جامعه القادسية
كلية التربيـــــــه
قسم الرياضيات

بحث بعنوان

الدوال المحدبه والمقعره وبعض تطبيقاتها

مقدم الى قسم الرياضيات في كلية التربيه جامعة القادسيه كجزء من متطلبات نيل البكالوريوس علوم في الرياضيات

من قبل

الطالب :- كرار علي غضبان

بأشراف

م . زينب عوده

2019م **1440هـ**

بسم الله الرحمن الرحيم

(اللّهُ لاَ إِلَـهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا الَّذِي يَشْفَعُ عِنْدَهُ إِلاَّ بِإِذْنِهِ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلاَّ بِمَا شَاء وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضَ وَلاَ يَؤُودُهُ حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ)

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة الآية(255)

الإهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلى بطاعتك.. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك.. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك.. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

الله جل جلاله

الى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة.. ونصح الأمة.. الى نبي الرحمة ونور العالمين..

سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم

الى من كلله الله بالهيبة والوقار.. الى من علمني العطاء بدون انتظار.. الى من أحمل أسمه بكل افتخار.. ارجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد والى الأبد..

والدي العزيز

الى ملاكي في الحياة.. الى معنى الحب والى معنى الحنان والتفاني.. الى بسمة الحياة وسر الوجود.. الى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

الى من به أكبر وعليه أعتمد .. الى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي ..
الى من بوجودها أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها ..الى من عرفت معها معنى الحياة الى من رعانا وحافظ علينا، الى من وقف الى جانبنا عندما ضللنا الطريق...

شكر وتقدير

من الصعب البوح بكلمة الشكر لأنها لا تحد عطاء اساتذتي الذين تعلمت على ايديهم واخص فيهم بالذكر الجميل والثناء الوفير الى الاستاذه المشرفه زينب عوده فجزاه الله خير جزاء المحسنين

الباحث

المحتويات

المقدمة

على الرغم من التطور التقني في التعامل مع العديد من المشاكل ، فان الافكار الاساسية متشابهه الي حدأ كبير مع تلك التي تقوم عليها الحالة الواحدة. موظوع التحدب وتطبيقاته والدوال المحدبة هو موضوع يستحق الدراسة . من الباحثين الذين درسوا هذا الموضوع خلال القرن العشرين V.Jensen ، هيرميت ،هولدر ، ستولز حيث كان لهم نشاط بحثي مكثف في هذا المجال وتم الحصول على نتائج مهمة في التحليل الوظيفي الهندسي ، الاقتصاد الرياضي ، التحليل المحدب ، التحسين غير الخطي ، .....الخ .

كل هذا لعب دور مهم لترويج لموضوع الدوال المحدبة ونذكر من العلماء البارزين فيه G.Polya , J.E.Littlewood , G.H.Hardy . هنالك نوعان من الدوال المحدبة استخدمت على نطاق واسع في الرياضيات النظرية والتطبيقية حيث يتم الوصول الى الحد الاقصى عند نقطة حدودية ، اي حد ادنى محلي . وعلاوة على ذك ، الدالة المحدبة بدقة تؤكد وجود حد ادنى واحد .

وجهة النظر الحديثة حول الدوال المحدبة هي انها تمثل التفاعل بين التحليل والهندسة مما يجعل كل قارىء يشعر بالاثارة عند قراته لموضوع لدوال لمحدبة ، العالم غارنر يصف الدالة المحدبة بانها كالاخطبوط بمخالب بعيدة المدى التي يتغير شكلها ولونها لانها تتحرك من منطقة لأخرى .

ان فرص البحث كثيرة فخلال السنوات الاخيرة ظهرت عدة كتب بارزة ومكرسة للنظرية المحدبة وظهرت تطبيقات لدوال المحدبة من مؤلفيها نذكر L.H Ormander الذي عرض مفاهيم التحدب من وجهة النظر لحديثة . تطورت نظرية التحدب الى نظرية اكبر حول الدوال التي تم ترجمتها الى الاشكال لهندسية الاخرى للمجال او القوانين الاخرى .

في هذا البحث تناولنا موضوع المجموعات المحدبة والدوال المحدبة والمقعرة وبعض تطبيقاتها في الاحصاء والهندسة المجسمة اذا انه توجد مشكلات متعلقة بمجموعات محدبة في مسافات اقليدية حقيقية ذات بعدين او ثلاثة ابعاد وهذا يوضح الطرق المختلفة التي يمكن ان يدخل بها التحدب في صياغة الحل لمشاكل لمختلفة في هذه المجالات . بحثنا تضمن فصلان . ففي الفصل الاول لعب موضوع التحدب للمجموعة دوراً اساسياً حيث قدمناه بشكل مبسط من خلال بعض المفاهيم الاساسية عن التحدب كما ناقش الفصل

خصائص الفئات الفرعية لفئة المجموعات المحدبة . اما الفصل الثاني فقد تضمن مفهوم الدالة المحدبة والمقعرة وبعض التطبيقات المهمة والخواص التي تم اختزالها الى المشكلات لمتعلقة بالدوال المحدبة كذلك حصلنا على تميزات التحدب بمفاهيم هندسية مختلفة .اول اثنين تضمنتهم القضية * اما الثالثة فقد تمنتها القضية ** .

وهناك عدد من النتائج التي لها اهميه حاسمه من نظريات المجموعه المحدبه وفي نظرية التحسين الرياضي خاصة فيما يتعلق بتطوير الظروف اللازمه كما هو الحال في نظرية مضاعفات لاكرانج وعاده ما يتم جمعها معا تحت عنوان نظريات الانفصال نناقش اثنين من هذه النتائج التي ستكون مفيده لنا سنقتصر اهتمامنا على حاله الابعاد المحدوده ..

بحثنا هذا تضمن ثلاثه فصول الاول بعنوان (التحدب) و احتوى على ثلاثه بنود تضمنت بعض التعاريف و المبرهنات الاساسيه عن المجموعات المحدبه و الدوال المحدبه و الفصل الثاني كان بعنوان (بعض التطبيقات حول التحدب) و احتوى على ثلاثه بنود ايضا وتضمنت تطبيقات حول التحدب و التحدب الكامل و تميزات التحدب اما الفصل الثالث فتضمن خاصيه الفصل وتم البحث .

الفصل الاول

التحدب

الفصل الاول

البند الاول

(التحدب)

تعريف (1 . 1 . 1)

المجموعه المحدبه :. تسمى المجموعه الجزئيه S من الفضاء R مجموعه محدبه اذا كانت قطعة المستقيم الواصله بين كل نقطتين من الجسم تقع بكاملها ضمن حدود الجسم .

مثال (2 . 1 . 1)

- المكعب يعتبر مجموعه محدبه .
- شكل الهلال لا يعتبر مجموعه محدبه لانه توجد قطعه مستقيم واصله بين نقطتين من المجموعه لا تقع كليا داخل المجموعه .

تعريف (3 . 1 . 1)

الانغلاق المحدب :. هو الشكل الذي ياخذه الشريط المطاطي المحيط بمجموعه النقاط (المضلع) .

تعريف (4 . 1 . 1)

المضلع المحدب في الهندسه الرياضيه :. هو كل مضلع بسيط قياس ايا من زوايا الداخليه اقل من 180 درجه ولا يقطع امتداده اي ضلع اخر من اضلاع المضلع .

ملاحظات (5 . 1 . 1)

من خصائص المضلع المحدب :.

1 . قياس كل زاويه داخليه اقل من او يساوي 180 درجه .

2 . اي قطعه مستقيمه بين راسين متجاورين او غير متجاورين للمضلع تمر في داخل المضلع او على محيطه .

3 . كل مثلث غير متدهور هو مضلع محدب .

4 . مجموع قياسات الزوايا الخارجيه لاي مضلع محدب 360 درجه .

5 . مجموع قياسات الزوايا الداخليه لمضلع محدب ذي n ضلعـــــــــاً هو(n.2) 180 .

6 . مجموع قياسات الزوايا الداخليه و الخارجيه لمضلع محدب ذي n ضلعـــــــــــاً هو 180n

مثال (6 . 1 . 1)

المربع ، المستطيل ، المثلث ، متوازي الاضلاع جميعها مضلعات محدبه .

الفصل الاول

البند الثاني

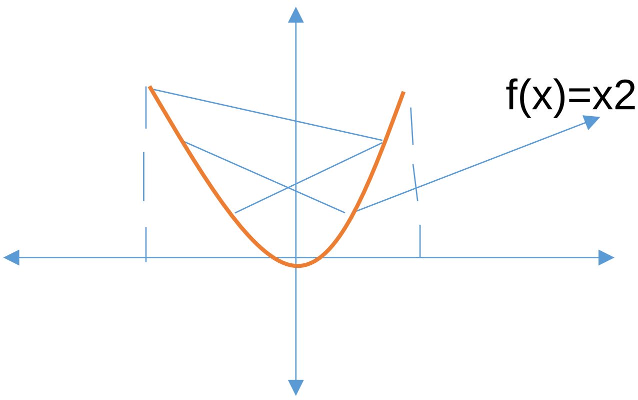
(الداله المحدبه)

تعريف (1 . 2 . 1)

تسمى الداله بمتغير واحد داله محدبه (convex function) في مقطع ما اذا كان الخط المستقيم الذي يصل بين اي نقطتين على الرسم البياني لداله في هذا المقطع يقع فوق الرسم البياني للداله نفسها .

امثله (1 . 2 . 2)

1) الداله الحقيقية ($f(x)=x^2$) داله محدبه على طول محور الاعداد الحقيقيه .



2) الداله الاسيه ($f(x)= e^{an}$) داله محدبه لاي $a\in n$.

3) داله القوى ($f(x)= n^x$) هي داله محـــــدبه ++R وذلك اما ($x \geq 0$) او ($x \geq 0$) .

4) داله القوى للقيمه المطلقه ($f(x)= n^{|x|}$) داله محدبه على R و ($x \geq 1$) .

تعريف (1 . 2 . 3)

بعض الخواص التحليليه للدوال المحدبه

1 . اذا كانت f و g دالتين محدبتين فان الدالتين :.

و m (x)= max { f(x) , g(x)}

$h(x) = f(x) + g(x)$ هما دوال محدبه ايضا .

2 . اذا كانت f و g دوال محدبه و كانت y داله غير تنازليه فان

$h(x) = g(f(x))$

3 . تحدب الداله لا يتغير اثر التحويلات اثينيه على المتغير ، اي انه اذا كانت f دالة محدبه وكان $x \in R^n$ فان

$g(y) = f(Ay+b)$ هي دالة محـــــــــــدبه حيث $b \in R^n$ و $y \in R^m$ و $A \in R^{n*m}$.

مثال (1 . 2 . 4)

برهن ان $f(x) = |x|$ داله محدبه ؟

البرهان :.

Let x,y $\in$ R and $\alpha, \beta \in$ R ≥ 0 subject to $\alpha + \beta = 1$

$$f(\alpha x + \beta y) = |\alpha x + \beta y|$$

$\leq |\alpha x| + |\beta y|$ tringle in equal by

$= |\alpha||x| + |\beta||y|$ absolut value is multiplicate

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$ by def.

نتيجه (1 . 2 . 5)

اذا كانت $C \in R^n$ مجموعه محدبه فان $CL(C)$ اي الانغلاق لـ C هو كذلك مجموعه محدبه

البرهان :-

نفرض $x, y \in CL(C)$ فانه توجد المتتابعات $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ في C بحيث ان $X_n \to X$ و $Y_n \to y$ عندما $n \to \infty$ لبعض λ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$ ، نعرف

$$Z_n = (1 - \lambda) X_n + \lambda Y_n$$

من خاصية التحدب للمجموعه C ، $Z_n \in C$ فانه

$Z_n \to (1-\lambda) X + \lambda_y$ عندما $n \to \infty$ لذلك يكون

$x, y \in CL(C)$

نتيجه (1 . 2 . 6)

لتكن C و C_1 و كذلك C_2 مجموعات محدبه في R^n ولتكن $\beta \in R$ فان

$$C_1 + C_2 = \{z \in R^n : z = X_1 + X_2 , \quad X_1 \in C_1 , X_2 \in C_2 \}$$

هو مجموعه محدبه .

البرهان :.

لتكن $Z_1 , Z_2 \in C_1 + C_2$ وناخذ $1 \leq \lambda \leq 0$ ولتكن

$Z_1 = X_1 + X_2$

حيث , $X_1 \in C_1$ و $X_2 \in C_2$ وكذلك $Z_2 = Y_1 + Y_2$

فان

$$(1-\lambda) Z_1 + \lambda Z_2 = (1-\lambda) [X_1 + X_2] + \lambda [Y_1 + Y_2]$$

$$= [(1-\lambda)X_1 + \lambda Y_1] + [(1-\lambda)X_2 + \lambda Y_2] \in C_1 + C_2$$

لان المجموعتان C_1 و C_2 محدبتان

ملاحظة (1 . 2 .7)

اذا كانت A و B مجموعتان غير خاليتان ، فان الضرب الديكارتي للمجموعتان $A \times B$ يعرف بالمجموعه الازواج المرتبه

$\{(a,b): a \in A , b \in B \}$ نلاحظ ان $A \times B \neq B \times A$

مثال (1 . 2 . 8)

لتكن $A = [-1 , 1] , B = [-1,1]$ فان

$$A \times B = \{(x, y): -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

والذي هو مربع مركزه عند نقطه الاصل بضلع 2 .

نتيجه (1 . 2 . 9)

لتكن K مجموعه محدبه و $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ اذا كان $x_1, x_2, \dots \dots, x_n \in K$ فان $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in K$

البرهان :

بما ان K محدبه ، فان النتيجة صحيحه و النتيجة صحيحه عندما $P = 1$

ومن التعريف بالنسبه لـ $P = 2$ نفرض ان القضيه صحيحه عندما $P = r$

و $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots \dots, \lambda_{r+1} x_{r+1}$ تركيب محدب

نعرف $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ فانه

$$1 - A = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = \lambda_{r+1}$$

يكون

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{r+1} x_{r+1} = A\left(\sum \frac{\lambda_i}{A} x_i\right) + (1 - A)x_{r+1}$$

نلاحظ ان $\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\lambda_i}{A}\right) = 1$ ومن فرضية الاستقراء الرياضي $\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\lambda_i}{A}\right) x_i \in K$ بما ان $x_{r+1} \in K$ ولذلك فان الجهه اليمنى هي تركيب محدب لنقاط من K وتحصيل حاصل هذه النقاط في K

تعريف (1 . 2 . 10)

التحدب للمجموعه C هو تقاطع كل المجموعات المحدبه التى تحتوي C ويرمز لها بالرمز $Co\ (C)$

امثله (1 . 2 . 11)

1) نفرض $[a\ ,b]$ و $[c\ ,d]$ فترتان من مستقيم الاعداد الحقيقيه حيث $b < c$ المجموعتان منفصلتان فان التحدب لاتحاد المجموعتان
$[\ a\ ,b] \cup [c\ ,d] = \ [a\ ,d]$

2) في R^2 نلاحظ المنطقه B التي تحتوي القرص : $\{(x\ ,y)\} \in R^2$ $x^2+y^2\ \le R$ لعدد موجب R بدون نقاط داخليه لمنطقة القطع الناقص نلاحظ المجموعه B ليست محدبة لقطعة المستقيم التي تربط النقاط P و Q يمتلك نقاط تقع للمنطقه لذلك فهي لاتقع في B اضافة لذلك هذا في حالة اي قطعه مستقيم تربط نقطتان لمنطقه تقول عنها متناظرة بالنسبة لنقطه الاصل داخل القرص الذي نصف قطره R مهما يكن هو مجموعه محدبة اي انه $Co(C)$

مبرهنه (1 . 2 . 12)

لتكن $S \subset V$ فان مجموعه كل التراكيب المحدبه لنقاط المجموعه S هي بالضبط $Co(S)$

البرهان :.

لتكن $Co(S)$ هي مجموعه كل التراكيب المحدبة لـ P من النقاط في S اي $C(S) = \cup_{P=1}^{\infty}\ Co(S)$ اذا كانت $x \in C(S)$ فانها تركيب لنقاط من S

لان $S \subset Co(S)$ وهي مجموعه محدبة من القضية فان $x \in Co(S)$ ولذلك

$C(S) \subset Co(S)$ ولبيان تحقق الاحتواء المعكوس كما في ان نبرهن ان $C(S)$ هي مجموعه محدبة فان $Co(S)$ من التعريف اصغر مجموعه محدبه تحتوي النقاط من S ومن ذلك نحصل على ان $Co(S) \subset C(S)$

ولبيان $C(S)$ مجموعه محدبة لتكن $x, y\ \in C(S)$ فان بعض الاعداد الصحيحه الموجبه p, q و $q - tuples\ , p - tuples$

$$p - tuples\ , \{M_i\}_{i=1}^{p}$$

$$q - tuples\ , \{V_i\}_{i=1}^{q}$$

حيث $\sum_1^P M_i = 1$ و $\sum_1^q V_i = 1$ والنقاط $\{x_1\ , x_2\ ,\ldots\ldots x_p\} \subset S$ و $\{y_1\ , y_2\ ,\ldots\ldots y_q\} \subset S$

$x = \sum_{i=1}^{p} M_i X_i$ و $y= \sum_{i=1}^{q} V_j Y_j$

الان لتكن $0 \leq \lambda \leq 1$ والتركيب $(1 - \lambda)x + \lambda\ y$ ضمن التمثيلات يكون

$$(1 - \lambda)x + \lambda\ y = (1 - \lambda)\left(\sum_{i=1}^{p} M_i X_i\right) + \lambda\left(\sum_{j=1}^{q} V_j Y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (1 - \lambda)\ M_i X_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda\ V_j y_j$$

التركيب لـ $p + q$ من النقاط لـ S الذي معامله جميعها ليست سالبه حيث

$$\sum_{i=1}^{p} (1 - \lambda) M_i$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \lambda\ V_i$$

$$= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{p} M_i + \lambda \sum_{j=1}^{q} V_j = (1 - \lambda)\ 1 + \lambda\ .1 = 1$$

وهذا يبين ان التركيب المحدب $(1 - \lambda)x + \lambda\ y \in C(S)$ وهو مجموعه محدبة

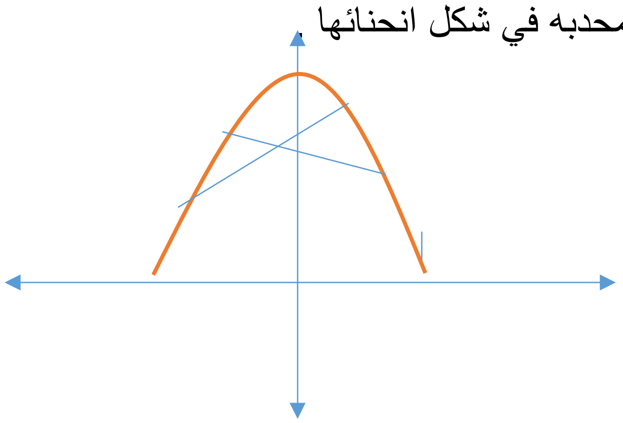
الفصل الاول

البند الثالث

(الداله المقعره)

تعريف (1 . 3 . 1)

تسمى الدالة بمتغير واحد داله مقعره (convex function) او منحنيه ذات قمه في الاتجاه الراسي ، مفتوحه نحو الاسفل تسمى احيانا مقعره قبعيه حيث تشبه القبعة او تشبه الجرس وهي عكس الدالة المحدبه في شكل انحنائها .



امثله (1 . 3 . 2)

1) الدالة $f(x) = -x^2$ و الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ هما دوال مقعره لان

$f''(x) = -2$ و $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Leftarrow$ $f''(x) = \frac{-1}{4^2\sqrt{x^3}}$

مشتقات سالبه .

5) اي داله خطيه $f(x) = ax + b$ هي داله مقعره .

6) داله $f(x) = \sin x$ داله مقعره في المجال $[0, \pi]$

7) $\log|B|$ حيث B محدد مصفوفه حقيقية غير سالب B تكون داله مقعره .

8) الدالة $f(x) = x^3$ هي داله محدبه لان $f''(x) = 6x$ وهو غير سالب في المجموعه $\{x \geq 0\}$ وهو غير موجب في المجموعه $\{x \leq 0\}$ اي ان الدالة مقعره هنا .

الفصل الثاني

بعض التطبيقات

حول التحدب

الفصل الثاني

البند الاول

(بعض التطبيقات حول التحدب)

متراجحه ينسن (1 . 1 . 2)

((التحويل المحدب لمتوسط حسابي لمتغير او قيم مستقيم معينه اصغر من او مساو للمتوسط الحسابي لذات التحويل المحدب لنفس المتغير او القيم))

متراجحه ينسن في الرياضيات و المنسوبه للعالم الدنماركي يوهان ينسن ، تربط ما بين قيمه تراكب داله محدبه على تكامل و بين قيمه تراكب التكامل على نفس الداله المحدبه وقد قام ينسن ببرهان هذه المتراجحه عام 1906 كون المتراجحه قانون عام يؤدي الى ان يصلح استخدامه في عده سياقات و عدة اشكال .

الصيغه المحدوده لمتراجحه ينسن بالاحصاء :. (2 . 1 . 2)

9) لاي داله محدبه $\emptyset$ و اعداد $x1, x2, \ldots \ldots \ldots, xn$ في نطاق الداله $dom\ f$ و عوامل ترجيح موجبه كل قيمة $a1, a2, \ldots \ldots \ldots, an$ ، بالامكان نص متراجحه ينسن كالتالي :

$$\emptyset\left(\frac{\sum aini}{\sum ai}\right) \leq \frac{\sum ai\ \emptyset\ (ni)}{\sum ai}$$

حيث ان المتراجحه تكون معكوسه اذا كانت الداله $\emptyset$ مقعره و بشكل خاص فاذا كانت جميع عوامل الترجيح متساويه نحصل على المتراجحه

$$\emptyset\left(\frac{\sum ni}{n}\right) \leq \frac{\sum\ \emptyset\ (x1)}{n}$$

مثال (2 . 1 . 3)

10) لتكن $\ln x$ $= \emptyset(\mathrm{x})$ هي داله مقعره (اذا كان $\emptyset''(\mathrm{x}) = \frac{-1}{x^2} \leq$ 0) و تصاعديه ، فيما ان المتراجحه الاتيه صحيحه لكونها المتراجحه الشهيره بين المتوسط الحسابي و المتوسط الهندسي لـ n من الاعداد :.

$$\frac{x1 + \cdots + xn}{n} \geq \sqrt[n]{x1, x2 \ldots \ldots xn}$$

بما ان $\emptyset$ داله تصاعديه

$$\ln\left(\frac{x1 + \cdots + xn}{n}\right) \geq m\left(\sqrt[n]{x1, x2, \ldots, xn}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sum xi}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln(x1, x2, \ldots., xn)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\sum xi}{n}\right) \geq \frac{\sum \ln(xi)}{n}$$

اي ان متباينه ينسن تتحقق لهذه الحاله و قد تكون المتغيرات xi هي دوال لمتغير اخر t بحيث

$$xi = y(ti)$$

وفي الداله المستمرة فان المجومه يستبدل بتكاملات و تستبدل عوامل الترجيح بداله ترجيح غير سالبه كداله توزيع احتمالي مثلا .

نتيجه (2 . 1 . 4)

لتكن $f: A \to R$ داله مستمره بحيث ان $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right) \forall x, y \in R$

فان f داله محدبه .

البرهان :.

بما ان $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+x\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(f(\frac{1}{2}(x+y)+f(x)\right)$$

$$\leq \frac{3}{4}f(x)+\frac{1}{4}f(y)$$

فان بالنسبه لـ $[0,1,2,3 \ldots\ldots 2^n]$ $m \in$ يكون

$$f\left(\frac{m}{2^n}x+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{m}{2^n}\right)f(x) \rightarrow (1)$$

بما انه لاي $\lambda \in [0,1]$ ممكن تقرب النسبه بالصيغه $\frac{m}{2^n}$

$$q_k=\frac{(2^k \lambda)}{2^k} \longrightarrow \lambda, as\ k \longrightarrow \infty$$

ولكن (1) تجعل

$$f(q_k x+(1-q_k)y) \leq q_k f(x)+(1-q_k)f(y)$$

وعندما $k \rightarrow \infty$ و كون f داله مستمره عند $\lambda x+(1-\lambda)y$ نحصل على ان

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

ملاحظة (2 . 1 . 5)

Midpoint convexi by لا تتضمن التحدب .

الفصل الثاني

البند الثاني

التحدب الكامل (التام)

تعريف (2.2.1)

مجموعه النقاط في R^n تكون متراصه اذا كانت مغلقه ومقيده

نتيجه (2.2.2)

التحدب التام للمجموعه المرصوصه في R^n يكون مرصوص

البرهان :- لتكن $C \subset R^n$ مرصوص نلاحظ

$$\sigma = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots \dots, \lambda_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

أيضا مغلقه ومقيده وبالتالي مرصوص

الان نفرض بان $\{V^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset Co(C)$

لذلك $V^{(j)}$ يمكن ان يكتب بالشكل

$$V^{(R)} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{k,i} X^{(k,i)}, where \ \lambda_{k,i} \geq 0$$

$x^{(k,i)} \in C$ و $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{k,i} = 1$

نفرض C و σ مرصوص توجد متتابعه k_1, k_2 بحيث ان الغايات

$i = 1,2, \dots \dots, n+1$ لكل $\lim_{j \to \infty} x^{(k_j,i)} = x^{(i)}$ و $\lim_{j \to \infty} \lambda_{k,i} = \lambda_i$

واضح ان $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ و $x_i \in C$ وهكذا المتتابعه $\{V^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ تكون متتابعه جزئيه , $\{V^{(k_j)}\}_{k=1}^{\infty}$ التي متقاربه للنقطه $Co(C)$ لذلك تكون هذه المجموعه متراصه

مبرهنه (2.2.3)

كل مجموعه جزبيه مغلقه محدبه في R^n تمتلك عنصر وحيد له اصغر معيار

البرهان :- لتكن k مجموعه نلاحظ ان $\iota = \inf\|x\| \geq 0$

فان الداله $\|x\| \to x$ مقيده سفلى على k

لتكن $x^{(1)}, x^{(2)}$ متتابعه من النقاط على k بحيث ان $\lim_{i\to\infty}\|x^{(i)}\| = \iota$

فان بواسطه قانون متوازي الاضلاع

$$\|x^{(i)}x^{(j)}\|^2 = 2\|x^{(i)}\|^2 + 2\|x^{(j)}\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}\left(x^{(i)} + x^{(j)}\right)\right\|^2$$

نفرض k محدبه و $\frac{1}{2}\left(x^{(i)} + x^{(j)}\right) \in k$ فان

وعليه $\left\|\frac{1}{2}\left(x^{(i)} + x^{(j)}\right)\right\| \geq \iota$

$$\|x^{(i)} + x^{(j)}\| \leq 2\|x^{(i)}\|^2 + 2\|x^{(j)}\|^2 - 4\iota^2$$

كما $i, j \to \infty$ يكون $2\|x^{(i)}\|^2 + 2\|x^{(j)}\|^2 - 4\iota \to 0$

هكذا $\{x^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ متتابعه كوشي ونقطه الغايه x

نفرض k مغلقه , $x \in k$ واضافه الى ذلك

الداله $\|x\| \to x$ داله مستمره من $\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathrm{R}$

$$\iota = \lim_{j=\infty}\|x^{(j)}\| = \|x\|$$

ومن اجل اظهار وحدانيه هذه النقطه مع الحد الأدنى من القاعده نفرض ان هناك نقطتين $x, y \in k, x \neq y$ بحيث ان $\|x\| = \|y\| = \iota$ فان بواسطه قانون متوازي الاضلاع

$$0 < \|x-y\|^{2} = 2\|x\|^{2} + 2\|y\|^{2} - 4\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^{2}$$

$$= 2\iota^{2} + 2\iota^{2} - 4\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^{2}$$

وهكذا $4\iota^{2} > 4\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^{2}$ او $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| < \iota$

بينما نعطي المتجه k لقاعده اق من القيد الأسفل ι

مثال (2.2.4)

نفرض بأن المجاميع الثلاثه في R^n بواسطه

$$H_{1}^{+} = \{(x,y) \in R^2 : 5x - y \geq 1\}$$

$$H_{2}^{+} = \{(x,y) \in R^2 : 2x + 4y \geq 7\}$$

$$H_{3}^{+} = \{(x,y) \in R^2 : 2x + 2y \leq 6\}$$

الذي يتقاطع (التقاطع لانصاف المستويات) النقطه التي لها اصغر معيار هي اقرب نقطه في تلك المجموعه لنقطه الأصل من نظريه الاسقاط في R^2 , النقطه محدده بالتقاطع للنقاط الحدوديه للخط $2x + 4y = 7$ مع الخط العمودي عليه الذي يمر خلال نقطه الأصل

الفصل الثاني

البند الثالث

(بعض تميزات الدالة المحدبة)

قضية (2.3.1)

لتكن f دالة معرفة بالفترة I. و $x,y,z \in I$ حيث و $x < z < y$ فان و f دالة محدبة اذا وفقط اذا كان احد المتباينات التالية يتحقق :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

البرهان

لتكن و $x < y$ في الفترة I ، الان f محدبة اذا وفقط اذا كان $z \in [x,y]$ و $f(z) \leq f(x)$ اي ان

$$f(z) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$$

$$\left(f(z)-f(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)-f(x)\right)\frac{1}{(z-x)}$$

لذلك نحصل على (3.1). وبطريقة مشابهه نستخدم الطريقة الثانية لل $f(z)$ فنحصل على

$$f(z) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-y)+f(y)$$

$$\left(f(z)-f(y) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-y)+f(y)-f(y)\right)\frac{1}{(z-y)}$$

لذلك نحصل على (3.2) .

هندسياً هذا يعني اننا اثبتنا ان x اولاً واخذنا نقطة مثل z تتحرك من x الى y ، المعادلة (3.1) تخبرنا ان الميل يبقيها بحالة التزايد . ومن جهة اخرى ، نثبت النقطة y ونأخذ نقطة مثل z تتحرك من x الى y ، المعادلة (3.2) تخبرنا مرة اخرى ان الميل يتزايد .

قضية (2.3.2)

لتكن f دالة معرفة بالفترة I. فان f دالة محدبة اذا وفقط اذا كان بالنسبة ل $x < z < y$ حيث $x, y, z \in I$ يكون

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

البرهان

المتباينة (3.3) ممكن ان تكتب بالشكل

$$f(z)(y-z) - f(x)(y-z) \leq f(y)(z-x) - f(z)(z-x)$$

وهي نفس المتباينة

$$f(z)(y-x) \leq f(y)(z-x) + f(x)(y-z)$$

$$= \big(f(y) - f(x)\big)(z-x) + f(x)(y-x)$$

وحسب القضية (3.3.1)

$$f(z)(y-x) - f(x)(y-x) \leq \big(f(y) - f(x)\big)(z-x) + f(x)(y-x) - f(x)(y-x)$$

نحصل على

$$\Big(f(z)(y-x) - f(x)(y-x) \leq \big(f(y) - f(x)\big)(z-x)\Big)\frac{1}{(y-x)(y-z)}$$

وحسب القضية (3.3.1) تكون f دالة محدبة .

مبرهنة (2.3.3)

كل دالة محدبة f في فترة مفتوحة I لها مشتقة يمنى ويسرى وتحققان

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \ \ , \forall x \in I$$

$$f'_+(x) \leq f'_-(y) \ \ , \forall x < y \quad in \ \ I$$

وبصورة خاصة فان ال f دالة مستمرة في I .

مبرهنة (2.3.4)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة I . فان f دالة محدبة اذا وفقط اذا كانت f' دالة متزايدة .

البرهان

من المبرهنة (3.3.3) الدالة f' دالة متزايدة اذا كانت f دالة محدبة وقابلة للاشتقاق .

ولبرهان المعكوس للمبرهنة . نفرض $z \in (x, y)$. فانه يوجد $c_1 \in (x, z)$, $c_2 \in (z, y)$ بحيث ان

$$f(z) = f(x) + f'(c_1)(z - x)$$

$$f(y) = f(z) + f'(c_2)(y - z)$$

نستخدم المتباينة $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ نحصل على $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ وحسب المبرهنة (3.3.3) تكون f دالة محدبة .

الفصل الثالث

(خاصية الفصل)

مبرهنه (3.1)

لتكن $C \in R^n$ يكون مجموعه محدبه مغلقه فان

1) لكل $x \in R^n$ يوجد متجه وحيد $Z^* \in C$ فان اصغر $\|Z - X\|$ وبصورة عامه $z \in C$ نسمي Z^* الاسقاط لـ x على C

2) Z^* يكون اسقاط لـ x على C اذا وفقط اذا كان

$\langle y - Z^*, x - Z^* \rangle \leq 0$ لكل $y \in C$

البرهان :-

حل $x \in R^n$ ولتكن $w \in C$ فان الأدنى $\|x - z\|$ وبصوره عامه $z \in R$ مكافىء ادنى لنفس الداله

المجموعه $\{z \in C : \|x - z\| \leq \|x - w\|\}$

كلا المجموعه الاخيره مغلقه ومقيده وكذلك داله مستمره

$g(z) = \|z - x\|$ طبقا الى المبرهنه ويستراس باخذ على حد ادنى لبعض نقاط المجموعه نستخدم متوازي الاضلاع الذاتي لبرهان الوحدانيه التاليه

نفرض ان هناك نقاط مختلفه z_1, z_2 كلاهما ادنى $\|z - x\|$ ويرمز لها بالرمز ι

فان

$$0 < \|(z_1 - x) - (z_2 - x)^2\|$$
$$= 2\|z_1 - x\|^2 + 2\|z_2\|^2$$
$$- 4\left\|\frac{1}{2}[(z_1 - x) + (z_2 - x)]\right\|^2$$
$$= \|z_1 - x\|^2 + 2\|z_1 - x\|^2 - 4\left\|\frac{z_1 + z_2}{2} - x\right\|^2$$
$$= 2\iota^2 + 2\iota^2 - 4\|\hat{z} - x\|^2$$

حيث $\hat{z} = (z_1 + z_2)/2 \in C$ و C تحدب وباعاده ترتيب ناخذ جذور المربعات

$\|\hat{z} - x\| < \iota$

وهذا تناقض لان z_1, z_2 قيم صغرى الى البعد وهكذا تأسس الوحدانيه

لبرهان المتباينه 2

بأستعمال $\langle .,. \rangle$ للضرب الداخلي لكل $y, z \in C$ المتباينه

$$\|y-x\|^2 = \|y-z\|^2 + \|z-x\|^2 - 2\langle (y-z),(x-z)\rangle$$
$$\geq \|z-x\|^2 - 2\langle (y-z),(x-z)\rangle$$

وعليه حيث ان $0 \leq \langle (y-z),(x-z)\rangle$ لكل $y \in C$ فأن

$\|y-x\|^2 \geq \|z-x\|^2$ لكل $y \in C$ وهكذا بواسطه التعريف $z = z^*$

لبرهان ضروره الحاله , لتكن z^* اسقاط لـ X على C ولتكن $y \in C$ يكون اختياري لـ $0 < α$

$$y_\alpha = (1-\alpha)z^* + \alpha_y$$

$$\|x - y_\alpha\|^2 = \|(1-\alpha)(x-z^*) + \alpha(x-y)\|^2$$

$$= (1-\alpha)^2\|x-z^*\|^2 + \alpha^2\|x-y\|^2 + 2(1-\alpha)\langle (x-z^*),(x-y)\rangle$$

الان نعبر الداله $\varphi(\alpha) = \|x-y_\alpha\|^2$

فان من النتيجه السابقه $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -2\|x-z^*\|^2 + 2\langle (x-z^*),(x-y)\rangle$

$$= -2\langle (y-z^*),(x-z^*)\rangle$$

لذلك , اذا $\langle (y-z^*),(x-z^*)\rangle$ لبعض $y \in C$ فان $\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\|x-x_\alpha\|\}\right|_{\alpha=0}$

تعريف (3.2)

لتكن $a \in R^n$ و $b \in R$ ونفرض $a \neq 0$ فان المجموعه

$H = \{x \in R^n : \langle a, x\rangle = b\}$ تدعى مستوي فوقي مع المتجه الطبيعي a

تعريف (3.3)

ليكن $S,T \subset R^n$ وليكن H فائق فان H يقال عنه فصل S الى T يقع في نصف فضاء مغلق واحد وتحدد بواسطه H بينما T تقع في نصف فضاء مغلق اخر في هذه الحالة H يدعى انفصال فائق اذا S,T تقع في انصاف مستويات مفتوحه فان H يقال عنه منفصله تماما S,T

مبرهنه (3.4)

لتكن $C \subset R^n$ يكون محدب ولنفرض بأن $y \notin cl(c)$ فأنه يوجد $a \in R^n$ و a عدد $\gamma \in R$ بحيث ان $\gamma > \langle a,x \rangle$ لكل $x \in C$ و $\gamma \leq \langle a,y \rangle$

البرهان :-

لتكن $\hat{c}$ اسقاط لـ y على $cl(C)$ ولتكن $\gamma = inf_{x \in C} \|x-y\|$

أي ان γ هو البعد من y الى الاسقاط $\hat{c}$

نلاحظ ان $\gamma > 0$, $y \notin cl(C)$ الان نختار اختياريا $x \in C$ و $\lambda \in (0,1)$ والشكل

$x_\lambda = (1-\lambda)\hat{c} + \lambda x$ لانه $x \in C$ و $\hat{c} \in cl(C)$, $x_\lambda = (1-\lambda)\hat{c} + \lambda x$

وهكذا $\|x_\lambda - y\|^2 = \|(1-\lambda)\hat{c} + \lambda x - y\|^2$

$$= \left\| \hat{c} + \lambda \left(x - \hat{c} \right) - y \right\|^2$$

$$\geq \| \hat{c} - y \| > 0$$

لكن يمكن ان تكتب $\left\| \hat{c} + \lambda \left(x - \hat{c} \right) - y \right\|^2 = \|(\hat{c} - y) + \lambda (x - \hat{c})\|^2$

ويمكن ان نوسع هذا التعبير الاخر بأستخدام طرق الضرب الداخلي

$$0 < \| \hat{c} - y \|^2 \leq \left\| (\hat{c} - y) + \lambda \left(x - \hat{c} \right) \right\|^2$$

$$= \langle (\hat{c} - y) + \lambda \left(x - \hat{c} \right), \left(\hat{c} - y \right) + \lambda (x - \hat{c}) \rangle$$

$$= \langle \hat{c} - y, \hat{c} - y\rangle + \langle \hat{c} - x, \lambda (x - \hat{c})\rangle$$
$$+ \langle \lambda \left(x - \hat{c}\right), \lambda (x - \hat{c})\rangle$$

ومن هذه المتتابعه نستنتج بان

$$2 \lambda \langle \hat{c} - y, x - \hat{c} \rangle + \lambda^2 \langle x - \hat{c}, x - \hat{c}\rangle \geq 0$$

ومن هذه المتباينه الاخيره نقسم كلا الطرفين على λ 2 وناخذ الغايه $\lambda \to 0^+$

$$\langle \hat{c} - y, x - \hat{c}\rangle \geq 0$$

مره أخرى يمكن ان نوسع هذا التعبير الأخير

$$\langle \hat{c} - y, x - \hat{c}\rangle = \langle \hat{c} - y, x\rangle + \langle \hat{c} - y, \hat{c}\rangle \geq 0$$

بواسطه اضافه الطرح y وان $\|\hat{c} - y\| > 0$

يمكن جعل التالي $\langle \hat{c} - y, x\rangle \geq \langle \hat{c} - y, \hat{c} \rangle = \langle \hat{c} - y, y - y + \hat{c}\rangle$

$$= \langle \hat{c} - y, y\rangle + \langle \hat{c} - y, \hat{c} - y\rangle = \langle \hat{c} - y, y\rangle + \|\hat{c} - y\|^2$$
$$> \langle \hat{c} - y, y\rangle$$

بشكل ملخص $\langle \hat{c} - y, x\rangle > \langle \hat{c} - y, y\rangle$

أخيرا نعرف $a = \hat{c} - y$ فان قراءه هذه المتباينه الاخيره

$\langle a, x\rangle > \langle a, y\rangle$ لكل $x \in C$

تعريف (3.1.5)

المستوي الفوقي يحتوي التحدب للمجموعه C في واحده من انصاف المستويات المغلقه ويحتوي نقطه حدوديه لـ C ويقال عنه فائق الدعم لـ C

مبرهنه (3.6)

لتكن C مجموعه محدبه ولتكن y نقطه حدوديه لـ C فأن هناك فائق يحتوي y و C في واحد من انصاف المستويات

البرهان :-

لتكن $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ متتابعه في $Cl(C)/R^n$ مع $k \to \infty$, $y^{(k)} \to y$ لتكن $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتابعه للمتجهات الانشائيه في المبرهنه السابقه ونعرف $\hat{a}(k)=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ فان لكل k

$\langle \hat{a}(k), y^{(k)} \rangle \leq inf_{x=c} \langle \hat{a}(k), x \rangle$ ولان المتتابعه $\{\hat{a}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ مقيده تحتوي متتابعه جزئيه متقاربه $\{\hat{a}(kj)\}_{j=1}^{\infty}$ بينما التقارب للغايه $\hat{a}(0)$ فانه لاي $x \in C$

$$\langle a_{(0)}, y \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \hat{a}_{(kj)}, y^{(kj)} \rangle \leq \lim_{j\to\infty} \langle \hat{a}_{(kj)}, x \rangle$$

$$= \langle \hat{a}_{(0)}, x \rangle$$

المصادر

(1) Van DE Vel, Marcel L.J. (1993), Theory of convex structures. North –Holland Mathematical Library , Amsterdam , North-Holland publishing Com. PP. ISBN 0-444-81505-8.

(2) Lectures on convex set , Notes by Niels Lauritzen ,at Aarhus Univar. ,2010 .

(3) Rawlins G.J.E. and Wood D , " Ortho- convexity and its generalizations ", computational Morphology , (1988) , 137-152 .

(4) Eggleston , H.D. , Convexity , Cambridge Univar. Cambridge ,1969 .

(5) Mathematical Analysis II and continuity , Spring Math 2060 A, 2019 .