00031	0.40903		0.01215
		3.39222	1.35331		1.75985		3.70223		4.99247		
		209.67128	212.03793		211.98314		209.72044		13.24685		
3		5.82937	3.21557	3.10739	6.28831	2.05120	2.63756	5.05226	6.61275	\hat{R}_{bml}	
		0.34826	0.45714	0.01297	0.50465	0.03023	0.55555	0.04673	0.27758		0.00579
		4.81825	3.21556		3.67276		2.27042		6.43111		
		5.58386	6.75033		6.91700		11.38531		6.04178		
4		1.37073	3.54970	3.34888	1.10881	6.83505	5.32549	5.07425	7.28166	\hat{R}_{per}	
		0.50745	0.74151	0.06263	0.66466	0.03040	0.50493	0.00004	0.37858		0.01918
		3.38874	1.51203		1.71906		3.50344		5.46079		
		4.19698	5.52593		5.73645		9.71462		5.33950		
5		1.69879	1.36788	5.98023	5.64587	6.47551	5.79247	0.69761	5.14163	\hat{R}_{Mom}	
		0.48783	0.38197	0.04303	0.50266	0.00063	0.49642	0.00073	0.88138		0.19163
		6.44060	1.99896		7.32301		7.83476		0.88904		
		481.47104	487.59523		487.42856		482.96025		15.24351		
6		0.58396	17.99224	5.69587	5.01481	5.65053	4.97748	5.19712	4.53164	\hat{R}_{Mom}	
		0.51010	0.86086	0.18217	0.50603	0.00051	0.49617	0.00059	0.37928		0.01960
		0.00088	0.10930		0.00032		0.00036		0.00122		
		462.27905	462.41029		462.24363		457.77532		15.14740		
Best Model										4	
1		2.37682		1.03752		0.27355		3.54843		\hat{R}_{mle}	
		0.44012	0.61736	0.00045	0.78923	0.00166	0.95549	0.00352	0.52227		0.00110
		4.34567	0.60915		1.80977		0.07727		2.92953		
		681.33445	681.34333		613.27222		650.80343		11.48443		
2		1.93405	3.44893	0.34711	1.11520	4.93469	4.47064	5.06761	7.07995	\hat{R}_{per}	
		0.51765	0.74655	0.06137	0.66604	0.02759	0.49779	0.00057	0.40404		0.01551
		3.37619	1.42454		1.72710		3.44758		5.25624		
		280.64147	283.41353		283.37272		280.80836		14.08334		
3		4.83335	4.62478	4.12407	5.74161	4.93369	3.20111	5.07921	7.43193	\hat{R}_{mle}	
		0.40010	0.47514	0.00646	0.50055	0.01221	0.52432	0.01761	0.29944		0.01219
		4.81706	3.62477		3.74950		3.01970		7.24946		
		7.41439	8.63218		8.75589		13.84252		6.83823		
4		5.27991	5.18139	3.35533	1.14484	1.70952	3.33989	5.06043	6.86165	\hat{R}_{mle}	
		0.49596	0.51456	0.00043	0.64577	0.02769	0.74127	0.06902	0.39061		0.01287
		3.40973	3.30786		1.77307		1.40816		5.09684		

	5.93640	7.25730		7.41314		12.02135		6.27426			
5		1.67497	1.37616	5.07301	5.37387	6.94936	6.00762	0.70588	5.14136	\hat{R}_{per}	
		0.48161	0.38333	0.04100	0.51276	0.00118	0.49429	0.00101	0.87019		0.18382
		6.95538	1.98440		6.94447		9.25596		0.97603		
		642.73682	657.38574		657.26203		652.17540		15.95599		
6		4.52170	5.05315	0.57325	19.56965	3.88513	5.07132	5.11019	4.73911	\hat{R}_{mle}	
		0.49025	0.50848	0.00058	0.86420	0.20910	0.52107	0.00248	0.42521		0.00525
		0.00084	0.10791		0.00156		0.00373		0.00100		
		622.83830	625.53509		625.41138		620.32475		15.87133		
Best Model										4	
1		1.43341		1.39680		0.17020		1.89812		\hat{R}_{mle}	
		0.42525	0.55804	0.00022	0.82632	0.00195	0.95423	0.00348	0.43685		0.00322
		4.33313	2.43773		0.55408		0.11399		4.12329		
		834.12194	874.22845		824.11232		787.11766		12.21092		
2		1.80867	3.21855	1.36258	1.17460	8.31412	4.68819	5.05246	6.61872	\hat{R}_{per}	
		0.47051	0.74110	0.08163	0.62388	0.02773	0.52718	0.00359	0.37119		0.01119
		3.45186	1.39426		1.82257		2.94433		4.92494		
		424.62990	426.12846		426.10143		423.11783		15.20965		
3		5.37527	4.55550	0.09403	5.84932	4.92900	3.07075	5.07463	7.29327	\hat{R}_{mle}	
		0.38936	0.47071	0.00748	0.50074	0.01491	0.52730	0.02137	0.29204		0.01123
		4.81725	3.55550		3.72635		2.88981		7.11091		
		11.53576	12.57125		12.65288		18.59252		7.93940		
4		5.37272	5.31170	4.35956	1.17539	2.94434	3.15768	5.04847	6.49683	\hat{R}_{mle}	
		0.47774	0.50452	0.00090	0.62657	0.02688	0.74319	0.08128	0.38860		0.00938
		3.44093	3.02962		1.82083		1.33702		4.79787		
		7.67175	8.64835		8.77206		13.85869		6.84310		
5		4.72133	4.97821	1.69372	1.35940	3.88152	4.58937	0.69608	5.14168	\hat{R}_{mle}	
		0.48251	0.49489	0.00018	0.38528	0.04326	0.50965	0.00123	0.87654		0.19636
		6.65504	6.29236		1.98225		5.28878		0.91849		
		964.31168	973.55267		973.47104		967.53140		16.93867		
6		0.59087	16.75623	5.80374	4.93389	4.77569	4.88212	5.22868	4.45579	\hat{R}_{per}	
		0.53251	0.85460	0.16765	0.50628	0.00128	0.50585	0.00096	0.38465		0.02568
		0.00084	0.11042		0.00029		0.00133		0.00125		
		945.34993	946.65179		946.57016		940.63052		16.90333		
Best Model										4	

يتضح من جدول (3-9) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (WD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة التجزيئيه عند الانموذج (LD)

- لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00000) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند $(-2Ln1)$ بلغ (6.57368).
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (LD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00004) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (0.12632).
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (WD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00000) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند $(-2Ln1)$ بلغ (3.68552).
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزيئية عند الانموذج (NTPLD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00004) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند $(-2Ln1)$ بلغ (4.19698).
5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (NTPLD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (NTPLD) لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00043) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند $(-2Ln1)$ بلغ (5.93640).

6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة الامكان الاعظم عند الانموذج (WD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00018) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (6.84310).

8- التجربة الثامنة :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.1$ ، $b=5$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (10-3)

(10-3) دالة البقاء المقدر بطرائق التقدير الاربعة للنماذج الاحتمالية الستة والمعاملات المقدره ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) ومعايير المقارنة بين النماذج ($-2LnL$, AIC, AICc, BIC, HQIC) عند احجام العينات المفترضة $(n=10,25,50,75,100,150)$ عند القيمة الافتراضية للمعاملات $a=0.1$ ، $b=5$

n	Mode	Est. Para.	\hat{a}_{mle}	\hat{b}_{mle}	\hat{a}_{mom}	\hat{b}_{mom}	\hat{a}_{per}	\hat{b}_{per}	\hat{a}_{bml}	\hat{b}_{bml}	Best Method	
		R_{Real}	\hat{R}_{Mle}	MSE	\hat{R}_{Mom}	MSE	\hat{R}_{Per}	MSE	\hat{R}_{bml}	MSE		
		$Risk_{Real}$	$Risk_{mle}$		$Risk_{mom}$		$Risk_{per}$		$Risk_{bml}$			
		-2LnL	AIC		AICc		BIC		HQIC			
1		0.88687	80.26477		0.56908		0.19703		0.59164		\hat{R}_{Per}	
		0.94161	0.00070	0.00887	0.44928	0.00269	0.83234	0.00018	0.43227	0.00286		
		0.02710	5.25484		0.37947		0.08228		0.39945			
		96.00712	99.91108		101.62537		100.51625		10.83618			
2			2.39566	4.54783	2.29566	0.91603	3.03108	5.77748	2.23616	9.48704	\hat{R}_{Per}	
		0.51717	0.76151	0.07279	0.77404	0.08174	0.47827	0.00185	0.40903	0.01445		
		4.90398	1.73265		1.40822		5.80895		8.09056			
		92.02125	93.31796		93.81796		93.62054		10.71854			
3			1.75439	5.29280	0.06468	8.68158	4.18468	4.64616	4.40481	10.79825	\hat{R}_{Per}	
		0.99448	0.47566	0.33910	0.50671	0.32327	0.88332	0.28791	0.29863	0.55000		
		0.02951	5.29234		5.52591		4.42799		10.58463			
		51.32142	48.04743		46.33314		47.44226		9.30327			
10	4		9.67652	4.73578	1.28876	0.89009	3.02327	9.43713	1.30802	5.85417	\hat{R}_{bml}	
			0.52987	0.74830	0.06541	0.78397	0.09074	0.40107	0.02251	0.42691		0.01454
			4.90390	1.76415		1.36720		9.46058		8.40858		

	33.32142	33.04743		33.33314		33.44226		7.30327			
5		0.43045	2.17884	0.12557	4.68680	0.18402	3.39574	1.47376	4.99895	\hat{R}_{Mom}	
		0.50786	0.41015	0.02616	0.48491	0.00061	0.52674	0.00595	0.09325		0.22481
		2.74338	1.43216		2.76730		1.59921		40.41156		
		4.10993	7.68247		9.39675		8.28764		5.14284		
6	3,5	0.57011	19.53406	4.75608	5.19651	1.96191	5.03921	4.12765	4.31650	\hat{R}_{Mom}	
		0.49178	0.85999	0.18118	0.46455	0.00457	0.54068	0.00617	0.33560		0.02958
		0.01215	0.10760		0.00095		0.04246		0.00512		
		40.03829	41.18595		39.47167		40.58078		8.66005		
Best Model										5	
1		5.78458		0.55607		0.08025		0.57492		\hat{R}_{Per}	
		0.93001	0.04272	0.00808	0.56453	0.00181	0.94918	0.00001	0.55369		0.00190
		0.02503	0.44027		0.34087		0.01722		0.35660		
		244.24242	248.12630		248.67176		250.56405		13.34975		
2		1.33991	5.36603	126699	0.81169	0.22723	6.08202	2.52472	11.08966	\hat{R}_{Per}	
		0.50444	0.74200	0.06266	0.80875	0.11053	0.53650	0.00119	0.34182		0.02986
		4.90370	2.24700		1.24355		4.51748		9.53038		
		233.39917	234.33971		234.51363		235.55859		13.24306		
3		21.96182	4.11507	0.08897	6.69411	4.15327	3.87921	4.29795	8.44445	\hat{R}_{Per}	
		0.99285	0.48033	0.33821	0.50829	0.32314	0.51084	0.30476	0.30963		0.54522
		0.02978	4.11504		4.26708		3.66395		8.22943		
		136.02770	132.45160		131.90615		130.01385		12.11074		
4		1.43279	4.33948	1.31588	0.97299	0.26119	5.77316	2.15179	9.08178	\hat{R}_{Per}	
		0.42317	0.73654	0.10552	0.73199	0.10637	0.53705	0.01411	0.30864		0.01427
		4.90410	1.88786		1.50171		3.68035		7.78952		
		124.64117	121.19797		120.59797		118.92698		11.86490		
5		0.38693	2.25502	0.07581	5.43844	0.16390	2.89022	1.53420	4.99890	\hat{R}_{Mom}	
		0.48100	0.40455	0.02016	0.50479	0.00077	0.59165	0.02471	0.04533		0.24212
		3.07203	1.44073		3.19389		1.03495		1.11494		
		24.94361	28.55487		29.10033		30.99262		8.89649		
6		0.57162	18.66956	3.70071	5.02937	2.85131	4.75011	4.04536	4.39237	\hat{R}_{Mom}	
		0.53830	0.85252	0.15538	0.53419	0.00135	0.50344	0.00163	0.41610		0.01852
		0.01144	0.10836		0.00428		0.01660		0.00512		
		121.31455	122.29084		121.74539		119.85309		11.76190		121.31455
Best Model										5	
1		6.50705		0.52323		0.04007		0.53329		\hat{R}_{Per}	
		0.92880	0.01578	0.00857	0.57902	0.00155	0.98003	0.00011	0.57213		0.00161
		0.02518	0.44352		0.31797		0.00510		0.32635		
		491.32492	495.15726		495.41258		498.98131		15.12977		
2		2.63307	4.27625	-0.30228	0.94790	6.00618	7.03417	2.12505	8.95899	\hat{R}_{Per}	
		0.49193	0.77307	0.09330	0.76123	0.08661	0.51642	0.00090	0.38777		0.01299
		4.90409	1.65956		1.46908		4.88297		7.63717		
		468.39990	469.44462		469.52796		471.35665		15.02695		
3		4.16177	4.09341	0.73347	4.97401	4.20208	4.79112	4.29600	8.40119	\hat{R}_{Mom}	
		0.99279	0.50444	0.32274	0.50899	0.31979	0.47781	0.35199	0.34272		0.50884

		0.02978	4.09339	4.09668	4.57578	8.18605				
		276.34463	273.12207	272.86675	269.29802	13.87572				
4		3.60673	4.63629	-0.29705	0.91369	0.96181	5.02067	2.27051	9.65999	
		0.47945	0.74795	0.08475	0.76703	0.51427	0.00143	0.35692	0.01805	
		4.90396	1.89554	1.40566	4.32162	8.26718				
		248.39449	244.98790	244.70218	241.37457	13.65556				
5		0.40148	2.22721	0.09732	5.02097	0.16943	2.75196	1.51149	4.99892	
		0.50633	0.40976	0.02461	0.51087	0.00002	0.61080	0.02573	0.05291	
		3.01857	1.43385	2.98328	0.93659	0.99912				
		59.58698	63.19185	63.44717	67.01590	10.95614				
6		0.57346	18.89059	3.93521	4.99698	3.40360	4.86174	4.11039	4.33281	
		0.53656	0.85729	0.14775	0.52221	0.00192	0.50572	0.00135	0.38433	
		0.01217	0.10834	0.00345	0.00799	0.00537				
		256.77215	257.27223	-257.01691	253.44819	13.74339				
Best Model										
									5	
1		4.84474		0.61057		0.03902		0.64575		
		0.94280	0.04294	0.00831	0.56572	0.00188	0.98542	0.00008	0.54593	
		0.02341	0.46634	0.37891	0.00442	0.40870				
		738.40159	742.15965	742.32631	746.79462	16.13908				
2		3.73672	3.93999	1.32660	1.02560	0.21745	5.14030	1.97247	8.30848	
		0.45632	0.74080	0.09911	0.71638	0.08465	0.44536	0.00015	0.38225	
		4.90429	1.55969	1.58437	5.14777	7.09939				
		703.52591	704.26689	704.32168	706.58437	16.03682				
3		2.54788	3.79417	0.14891	5.82582	4.13758	3.58382	4.26900	7.80299	
		0.99222	0.47478	0.33947	0.49604	0.32579	0.50703	0.30326	0.30059	
		0.02987	3.79416	3.89811	3.36968	7.58795				
		416.94935	413.79273	413.62606	409.15776	14.95106				
4		2.04090	4.54707	1.29782	0.92072	0.15915	7.22015	2.23593	9.48593	
		0.50458	0.74793	0.07578	0.76852	0.09168	0.41992	0.00921	0.40199	
		4.90398	1.75209	1.41670	7.22934	8.09864				
		388.95157	385.65833	385.47922	381.16134	14.77589				
5		0.41601	2.20868	0.09779	5.14472	0.17406	2.96508	1.49542	4.99894	
		0.50431	0.40495	0.02364	0.49492	0.00014	0.58416	0.01681	0.06941	
		2.80933	1.44323	3.03956	1.11435	1.22313				
		94.23478	97.59681	97.76347	102.23178	12.04563				
6		0.55834	22.11149	3.56022	5.12770	3.30442	5.04496	3.96028	4.46579	
		0.49642	0.86863	0.18781	0.50449	0.00111	0.49628	0.00031	0.37650	
		0.01230	0.10617	0.00524	0.00795	0.00564				
		391.80526	392.60201	392.43534	387.96703	14.79482				
Best Model										
									5	
100	1		5.29233		0.58259		0.05515		0.60913	
			0.93728	0.02406	0.00848	0.54113	0.00192	0.97486	0.00005	0.52453
			0.02482	0.47111	0.36712	0.00879	0.38978			
			985.48311	989.25888	989.38259	994.46922	16.84422			
	2		1.62510	4.95052	0.28167	0.86318	0.17059	5.04001	2.38570	
									1.27445	

	0.50912	0.75362	0.07232	0.79165	0.09859	0.50572	0.00001	0.37386	0.02234	
	4.90383	1.97686		1.32494		4.97134		8.79389		
	938.40923	939.33975		939.38057		941.94492		16.74258		
3		5.10510	5.66269	5.53221	3.69162	4.17471	4.26487	4.25978	7.59789	\hat{R}_{mle}
	0.99196	0.51636	0.30858	0.51369	0.31139	0.49182	0.33476	0.35120	0.49573	
	0.02990	3.65073		3.69161		4.05049		7.38269		
	557.89649	554.46321		554.33950		549.25287		15.67842		
4		0.15260	5.35527	0.27461	0.83704	1.77874	5.17079	2.46109	6.70634	\hat{R}_{mle}
	0.49860	0.47326	0.00075	0.79885	0.11006	0.74302	0.06991	0.34850	0.02672	
	4.90376	5.40895		1.28378		2.14069		9.18886		
	501.72422	498.19503		498.05710		493.19542		15.41883		
5		0.13514	4.21151	0.39692	2.19786	0.17070	3.28394	1.51306	4.99892	\hat{R}_{mle}
	0.48436	0.49149	0.00098	0.41573	0.02107	0.53553	0.00922	0.08364	0.22615	
	3.21295	2.39322		1.38773		1.47270		1.55677		
	128.88406	131.58742		131.71113		136.79776		12.78307		
6		3.95657	5.00457	0.57522	18.27337	3.19486	4.73619	4.11035	4.33285	\hat{R}_{mle}
	0.53994	0.52725	0.00229	0.85277	0.15131	0.49439	0.00242	0.39977	0.02393	
	0.01167	0.10869	0.00314	0.01108	0.00513	0.01167	0.10869	0.00314	0.01108	
	527.61171	528.55047		528.42675		523.34013		15.55440		
Best Model										5
1		0.02285		0.40633		10.75523		0.39193		\hat{R}_{mle}
	0.91074	0.98419	0.00027	0.66490	0.00085	0.00550	0.00859	0.67567	0.00078	
	0.02592	0.00202		0.22373		0.32237		0.21259		
	1479.63191	1483.32492		1483.40656		1489.34620		17.82451		
2		0.1752	5.86704	-0.29440	0.90704	1.89801	4.65242	2.27667	9.69147	\hat{R}_{mle}
	0.49507	0.45109	0.00238	0.77261	0.09587	0.75033	0.07969	0.37793	0.01716	
	4.90394	5.88468		1.39517		1.84903		8.28512		
	1408.64854	1409.33981		1409.36684		1412.35044		17.72346		
3		5.84483	2.88918	5.19557	2.95972	4.13275	3.42361	4.19471	6.13292	\hat{R}_{mle}
	0.98987	0.51599	0.29885	0.50961	0.30555	0.48974	0.32687	0.34029	0.50199	
	0.03021	2.95971		2.88473		3.21257		5.91883		
	839.16887	835.80432		835.72269		829.78305		16.66493		
4		0.12281	5.61344	0.27499	0.83982	1.82153	5.12987	2.44739	6.62605	\hat{R}_{mle}
	0.51708	0.48351	0.00135	0.80040	0.10074	0.74720	0.06340	0.37776	0.02364	
	4.90377	5.63644		1.28782		2.04649		9.10416		
	811.13799	807.67023		807.58572		801.71676		16.59208		
5		0.12210	4.79039	0.43441	2.17621	0.15408	3.60347	1.47014	4.99896	\hat{R}_{mle}
	0.52646	0.49726	0.00100	0.40844	0.02875	0.55982	0.00506	0.08005	0.25441	
	2.71123	1.43758		2.85846		1.54593		1.76886		
	198.18978	201.40364		201.48527		207.42491		13.81379		
6		0.56975	19.48399	3.71806	5.00261	3.46360	4.82708	4.06343	4.37612	\hat{R}_{Mom}
	0.52658	0.85876	0.16111	0.51473	0.00144	0.48898	0.00200	0.39069	0.02197	
	0.01199	0.10785		0.00454		0.00747		0.00533		

	798.29069	799.05939	798.97776	793.03812	16.55272	
	Best Model					5

يتضح من جدول (3-10) ما يأتي :

1. عند حجم عينة (10) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة التجزيئية عند الانموذج (LD) (لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00018) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (-2Lnl) بلغ (4.10993) .
2. عند حجم عينة (25) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة التجزيئية عند الانموذج (LD) (لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (8.89649) .
3. عند حجم عينة (50) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (WD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) (ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2) وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة العزوم عند الانموذج (WD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00002) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (10.95614) .
4. عند حجم عينة (75) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزيئية عند الانموذج (NTPLD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00008) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (12.04563) .

5. عند حجم عينة (100) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (TPLD1) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (LD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة المقدرات التجزئية عند الانموذج (TPLD1) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00001) وحقق النموذج (WD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (12.78307)
6. عند حجم عينة (150) كان افضل تقدير للمعولية هو للانموذج المقدر (LD) لانه حقق اقل معايير المقارنة مقارنة بباقي النماذج يليه تقدير معولية انموذج (WD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (NTPLD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (FD) ومن ثم يليه تقدير معولية انموذج (TPLD1) واخيراً يليه تقدير معولية انموذج (TPLD2)، وكذلك كانت افضل طريقة لتقدير دالة المعولية (البقاء) هي طريقة هي الامكان الاعظم عند الانموذج (LD) لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (0.00027) وحقق النموذج (NTPLD) أقل معيار عند (HQIC) بلغ (13.81379).

والجدول (3-11) يبين عدد مرات ونسب ونسب الافضلية لكل انموذج حسب معايير الافضلية جدول (3-11) عدد مرات ونسب الافضلية للنماذج المدروسة

Model	عدد مرات الأفضلية	نسبة الأفضلية %
LD	0	0
TPLD1	0	0
TPLD2	0	0
NTPLD	38	79.2
WD	10	20.78
FD	0	0

والجدول (3-12) يبين عدد مرات ونسب الافضلية لكل طريقة من طرائق تقدير دالة المعولية (البقاء) حسب معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل انموذج

جدول (12-3) عدد مرات ونسب الافضلية للنماذج المدروسة

method \ n	Model	n						عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية
		$n_5 = 10$	$n_5 = 25$	$n_4 = 50$	$n_3 = 75$	$n_2 = 100$	$n_1 = 150$		
MLE	1	0	0	0	2	5	5	12	4.17
	2	2	0	1	1	4	5	13	4.51
	3	0	0	2	1	6	6	15	5.21
	4	0	1	1	3	8	8	21	7.29
	5	0	0	0	3	5	7	15	5.21
	6	0	0	0	0	4	0	4	1.39
Mom	1	2	3	3	2	1	0	11	3.82
	2	2	2	2	0	0	0	6	2.08
	3	2	1	2	0	0	0	5	1.74
	4	1	2	2	0	0	0	5	1.74
	5	4	3	5	3	0	0	15	5.21
	6	3	1	3	1	0	2	10	3.47
Per	1	5	2	2	1	1	0	11	3.82
	2	3	4	5	7	4	3	26	9.03
	3	3	2	0	2	0	1	8	2.78
	4	1	2	2	3	0	0	8	2.78
	5	3	5	3	2	3	0	16	5.56
	6	2	7	5	7	4	6	31	10.76
bml	1	1	3	3	3	1	3	14	4.86
	2	1	2	0	0	0	0	3	1.04
	3	3	5	4	5	2	1	20	6.94
	4	6	3	3	2	0	0	14	4.86
	5	1	0	0	0	0	1	2	0.69
	6	3	0	0	0	0	0	3	1.04

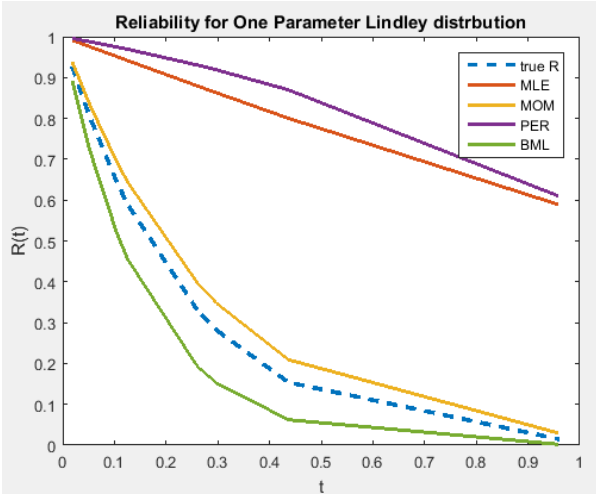
من جدول (11-3) و (12-3) يتضح ماياتي :

1. تفوق الانموذج المقترح الجديد (NTPLD) على باقي النماذج المستعملة بنسبة افضلية بلغت

(79.2%) ، يليه الانموذج ويبيل (WD) بنسبة افضلية (20.8%)، ولم تحقق باقي النماذج

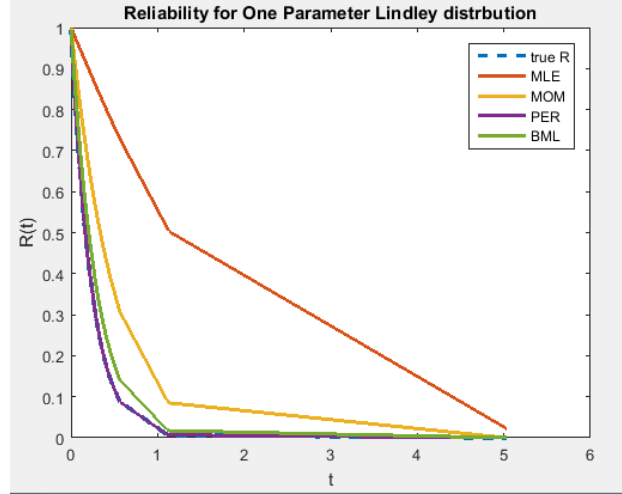
(LD, TPLD1, TPLD2, FD) اي نسب افضلية .

2. حققت طريقة الإمكان الأعظم نسبة أفضلية (7.29%) عند النموذج المقترح (NTPLD) ، يليها عند الانموذج (TPLD2) والانموذج (WD) بنسبة أفضلية (5.21%) على التوالي ، ومن ثم عند الانموذج (TPLD1) بنسبة أفضلية بلغت (4.51%) ، يليه عند الانموذج (LD) بنسبة أفضلية بلغت (4.17%) ، واخيراً عند انموذج (FD) بنسبة أفضلية بلغت (1.39%).
3. تفوق طريقة (bml) عند الانموذج (TPLD2) بنسبة أفضلية بلغت (6.94%) وعند الانموذج (LD, NTPLD) بنسبة أفضلية (4.86%) على التوالي ولم يسجل أفضلية عند الانموذجين (WD) و (FD) .
4. سجلت طريقة (per) أعلى نسبة أفضلية لها عند الانموذج (FD) بلغت (10.76%) و توزعت الافضلية باعداد متقاربة عند جميع احجام العينات. يليها عند الانموذج (TPLD1) بنسبة أفضلية (9.03%) ومن ثم عند الانموذج (WD) بنسبة (5.56%).
5. تفوق طريقة العزوم عند الانموذج (WD) عند احجام العينات (10, 25, 50) وكانت أعلى نسبة لها بلغت (5.21%) ولم يشما أفضلية عند باقي النماذج.
6. سجلت طريقة (MLE) أعلى عدد مرات أفضلية من بين طرائق التقدير المستخدمة إذ حققت عدد (8) مرات عند حجوم العينات (100,150) عند الانموذج (NTPLD) بنسبة بلغت (76.19%) .
7. سجلت طريقة (Per) أعلى عدد مرات أفضلية من بين الطرائق عند حجوم العينات (25,50,75) حيث حققت (7,5,7) مرات على التوالي عند الانموذج (FD) بنسبة بلغت (61.29%) .
- وفيما يأتي بعض منحنيات دالة المعولية (البقاء) المقدرة عند النماذج الستة عند كل احجام العينات المفترضة:



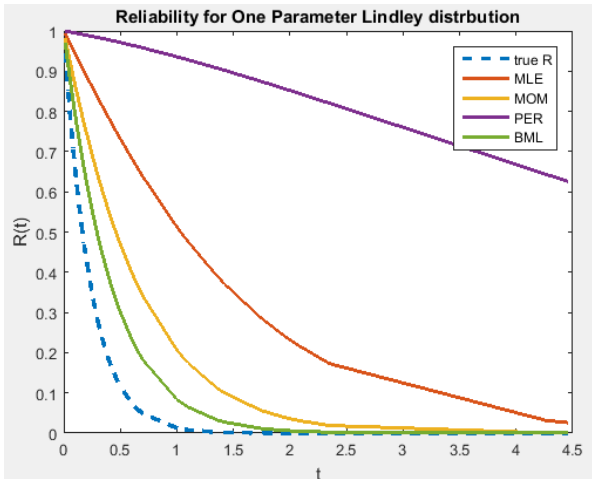
شكل(1-3) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=10



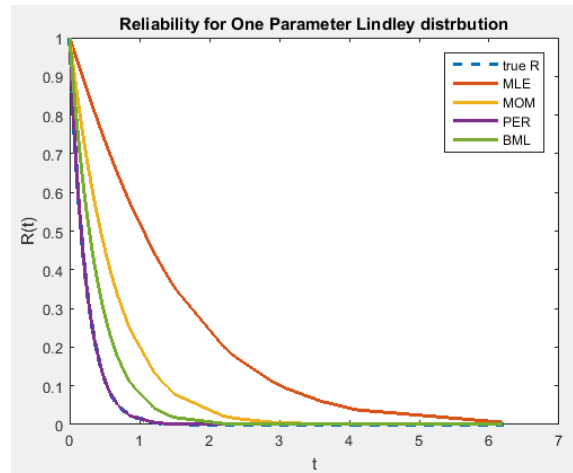
شكل(2-3)منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=25



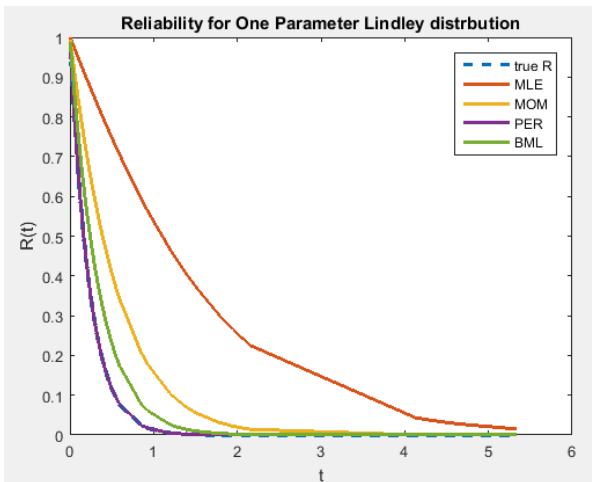
شكل(3-3) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=50



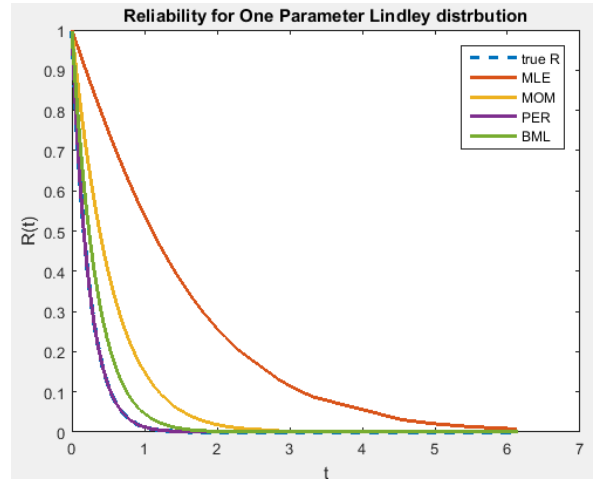
شكل(4-3)منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=75



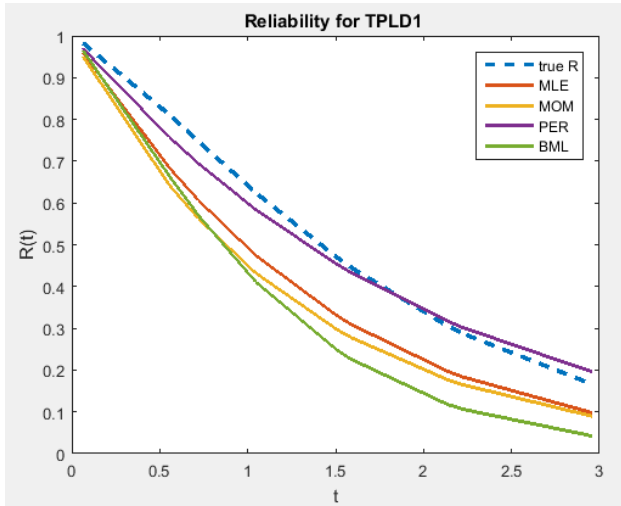
شكل(5-3)منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=100

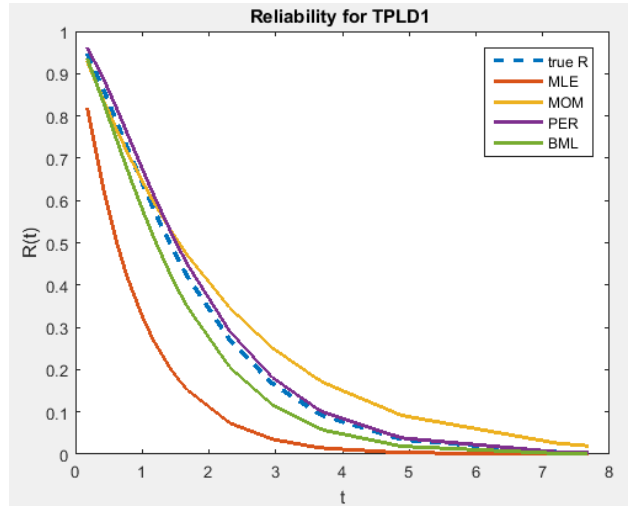


شكل(6-3)منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

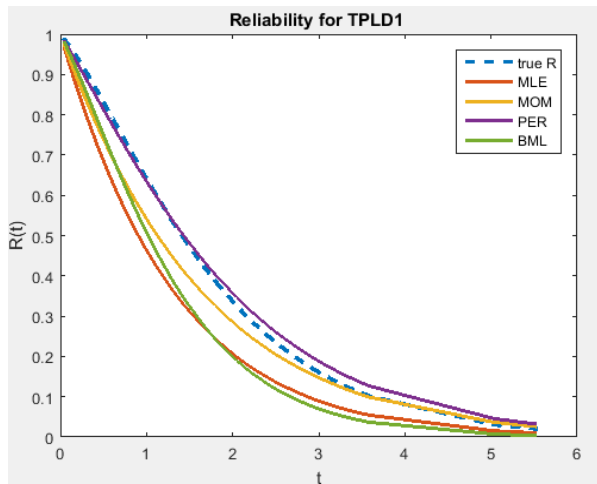
ليندلي بمعلمة واحدة عند حجم عينة n=150



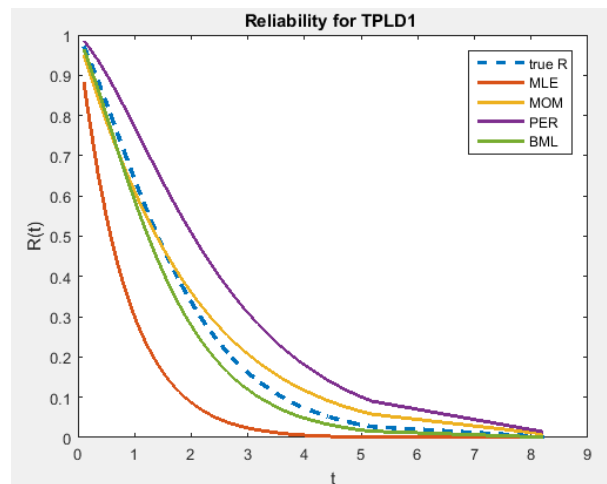
شكل(7-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=10$



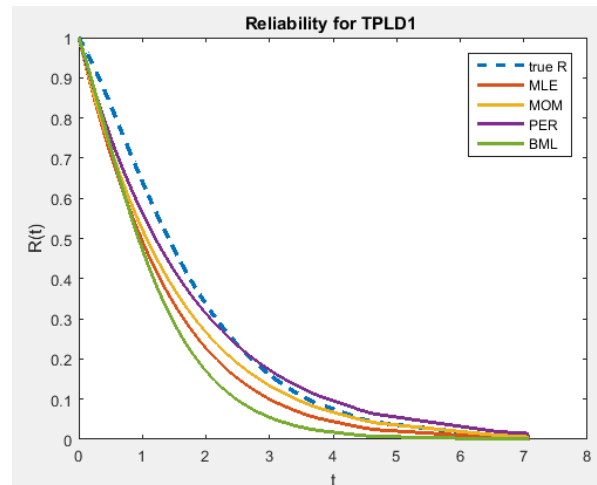
شكل(8-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=25$



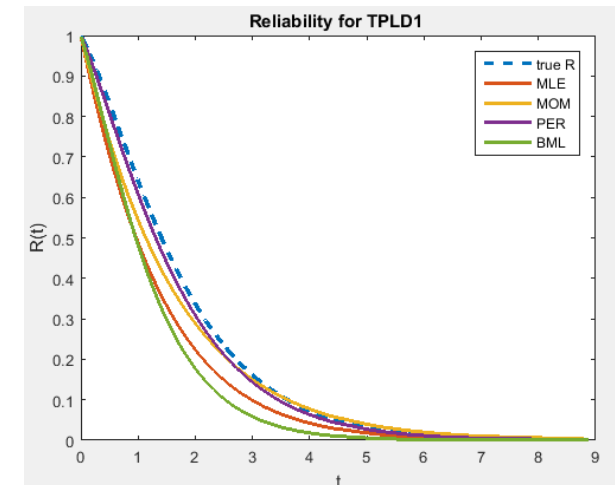
شكل(9-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=50$



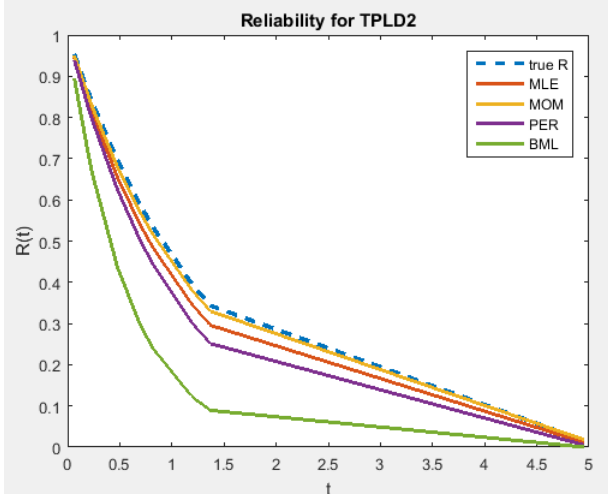
شكل(10-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=75$



شكل(12-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=100$

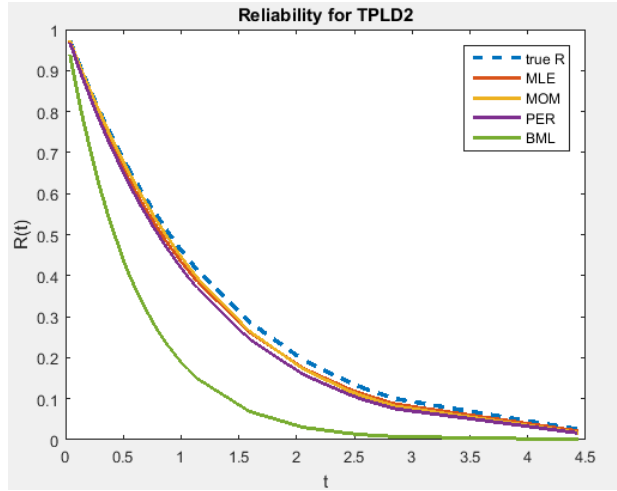


شكل(11-3) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج ليندلي بمعلمتين الشكل الأول عند حجم عينة $n=150$



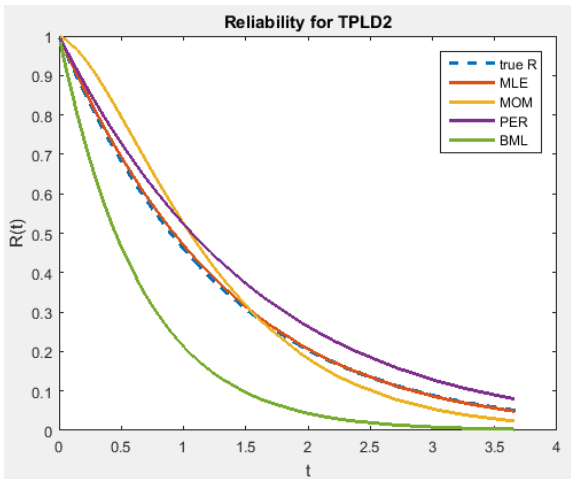
شكل(3-13)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=10$



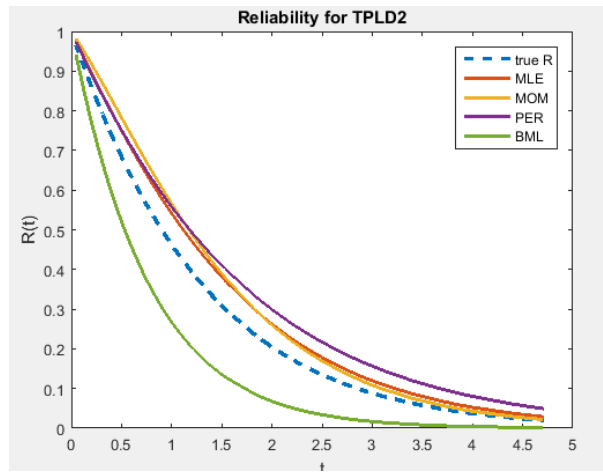
شكل(3-14)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=25$



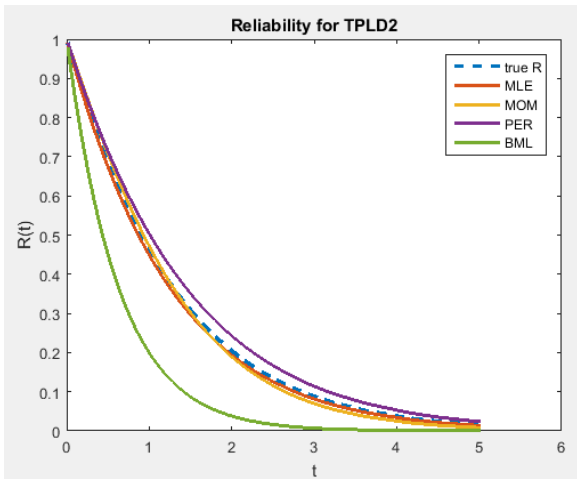
شكل(3-15)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=50$



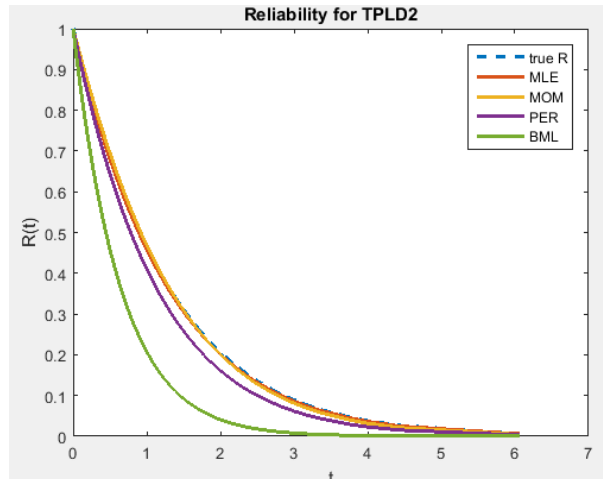
شكل(3-16)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=75$



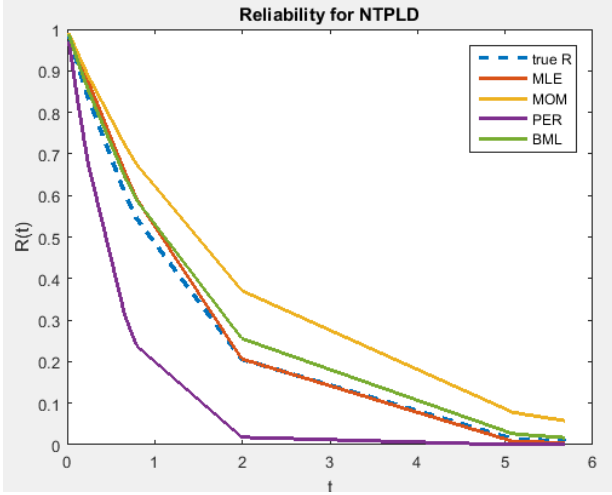
شكل(3-17)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=100$



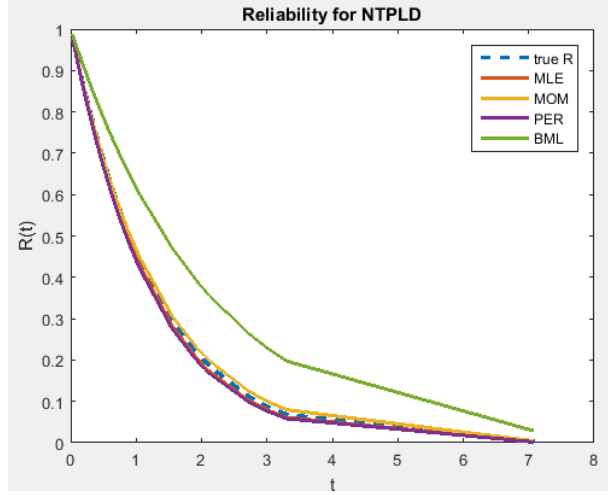
شكل(3-18)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين الشكل الثاني عند حجم عينة $n=150$



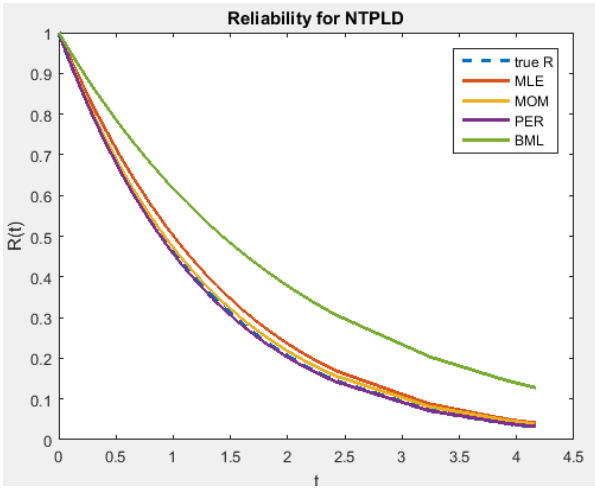
شكل(3-19)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=10$



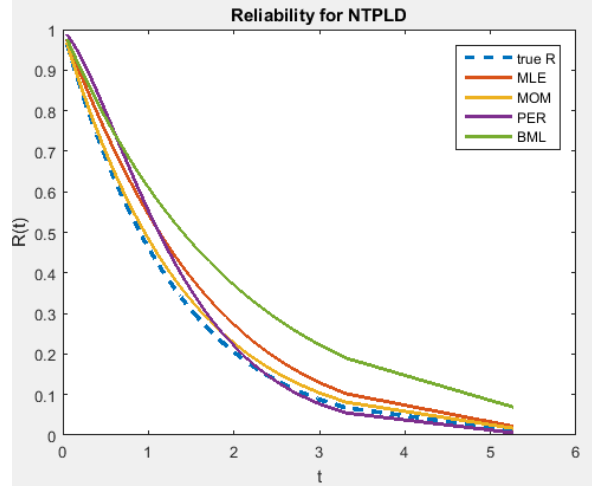
شكل(3-20)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=25$



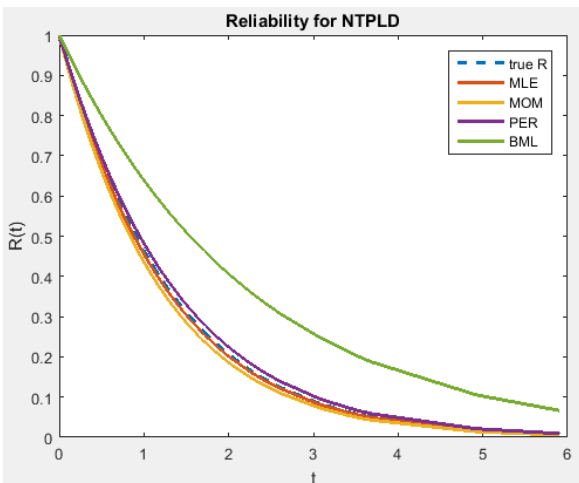
شكل(3-21)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=50$



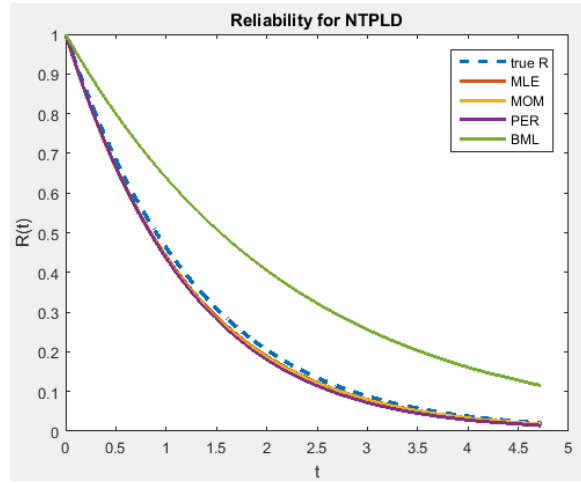
شكل(3-22)منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=75$



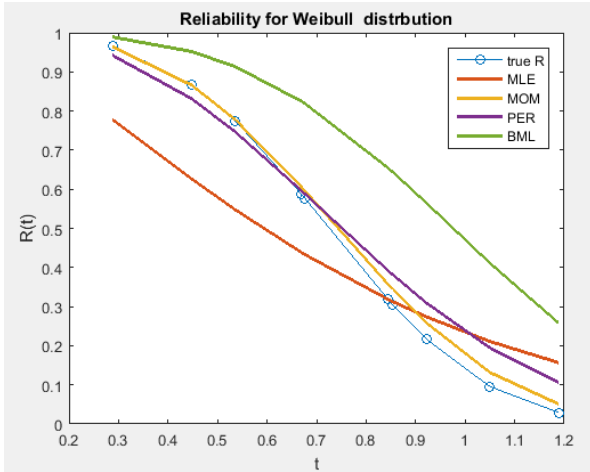
شكل(3-23) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=100$



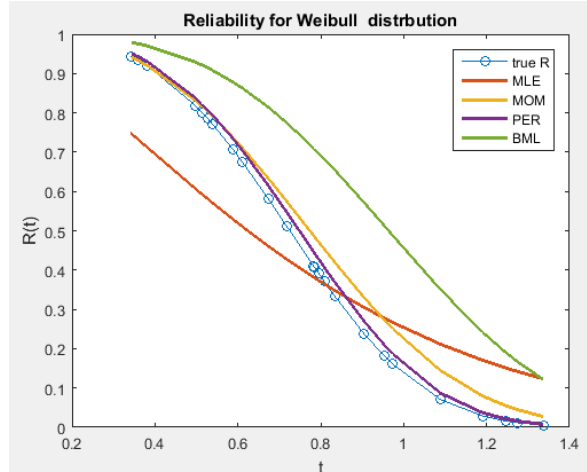
شكل(3-24) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد عند حجم عينة $n=150$



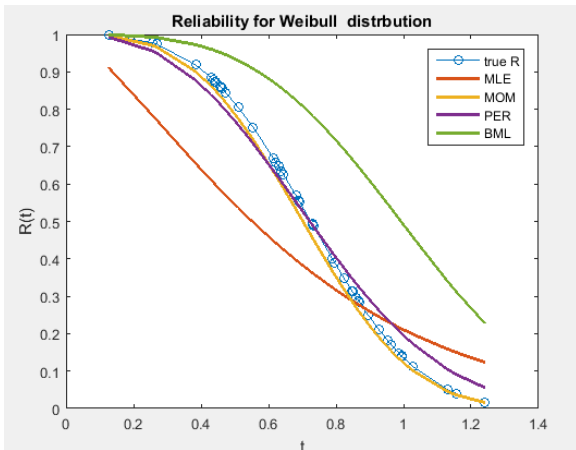
شكل(3-25) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

وبيل عند حجم عينة $n=10$



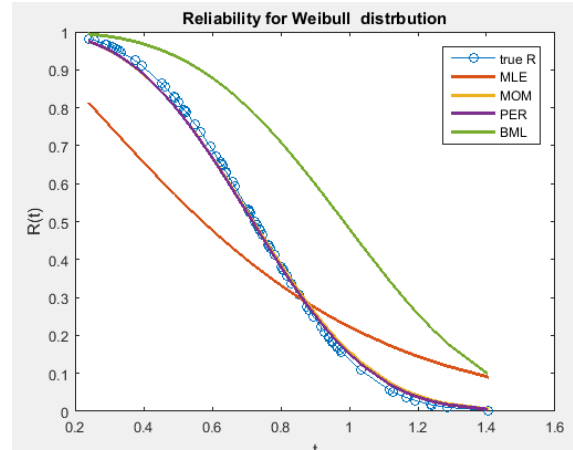
شكل(3-26) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

وبيل عند حجم عينة $n=25$



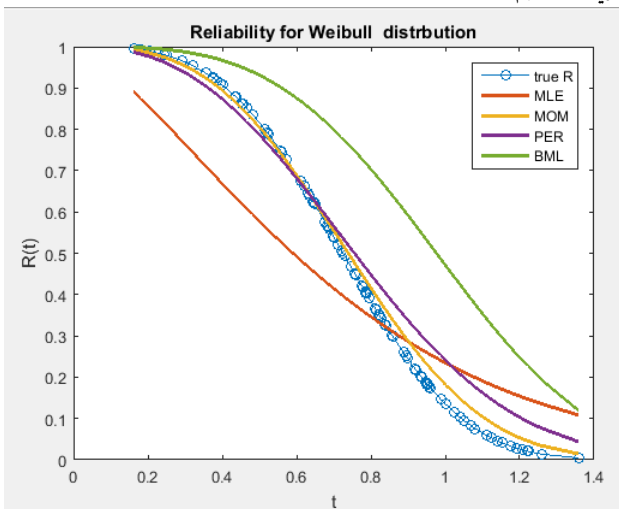
شكل(3-27) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

وبيل عند حجم عينة $n=50$



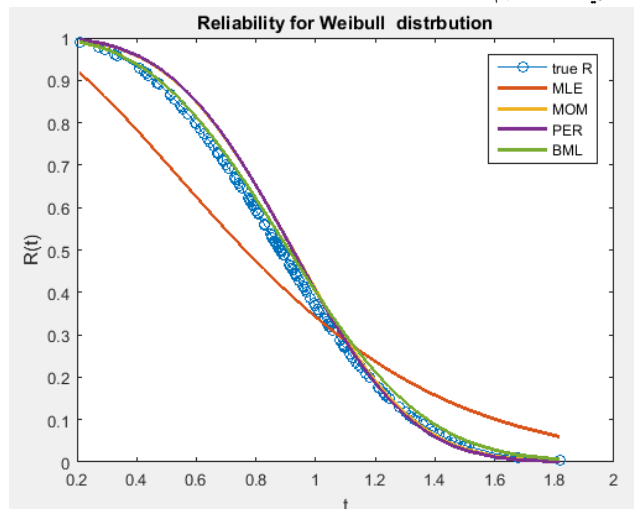
شكل(3-28) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

وبيل عند حجم عينة $n=75$



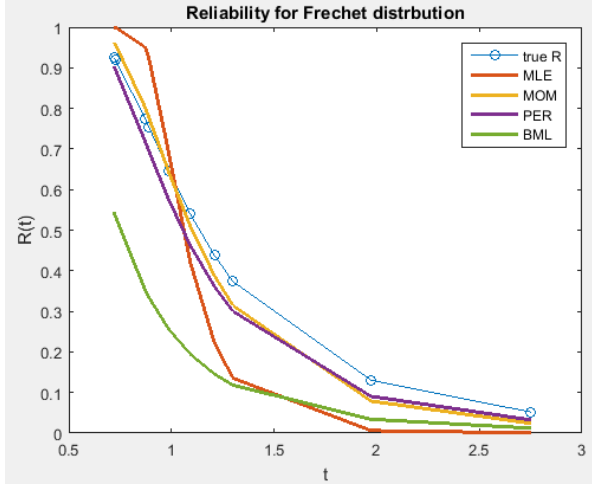
شكل(3-29) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

وبيل عند حجم عينة $n=100$

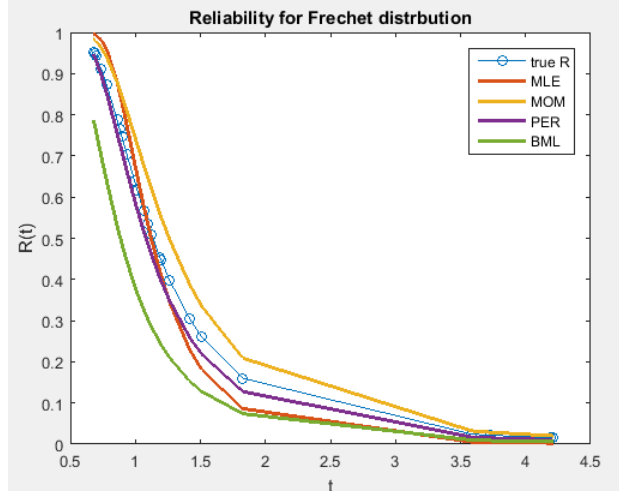


شكل(3-30) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج

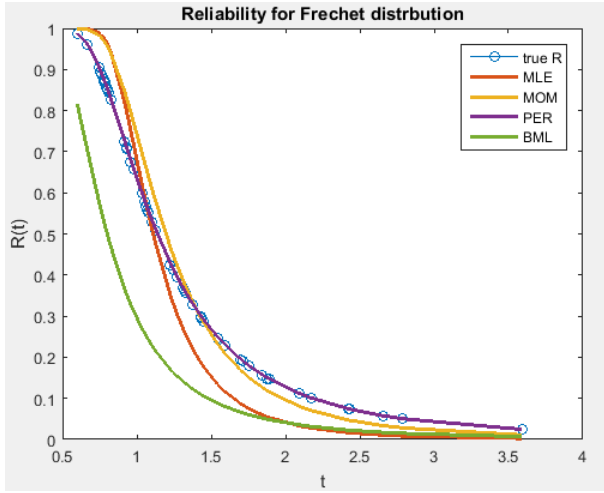
وبيل عند حجم عينة $n=150$



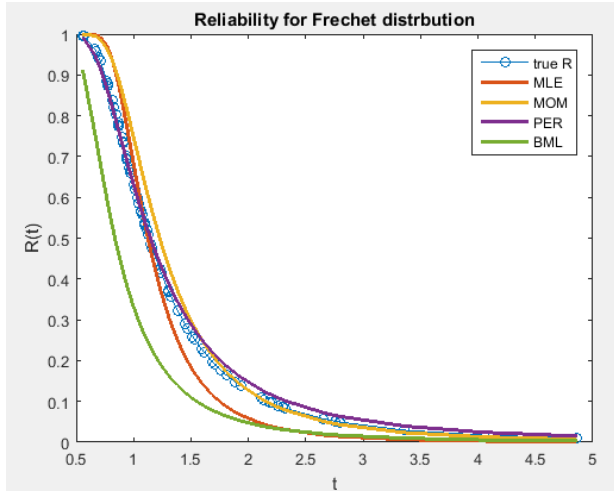
شكل(3-31) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=10$



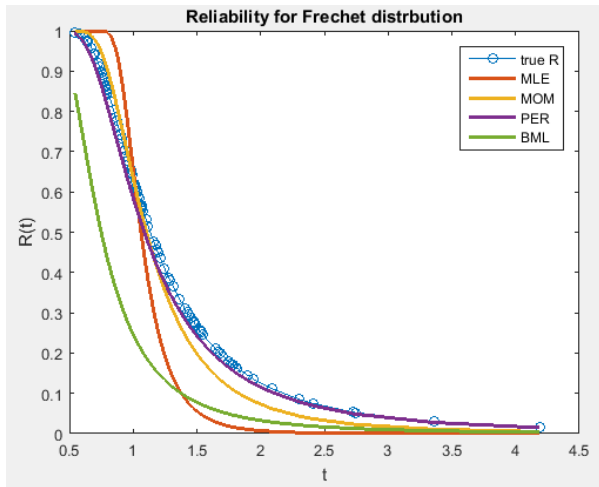
شكل(3-32) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=25$



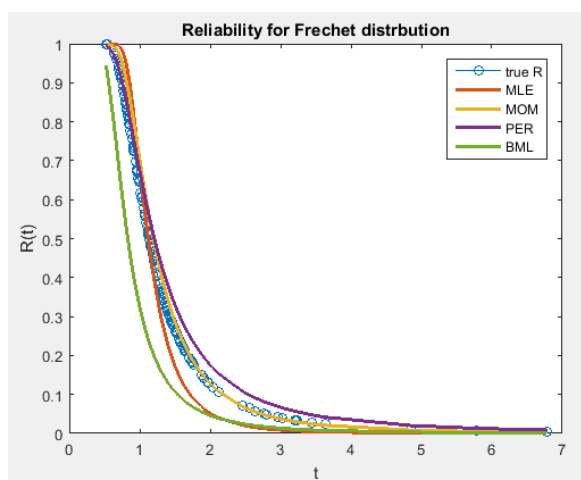
شكل(3-33) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=50$



شكل(3-34) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=75$



شكل(3-35) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=100$



شكل(3-36) منحنى دالة البقاء المقدره بموجب الطرائق الأربعة في التقدير للانموذج فريجت عند حجم عينة $n=150$

3-5 تقدير دالة البقاء لتوزيع لندي الجديد المقترح (NTPLD) بتقدير بيز

بعد ان تم اجراء تجارب محاكاة لغرض معرفة افضل انموذج من النماذج الستة (LD, TPLD1, TPLD2, NTPLD, WD, FD) وتم تطبيق طرائق التقدير الاربعة (MLE, Mom, Per, Bml) على كل انموذج من النماذج سيتم التقدير بطريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method) للتعرف على الطريقة الافضل في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي الجديد المقترح (NTPLD) من خلال اجراء تجارب محاكاة مونت-كارلوا وفق الخطوات الآتية:

3-5-1 المرحلة الأولى: اختيار القيم الافتراضية

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

أ- تعيين حجوم العينات الافتراضية وكما يأتي:

$$n = 10, 25, 50, 75, 100, 150$$

ب- اختيار قيم المعلمات الافتراضية (التجريبية) كما مبينة بالجدول الآتي:

جدول رقم (3-13) قيم المعلمات الافتراضية

Theoretical Parameters	1	2	3	4	5
a	0.75	3.3	2.9	0.4	4
b	1	1.5	1	2	1

ج- تكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ (1000 = r) لكل تجربة.

3-5-2 المرحلة الثانية: توليد البيانات

في هذه المرحلة سيتم توليد المشاهدات العشوائية (البيانات) وعلى وفق توزيع ليندلي ذي المعلمتين وكما في الفقرة (3-2-3-4) من هذا الفصل .

3-5-3 المرحلة الثالثة :

في هذه المرحلة تم تقدير دالة (المعولية) البقاء لتوزيع ليندلي بمعلمتين المقترح الجديد (NTPLD) بطريقة بيز وفق الخطوات الآتية :

أ- افتراض التوزيعات الأولية (Prior Distributions)

افتراض التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها **a** و **b** وكما ورد في المعادلات (2-137) ,
(2-138)

ب- ايجاد التوزيع المشترك للتوزيعات الأولية (Joint Prior Distributions) كما ورد في المعادلة (2-139)

ج- ايجاد دالة الإمكان لمشاهدات العينة (Likelihood function)

في هذه الخطوة يتم ايجاد دالة الامكان للملاحظات t_1, t_2, \dots, t_n كما ورد في المعادلة (2-141)

د- ايجاد التوزيع اللاحق المشترك (Posterior distribution)

يتم ايجاد التوزيع المشترك اللاحق كما في المعادلة (2-142)

هـ - ايجاد تقدير دالة البقاء للتوزيع (Reliability (Survival) function estimate)

ايجاد تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) كما ورد في المعادلة (2-144)

ونلاحظ من المعادلة (2-144) انها ليست لها صيغة مغلقة للحل وغير محكمة نظرياً لاستخراج مقدر دالة البقاء لأبد من استعمال اسلوب تقريبي عددي لحساب هذه التكاملات المعقدة وهو تقريب ليندلي (Lindley Approximation) كما في الملحق C.

3-5-4 المرحلة الرابعة: معايير الدقة والمقارنة :

وهي المرحلة الأخيرة إذ يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير دالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية المستخدمة لغرض الوصول للتقدير الأكفأ من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة عن طريق معايير المقارنة وكما مبين في الفقرة (2-11) في الجانب النظري.

3-6 مناقشة نتائج المحاكاة بتقدير بيز لتوزيع (NTPLD)

سيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) بموجب طريقتي الامكان الأعظم وطريقة بيز. إذ تم الحصول على هذه النتائج باعتماد برنامج كُتِبَ بلغة (Math lab. Ver.2015) والمبين في الملحق (B).

وفيما يأتي نتائج تجارب المحاكاة في الجداول التي سيتم تحليلها وكما يأتي:

1- التجربة الاولى :

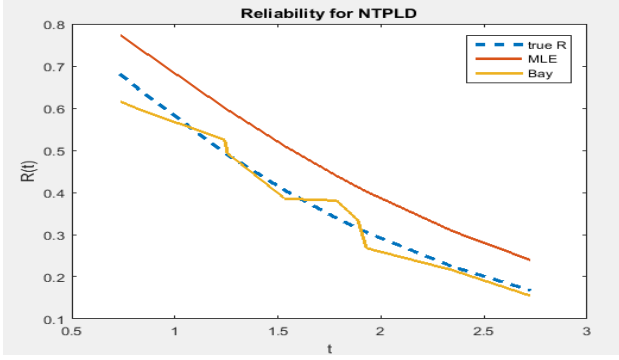
على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.75$, $b=1$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (3-14)

جدول (3-14) قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle عند احجام العينات المقترضة (n=10,25, 50, 75, 100)

(a=0.75 , b=1) والقيم الاولية للمعطات (, 150)

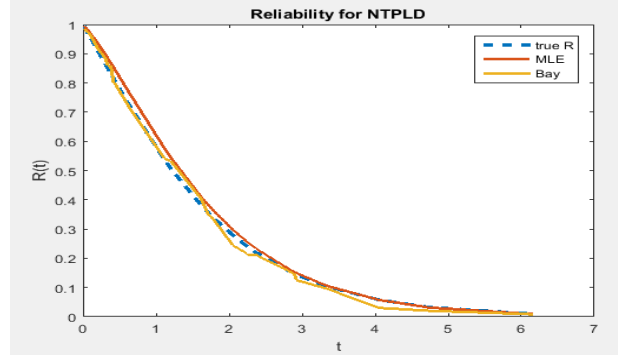
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
10	0.05971	0.79286	0.77657	0.00027	0.88112	0.04713
	0.38581	0.97418	0.97117	0.00038	0.66271	0.03287
	0.47	0.82979	0.81535	0.00021	0.57576	0.02792
	0.69408	0.69766	0.67807	0.00045	0.51635	0.00984
	0.99715	0.57915	0.55784	0.00001	0.47996	0.00098
	1.20182	0.50712	0.48585	0.00001	0.42738	0.00866
	1.836	0.32674	0.30865	0.0002	0.27309	0.00482
	2.3926	0.21634	0.20227	0.00033	0.14689	0.00288
	2.79053	0.15928	0.14794	0.00013	0.12223	0.00137
4.53391	0.03856	0.03495	0.00045	0.06985	0.00636	
IMSE			0.000933		0.000116	
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
25	0.01662	0.99286	0.99541	0.00145	0.98464	0.00015
	0.20844	0.96151	0.97391	0.00187	0.96944	0.00004
	0.38066	0.90855	0.85331	0.00156	0.91568	0.00003
	0.43875	0.86272	0.89532	0.00151	0.8826	0.00009
	1.11699	0.85184	0.88589	0.00116	0.85979	0.00006
	1.61989	0.83207	0.86845	0.00062	0.85758	0.00005
	2.05138	0.81524	0.9335	0.00106	0.80295	0.0004
	2.24889	0.80651	0.84536	0.00132	0.79717	0.00065
	2.26028	0.72535	0.76859	0.00001	0.71904	0.00007
	3.33095	0.53615	0.57569	0.00015	0.54125	0.00006
IMSE			0.00006		0.00003	
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
50	0.15261	0.93333	0.99479	0.00064	0.98962	0.00001
	0.43692	0.92647	0.94983	0.00051	0.93103	0.00008
	0.44418	0.91019	0.94433	0.00101	0.92954	0.00037
	0.5413	0.88345	0.93108	0.00044	0.91263	0.00001
	0.66757	0.89996	0.92261	0.00027	0.90890	0.00001
	1.24621	0.89374	0.9174	0.00032	0.89876	0.00001
	1.46368	0.99263	0.90871	0.00118	0.87985	0.00053
	2.45381	0.83305	0.86482	0	0.85225	0.00001
	2.55377	0.81966	0.85283	0.00056	0.84110	0.00003
5.03534	0.80732	0.84167	0.0011	0.83038	0.00046	
IMSE			0.00008		0.00003	

Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
75	0.13163	0.92325	0.90034	0.00052	0.8647	0.00343
	0.69495	0.99442	0.99239	0.00031	0.97584	0.00073
	1.11754	0.98067	0.97392	0.0011	0.96783	0.00266
	1.13284	0.94981	0.93373	0.00128	0.92036	0.0025
	1.25101	0.94415	0.92653	0	0.91721	0.00035
	1.2530	0.94261	0.92457	0.00026	0.90166	0.00087
	2.10081	0.90113	0.87327	0.00078	0.86376	0.0014
	2.52302	0.89306	0.86354	0.00005	0.86056	0.00016
	2.97274	0.87342	0.84018	0.00033	0.82189	0.00168
	3.38858	0.8582	0.82237	0.00087	0.80821	0.00106
IMSE			0.00016		0.00036	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
100	0.01604	0.93788	0.9243	0.00018	0.91394	0.00057
	0.14416	0.99808	0.99757	0.00019	0.98581	0.00079
	0.60316	0.99311	0.99132	0	0.97649	0.00015
	0.73914	0.99268	0.99078	0.00001	0.97526	0.00058
	1.21434	0.98471	0.98085	0	0.96060	0.0003
	1.61025	0.94158	0.92868	0.00017	0.91810	0.00055
	2.4314	0.93707	0.92334	0	0.90893	0.00028
	2.71847	0.93076	0.91594	0.00028	0.89781	0.00077
	3.45649	0.92677	0.91128	0.00024	0.89286	0.00115
	3.65347	0.91893	0.90217	0.00022	0.89118	0.00109
IMSE			0.00006		0.00016	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
150	0.02607	0.99537	0.99503	0.00000	0.98920	0.00004
	0.19599	0.98878	0.98796	0.00000	0.98409	0.00002
	0.52577	0.98390	0.98274	0.00000	0.97290	0.00012
	0.97506	0.97484	0.97308	0.00000	0.97283	0.00000
	1.17921	0.97468	0.97290	0.00000	0.96326	0.00013
	1.25731	0.96700	0.96473	0.00001	0.96051	0.00004
	1.59396	0.96576	0.96341	0.00001	0.95754	0.00007
	1.78933	0.96104	0.95840	0.00001	0.95222	0.00008
	5.46624	0.95726	0.95440	0.00001	0.94989	0.00005
	5.66237	0.99537	0.99503	0.00000	0.98920	0.00004
IMSE			0.00001		0.00002	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			



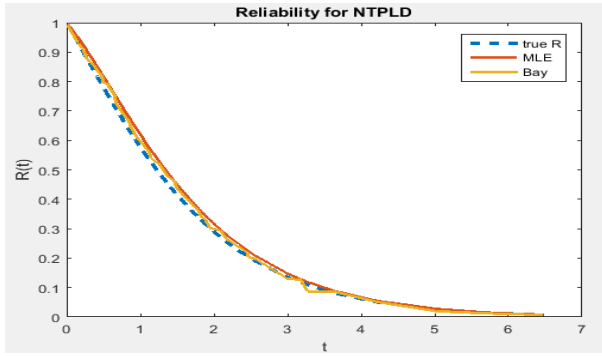
شكل(3-37) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة $n=10$



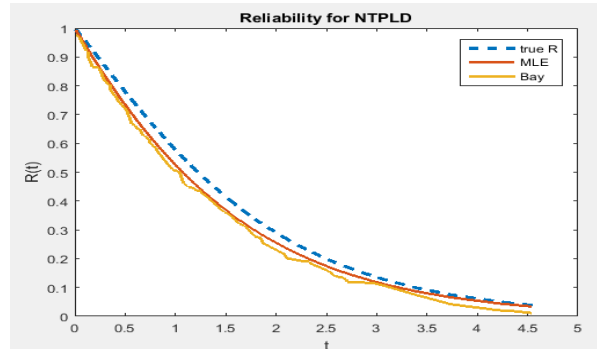
شكل(3-38) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة $n=25$



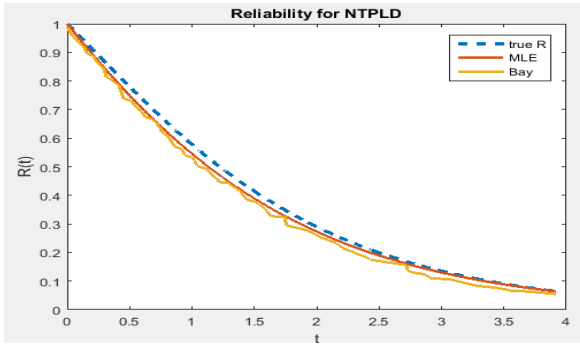
شكل(3-39) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة $n=50$



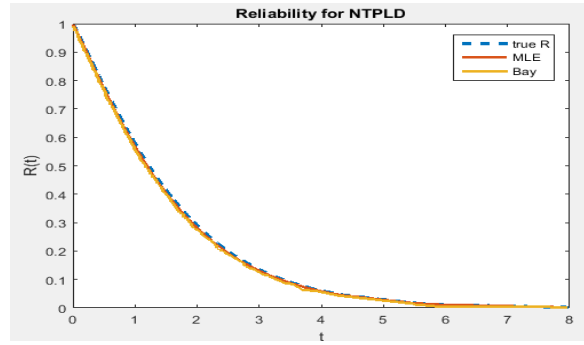
شكل(3-40) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج

NTPLD عند حجم عينة $n=75$



شكل(3-41) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة $n=100$



شكل(3-42) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج

NTPLD عند حجم عينة $n=150$

يتضح من جدول (3-14) والاشكال (3-31) الى (3-36) انه عند حجم عينة (50, 25, 10) وعند قيم المعلمات الافتراضية ($a=0.75, b=1$) تفوق طريقة بيز القياسية في التقدير على طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) ، وعند حجم عينة (75, 100, 150) كانت طريقة الامكان الاعظم هي الافضل في تقدير دالة البقاء للتوزيع الجديد المقترح.

2- التجربة الثانية :

على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=3.3$, $b=1.5$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (15-3)

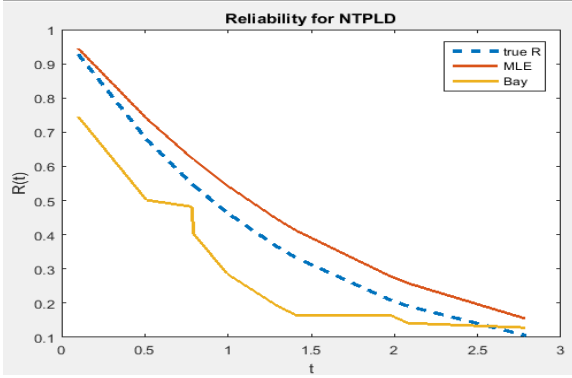
جدول (15-3) قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle عند احجام العينات المقترضة (, 100 , 75 , 50 , 25 , 10 n

(150) والقيم الاولية للمعاملات (a=3.3 , b=1.5)

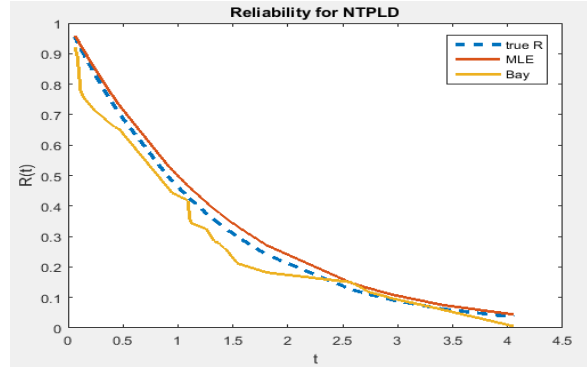
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
10	0.10085	0.36456	0.44521	0.0065	0.19194	0.0298
	0.51023	0.92744	0.94439	0.00029	0.74463	0.03342
	0.7808	0.6789	0.74006	0.00374	0.50132	0.03153
	0.79367	0.54974	0.6245	0.00559	0.48223	0.00456
	0.99533	0.5442	0.61938	0.00565	0.40243	0.0201
	1.29595	0.46393	0.54361	0.00635	0.28531	0.03191
	1.41074	0.33221	0.41193	0.00635	0.16419	0.02823
	1.98064	0.20806	0.27721	0.00478	0.16337	0.002
	2.08114	0.19138	0.25811	0.00445	0.14148	0.00249
2.78806	0.10553	0.15446	0.00239	0.12827	0.00052	
IMSE			0.00046	0.00185		
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
25	0.11288	0.95493	0.96029	0.00031	0.71488	0.01446
	0.27416	0.93844	0.94567	0.00003	0.92047	0.00119
	0.42113	0.91911	0.92845	0.00005	0.88995	0.00235
	0.46114	0.9006	0.91189	0.00009	0.77876	0.0197
	0.94581	0.83513	0.85277	0.00013	0.75726	0.02055
	1.32754	0.81365	0.83319	0.00038	0.70467	0.01188
	1.37335	0.72717	0.75336	0.00069	0.65902	0.00465
	1.80806	0.70512	0.73276	0.00076	0.65449	0.00256
	2.575	0.49744	0.53338	0.00129	0.46027	0.00138
2.96976	0.48255	0.5187	0.00131	0.44348	0.00153	
IMSE			0.00008	0.00048		
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
50	0.69364	0.97474	0.97328	0	0.93814	0.00134
	0.74507	0.95847	0.95611	0.00001	0.93441	0.00058
	0.84048	0.94957	0.94673	0.00001	0.9162	0.00111
	0.8518	0.93948	0.93612	0.00001	0.89052	0.0024
	0.93184	0.93529	0.9317	0.00001	0.88327	0.00271

	1.46732	0.92289	0.91868	0.00002	0.86209	0.0037
	1.57756	0.85125	0.84379	0.00006	0.83704	0.0002
	2.54215	0.8432	0.83541	0.00006	0.77042	0.0053
	3.21933	0.82862	0.82026	0.00007	0.7493	0.00629
	3.49325	0.78122	0.77118	0.0001	0.71036	0.00502
IMSE			0.00001		0.00054	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
75	0.00020	0.99985	0.99986	0	0.95057	0.00243
	0.09350	0.99331	0.99378	0	0.93564	0.00333
	0.28681	0.9776	0.97913	0	0.92547	0.00272
	0.29878	0.93584	0.94003	0.00002	0.91842	0.0003
	0.40319	0.93257	0.93696	0.00002	0.9165	0.00026
	0.44095	0.9282	0.93285	0.00002	0.89603	0.00104
	0.65716	0.919	0.92418	0.00003	0.88383	0.00124
	1.29934	0.9082	0.914	0.00003	0.87889	0.00086
	1.59302	0.89412	0.9007	0.00004	0.87007	0.00058
	2.04485	0.8861	0.89311	0.00005	0.85749	0.00082
IMSE			0.00001		0.00006	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
100	0.04971	0.99769	0.99763	0	0.98212	0.00024
	0.28634	0.9951	0.99497	0	0.98199	0.00017
	0.48583	0.99156	0.99135	0	0.97355	0.00032
	0.91225	0.9906	0.99036	0	0.96758	0.00053
	1.32757	0.97778	0.97722	0	0.96108	0.00028
	1.42310	0.97486	0.97422	0	0.94977	0.00063
	1.63446	0.97345	0.97278	0	0.94679	0.00071
	1.75387	0.96363	0.96272	0	0.93456	0.00084
	1.75627	0.96244	0.9615	0	0.92926	0.0011
	2.38855	0.95472	0.9536	0	0.92899	0.00066
IMSE			0.00000		0.00010	
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
150	0.20757	0.96470	0.95830	0.00004	0.91912	0.00208
	0.29653	0.93169	0.91968	0.00014	0.90347	0.00080
	0.43318	0.93010	0.91784	0.00015	0.89197	0.00145
	0.47362	0.98468	0.98185	0.00001	0.95740	0.00074
	0.80592	0.98632	0.98378	0.00001	0.95973	0.00071
	0.85203	0.99494	0.99400	0.00000	0.97084	0.00058
	1.04675	0.98067	0.97711	0.00001	0.95471	0.00067

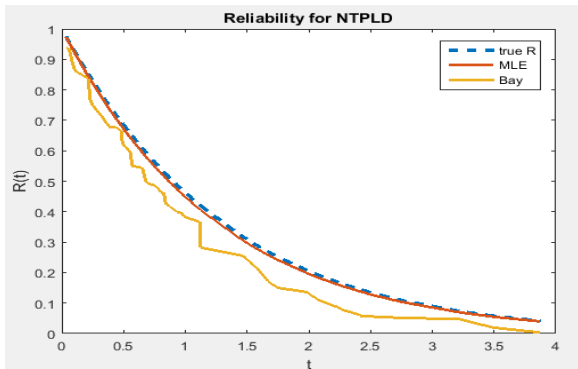
	1.10799	0.97755	0.97343	0.00002	0.95027	0.00074
	1.62580	0.93301	0.92122	0.00014	0.90910	0.00057
	2.50925	0.99934	0.99922	0.00000	0.99354	0.00003
IMSE				0.00014	0.00037	
Best				$\hat{R}(t)_{ML}$		



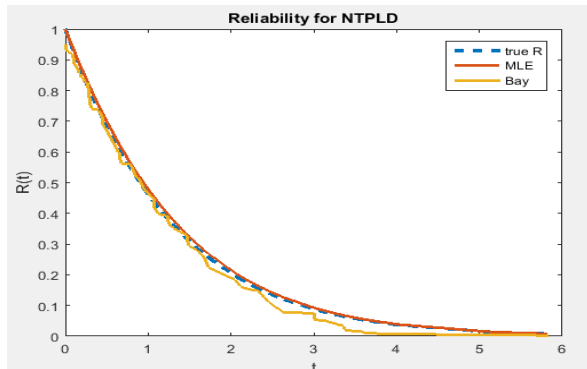
شكل(3-43) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=10



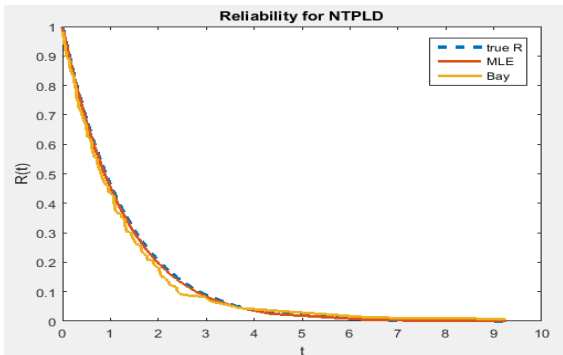
شكل(3-44) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=25



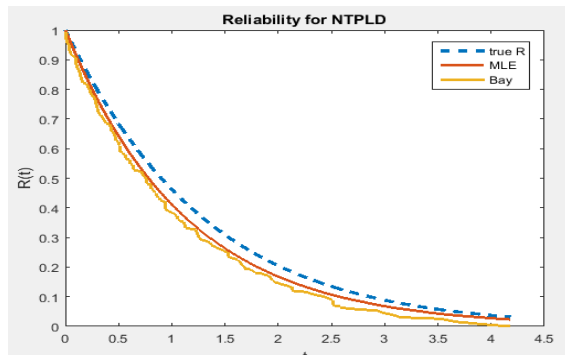
شكل(3-45) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=50



شكل(3-46) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=75



شكل(3-47) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=100



شكل(3-48) منحني دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=150

يتضح من جدول (15-3) والاشكال (37-3) الى (42-3) انه عند حجم عينة (10, 25, 50) وعند قيم المعلمات الافتراضية (a=3.3 , b=1.5) تفوق طريقة طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز القياسية في تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) حجم عينة (10, 25, 50,75 , 100, 150) .

3- التجربة الثالثة :

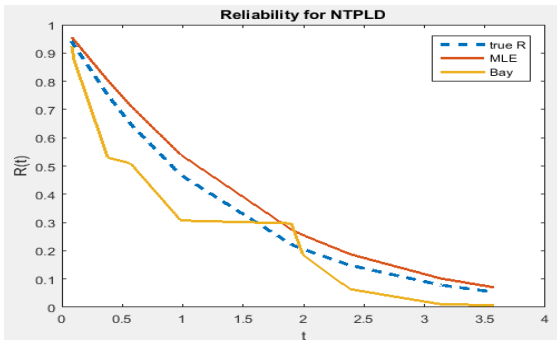
على افتراض أن القيم الافتراضية للمعلمات $a=2.9$, $b=1$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (16-3)

جدول (16-3) قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle عند احجام العينات المقترضة (, 100, 75, 50, 25, n=10) والقيم الاولية للمعلمات (a=2.9, b=1)

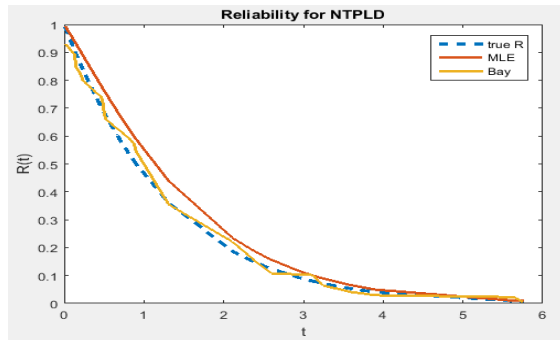
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
10	0.08139	0.94108	0.95643	0.00024	0.92434	0.00028
	0.10235	0.9264	0.94528	0.00036	0.87354	0.00279
	0.37944	0.75081	0.80306	0.00273	0.52963	0.04892
	0.56923	0.64857	0.7127	0.00411	0.50889	0.01951
	0.98355	0.4683	0.53981	0.00511	0.30706	0.026
	1.89778	0.22285	0.27528	0.00275	0.29693	0.00549
	1.99427	0.20571	0.25546	0.00248	0.18528	0.00042
	2.38499	0.14841	0.18773	0.00155	0.06364	0.00719
	3.13283	0.07861	0.10197	0.00055	0.01103	0.00457
	3.57635	0.05363	0.07028	0.00028	0.00663	0.00221
IMSE			0.00020	0.00117		
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
25	0.01346	0.99004	0.99383	0.00001	0.93128	0.00345
	0.15105	0.9086	0.94019	0.001	0.89235	0.00026
	0.20656	0.89311	0.92933	0.00131	0.847	0.00213
	0.23569	0.85646	0.90285	0.00215	0.8207	0.00128
	0.40721	0.83777	0.88891	0.00262	0.79896	0.00151
	0.48591	0.73499	0.80709	0.0052	0.75347	0.00034
	1.31008	0.70494	0.78155	0.00587	0.74193	0.00137
	2.39316	0.69178	0.77013	0.00614	0.71875	0.00073
	2.95584	0.68309	0.76252	0.00631	0.67965	0.00001
	3.11357	0.67136	0.75215	0.00653	0.66029	0.00012
IMSE			0.00032	0.00009		
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
50	0.01199	0.99112	0.99006	0.00000	0.92577	0.00427
	0.14340	0.98237	0.98029	0.00000	0.87453	0.01163

	0.17484	0.94522	0.939	0.00004	0.83674	0.01177
	0.38243	0.93544	0.92819	0.00005	0.83291	0.01051
	0.39720	0.90071	0.88994	0.00012	0.82635	0.00553
	0.45961	0.89826	0.88726	0.00012	0.79783	0.01009
	0.82357	0.87723	0.86423	0.00017	0.7713	0.01122
	0.95112	0.87407	0.86079	0.00018	0.76552	0.01178
	1.06139	0.87304	0.85966	0.00018	0.75893	0.01302
	1.09105	0.81907	0.80109	0.00032	0.74133	0.00604
IMSE			0.00006		0.00075	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
75	0.09500	0.99929	0.99922	0.00000	0.98643	0.00017
	0.68240	0.99683	0.99649	0.00000	0.96766	0.00085
	0.86430	0.97837	0.97607	0.00001	0.92529	0.00282
	0.93560	0.95674	0.95222	0.00002	0.92275	0.00116
	0.94690	0.95287	0.94795	0.00002	0.92215	0.00094
	1.12502	0.94598	0.94037	0.00003	0.91715	0.00083
	1.83280	0.93153	0.92450	0.00005	0.91446	0.00029
	3.98938	0.91850	0.91021	0.00007	0.90996	0.00007
	4.11222	0.91834	0.91004	0.00007	0.90826	0.00010
	7.50961	0.89211	0.88137	0.00012	0.85562	0.00133
IMSE			0.00006		0.00028	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
100	0.04148	0.97487	0.96877	0.00004	0.96197	0.00017
	0.08094	0.92346	0.90576	0.00031	0.86154	0.00383
	0.10659	0.91157	0.89135	0.00041	0.85314	0.00341
	0.15968	0.92383	0.90622	0.00031	0.87208	0.00268
	0.50020	0.92661	0.90959	0.00029	0.89206	0.00119
	1.09491	0.96382	0.95513	0.00008	0.91798	0.00210
	1.34146	0.99599	0.99500	0.00000	0.97631	0.00039
	2.12370	0.94139	0.92760	0.00019	0.91447	0.00072
	2.62585	0.91731	0.89830	0.00036	0.85681	0.00366
	6.19371	0.96957	0.96223	0.00005	0.93216	0.00140
IMSE			0.00022		0.00057	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
150	0.00527	0.99662	0.99559	0.00000	0.98878	0.00006
	0.12487	0.99609	0.99490	0.00000	0.97259	0.00055
	0.20790	0.99042	0.98752	0.00001	0.96272	0.00077
	0.31754	0.98190	0.97647	0.00003	0.95147	0.00093

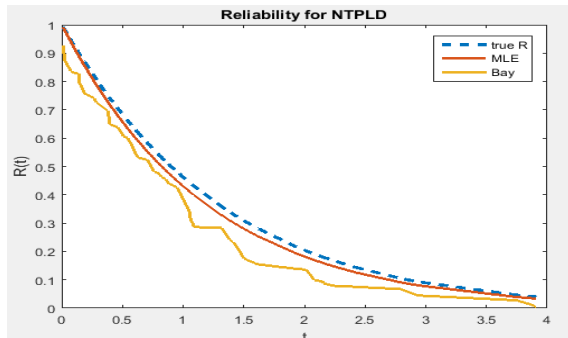
	0.45477	0.98175	0.97629	0.00003	0.94462	0.00138
	0.51590	0.97383	0.96604	0.00006	0.93629	0.00141
	0.91186	0.96656	0.95668	0.00010	0.93615	0.00092
	1.43667	0.96388	0.95324	0.00011	0.92620	0.00142
	2.45281	0.96042	0.94879	0.00014	0.92197	0.00148
	2.97552	0.96008	0.94835	0.00014	0.91994	0.00161
IMSE			0.00036		0.00070	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			



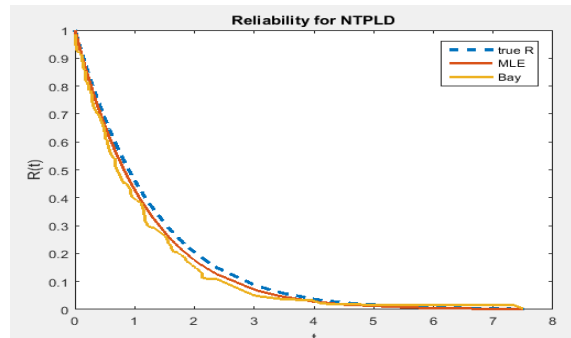
شكل (3-49) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=10$



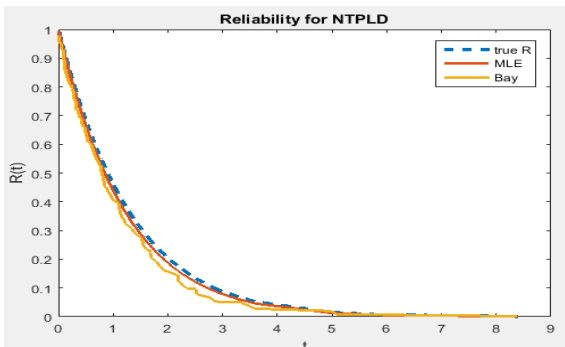
شكل (3-50) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=25$



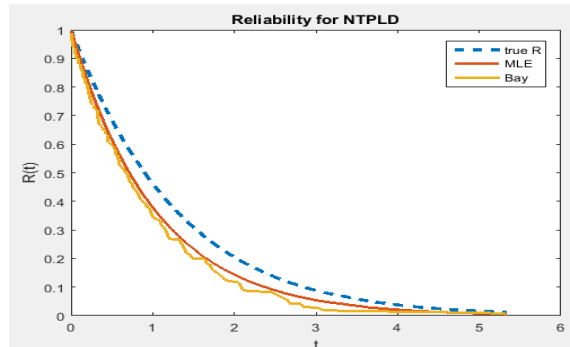
شكل (3-51) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=50$



شكل (3-52) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=75$



شكل (3-53) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=100$



شكل (3-54) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة $n=150$

يتضح من جدول (16-3) والاشكال (43-3) الى (48-3) انه عند حجم عينة (25) وعند قيم المعلمات الافتراضية (a=2.9 , b=1) تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز القياسية في تقدير دالة البقاء للتوزيع الجديد (NTPLD) عند جميع حجوم العينات ماعدا حجم العينة n=25.

4- التجربة الرابعة :

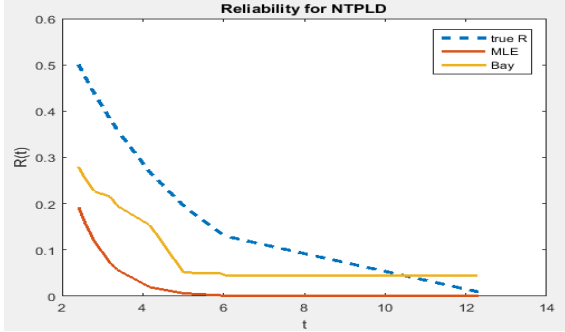
على افتراض أن القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.4$, $b=2$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (17-3)

جدول (17-3) قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle عند احجام العينات المقترضة (, 100 , 75 , 50 , 25 , n=10) والقيم الاولية للمعاملات (a=0.4 , b=2)

n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
10	2.41001	0.50032	0.19263	0.09467	0.27883	0.04905
	2.57738	0.47297	0.15691	0.09989	0.25328	0.04826
	2.79989	0.43841	0.11885	0.10212	0.22671	0.04482
	3.19495	0.38204	0.07169	0.09632	0.21488	0.02794
	3.37385	0.35855	0.05678	0.09107	0.19495	0.02676
	4.1804	0.26726	0.01932	0.06148	0.15311	0.01303
	5.00958	0.19537	0.00616	0.03580	0.05118	0.02079
	5.93727	0.13610	0.00167	0.01807	0.04905	0.00758
	6.06526	0.12938	0.00139	0.01638	0.04468	0.00717
	12.30126	0.00942	0.00000	0.00009	0.04418	0.00121
IMSE			0.00616		0.00247	
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
25	2.04073	0.12270	0.00038	0.01496	0.01165	0.01233
	2.30843	0.11629	0.00031	0.01345	0.01095	0.01110
	2.37758	0.05919	0.00002	0.00350	0.01048	0.00237
	2.97556	0.04853	0.00001	0.00235	0.00811	0.00163
	3.44336	0.04202	0.00000	0.00177	0.00605	0.00129
	3.89666	0.03845	0.00000	0.00148	0.00530	0.00110
	4.14045	0.03172	0.00000	0.00101	0.00369	0.00079
	4.16051	0.01280	0.00000	0.00016	0.00243	0.00013
	4.22613	0.01260	0.00000	0.00016	0.00140	0.00011
	4.52778	0.00941	0.00000	0.00009	0.00045	0.00008
IMSE			0.00440		0.00414	
Best			$\hat{R}(t)_{Bayes}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
50	1.86545	0.00536	0.00000	0.00003	0.00198	0.00001
	1.92367	0.01007	0.00000	0.00010	0.00225	0.00006
	1.96183	0.01278	0.00000	0.00016	0.00283	0.00010

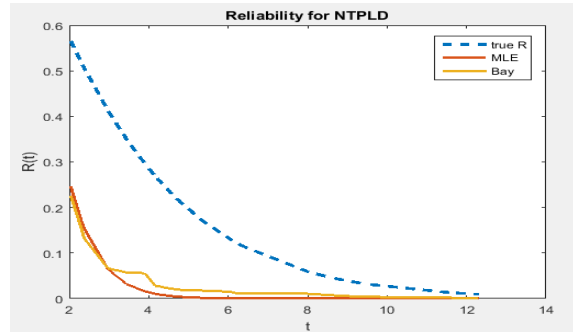
	2.02985	0.01913	0.00000	0.00037	0.00482	0.00020
	2.12234	0.03013	0.00001	0.00091	0.00572	0.00060
	2.13698	0.07569	0.00030	0.00568	0.00585	0.00488
	2.20196	0.09569	0.00067	0.00903	0.00950	0.00743
	2.32793	0.09714	0.00071	0.00930	0.00978	0.00763
	2.33618	0.12231	0.00155	0.01458	0.01110	0.01237
	2.43251	0.15947	0.00388	0.02421	0.01158	0.02187
IMSE			0.00561		0.00652	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
75	1.80197	0.00509	0.00000	0.00003	0.00126	0.00001
	1.83891	0.01121	0.00000	0.00013	0.00144	0.00010
	1.85806	0.01941	0.00000	0.00038	0.00496	0.00021
	1.87047	0.02709	0.00001	0.00073	0.00581	0.00045
	1.87179	0.03314	0.00002	0.00110	0.00675	0.00070
	1.87403	0.03801	0.00003	0.00144	0.00826	0.00088
	1.91135	0.05297	0.00009	0.00280	0.00856	0.00197
	2.03647	0.07731	0.00033	0.00593	0.00870	0.00471
	2.06781	0.08060	0.00038	0.00644	0.01001	0.00498
2.10707	0.09266	0.00061	0.00847	0.01016	0.00676	
IMSE			0.00493		0.00544	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
100	1.93949	0.01045	0.00000	0.00011	0.00028	0.00010
	1.97912	0.01254	0.00000	0.00016	0.00028	0.00015
	2.01957	0.01337	0.00000	0.00018	0.00040	0.00017
	2.03477	0.01793	0.00000	0.00032	0.00102	0.00029
	2.15730	0.02142	0.00000	0.00046	0.00165	0.00039
	2.16100	0.02226	0.00000	0.00050	0.00178	0.00042
	2.16983	0.02761	0.00000	0.00076	0.00224	0.00064
	2.20548	0.02988	0.00001	0.00089	0.00290	0.00073
	2.28074	0.03004	0.00001	0.00090	0.00293	0.00073
2.33660	0.03800	0.00001	0.00144	0.00306	0.00122	
IMSE			0.00541		0.00558	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
150	1.81622	0.00367	0.00000	0.00001	0.00016	0.00001
	1.81990	0.00500	0.00000	0.00002	0.00020	0.00002
	1.85914	0.00741	0.00000	0.00005	0.00050	0.00005
	1.88139	0.02022	0.00000	0.00041	0.00056	0.00039
	1.94852	0.02090	0.00000	0.00044	0.00061	0.00041

	1.94887	0.02230	0.00000	0.00050	0.00061	0.00047
	1.95558	0.02373	0.00000	0.00056	0.00062	0.00053
	1.96660	0.02414	0.00000	0.00058	0.00068	0.00055
	2.04544	0.02439	0.00000	0.00059	0.00075	0.00056
	2.09340	0.02488	0.00000	0.00062	0.00078	0.00058
IMSE			0.00502		0.00519	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			



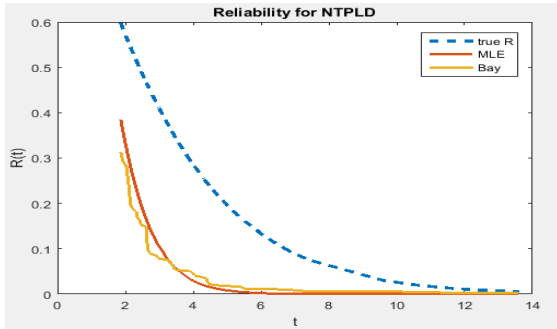
شكل(3-55) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=10



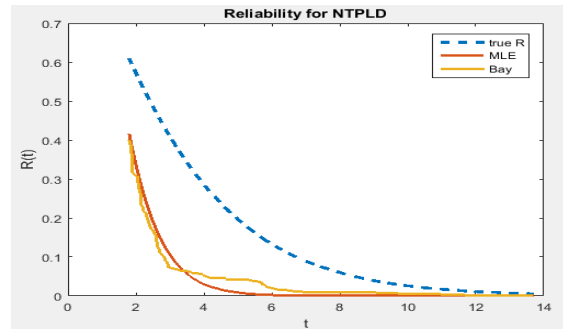
شكل(3-56) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=25



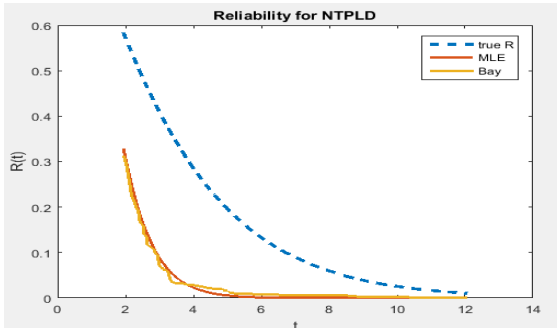
شكل(3-57) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=50



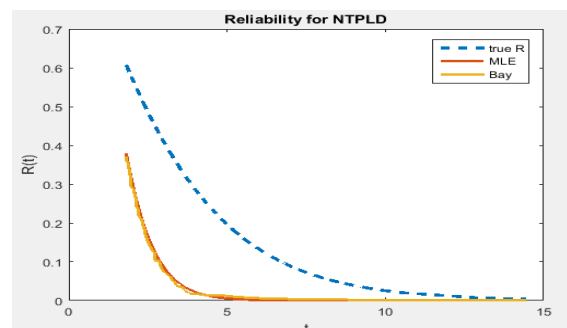
شكل(3-58) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=75



شكل(3-59) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=100



شكل(3-60) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD

عند حجم عينة n=150

يتضح من جدول (17-3) والاشكال (49-3) الى (55-3) عند قيم المعلمات الافتراضية ($a=0.4, b=2$) تفوق طريقة بيز القياسية في تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) عند حجوم العينات الصغيره (25,10) وتفوق طريقة الإمكان الأعظم على طريقة بيز القياسية عند حجوم العينات الكبيره (50, 75, 100, 150) في تقدير دالة المعولية (البقاء) للتوزيع الجديد.

5- التجربة الخامسة :

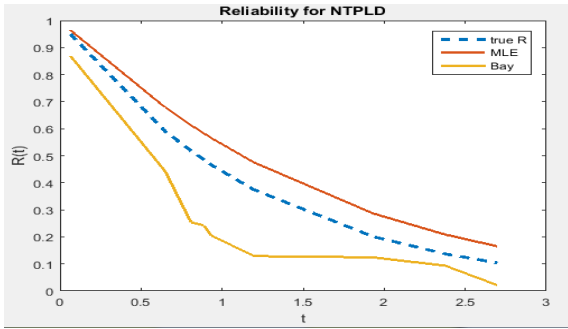
على افتراض أن القيم الافتراضية للمعلمات $a=4, b=1$ فيمكن تلخيص نتائج التقدير كما مبين في الجدول (18-3)

جدول (18-3) قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي التقدير بيز و mle عند احجام العينات المقترضة (, 100, 75, 50, 25, n=10) والقيم الاولية للمعلمات ($a=4, b=1$)

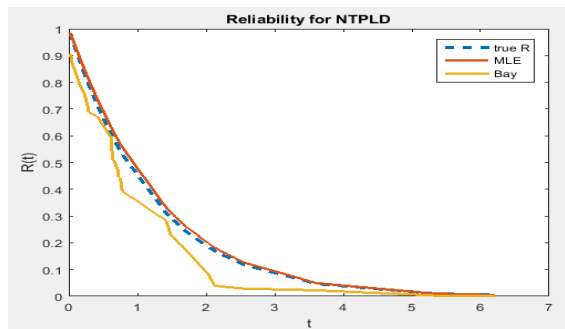
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
10	0.06536	0.94897	0.96367	0.01021	0.86852	0.0696
	0.64876	0.59051	0.67861	0.01019	0.44246	0.06875
	0.80792	0.51782	0.61338	0.00981	0.254	0.06033
	0.88677	0.48505	0.583	0.00959	0.24258	0.06
	0.93408	0.46636	0.56538	0.00913	0.20415	0.05879
	1.17561	0.3812	0.48222	0.00776	0.13557	0.02192
	1.19908	0.37377	0.47473	0.00737	0.12881	0.00675
	1.93068	0.20106	0.28691	0.00512	0.12419	0.00647
	2.37530	0.13716	0.20871	0.00376	0.09347	0.00591
	2.69572	0.10388	0.16517	0.00022	0.02175	0.00191
IMSE			0.00073	0.00360		
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
25	0.02459	0.31104	0.33200	0.00018	0.28230	0.00570
	0.05116	0.29407	0.31419	0.00015	0.23009	0.00568
	0.16003	0.24711	0.26465	0.00013	0.17712	0.00490
	0.22864	0.18459	0.19799	0.00013	0.08280	0.00409
	0.24730	0.17065	0.18303	0.00007	0.04032	0.00185
	0.28552	0.15790	0.16932	0.00002	0.03653	0.00083
	0.29045	0.11822	0.12652	0.00001	0.02880	0.00059
	0.41346	0.04644	0.04882	0.00000	0.02210	0.00019
	0.61656	0.01004	0.01002	0.00000	0.00275	0.00005
	0.63578	0.00450	0.00434	0.00000	0.00254	0.00000
IMSE			0.00003	0.00072		
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
50	0.00314	0.04513	0.02708	0.00000	0.01020	0.00112
	0.08113	0.04936	0.02995	0.00020	0.01589	0.00122

	0.09284	0.08623	0.05615	0.00026	0.01631	0.00302
	0.11555	0.09727	0.06438	0.00033	0.02690	0.00369
	0.11637	0.10200	0.06794	0.00038	0.04121	0.00489
	0.12360	0.19783	0.14520	0.00038	0.06255	0.00495
	0.12909	0.20294	0.14954	0.00039	0.08393	0.00916
	0.13587	0.21121	0.15661	0.00043	0.08640	0.01194
	0.13831	0.28509	0.22204	0.00046	0.11382	0.01248
	0.16652	0.29090	0.22733	0.00051	0.13263	0.01367
IMSE			0.00027		0.00208	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
75	0.00184	0.01017	0.00512	0.00000	0.01851	0.00007
	0.03195	0.02675	0.01491	0.00003	0.03588	0.00008
	0.03195	0.08234	0.05277	0.00004	0.04036	0.00116
	0.03598	0.09044	0.05871	0.00004	0.05633	0.00176
	0.05055	0.10239	0.06763	0.00004	0.05747	0.00191
	0.05437	0.12911	0.08817	0.00009	0.05996	0.00202
	0.05460	0.16221	0.11465	0.00010	0.06077	0.00431
	0.05835	0.16463	0.11663	0.00010	0.06947	0.00454
	0.06339	0.16520	0.11709	0.00011	0.07261	0.00468
	0.08447	0.19704	0.14358	0.00013	0.09760	0.00478
IMSE			0.00028		0.00128	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
100	0.00312	0.10532	0.08553	0.00011	0.04567	0.00093
	0.02373	0.07984	0.06368	0.00010	0.03403	0.00063
	0.04484	0.07625	0.06064	0.00009	0.03392	0.00061
	0.09717	0.06680	0.05269	0.00009	0.02916	0.00061
	0.09878	0.05950	0.04660	0.00009	0.02265	0.00061
	0.10286	0.05607	0.04376	0.00008	0.02175	0.00058
	0.10891	0.04883	0.03781	0.00002	0.01694	0.00051
	0.11614	0.04611	0.03559	0.00001	0.01558	0.00050
	0.19177	0.03913	0.02992	0.00000	0.01435	0.00002
	0.19214	0.00031	0.00020	0.00000	0.00405	0.00001
IMSE			0.00008		0.00046	
Best			$\hat{R}(t)_{ML}$			
n	ti	R_Real	$\hat{R}(t)_{ML}$	MSE_Mle	$\hat{R}(t)_{Bayes}$	MSE_Bay
150	0.00278	0.08908	0.08070	0.00002	0.05852	0.00050
	0.01406	0.07982	0.07215	0.00002	0.05739	0.00049
	0.01630	0.07366	0.06648	0.00001	0.03948	0.00049
	0.04728	0.06611	0.05955	0.00001	0.03905	0.00047

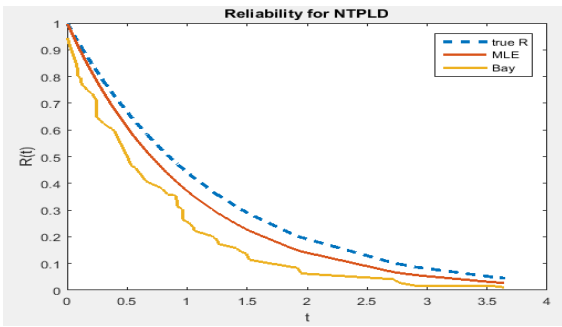
	0.05750	0.05647	0.05073	0.00001	0.02979	0.00043
	0.07078	0.04315	0.03861	0.00001	0.01329	0.00042
	0.08977	0.03880	0.03467	0.00000	0.01289	0.00027
	0.10204	0.03621	0.03232	0.00000	0.00949	0.00025
	0.10803	0.02434	0.02163	0.00000	0.00798	0.00017
	0.11226	0.01664	0.01474	0.00000	0.00576	0.00012
IMSE			0.00002			0.00018
Best				$\hat{R}(t)_{ML}$		



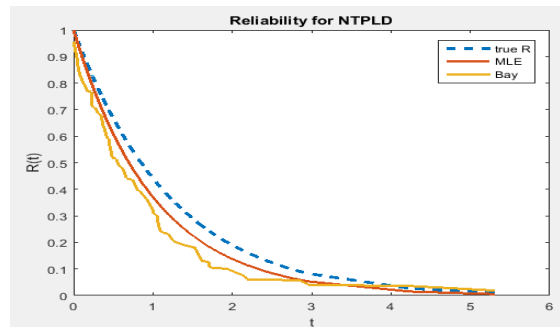
شكل(3-61) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=10



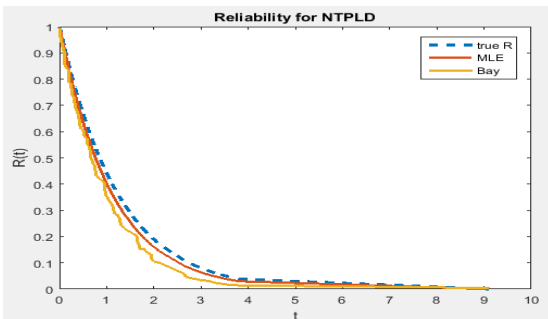
شكل(3-62) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=25



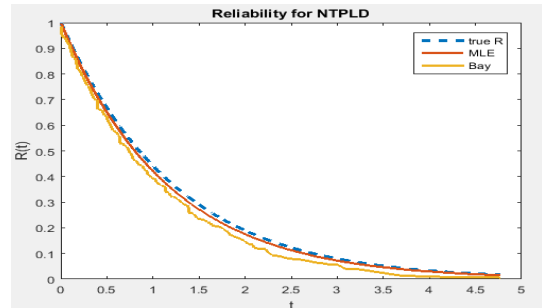
شكل(3-63) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=50



شكل(3-64) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=75



شكل(3-65) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=100



شكل(3-66) منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي التقدير للانموذج NTPLD عند حجم عينة n=150

يتضح من جدول (18-3) والأشكال (56-3) إلى (61-3) عند قيم المعلمات الافتراضية ($a=0.4$, $b=2$) تفوق طريقة الامكان الاعظم عند جميع احجام العينات في تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD)

7-3 المقارنة بين تقدير بيز وطريقة الامكان الأعظم

يبين الجدول (19-3) يبين عدد مرات الافضلية ونسب الافضلية لكل لكل من طريقة بيز وطريقة الامكان الاعظم في جميع تجارب المحاكاة :

جدول(19-3) عدد مرات الافضلية ونسب الافضلية عند كل حجم عينة في جميع تجارب المحاكاة

الطريقة	حجم العينة						عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية %
	$n_1 = 10$	$n_2 = 25$	$n_3 = 50$	$n_4 = 75$	$n_5 = 100$	$n_5 = 150$		
MLE	3	2	5	5	4	5	24	80
Bayes	2	3	0	0	1	0	6	20

ويتضح من جدول (19-3) ما يأتي :

1. تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز القياسية في تقدير دالة البقاء لتوزيع (NTPLD) بنسبة افضلية بلغت (80%) لصالح طريقة الامكان الأعظم.
2. كانت طريقة بيز القياسية هي الافضل عند حجم العينة (25)
3. كانت طريقة الامكان الاعظم هي الافضل عند احجام العينات (10,50, 75, 100, 150)

4

الفصل الرابع

الجانب التطبيقي

1-4 تمهيد: Preface

تم في هذا الفصل استعمال بيانات تمثل أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب مرض كورونا من المرضى الراقدين في مستشفى الديوانية العام - وحدة الأمراض الوبائية من المرضى الراقدين في المستشفى بعدد (60) مريضاً مقاسة بعدد الايام للمدة من تاريخ (تموز 2020 الى تشرين الثاني 2020) لغرض تقدير دالة البقاء لتوزيع لندلي بالمعلمة الواحدة وبالمعلمتين ومقارنتهما مع توزيعات اخرى المعروضة بالجانب النظري باستعمال طريقتين للتقدير هما طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز .

2-4 نبذة عن مرض COVID-19:

تعد فايروسات كورونا فصيلة واسعة الانتشار معروفة بأنها تسبب أمراضاً تتراوح من نزلات البرد الشائعة إلى الاعتلالات الأشد وطأة مثل متلازمة الشرق الأوسط التنفسية (MERS) ومتلازمة الالتهاب الرئوي الحاد الوخيم (السارس). وهو المرض الناجم عن فيروس كورونا المُستجد المُسمى فيروس كورونا-سارس-2. وقد اكتشفت منظمة الصحة العالمية هذا الفيروس المُستجد لأول مرة في 31 كانون الأول/ديسمبر 2019، بعد الإبلاغ عن مجموعة من حالات الالتهاب الرئوي الفيروسي في يوهان بجمهورية الصين الشعبية.

يتعافى من المرض معظم الأشخاص (نحو 80%) الذين تظهر عليهم الأعراض دون الحاجة إلى العلاج في المستشفى. ويصاب نحو 15% منهم بمضاعفات خطيرة ويحتاجون إلى الأوكسجين، ويصبح 5% منهم في حالة حرجة ويحتاجون إلى العناية المركزة. وصت التحريات المفصلة إلى أن فيروس كورونا المسبب لمتلازمة الالتهاب الرئوي الحاد الوخيم (السارس) قد انتقلت من قطط الزباد إلى البشر في الصين عام 2002، فيما انتقل فيروس كورونا المسبب لمتلازمة الشرق الأوسط التنفسية (Mers) من الإبل إلى البشر في المملكة العربية السعودية في عام 2012. وهناك العديد من سلالات فيروس كورونا الأخرى المعروفة التي تسري بين

الحيوانات دون أن تنتقل العدوى منها إلى البشر حتى الآن. ومن المرجح أن يتم الكشف عن سلالات جديدة من الفيروس مع تحسّن وسائل الترصدّ حول العالم.

تتوقف الأعراض على نوع الفيروس، لكن أكثرها شيوعاً ما يأتي: الأعراض التنفسية، الحمّى، السعال، ضيق النفس وصعوبة التنفس. وفي الحالات الأشد وطأة قد تسبب العدوى الالتهاب الرئوي والمتلازمة التنفسية الحادة الوخيمة والفشل الكلوي وحتى الوفاة.

تزداد مخاطر الإصابة بمضاعفات وخيمة بين الأشخاص البالغين 60 عاماً أو أكثر من العمر، والأشخاص الذين يعانون من مشكلات طبية كامنة، مثل ارتفاع ضغط الدم أو مشكلات القلب والرئتين، أو داء السكري أو السمنة أو السرطان.

ومع ذلك فقد يصاب أي شخص بعدوى كوفيد-19 ويعاني من مضاعفات خطيرة أو يتوفى في أي عمر كان. وتستمر معاناة بعض الأشخاص الذين أصيبوا بكوفيد-19 من الأعراض، سواء احتاجوا إلى دخول المستشفى أم لا، بما في ذلك الشعور بالإجهاد والأعراض التنفسية والعصبية. وتعمل منظمة الصحة العالمية مع شبكتها التقنية العالمية للتدبير العلاجي السريري لكوفيد-19 والباحثين ومجموعات المرضى في جميع أنحاء العالم، لتصميم الدراسات وإجرائها على المرضى الذين تجاوزوا المسار الأولي الحاد للمرض، بغية تحديد نسبة المرضى الذين يصابون بآثار طويلة الأجل ومدة استمرار هذه الآثار وأسباب حدوثها. وسوف تُستخدم هذه الدراسات في تطوير المزيد من الإرشادات الخاصة برعاية المرضى.

3-4 البيانات الحقيقية: Real Data

تم أخذ بيانات عن المرضى المصابين بفيروس كورونا من مستشفى الديوانية العام * - وحدة الأمراض الوبائية والتي تمثل أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب مرض كورونا بالأيام من المرضى الراقدين في المستشفى بعدد (60) مريضاً للمدة من (تموز 2020 الى تشرين الثاني 2020) . والجدول (4-1) الآتي يبين البيانات الحقيقية.

جدول (4-1) أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب مرض كورونا بالايام للمرضى الراقدين بمستشفى الديوانية التعليمي للمدة من (تموز 2020 الى تشرين الثاني 2020)

No.	ti	No.	ti	No.	ti	No.	ti
1	11.12	16	1.23	31	2.19	46	7.16
2	17.05	17	2.17	32	1.12	47	6.03
3	8.21	18	2.03	33	12.22	48	20.22
4	1.10	19	1.09	34	7.10	49	1.11
5	9.19	20	2.10	35	4.21	50	8.16
6	4.14	21	1.22	36	9.19	51	11.21
7	1.01	22	1.19	37	5.03	52	8.03
8	2.13	23	22.11	38	12.21	53	19.54
9	1.17	24	1.20	39	3.15	54	3.20
10	5.20	25	1.76	40	4.20	55	14.11
11	2.12	26	1.20	41	6.22	56	1.08
12	1.19	27	2.57	42	8.63	57	17.19

¹ مدينة الديوانية إحدى مدن جنوب العراق ومنطقة الفرات الأوسط وهي المركز الإداري والاقتصادي والسياسي لمحافظة الديوانية إذ توجد فيها جميع المؤسسات الإدارية والحكومية يمر بها فرع من نهر الفرات يعرف بشط الديوانية تبعد عن بغداد حوالي 180 كيلومتراً. ن تاريخ مدينة الديوانية هو ذاته تاريخ محافظة الديوانية إذ ظهر اسم الديوانية وبزغ نجمها وشاع ذكرها في العقد السابع من القرن الثاني عشر الهجري، وقد تعرض لذكرها الكتاب والسياح الغربيون والشرقيون وأول من وصفها في رحلته التي ابتدأت عام 1754م وانتهت عام 1758م هو الدكتور آدم آيفز

13	1.23	28	3.13	43	4.11	58	5.10
14	1.16	29	2.11	44	12.18	59	4.17
15	2.16	30	4.23	45	1.14	60	2.07

4-4 اختبار ملاءمة البيانات Data Fitting:

للتأكد من ان البيانات في جدول (4-1) تتبع توزيع ليندلي بالمعلمتين بالصيغة الجديدة المقترحة (New Two Parameters Lindley Distribution) تم استعمال اختبار Chi-square لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

H_0 : The data have New Two Parameters Lindley Distribution

H_1 : The data dont have New Two Parameters Lindley Distribution

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب قيمة إحصاءه χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \dots (4-1)$$

حيث تم احتساب إحصاءه حسن المطابقة χ_c^2 وذلك باستعمال الدالة الجاهزة (chi2gof) في

برنامج (MatLab) بدرجة حرية 4 ، وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (4-2) :

جدول (4-2) نتائج اختبار ملاءمة البيانات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
NTPLD	0.997	9.49	0.221	Don't reject H_0

نلاحظ من جدول (4-2) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة والبالغة (0.997) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية والبالغة (9.49) وكانت قيمة Sig=0.221 اكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع ليندلي ذو المعلمتين الجديد .

4-5 المفاضلة بين توزيع ليندلي ذي المعلمتين الجديد NTPLD وتوزيعات

Frechet و Weibull و LD و TPLD2 و TPLD1

في هذه الفقرة سيتم استعمال معايير المقارنة بين التوزيعات وهي (-2LnL , AIC , AICc, BIC,) (HQIC) للمقارنة بين التوزيعات المستعملة وهي توزيع ليندلي بمعلمة LD وتوزيع ليندلي بمعلمتين

TPLD1 وتوزيع ليندلي بمعلمتين TPLD2 وتوزيع ليندلي المقترح الجديد NTPLD وتوزيع ويبل WD وتوزيع فريجت FD لغرض معرفة اي من التوزيعات اكثر دقة للبيانات الحقيقية وكانت النتائج في جدول (3-4) .

جدول (3-4) نتائج اختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية

Distribution	-2LnL	AIC	AICc	BIC	HQIC
LD	176.55	169.64	174.81	176.84	14.31
TPLD1	173.65	166.64	166.88	170.89	13.13
TPLD2	173.63	166.61	166.82	170.80	13.03
NTPLD	172.62	166.60	166.81	170.79	13.03
Weibull	179.48	179.6434	179.33	179.43	16.23
Frechet	181.33	181.88	181.38	182.11	19.44

نلاحظ من جدول (3-4) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع ليندلي ذي المعلمتين كانت اقل من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة وتوزيع ليندلي ذي المعلمتين الاول وتوزيع ليندلي ذي المعلمتين الثاني توزيع ويبل وتوزيع فريجت ، وهذا يدل عن ملائمة البيانات الحقيقية اكثر لتوزيع ليندلي ذي المعلمتين الجديد من باقي التوزيعات.

6-4 تحليل البيانات الحقيقية : (Real data analysis)

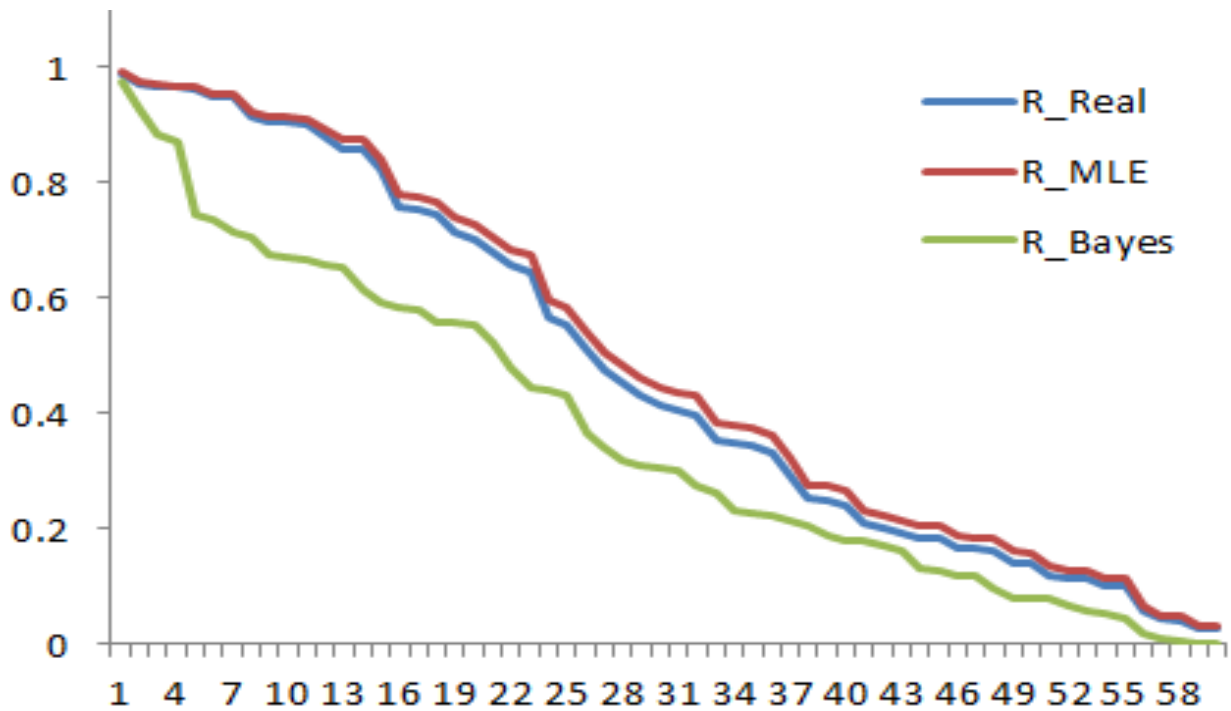
بينت نتائج تجارب المحاكاة الموضحة في الفصل الثالث من هذه الرسالة أفضلية طريقة الإمكان الاعظم في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي المعلمتين الجديد عند احجام العينات (n=50, 75, 100, 150)، وكذلك طريقة بيز في التقدير عند مقارنتها مع طريقة الامكان الاعظم عند أحجام العينات الصغيرة (n=10, 25) وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية توزيع ليندلي ذي المعلمتين الجديد لتمثيل البيانات الحقيقية ، وعلى ضوء ذلك تم تقدير دالة المعولية (البقاء) باستعمال برنامج (Mat Lab) وكما مبين في ملحق (E) بطريقتي الامكان الاعظم وطريقة بيز وكانت نتائج التقدير كما في جدول (4-4) أدناه:

جدول (4-4) قيم دالة البقاء المقدرة بموجب طريقتي الامكان الأعظم وبيز

t_i	R_Real	R_MLE	R_Bayes
11.12	0.14041	0.15768	0.07873
17.05	0.05683	0.06499	0.01661
8.21	0.16864	0.18842	0.12045
1.10	0.96517	0.96930	0.87072
9.19	0.14263	0.16011	0.07961
4.14	0.39860	0.42999	0.27663
1.01	0.99108	0.99217	0.97692
2.13	0.64744	0.67617	0.44333
1.17	0.90462	0.91526	0.67381
5.20	0.24807	0.27353	0.18919
2.12	0.65713	0.68546	0.48100
1.19	0.90455	0.91520	0.66987
1.23	0.82221	0.84032	0.59347
1.16	0.91563	0.92515	0.70555
2.16	0.56663	0.59785	0.44125
1.23	0.75821	0.78104	0.58367
2.17	0.55320	0.58468	0.43218
2.03	0.74389	0.76764	0.55961
1.09	0.96854	0.97228	0.88658
2.10	0.70104	0.72727	0.55224
1.22	0.85950	0.87443	0.61274
1.19	0.90166	0.91259	0.66610
22.11	0.02715	0.03131	0.00149

1.20	0.86024	0.87510	0.65279
1.76	0.75306	0.77622	0.58142
1.20	0.87980	0.89285	0.65787
2.57	0.47589	0.50806	0.33971
3.13	0.45411	0.48621	0.31779
2.11	0.67853	0.70589	0.52318
4.23	0.33232	0.36184	0.22430
2.19	0.51034	0.54239	0.36547
1.12	0.95044	0.95623	0.73630
12.22	0.10084	0.11415	0.05387
7.10	0.20081	0.22313	0.17209
4.21	0.34654	0.37656	0.22742
9.19	0.16429	0.18369	0.09851
5.03	0.29389	0.32180	0.21375
12.21	0.11344	0.12807	0.05604
3.15	0.43216	0.46407	0.31054
4.20	0.34954	0.37966	0.23193
6.22	0.21038	0.23338	0.17767
8.63	0.16460	0.18403	0.11944
4.11	0.40658	0.43812	0.30300
12.18	0.11376	0.12843	0.06656
1.14	0.95014	0.95597	0.71524
7.16	0.19353	0.21530	0.16420
6.03	0.24216	0.26727	0.17887
20.22	0.02791	0.03218	0.00193
1.11	0.96441	0.96863	0.74746
8.16	0.18401	0.20504	0.12559

11.21	0.12013	0.13545	0.07826
8.03	0.18508	0.20619	0.13144
19.54	0.04202	0.04825	0.00604
3.20	0.41482	0.44649	0.30419
14.11	0.10006	0.11329	0.04327
1.08	0.97237	0.97567	0.92718
17.19	0.04289	0.04923	0.01089
5.10	0.25151	0.27718	0.20746
4.17	0.35197	0.38217	0.26375
2.07	0.71680	0.74217	0.55611



شكل (1-4) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقتي الامكان الأعظم وبيز

من الجدول (4-4) والشكل (1-4) يتضح الآتي:

- تناقص قيم دالة البقاء مع الزمن وبصورة واضحة وهذا ما يطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن .
- القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة الامكان الاعظم اقرب من القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة بيز .
- منحنى دالة البقاء المقدرة بموجب طريقة الامكان الاعظم اقرب الى منحنى دالة البقاء للبيانات الحقيقية من طريقة بيز .
- كلما قلت مدة بقاء المريض في المستشفى، زاد احتمال بقائه على قيد الحياة. فالمرضى الذي بقي راقداً في المستشفى مدة (1) يوم كان احتمال بقائه على قيد الحياة (98%) ، والمرضى الذي كانت مدة بقائه في المستشفى (22) يوم كان احتمال بقائه على قيد الحياة (1%) .

5

الفصل الخامس

الاستنتاجات

والتوصيات

1-5 الاستنتاجات Conclusions

من خلال ما تم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي توصلنا الى الاستنتاجات الآتية :

فيما يخص الجاني التجريبي:

- 1- تفوق الانموذج المقترح الجديد (NTPLD) على باقي النماذج المستعملة بنسبة افضلية بلغت (79.2%) ، يليه الانموذج وييل (WD) بنسبة افضلية (20.8%)، ولم تحقق باقي النماذج (LD, TPLD1, TPLD2, FD) اي نسب افضلية مقارنة بتوزيعات ليندلي المدروسة.
- 2- تفوق طريقة الامكان الأعظم للأنموذج المقترح الجديد (NTPLD) بنسبة افضلية بلغت (7.29%) في جميع تجارب المحاكاة وعند حجوم العينات الكبيرة (100,150).
- 3- تفوق طريقة (bml) عند الانموذج (TPLD2) عند حجوم العينات (10,25,50) بنسبة افضلية بلغت (6.94%) .
- 4- سجلت طريقة (Per) اعلى نسبة افضلية لها عند الانموذج (FD) اذ بلغت (10.76%) و توزعت الافضلية باعداد متقاربة عند جميع احجام العينات.
- 5- تفوق طريقة العزوم عند الانموذج (WD) عند احجام العينات (10, 25, 50) وكانت اعلى نسبة لها بلغت (5.21%).
- 6- تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة بيز القياسية في تقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع (NTPLD) بنسبة افضلية بلغت (80%) .
- 7- كانت طريقة بيز القياسية هي الافضل عند احجام العينات (25)
- 8- سجلت طريقة الامكان الاعظم افضلية عند احجام العينات (10, 50, 75, 100, 150).

فيما يخص الجانب التطبيقي:

1. ان منحى دالة البقاء المقدره بطريقة الامكان الاعظم للبيانات الحقيقية موضوع البحث كانت اقرب الى منحى دالة البقاء للبيانات الحقيقية بطريقة بيز .

2. كلما قلت مدة بقاء المريض في المستشفى ، زاد احتمال بقاءه على قيد الحياة. فالمريض الذي بقي راقداً في المستشفى مدة (1) يوم كان احتمال بقاءه على قيد الحياة (98%) ، والمريض الذي كانت مدة بقاءه في المستشفى (22) يوم كان احتمال بقاءه على قيد الحياة (1%) .

2.5 التوصيات Recommendations

من خلال ما تم التوصل اليه من استنتاجات ، نوصي بما يأتي :

1. اقتراح اخر لتوزيع ليندلي بمعلمة خط أخرى غير تلك التي تم استعمالها بهذه الرسالة .
2. استعمال المبدأ الضبابي في تقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع ليندلي بمعلمتين.
3. تقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع ليندلي بثلاث معلمات ومقارنته مع توزيع شبه ليندلي .
4. استعمال طريقة بيز في تقدير معلمات توزيع ليندلي باستعمال دوال خسارة مختلفة كأن تكون دالة الخسارة التكميية او مثلا دالة خسارة انتروبي العامة او دالة خسارة **Linex** وغيرها من دوال الخسارة.
5. الاستفادة من تطبيق الانموذج المقترح الجديد في تقدير دالة المعولية (البقاء) في المنشآت الهندسية والصناعية .

المصادر

المصادر العربية :

- [1] الجاسم , صباح هادي عبود ، و السراي ، علي حميد يوسف ، (2012) ، "نظرية القرارات الاحصائية و تطبيقاتها" ، مكتب الجزيرة للطباعة والنشر بغداد.
- [2] القرشي ، احسان كاظم شريف ، و صاحب ، شيماء كاظم ، (2014) - ، "تقدير معلمات توزيع الرياح الترابية لمدينة الديوانية" ، المجلد 6 ، العدد 1 ، الصفحات - 27 46
- [3] الياسري ، تهاني مهدي عباس ، (2007) ، " مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبيل" ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد.
- [4] عبد الله ، ثائرة نجم (2018)، "تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي- دراسة مقارنة وتحليل أوقات الانتظار"، مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم، ISSN(1681-6870) العدد (43)، ص266-278.
- [5] علي ، بشار خالد (2018)، "اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريجت " ، رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة كربلاء ، كلية الادارة والاقتصاد .
- [6] عويد ، غزوان رفيق (2012)،" مقارنة مقدرات بيز لمعلمة ودالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دوال خسارة متزنة وغير متزنة"، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد في الجامعة المستنصرية .

المصادر الأجنبية :

- [7] Algarni, A., (2021). On a new generalized lindley distribution: Properties, estimation and applications ,Journal Plos One, Vol.16, No.2, pp.1-19.
- [8] Al-Nasser, Abdul Majed Hamza,(2009), "An Introduction to statistical Reliability", UB Group (Ithraa publishing & distribution - Amman , University book shop – ALSharjha , Elmia book stores - Al-Khabor.
- [9] Al-Noor, Nadia Hashim and Subhi, Easha Sameer, (2018), " Two Parameter Lindley distribution: Estimating the Reliability Function with Fuzzy Data", Journal of engineering and Applied Sciences, Vol.13, No.18,pp. 7670-7676, ISSN: 1816-949X, Medwell Journals.
- [10] Bolstad, W. M., & Curran, J. M.,(2016). Introduction to Bayesian statistics. John Wiley & Sons. third edition , Wiley, Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. Published simultaneously in Canada. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ISBN 978-1-118-09315-8.
- [11] Chesneau, C., Tomy, L., & Gillariose, J., (2021). A new modified Lindley distribution with properties and applications. Journal of Statistics and Management Systems, pp. 1-21.
- [12] Dey, S. (2012). Bayesian estimation of the parameter and reliability function of an inverse Rayleigh distribution. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, Vol.6, No.1, pp.113-124.
- [13] El-Din, M. M., & Nagy, M., (2017). Estimation of the inverse Weibull distribution under generalized progressive hybrid censoring scheme. J. Stat. Appl. Pro. Lett, Vol. 4, pp.97-107.
- [14] Ganaie, R. A., Rajagopalan, V., & Rather, A. A., (2020). Weighted new quasi Lindley distribution with Properties and Applications. J Xi'an Univ Arch Tech.
- [15] Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K., & Husain, H. A.,(2011). A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. Mathematics and Computers in simulation, Vol. 81, No.6, pp.1190-1201.
- [16] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S., (2008). Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, Vol. 78, No.4, pp. 493-506.

- [17] Guure, C. B., & Ibrahim, N. A., (2014). Approximate Bayesian estimates of Weibull parameters with Lindley's method , Vol.43,No.9,pp.1433–1437 .
- [18] Hafez, E. H., Riad , F. H., Mubarak, S. A., & Mohamed, M. S.,(2020). Study on lindley distribution accelerated life tests : application and numerical simulation. Symmetry,Vol. 12,No.(12), 2080.
- [19] Iyer , Ravi K., (2013) , " Hazard and Reliability Functions ,Failure Rates" , Probability with Engineering Applications, Dept. of lectrical and Computer Engineering University of Illinois at Urbana Champaign, ECE 313.
- [20] Kersey, J. X. ,(2010). Weighted inverse Weibull and beta-inverse Weibull distribution , Master thesis
- [21] Krishna, H., & Kumar, K. ,(2011). Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample. Mathematics and Computers in Simulation,Vol. 82, No.2,pp. 281-294.
- [22] Kundu, D., & Howlader, H., (2010). Bayesian inference and prediction of the inverse Weibull distribution for Type-II censored data. Computational Statistics & Data Analysis,Vol. 54,No.6,pp. 1547-1558.
- [23] Lavanya, A., & Alexander, T. L.,. (2016). Estimation of parameters using Lindley's method. International Journal of Advanced Research, Vol. 4, No.12, pp.1767-1778.
- [24] Lóczi, L., (2020). Explicit and recursive estimates of the Lambert W function. arXiv preprint arXiv:2008.06122v.
- [25] Loganathan, A., & Uma, A., (2017). Comparison of estimation methods for inverse weibull parameters. Global and Stochastic Analysis, Vol.4,pp. 83-93.
- [26] M. Nagy, M. M. Mohie El-Din, (2017) . " Estimation for Inverse Weibull distribution under Generalized Progressive Hybrid Censoring Scheme" , Journal of Statistics Applications & Probability Letters An International Journal , J. Stat. Appl. Pro. Lett, Vol. 4, No. 3,pp. 97-107.
- [27] Nanuwong, N., & Bodhisuwan, W., (2014). Length biased beta-pareto distribution and its structural properties with application. Journal of Mathematics and Statistics,Vol. 10, No.1,pp. 49.

- [28] Nasrallah, M. W. N., (2018). Estimating parameters Gumbel Pareto Distribution. *Diyala Journal For Pure Science*, Vol. 14, No.02, pp.53-60.
- [29] Ravi, I., (2013), "probability with Engineering Applications", University of Illinois at Urbana Champaign.
- [30] Rohatgi, Vijay K., & Saleh, A.K.Md.E. (2015). *An Introduction to Probability and Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley*. pp409-411.
- [31] Rousseau, G. (2016). Vieillessement du TRIAC soumis à des essais de fiabilité du type HTRB. Master Thesis.
- [32] Salem, A (2020). Best bounds for the Lambert W functions. *J. Math. Inequal.*, 14(4), 1237-1247.
- [33] Salem, A. H. M. E. D., (2020). Best bounds for the Lambert W functions. *J. Math. Inequal.*, Vol.14, No.4, pp. 1237-1247.
- [34] Satheesh Kumar, C., & Jose, R., (2019). On double Lindley distribution and some of its properties. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, Vol. 38, No.1, pp.1-21.
- [35] Sen, S., (2018). Some New Life Distributions: Survival Properties and Applications (Doctoral dissertation, Department of Statistics, Pondicherry University), pp.1-49.
- [36] Shanker, R & Sharma, S, (2016). On two parameter Lindley distribution and Its Applications to model Lifetime data. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, Vol. 3, No.1, pp.1-8.
- [37] Shanker, R., & Amanuel, A. G., (2013). A new quasi Lindley distribution. *International Journal of Statistics and systems*, Vol. 8, No.2, pp.143-156.
- [38] Shanker, R., & Mishra, A., (2013a). A two-parameter Lindley distribution. *Statistics in Transition new series*, Vol. 14, No.1, pp.45-56.
- [39] Shanker, R., & Rahman, U. H., (2020). A New Two-Parameter Lindley Distribution. *Nepal Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 1, pp. 33-42.
- [40] Shanker, R., Kamlesh, K. K., & Fesshay, H., (2017). A two parameter lindley distribution: Its properties and applications. *Biostatistics and Biometrics Open Access Journal*, Vol. 1, No.4, pp.85-90.

- [41] Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R., (2013b). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. Vol.4, No.2.
- [42] Shanker, R., Shukla, K. K., Shanker, R., & Tekie, A. L. (2017). A three-parameter Lindley distribution. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 7(1), 15-26.
- [43] Silva, I. C., Mesquita, N., & Paula, J. (2010). Lack of population structure in the fiddler crab *Uca annulipes* along an East African latitudinal gradient: genetic and morphometric evidence. *Marine Biology*, 157(5), PP 429-340.
- [44] Stapelberg, R. F., (2009). Handbook of reliability, availability, maintainability and safety in engineering design. Springer Science & Business Media. Springer, British Library Cataloguing in Publication Data, DOI 10.1007/978-1-84800-175-6.
- [45] Tomy, L. ,(2018). A retrospective study on Lindley distribution. *Biometrics and Biostatistics International Journal*, Vol. 7, No.3, pp.163-169.
- [46] Udoudo, U. P., & Etuk, E. H., (2018). A New Extension of Quasi Lindley Distribution: Properties and Applications. *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, Vol.7, No. 2, pp. 28-41. www.sciencepubco.com/index.php/IJASP doi: 10.14419/jasp.v7i2.29781 Research pape.
- [47] V. Hogg, Robert ; McKean, Joseph W. T. ,Craig Allen, (2019), "Introduction to Mathematical Statistics" , Pearson Education, Inc. All Rights Reserved. Printed in the United States of America. ISBN 10: 0-13-468699-3 .
- [48] Yadav, A. S., Singh, S. K., & Singh, U., (2020). Statistical properties and different methods of estimation for extended weighted inverted Rayleigh distribution. *Statistics*, Vol.21, No.2, pp.119–141.

الملاحق

ملحق (A)

اشتقاق دالة توليد بيانات توزيع ليندلي ذي المعلمتين الشكل الثاني (TPLD1)

إذا كانت دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندلي بمعلمتين كالآتي:

$$F(t, a, b) = 1 - \left[\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right] e^{-bt} \quad \dots (1)$$

ولیکن $u \in (0,1)$ رقم عشوائي فإنه فإنه:

$$F(t, a, b) = u$$

$$u = 1 - \left[\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right] e^{-bt}$$

$$1 - u = \left[\frac{1+ab+bt}{ab+1} \right] e^{-bt}$$

$$(ab + 1)(1 - u) = (1 + ab + bt)e^{-bt}$$

$$(ab + 1)(1 - u)e^{bt} = (ab + 1) + bt \quad \dots (2)$$

واضافة المقدار $(ab + 1)e^{bt} - (1 - u)(ab + 1)e^{bt}$ لطرفي المعادلة (3-17) نحصل على :

$$(ab + 1)(1 - u)e^{bt} - (1 - u)(ab + 1)e^{bt} - (ab + 1) = (ab + 1) + bt - (1 - u)(ab + 1)e^{bt} - (ab + 1)$$

$$-(ab + 1) = bt - (1 - u)(ab + 1)e^{bt}$$

$$-bt - (ab + 1) = -(1 - u)(ab + 1)e^{bt} \quad \dots (3)$$

نضرب طرفي المعادلة (3-18) بـ $e^{-bt-(ab+1)}$ ينتج :

$$[-(1 - u)(ab + 1)e^{-bt}]e^{-bt-(ab+1)} = \left[-bt - \frac{b+a}{a} \right] e^{-bt-(ab+1)}$$

$$-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)} = [-bt - (ab + 1)]e^{-bt-(ab+1)} \quad \dots (4)$$

ليكن : $w = -bt - (ab + 1)$ فإن المعادلة (4) تصبح :

$$-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)} = we^w \quad \dots (5)$$

ونلاحظ من معادلة (5) بأن المقدار $-bt - (ab + 1)$ هي دالة لامبرت (Lambert W Function)

للصيغة الحقيقية $-(1 - u)(ab + 1)e^{-bt}$ فإننا نحصل على :

$$-bt - (ab + 1) = w[-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)}]$$

وهذا يعني انه لاي $b > 0$ و $t > 0$ فانه مباشرة يكون $-bt - (ab + 1) > 0$ ويمكن اختبار الآتي:

$$-\left((bt + (ab + 1))e^{-bt - (ab+1)}\right) = -(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)} \in \left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

وطالما ان $u \in (0,1)$ فاننا نأخذ بالحسبان خصائص الجزء السالب من دالة لامبرت w التي تصبح:

$$w_{-1}\left[-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)}\right] = -(bx + (ab + 1)) \quad \dots (6)$$

الذي يؤدي الى ان:

$$x = -(ab + 1) - \frac{1}{b} w_{-1}\left[-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab+1)}\right] \quad \dots (7)$$

ملحق (B)

اشتقاق دالة توليد بيانات توزيع ليندل ذي المعلمتين المقترح (NTPLD)

كانت دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندل بمعلمتين كالآتي:

$$F(t, a, b) = 1 - \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}} \quad \dots (8)$$

وليكن $u \in (0,1)$ رقم عشوائي فانه فانه:

$$F(t, a, b) = u$$

$$u = 1 - \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}}$$

$$1 - u = \left[\frac{b+t+ab^2}{b(ab+1)} \right] e^{-\frac{t}{b}}$$

$$(1 - u)b(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} = b + t + ab^2 \quad \dots (9)$$

نضرب طرفي المعادلة (3-25) بـ $\frac{1}{b}$ ينتج :

$$(1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} = \frac{t}{b} + (ab + 1) \quad \dots (10)$$

واضافة المقدار $(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} - (ab + 1)$ لطرفي المعادلة (3-26) نحصل على :

$$(1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} - (1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} - (ab + 1) = \frac{t}{b} + (ab + 1) - (1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} - (ab + 1)$$

$$-(ab + 1) = \frac{t}{b} - (1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}}$$

$$-\frac{t}{b} - (ab + 1) = -(1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $-\frac{t}{b} - (ab + 1)$ ينتج :

$$\left[-(1 - u)(ab + 1)e^{\frac{t}{b}} \right] e^{-\frac{t}{b} - (ab + 1)} = \left[-\frac{t}{b} - (ab + 1) \right] e^{-\frac{t}{b} - (ab + 1)}$$

$$-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab + 1)} = \left[-\frac{t}{b} - (ab + 1) \right] e^{-\frac{t}{b} - (ab + 1)} \quad \dots (11)$$

ليكن $w = -\frac{t}{b} - (ab + 1)$ فان المعادلة (11) تصبح :

$$-(1 - u)(ab + 1)e^{-(ab + 1)} = we^w \quad \dots (12)$$

ونلاحظ من معادلة (12) بان المقدار $-bt - (ab + 1)$ هي دالة لامبرت (Lambert W Function) للصيغة الحقيقية $-(1-u)(ab+1)e^{-bt}$ فاننا نحصل على :

$$-\frac{t}{b} - (ab + 1) = W[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}]$$

وهذا يعني انه لاي $b > 0$ و $t > 0$ فانه مباشرة يكون $-\frac{t}{b} - (ab + 1) > 0$ ويمكن اختبار الآتي:

$$-\left(\frac{t}{b} + (ab + 1)\right) e^{-\frac{t}{b} - (ab+1)} = -(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)} \in \left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

وظالما ان $u \in (0,1)$ فاننا نأخذ بالحسبان خصائص الجزء السالب من دالة لامبرت w التي تصبح :

$$w_{-1}[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}] = -\left(\frac{x}{b} + (ab + 1)\right) \quad \dots (13)$$

الذي يؤدي الى ان:

$$x = -(ab + 1) - bw_{-1}[-(1-u)(ab+1)e^{-(ab+1)}] \quad \dots (14)$$

ملحق (C)

- تقريب ليندلي: (Lindley Approximation)

إقترح الباحث ليندلي (D.V Lindley, 1980) اسلوباً تقريبياً لحساب نسبة التكاملات ، اذ تمكن من الوصول الى القيمة التقريبية باستعمال متسلسلة تايلور (Taylor's series) لمقدر الامكان الاعظم للمعلمة ووفق هذا الاسلوب يمكن تقريب نسبة التكاملات في المعادلة (2-144) الى الصيغة الآتية: [17],[23]

$$E[\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})/\underline{t}] \cong \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2} [A + I_{30}B_{12} + I_{03}B_{21} + I_{21}C_{12} + I_{12}C_{21}] + P_1A_{12} + P_2A_{21} \quad (15)$$

إذ أن:

$\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ الدالة المراد تقديرها وفي هذه الرسالة هي دالة المعولية (البقاء) $R(t)$ لتوزيع (NTPLD)

$$A = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} \tau_{ij} \quad \dots (16)$$

$$I_{ij} = \frac{\partial^{i+j} \log L(\mathbf{b}, \mathbf{a}) / \underline{t}}{\partial b^i \partial a^j} ; i, j = 0, 1, 2, 3 ; i + j = 3 \quad \dots (17)$$

$$w_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b_i \partial a_j} \quad \dots (18)$$

$$A_{ij} = w_i \tau_{ii} + w_j \tau_{ji} \quad \dots (19)$$

$$B_{ij} = (w_i \tau_{ii} + w_j \tau_{ji}) \tau_{ii} \quad \dots (20)$$

$$C_{ij} = 3w_i \tau_{ii} \tau_{ij} + w_j (\tau_{ii} \tau_{jj} + 2\tau_{ij}^2) \quad \dots (21)$$

$$P_1 = \frac{\partial \text{Log} \pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b} \quad \dots (22)$$

$$P_2 = \frac{\partial \text{Log} \pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a} \quad \dots (23)$$

$$w_1 = \frac{\partial \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b} \quad \dots (24)$$

$$w_2 = \frac{\partial \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a} \quad \dots (25)$$

وان مصفوفة معلومات فيشر (Fisher information matrix) كالآتي:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{Log} L(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 \text{Log} L(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 \text{Log} L(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 \text{Log} L(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a^2} \end{bmatrix} \quad \dots (26)$$

وان τ_{ji} تمثل سالب معكوس مصفوفة معلومات فيشر ، أي أن :

$$\tau_{ji} = -I^{-1} \quad \dots (27)$$

وعناصرها كما يأتي:

$$\tau_{ii} = \frac{-I_{jj}}{(I_{ii}I_{jj} - I_{ij}I_{ji})}$$

$$\tau_{jj} = \frac{-I_{ii}}{(I_{ii}I_{jj} - I_{ij}I_{ji})}$$

$$\tau_{ij} = \frac{-I_{ji}}{(I_{ii}I_{jj} - I_{ij}I_{ji})} ; i \neq j$$

وعند استعمال اسلوب تقريب ليندلي لتقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع (NTPLD) سنحصل على الآتي:

$$\Phi(b, a) = R(t) = \frac{(b+t+ab^2)}{b(ab+1)} e^{-\frac{t}{b}}$$

$$I_{30} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial b^3 \partial a^0} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial b^3}$$

$$I_{03} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial b^0 \partial a^3} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial a^3}$$

$$I_{21} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial b^2 \partial a}$$

$$I_{12} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(b,a)}{\partial b \partial a^2}$$

$$\text{Log}\pi(b, a) = -\log(b, a)$$

$$P_1 = \frac{\partial \text{Log}\pi(b,a)}{\partial b}$$

$$P_2 = \frac{\partial \text{Log}\pi(b,a)}{\partial a}$$

$$w_1 = \frac{\partial R(t)}{\partial b}$$

$$w_2 = \frac{\partial R(t)}{\partial a}$$

$$w_{11} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial b^2}$$

$$w_{12} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial b \partial a}$$

$$w_{21} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial a \partial b}$$

$$w_{22} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial a^2}$$

$$A = w_{11}\tau_{11} + w_{12}\tau_{12} + w_{21}\tau_{21} + w_{22}\tau_{22}$$

$$A_{12} = w_1\tau_{11} + w_2\tau_{21}$$

$$A_{21} = w_2\tau_{22} + w_1\tau_{21}$$

$$B_{12} = (w_1\tau_{11} + w_2\tau_{21})\tau_{11}$$

$$B_{21} = (w_2\tau_{22} + w_1\tau_{21})\tau_{22}$$

$$C_{12} = 3w_1\tau_{11}\tau_{12} + w_2(\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{12}^2)$$

$$C_{21} = 3w_2\tau_{22}\tau_{21} + w_1(\tau_{22}\tau_{11} + 2\tau_{21}^2)$$

وإتماداً على طريقة بيز القياسية في ظل دالة الخسارة التربيعية والتوزيع الاولي المشترك ، وباستعمال اسلوب ليندلي لتقدير دالة المعولية (البقاء) لتوزيع (NTPLD) فان المعادلة (15) ستصبح بالشكل الآتي:

$$\hat{R}_{S\text{Bayes}} = \Phi(b, a) + \frac{1}{2}[(A + I_{30}B_{12} + I_{03}B_{21} + I_{21}C_{12} + I_{12}C_{21})] + P_1A_{12} + P_2A_{21}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2} [(w_{11}\tau_{11} + w_{12}\tau_{12} + w_{21}\tau_{21} + w_{22}\tau_{22}) + I_{30}B_{12} \\
 &\quad + I_{03}B_{21} + I_{21}C_{12} + I_{12}C_{21}] + P_1A_{12} + P_2A_{21} \\
 &= \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2} \left[\left[\left[\frac{\partial^2 R(t)}{\partial b^2} \right] \tau_{11} + \left[\frac{\partial^2 R(t)}{\partial b \partial a} \right] \tau_{12} + \left[\frac{\partial^2 R(t)}{\partial b \partial a} \right] \tau_{21} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{\partial^2 R(t)}{\partial a^2} \right] \tau_{22} \right) + \left[\frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^3} \right] \left(\left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] \tau_{11} + \frac{\partial R(t)}{\partial a} \tau_{12} \right) \tau_{11} + \\
 &\quad \left[\frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a^3} \right] \left(\left[\frac{\partial R(t)}{\partial a} \right] \tau_{22} + \left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] \tau_{21} \right) \tau_{22} \right] + \\
 &\quad \left[\frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^2 \partial a} \right] \left[3 \left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] \tau_{11} \tau_{12} + \left[\frac{\partial R(t)}{\partial a} \right] (\tau_{11} \tau_{22} + 2\tau_{12}^2) \right] + \\
 &\quad \frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b \partial a^2} \left[3 \left[\frac{\partial R(t)}{\partial a} \right] \tau_{22} \tau_{21} + \left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] (\tau_{22} \tau_{11} + 2\tau_{21}^2) \right] + \\
 &\quad \frac{\partial \text{Log}\pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b} \left(\left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] \tau_{11} + \left[\frac{\partial R(t)}{\partial a} \right] \tau_{21} \right) + \frac{\partial \text{Log}\pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a} \left(\left[\frac{\partial R(t)}{\partial a} \right] \tau_{22} + \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{\partial R(t)}{\partial b} \right] \tau_{12} \right) \dots (28)
 \end{aligned}$$

وان المشتقات المرتبطة بايجاد دالة المعولية(البقاء) كالاتي:

$$P_1 = \frac{\partial \text{Log}\pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b} = \frac{a_1 - 1}{b}$$

$$P_2 = \frac{\partial \text{Log}\pi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a} = \frac{a_2 - 1}{a}$$

$$w_1 = \frac{\partial R(t)}{\partial b} = \frac{e^{-\frac{t_i}{b}}}{b(ab+1)} + \frac{(b+t_i+ab^2)e^{-\frac{t_i}{b}}}{b^3(ab+1)} = \frac{e^{-\frac{t_i}{b}}}{b(ab+1)} \left[1 + \frac{(b+t_i+ab^2)}{b^2} \right]$$

$$w_2 = \frac{\partial R(t)}{\partial a} = 0$$

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= \frac{\partial^2 R(t)}{\partial b^2} = \frac{2t_i e^{-\frac{t_i}{b}}}{b^3(ab+1)} + \frac{2t_i(b+t_i+ab^2)e^{-\frac{t_i}{b}}}{b^4(ab+1)} + \frac{t_i^2(b+t_i+ab^2)e^{-\frac{t_i}{b}}}{b^5(ab+1)} \\
 &= \frac{t_i e^{-\frac{t_i}{b}}}{b^3(ab+1)} \left[2 + \frac{2(b+t_i+ab^2)}{b} + \frac{t_i(b+t_i+ab^2)}{b^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$w_{12} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial b \partial a} = 0$$

$$w_{21} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial a \partial b} = 0$$

$$w_{22} = \frac{\partial^2 R(t)}{\partial a^2} = 0$$

$$I_{30} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^3} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{24t_i}{b^5 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)} + \frac{36t_i^2}{b^7 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^2} - \frac{16t_i^3}{b^9 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^3} + \frac{6 \sum_{i=1}^n t_i}{b^4} \right)$$

$$I_{03} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial a^3} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{\left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^3}$$

$$I_{21} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^2 \partial a} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{6t_i}{b^4 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^2} + \frac{8t_i^2}{b^6 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^3} \right)$$

$$I_{12} = \frac{\partial^3 \text{LogL}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b \partial a^2} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{4t_i}{b^3 \left(a + \frac{t_i}{b^2}\right)^3} \right)$$

This Thesis aims to study and analysing the survival times of patients infected with Covid-19 Virus by using some important probability distributions.

Recently the Survival function have become more popular in finding the average probability of Survival after a certain period of time of infection .The need of reliability theory has been arise to analyse some phenomena's based on the nature of its data , moreover, to estimate the interested parameters of the consider reliability characteristics.

Also, this thesis aims to estimate the survival function for a specific densely function of one of most important distribution in modelling the survival times , which called Two Parameter Lindley Distribution (TPLD) that have probability density functions, additionally , one proposed density function (NTPLD) and campaign proposed function with some exist functions, like, One parameter Lindley distribution, Weibull distribution, and frechet distribution, based on five estimation methods (Maximum likelihood, method of moments , Percentiles estimators , method of moment with biased) The comparison study contacted based on simulation MCMC algorithm , Also the criterion of Integrated Mean Squares Error (IMSE) have used to select the best method Moreover , We used the following Criterion (-2LNL, HQIC, AIC, AICs, and HQIC) for model selection (best fit distribution).

Hence, the simulation results illustrated the outperform of the proposed distribution (NTPLD) in (79.2%)of testing times and the Weibull distribution (WD) in (20.8%) of testing times, Also , based on the simulation results the (ML) outperform the other estimation methods with (7.21%) of testing times for the proposed distribution (NTPLD) under different sample sizes (100, and 150).

Also, the outperform of (bml) method in (TPLD2) method with (6.94%) of testing time under sample size (10,25, and 50) , the (per) method in (FD) method outperform WITH (10.76%) under sample size (25,50,70) and outperforms of (WD) model in moment method with (5.21%) of testing time under (10,25,50) sample sizes.

Lastly , the simulation result have been comparisons of (MLE) method on the Bayesian method in estimation of the reliability function for the proposed distribution (NTPLD) with testing times (80%) under (50,75,100,150) sample sizes , but Bayesian method outperform under (10,25) sample sizes .

In real data analysis the Covid-19 infected patients times of staying until dying has been collected from AL-Diwaniyah hospital . the reliability analysis has performed on this data by using the same methodology in simulation study and the results showed that parameters estimation of reliability function based on the (MLE) are closed to the results of Bayesian method,

Also, the survival function illustrated that the shorter staying time of patients , the more probability of staying alive and vice versa.

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education & scientific research
Department of Statistics
College of Administration and Economics
University of Al-Qadisiyah



Estimation of the Reliability Function of a two-parameter Lindley distribution For patients infected with COVID-19

**A thesis submitted to the council of the college of
Administration & Economics\ University of Al-Qadisiyah
As partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Statistics Sciences**

By
Zahraa Khallid Jaafar Al-Athari

Supervised by

Prof. Dr. Mohammed Habeeb Al-Sharoot

1443 A.H

2021 A.D