الإهداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة إلى من حصد الأشواك

عن دربي ليمهد لي طريق العلم إلى القلب الكبير

(والدي العزيز)

إلى من أرضعتني الحب والحنان

إلى رمز الحب وبلسم الشفاء

إلى القلب الناصع بالبياض

(والدتي الحبيبة)

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي

(إخوتي)

شكر وتقدير

الحمد لله يقول الله في محكم كتابه { لئن شكرتم لأزيدنكم } والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد (صلى الله عليه واله وسلم) القائل: من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق.

بداية اشكر الله عز وجل الذي ساعدني على اتمام بحثي وتفضل علينا بإتمام هذا العمل.. وبعد

أقدم شكري وأمتناني الى اساتذتي في جامعة القادسية – قسم الرياضيات لما بذلوه من جهد طيلة الاربع سنوات الماضية ومساعدتهم لنا في تقديم المسيرة العلمية والعملية في حياتنا.

وأقدم شكري وتقديري لحضرة الاستاذة الفاضلة أ.م.د. زينب عودة ثبينة على ما بذلته من سعة صدر وكرم طبعها ورحابة خاطرها وارشاد وتوجيه وتسديد لأفكاري

فجزاه الله خير جزاء المحسنين

الباحث

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة القادسية

كلية التربية

قسم الرياضيات

Drived Abound On TheThird Hankel Determinant

بحث مقدم من قبل الطالبة

آسيا علي عريبي

الى جامعة القادسية / كلية التربية – قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

بأشراف

أ.م.د. زينب عودة ثبينة

٢٠١٨-٢٠١٩

الخلاصة

في هذا البحث، يبحث المؤلفون في حدود المعامل الأولية لبعض الفئات الفرعية الجديدة من الوظائف متعددة التكافؤ المرتبطة بوظيفة السيني. كما تمت مناقشة الاختصارات ذات الصلة بعدم مساواة Fekete-Szgo ومحدد هانكل لهذه الفئات. نتائجنا بمثابة تعميم جديد في هذا الاتجاه. تصنيف موضوع الرياضيات: 30045, 33E99 الكلمات المفتاحية : الدوال التحليلية، الدالة الشبيهة بالنجوم، الوظيفة المحدبة، التبعية، وظيفة السيجويد، مشكلة Fekete-szgo.

المقدمة

تعتبر نظرية الوظائف الخاصة مهمة جداً للعلماء والمهندسين، ليس بأي تعريف محدد، ولكن تطبيقها تمتد الى الفيزياء، والكمبيوتر، الخ. في الآونة الاخيرة ، طغت على نظرية الوظائف الخاصة مجالات أخرى مثل التحليل الحقيقي، والتحليل الوظيفي، والجبر، والطوبولوجيا. المعادلات التفاضلية. عملية المعلومات المستوحاة من الجهاز العصبي البيولوجي مثل الدماغ PROC brain، تتعلم بأمثلة ولا يمكن برمجتها لحل مهمة محددة. هناك العديد من الوظائف الخاصة، لكن يجب أن نعني بأحد وظائف التنشيط المعروفة باسم دالة السيني اللوجستية البسيطة. وظيفة التنشيط هي معلومات جوهرية. وهي تتألف من عدد كبير من عناصر المعالجة المترابطة للغاية (الخلايا العصبية) التي تعمل معاً لحل مهمة محددة. تعمل الوظيفة بطريقة مماثلة وظيفة السيني للنموذج 1+e.

بسم الله الرحمن الرحيم

((قَالُواْ سُبْحَنَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الحَكِيمُ))

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة الآية ٣٢

الفصل الاول

البند الاول

تعريف (1.1.1)

لتكن $z_\circ \in \mathbb{C}$ ، $\in > 0$ ، نقول ان $D = B \in (z_\circ)$ هي قرص مفتوح في $\mathbb{C}$ ويسمى جوار - $\in$ لنقطة $z_\circ$ ويكتب بالشكل

$$D = B \in (z_\circ) = \{z_\circ \in \mathbb{C}: |z - z_\circ| < \in\}$$

مثال (1.1.2)

لتكن $S = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1$ النقطة $z = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$ تمثل جوار – لنقطة $z_\circ = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \in S$ لان

$$|z - z_\circ| = \left|\frac{1}{4} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1-2}{4}\right) + i\left(\frac{1-2}{4}\right)\right| = \left|\frac{-1}{4} - \frac{i}{4}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.77 < 1$$

تعاريف(1.1.3)

1- لتكن $D \subset \mathbb{C}$ نقول ان D مجموعة مفتوحة. اذا كان لكل $z_\circ \in D$ يوجد $\in > 0$ بحيث ان $B \in (z_\circ) \subset D$ اي انه يوجد جوار - $\in$ لنقطة $z_\circ$ ويكون محتوى كلياً في D.

2- تسمى D مجموعة مغلقة اذا كانت متممها $\mathbb{C}/D$ مجموعة مفتوحة.

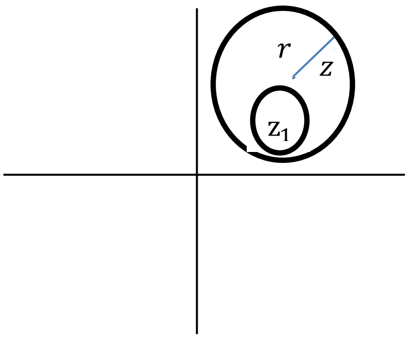
تعريف (1.1.4)

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة غير خالية نقول ان D تشكل منطقة (Domain) اذا كانت

1- D مجموعة مفتوحة.

2- لأي نقطتان تمثل $z_1, z_2 \in D$ يوجد قوس مضلع (Polygon) مركزة في D يربط $z_\circ$ ب z_1 كما مبين في الشكل

$$B_r(z_\circ) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_\circ| < r$$



يمثل القرص $B_r(z_\circ)$ ، الذي مركزة $(z_\circ)$ ونصف قطره $r > 0$ مجموعة مفتوحة ولأي $z \in \mathbb{C}$ يمكن ايجاد قرص مفتوح مركزه z ومحتوى كلياً في $B_r(z_\circ)$.

أمثلة (1.1.5)

1- نصف المستوي بالشكل $S = \{z \in \mathbb{C}: R_e(z) > a\}$ يمثل منطقة (domain)

- القرص المغلق$\{Z \in \mathbb{C}: |Z - Z_\circ| \le 2\}$او نصف المستوي المنطلق$\{Z \in \mathbb{C}: R_e(Z) \ge a\}$ لا يمثلان منطقة لانهما ليسا مجموعتان مفتوحتان.

تعريف (1.1.6)

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة ولتكن $F: D \to \mathbb{C}$ دالة ولتكن $z_\circ \in D$ تسمى f دالة قابلة للاشتقاق عند $z_\circ \in D$ اذا كان

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \text{ exist}$$

تسمى $f'(z_\circ)$ مشتقة الدالة f عند $z_\circ$

وتسمى f دالة قابلة للاشتقاق في D اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط D.

مثال (1.1.7)

الدالة $f(z) = e^z$ دالة قابلة للاشتقاق $\forall\, z \in \mathbb{C}$

تعريف (1.1.8)

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة والدالة $f: D \to \mathbb{C}$ تسمى دالة تحليلية عند $z_\circ \in D$ اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في بعض الجوار النقطة $z_\circ$ وليس في $z_\circ$ فقط وتسمى تحليلية في D اذا كانت تحليلة في كل نقاط D.

ملاحظة (1.1.9)

الدالة f التي تكون تحليلية في منطقة من الفضاء المركب فأن يجب ان تمتلك مشتقات من جميع الرتب عند $z_\circ$ التي تنتمي للنقطة D والدالة f تمتلك توسيع متسلسلة تايلر بالصيغة

$$f(z) = \sum a_n (z - z_\circ)^n \ , \ a_n = \frac{f(z_\circ)}{n!}$$

والتي تكون متقاربة في بعض القرص المفتوح الذي مركزة $z_\circ$ بالصيغة

$$D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

تعريف (1.1.10)

الدالة التحليلية f تسمى (بسيطة) او وحيدة التكافؤ (univalent) في المنطلق D اذا كانت w قيم مختلفة لنقاط مختلفة من المنطلق بمعنى ان لأي نقطتان مختلفتان z_2, z_1 من نقاط المنطلق يكون $f(z_1) \neq f(z_2)$.

مثال (1.1.11)

الدالة $f(z) = z + 1$ دالة تحليلية و هي دالة وحيدة القيمة لان لأي $z_1 \neq z_2$ تكون $f(z_1) \neq f(z_2)$

مثال (1.1.12)

الدالة $f(z) = e^z$ دالة تحليلية $\forall\, z \in \mathbb{C}$ لكنها ليست دالة وحيدة القيمة لان بالنسبة ل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 = z + 2\pi i \ , \qquad z_2 = z$$

يكون

$$f(z_1) = f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z(cos2\pi + isin2\pi)$$

$$f(\mathcal{Z}_1) = e^{\mathcal{Z}}(1 + 0i) = e^{\mathcal{Z}} = f(\mathcal{Z}_2)$$

تعريف (13.1.1)

الدالة التحليلية f تكن دالة متعددة القيم (multivalent) من الرتبة p) or (p-Valent) اذا كانت $w = f(z)$ لها على الاكثر p من الجذور في D وبعض w موجوده بحيث المعادلة $w = f(z)$ بالضبط P من الجذور في D.

مثال (1.1.14)

الدالة $f(z) = z + \frac{1}{z} + z^2$ هي دالة متعددة القيم لان لها على الاقل جذران

جذران للمعادلة $z + \frac{1}{2}z^2 = 0$ هما $z = 0\ ,\quad z = -2\ ,$

الفصل الاول

البند الثاني

(دالة Sigmoid ومحدد هنكل)

تعريف (1.2.1)

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة ولتكن $f: D \to \mathbb{C}$ دالة تسمى f دالة السيني او الشكل $S-$ (Sigmoid) اذا كانت دالة قيم مركبة ومعرفة لكل القيم المركبة ومشتقاتها ليست سالبة.

مثال(1.2.2)

الدالة $h(z) = \frac{1}{e^{z}+1}$

في الدالة sigmoid لان

1- دالة قيم مركبة ومعرفة لكل $\forall\ z \in \mathbb{C}$

2- $h'(z) = \frac{+e^{-z}}{(e^{z}+1)^2}$ ليست سالبة

ملاحظات (1.2.3)

1- لتكن $\mathcal{A}(\mathrm{p})$ مجموعة الدوال المركبة بالشكل

$$\mathcal{A}(p) = [f(z): f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}]$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية ومتعددة القيم من الرتبة $f(z) \in D, p$.

2- ليكن $\mathcal{U}$ مجموعة معرفة بالشكل

$$\mathcal{U}=\{w(z):w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nz^n\}$$

حيث $w(z)$ دوال مقيدة ومنتظمة بالمنطلق D حيث $D=[z:|z|<1]$ وتحقق الشرط $|w(z)|<1,$ $w(0)=0$ في D.

تعريف (1.2.4)

لتكن g,f دوال تحليلية تقول ان f تابع (Subordinate) ل g ويرمز له $f<g$ اذا وجدت دالة $w(z)\in\mathcal{U}$ تحليلية وتحقق $|w(z)|<1, w(0)=0$ في D بحيث ان $f(z)=g\big(w(z)\big)$.

تعريف (1.2.5)

الدالة $f\mathcal{A}(p)$ تسمى دالة متعددة نجمية القيم من الرتبة p- اذا تحقق الشرط

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha\,,\qquad (0<\alpha<p,\qquad p\in N,z\in D)$$

مثال (1.2.6)

الدالة $f(z)=z+\frac{2}{3}z^2+z^3$ دالة نجمية متعددة القيم

لان

$$f'(z)=1+\tfrac{4}{3}z^2+3z^2\Longrightarrow zP'(z)=z+\tfrac{4}{3}z^2+3z^3$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{z+\frac{4}{3}z^2+z^3}{z+\frac{2}{3}z^2+z^3}\Longrightarrow R\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=R\left(\frac{z+\frac{4}{3}z^2+z^3}{z+\frac{2}{3}z^2+z^3}\right)>\alpha$$

تعريف(1.2.7)

المحدد للقيود الدقيقة (القطعية) sharp $a_3 - |\mathcal{M}a_2^1|$
العقلية تسمى مسألة فيكيت-سيكو (Feket - Szego)

تعريف (1.2.8)

محدد هنكل (Hankel detreminant) ل $n \geq 1, q \geq 1$

يعرف بالشكل

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n+q-1} & \cdots \quad \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}$$

حيث a_n, a_{n+1} ,, ... a_{n+2q-2} هي معاملات.

ملاحظة (1.2.9)

محدد هنكل المسألة فيكيت-سيكو هو $H_2(1)$ حيث $q = 2$, $n = 1$ و هو بالشكل الاتي

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

امثلة(1.2.10)

1- محدد هنكل $H_2(2)$ هو محدد هنكل الثاني حيث $n = 2$, $q = 2$ و هو بالصيغة

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

3- محدد هنكل $H_3(1)$ هو محدد هنكل الثالث

$n = 1$, $q = 3$ و هو بالصيغة

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$H_3(1) \leq |a_3||a_2a_4 - a_3^2| + |a_4||a_2a_3 - a_1a_4| + |a_5||a_1a_3 - a_2^2|$$

ملاحظة(1.2.11)

لتكن $\phi(z)$ دالة تحليلية مع جزء حقيقي موجب اي($Re\left(\phi(z)\right) \geq 0$) في D بحيث ان $\phi(0) = 1$ و $\phi'(0) > 1$

وترسل D الى المنطقة النجمية بالنسبة ل(اي $Re(\frac{zf'(z)}{f(z)}) > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$) وتناظر (symmetric) المحور - X

الفصل الثانى

البند الاول

تعريف (2.1.1)

١ـ الدالة $f(z) \in A_P$ هي دالة تقع في المجموعة $S^*(\phi)$ اذا حققت شروط التبعية (Subordinate corde)

$$1+\frac{1}{b}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{Zf'(z)}{f(z)}\right)-1\right] < \phi(z) \ \ (p \in N, \qquad z \in E).$$

٢ـ الدالة $f(z) \in A_P$ هي دالة تقع في المجموعة $C^*(\phi)$ اذا حققت شروط التبعية

$$1-\frac{1}{b}+\frac{1}{pb}\left[1+\frac{Zf''(z)}{f(z)}\right] < \phi(z) \ \ (p \in N, \qquad z \in E).$$

الان سنعرف المجموعتان $\mathrm{M}(\phi)$ و $\mathrm{G}(\phi)$ حيث يحتويان دوال تحليلية متعددة القيم من رتبة مركبة بالدوال (sigmoid).

تعريف (2.1.2)

لتكن $b \in C'$. لتكن $\mathrm{M}(\phi)$ مجموعة جزئية من $A(P)$ يحتوي دوال بالصيغة

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}$$

ويحقق الشرط

$$p+\frac{1}{b}\left[\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z)+(1-\lambda)f(z)}-p\right] > 0$$

حيث $1 \leq \lambda \leq 0$ و $\phi(z)$ هي دالة (Wgistsigmoid activation)

تعريف (2.1.3)

لتكن $b \in C'$. لتكن $G(\phi)$ مجموعة جزئية من $A(p)$ يحتوي دوال بالصيغة

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}$$

ويحقق الشرط

$$p + \frac{1}{b}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} - p\right] > 0$$

حيث $1 \leq \lambda \leq 0$ و $\phi(z)$ هي دالة (Wgistsigmoid activation)

نتيجة (2.1.4)

اذا كانت الدالة $p \in N$ تحتوي دوال بالصيغة

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots (z \in E)$$

فأن $|p_k| \leq 2,\ k \in N$ عندما p عائلة كل الدوال التحليلية في E , $p(0) = 1$ و $Re\big(p(z)\big) > 0, (z \in E)$.

نتيجة (2.1.5)

لتكن $h(z)$ دالة معرفة بالشكل $h(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ و

$$\phi(z) = 2h(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n\right)^m$$

فان $|z| < 1$ $\phi(z) \in p,$ عندما $\phi(z)$

نتيجة (2.1.6)

لتكن

$$\phi_{m/n}(z) = zh(z) + 1 + \sum_{m=1}^{8} \frac{(-1)^m}{2^m} \left(\sum_{m=1}^{8} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \right)^m$$

فأنه $\left|\phi_{m/n}(z)\right| < 2$.

نتيجة (2.1.7)

اذا كان $\phi(z) = 1 + \sum_{m=1}^{8} C_n\, z^n$

عندما $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n!}$ فأنه $n \in N \quad |C_n| \leq 2,$.

الفصل الثانى

البند الثانى

مبرهنة (2.2.1)

اذا كان $f \in A(p)$ بالصيغة $f(z) = Z^p + \sum_{n=2}^{8} a_{n+p} Z^{n+p}$

فأن $M(\phi)$

$$|a_{p+1}| \leq \frac{p|b|\left(1+\lambda(p-1)\right)}{2(1+\lambda p)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)$$

$$|a_{p+2}| \leq \frac{p^2|b|^2\left(1+\lambda(p-1)\right)}{8\left(1+\lambda(p+1)\right)} = h_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.3)$$

$$|a_{p+3}| \leq \frac{p|b|\left(1+\lambda(p-1)\right)}{24\left(1+\lambda(p+2)\right)} \left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{4}{3}\right| = h_3 \ldots\ldots (1.4)$$

كذلك

$$|a_{p+4}| \leq \frac{p^2|b|^2\left(1+\lambda(p-1)\right)}{192\left(1+\lambda(p+3)\right)} \left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{4}{3}\right| = h_3 \ldots\ldots (1.5)$$

البرهان:- بما ان $f(z) \in M(\phi)$ لذلك

$$p + \frac{1}{b}\left[\frac{zf''(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (\lambda - 1) f(z)} - p\right] = p\phi(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.6)$$

حيث

$$p + \frac{zf'(z) + \lambda Z^2 f''(z)}{b(\lambda z f'(z) + (\lambda - 1) f(z))} - \frac{p}{b} = p\phi(z)$$

$$p + \frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z) - p\lambda z f'(z) + (\lambda - 1) f(z)}{b(\lambda z f'(z) + (\lambda - 1) f(z))} = p\phi(z)$$

$$\frac{pb\big(\lambda zf'(z)+(\lambda-1)f(z)\big)+zf'(z)+\lambda z^2f''(z)-p\lambda zf'(z)+(\lambda-1)f(z)}{b(\lambda zf'(z)+(\lambda-1)f(z))}$$

$$\Rightarrow\ \phi(z)=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{24}Z^3+\frac{1}{240}z^5-\frac{1}{64}z^6+,\dots\dots\dots..(1.7)$$

من المعادلة (1.7)، (1.5)ممكن كتابة (1.5) بالشكل

$$(1+\lambda p)a_{p+1}z+2\big(1+\lambda(p+1)\big)a_{p+2}z^2+3\big(1+\lambda(p+2)\big)a_{p+3}z^3$$
$$+4\big(1+\lambda(p+3)\big)a_{p+4}z^3+,\dots.$$

$$=pb\left[\frac{z}{2}-\frac{z^3}{24}+\frac{z^5}{240}-,\dots\dots\right]\Big[\big(1+\lambda(p-1)\big)+(1+\lambda p)a_{p+1}z$$
$$+2\big(1+\lambda(p+1)\big)a_{p+2}z^2+3\big(1+\lambda(p+2)\big)a_{p+3}z^3+,\dots\Big]$$

$$(1+\lambda p)a_{p+1}z+2\big(1+\lambda(p+1)\big)a_{p+2}z^2+3\big(1+\lambda(p+2)\big)a_{p+3}z^3$$
$$+4\big(1+\lambda(p+3)\big)a_{p+4}z^3+,\dots.$$

$$\frac{pbz}{2}(1+\lambda(p+1))z+\frac{pbz^2}{2}(1+\lambda p)a_{p+1}+\frac{pbz^3}{2}\big(1+\lambda(p+1)\big)a_{p+2}$$
$$+\frac{pb\big(1+\lambda(p+2)\big)}{2}a_{p+3}z^4+,\dots.$$

$$-\frac{pbz^3}{24}\big(1+\lambda(p-1)\big)-\frac{pb(1+\lambda p)z^4}{24}a_{p+1}-\frac{pb\big(1+\lambda(p+1)\big)a_{p+2}z^5}{24}-,\dots.$$

بما ان المعادلات تكون بالصيغة

$$\left((1+\lambda p)a_{p+1}Z=\frac{pbz}{2}(1+\lambda(p-1))z\right)\qquad\div z$$

$$\Rightarrow(1+\lambda p)a_{p+1}=\frac{pb}{2}\big(1+\lambda(p-1)\big)$$

$$a_{p+1}=\frac{pb}{2}\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{1+\lambda p}$$

$$|a_{p+1}|\le\frac{p|b|}{2}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{1+\lambda p}\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2.1)$$

$$\left(2(1+\lambda(p+1))a_{p+2}z^2=\frac{pb}{2}z^2(1+\lambda p)a_{p+1}\right)\dots\dots\dots\dots\div z^2$$

$$2\left(1+\lambda(p+1)\right)a_{p+2}=\frac{pb}{2}\cancel{(1+\lambda p)}\left(\frac{pb}{2}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{\cancel{1+\lambda p}}\right)a_{p+2}=\frac{p^2b^2}{8}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{1+\lambda(p+1)}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow|a_{p+2}|\le\frac{p^2|b|^2}{8}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{1+\lambda(p+1)}\right)=h_1\dots\dots\dots\dots\dots..(2.2)$$

$$\left(3(1+\lambda(p+2))a_{p+3}z^3=\frac{pb}{2}z^3(1+\lambda(p+1))a_{p+2}-\frac{pb(1+\lambda(p-1))}{24}z^3\right)\div z^3$$

$$3\left(1+\lambda(p+2)\right)a_{p+3}=\frac{Pb}{2}\cancel{(1+\lambda(p+1))}\frac{P^2b^2}{8}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{\cancel{1+\lambda(p+1)}}\right)-\frac{Pb}{24}\left(1+\lambda(p-1)\right)$$

$$3a_{p+3}=\frac{pb}{2}\left(\frac{p^2b^2}{8}\left(\frac{(1+\lambda(p-1))}{(1+\lambda(p+2))}\right)-\frac{Pb}{24}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{(1+\lambda(p+2))}\right)\right)$$

$$=\frac{pb}{6}\left(\frac{p^2b^2}{8}\left(\frac{(1+\lambda(p-1))}{(1+\lambda(p+2))}\right)-\frac{pb}{3\times 24}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{(1+\lambda(p+2))}\right)\right)$$

$$=\frac{pb}{24}\left[\frac{(1+\lambda(p-1))}{(1+\lambda(p+2))}\right]\left(\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow|a_{p+3}|\le\frac{p|b|}{24}\left[\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+2)\right)}\right]\left|\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right|=h_1\dots\dots\dots(2.3)$$

وكذلك

$$\left(\left(1+\lambda(p+2)\right)\right)a_{p+4}z^4=\frac{-pb}{24}(1+\lambda p)a_{p+1}z^4+\frac{pb\left(1+\lambda(p+2)\right)}{2}a_{p+4}z^4 \quad \div z^4$$

$$4\left(1+\lambda(p+3)\right)a_{p+4}=\frac{-pb}{24}\cancel{(1+\lambda p)}\left(\frac{pb}{2}\left(\frac{1+\lambda(p-1)}{\cancel{2(1+\lambda p)}}\right)+\frac{pb}{2}\cancel{\left(1+\lambda(p+2)\right)}\right)$$

$$\left(\frac{pb}{24}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\cancel{\left(1+\lambda(p+2)\right)}}\right)\right)\left(\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{-pb}{24}\left(pb\left(1+\lambda(p+2)\right)+\frac{p^2b^2\left(1+\lambda(p-1)\right)}{48}\left(\frac{b^2p^2}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$4a_{p+4}=\frac{-pb}{48}\left(\frac{bp\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+3)\right)}\right)+\frac{p^2b^2}{48}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+3)\right)}\right)\left(\frac{b^2p^2}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{p^2b^2}{48}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+3)\right)}\right)\left[-1+\frac{b^2p^2}{2}-\frac{1}{3}\right]$$

$$a_{p+4}=\frac{p^2b^2}{192}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+3)\right)}\right)\left[\frac{b^2p^2}{2}-\frac{4}{3}\right]$$

$$\Longrightarrow \left|a_{p+4}\right|\leq\frac{p^2|b|^2}{192}\left(\frac{\left(1+\lambda(p-1)\right)}{\left(1+\lambda(p+3)\right)}\right)\left|\frac{b^2p^2}{2}-\frac{4}{3}\right|=h_3 \dots\dots\dots\dots (2.4)$$

قضية (2.2.2)

اذا كانت $\lambda = 0$ في المبرهنة (2.2.1) وكانت $f(z) \in M_{p,0}(b,\phi)$

فأن

$$\left|a_{p+1}\right| \leq \frac{p|b|}{2}, \left|a_{p+2}\right| \leq \frac{p^2|b|^2}{8}, \left|a_{p+3}\right| \leq \frac{p|b|}{24}\left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{1}{3}\right|$$

And $\left|a_{p+4}\right| \leq \frac{p^2|b|^2}{192}\left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{4}{3}\right|.$

قضية (2.2.3)

اذا كانت $P = 1$ في المبرهنة (2.2.1) وكانت $f(z) \in M_{p,1}(b,\phi_{m,n})$

فأن

$$\left|a_{p+1}\right| \leq \frac{p^2|b|}{2(1+p)}, \left|a_{p+2}\right| \leq \frac{p^3|b|^2}{8(2+p)}, \left|a_{p+3}\right| \leq \frac{p^2|b|}{24(3+p)}\left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{1}{3}\right|$$

$$And\ \left|a_{p+4}\right| \leq \frac{p^3|b|^2}{192(4+p)}\left|\frac{p^2b^2}{2} - \frac{4}{3}\right|.$$

نتيجة (2.2.4)

اذا كان $f(z) \in M_\lambda(b,\phi_{m,n})$ فأن

$$|a_2| \leq \frac{|b|}{2(1+\lambda)}, |a_3| \leq \frac{|b|^2}{8(1+2\lambda)},$$

$$|a_4| \leq \frac{|b|}{24(1+3\lambda)}\left|\frac{b^2}{2} - \frac{1}{3}\right|\ and\ |a_5| \leq \frac{|b|^2}{192(1+4\lambda)}\left|\frac{b^2}{2} - \frac{4}{3}\right|$$

نتيجة (2.2.5)

اذا كانت $f(z)\in A_p$ من $f(z)=z^p+\sum_{n=2}^{8} a_{p+p}z^{n+p}$ ينتمي الى $G_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$

فأن

$$\left|a_{p+1}\right| \le \frac{p|b|}{2[1+\lambda p(p+1)]} \qquad \dots\dots\dots\dots (1.7)$$

$$\left|a_{p+2}\right| \le \frac{p^2|b|^2}{4[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]} = m_1 \dots\dots\dots\dots\dots (1.8)$$

$$\left|a_{p+3}\right| \le \frac{p|b|}{8[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left|\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right| = m_2 \dots\dots (1.9)$$

And

$$\left|a_{p+4}\right| \le \frac{p^2|b|^2}{16[4+\lambda(p+3)(p+4)]}\left|\frac{1}{[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left[\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3[1+\lambda p(p+1)]}\right| = m_3 \dots\dots\dots. (1.10)$$

نتيجة (2.2.6)

اذا كان $\lambda = 1$ من مبرهنة (2.2.3) واذا كان $f(z)\in G_{p,0}(b,\phi_{m,n})$

فأن

$$\left|a_{p+1}\right| \le \frac{p|b|}{2}, \left|a_{p+2}\right| \le \frac{p^2|b|^2}{8}, \left|a_{p+3}\right| \le \frac{p|b|}{24}\left|\frac{P^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right|$$

$$And\ \left|a_{p+4}\right| \le \frac{p^2|b|^2}{192}\left|\frac{p^2b^2}{2}-\frac{4}{3}\right|.$$

نتيجة (2.2.7)

اذا كانت $P=1$ من مبرهنة (3.2.2) اذا كانت $f(z)\in G_{p,1}(b,\phi_{m,n})$

فأن

$$|a_{p+1}|\le\frac{p|b|}{2\big(1+p(p+1)\big)},|a_{p+2}|\le\frac{p^2|b|^2}{4[2+(p+1)(p+2)][1+p(p+1)]},$$

$$|a_{p+3}|\le\frac{p|b|}{8[3+(p+2)(p+3)]}\left|\frac{p^2b^2}{[2+(p+1)(p+2)][1+p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right|$$

And

$$|a_{p+4}|\le\frac{p^2|b|^2}{16[4+(p+3)(p+4)]}\left|\frac{1}{[3+(p+2)(p+3)]}\left[\frac{p^2b^2}{[2+(p+1)(p+2)][1+p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3[1+p(p+1)]}\right|.$$

البرهان

بما ان $f(z)\in G_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$

$$p+\frac{1}{b}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}+\lambda\frac{z^2f''(z)}{f(z)}-p\right]=P\phi(z)\;\ldots\ldots\ldots(1.11)$$

عندما

$$\phi(z)=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{24}Z^3+\frac{1}{240}z^5-\frac{1}{64}z^6+\frac{779}{20160}z^7-\cdots\ldots\ldots(12.2)$$

من المعادلة (1.11) و (1.12) تحصل على

$$\lambda p(p-1)+\big(1+\lambda p(p+1)\big)a_{p+1}z+\big(2+\lambda(p+1)(p+2)\big)a_{p+2}z^2$$
$$+\big(3+\lambda(p+2)(p+3)\big)a_{p+3}z^3+\big(4+\lambda(p+3)(p+4)\big)a_{p+4}z^4+\cdots$$
$$=bp\left[\frac{1}{2}z\frac{1}{24}z^3+\cdots\right]$$
$$\left[1+a_{p+1}z+a_{p+2}z^2+a_{p+3}z^3+\cdots\right]\ldots\ldots.(1.13)$$

بمساواة هذه العوامل من Z^4, Z^3, Z^2, Z في (1.12) نحصل على

$$a_{p+1}=\frac{p|b|}{2[1+\lambda p(p+1)]}\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

$$a_{p+2}=\frac{p^2b^2}{4[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.8)$$

$$a_{p+3}=\frac{p|b|}{8[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left|\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right|\ldots.(2.9)$$

And

$$a_{p+4}=\frac{p^2b^2}{16[4+\lambda(p+3)(p+4)]}\left|\frac{1}{[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left[\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3[1+\lambda p(p+1)]}\right|\ldots\ldots.(2.10)$$

<u>قضية (2.2.8)</u>

اذا كان $f(z)\in G_\lambda(b,\phi_{m,n})$ فأن

$$|a_2|\le\frac{|b|}{2(1+2\lambda)},|a_3|\le\frac{|b|^2}{8(1+2\lambda)(1+3\lambda)},$$
$$|a_4|\le\frac{|b|}{24(1+4\lambda)}\left|\frac{b^2}{2(1+2\lambda)(1+3\lambda)}-\frac{1}{3}\right|$$

And

$$|a_5|\le\frac{|b|^2}{64(1+5\lambda)}\left|\frac{1}{3(1+4\lambda)}\left[\frac{b^2}{(2+6\lambda)(1+2\lambda)}-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3(1+2\lambda)}\right|$$

الفصل الثاني

البند الثالث (متباينة فيكيت- سيتريكو)

مبرهنة (2.3.1)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (2.1) الى $M_{P,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+2} - \mu\, a^2{}_{p+1}\right| \leq \frac{p^2|b|^2[1+\lambda(p-1)]}{4(1+\lambda p)^2}\left|\frac{(1+\lambda p)^2}{2[1+\lambda(p+1)]} - \mu[1+\lambda(p-1)]\right|$$
$$= h_4 \dots\dots (3.1)$$

البرهان:- من (2.2.7) و (2.2.8) نحصل على

$$a_{p+2} - \mu\, a^2{}_{p+1} = \frac{p^2 b^2[1+\lambda(p-1)]}{4(1+\lambda p)^2}\left[\frac{(1+\lambda p)^2}{2[1+\lambda(p+1)]} - \mu[1+\lambda(p-1)]\right] \dots (3.2)$$

وبالتالي من (3.1) نستطيع بسهولة من (3.2) و $p = 1$

المبرهنة (2.3.1) تعطي النتيجة التالية:-

قضية (2.3.2)

اذا كان $f(z) \in M_\lambda(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_3 - \mu\, a^2{}_2\right| \leq \frac{|b|^2}{4(1+\lambda)^2}\left|\frac{(1+\lambda)^2}{2[1+2\lambda]} - \mu\right|$$

مبرهنة (2.3.3)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $G_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+2} - \mu\, a^2{}_{p+1}\right| \le \frac{p^2 b^2}{4\big(1+\lambda p(p+1)\big)^2}\left|\frac{[1+\lambda p(p+1)]}{[2+\lambda(p+1)(p+2)]} - \mu\right| = h_4 \;.....(3.3)$$

البرهان:-

باستخدام (2.6) و (2.7) نحصل على

$$|a_3 - \mu\, a^2{}_2| \le \frac{|b|^2}{2(1+2\lambda)^2}\left|\frac{(1+2\lambda)^2}{2[1+3\lambda]} - \mu\right|$$

الفصل الثاني

البند الرابع (محدد هنكل الثاني والثالث)

مبرهنة (2.4.1)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $M_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+1}a_{p+3}-\mu\, {a^2}_{p+2}\right| \le \frac{p^2|b|^2[1+\lambda(p-1)]^2}{16}\left|\frac{1}{3(1+\lambda p)[1+\lambda(p+2)]}\left[\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right] - \mu\left[\frac{p^2b^2}{4[1+\lambda(p+1)]^2}\right]\right| = h_5 \ldots\ldots (4.1)$$

البرهان:- من (2.7) و (2.8) و (2.9) نحصل على

$$a_{p+1}a_{p+3}-\mu\, {a^2}_{p+2} = \frac{p^2b^2[1+\lambda(p-1)]}{48(1+\lambda p)[1+\lambda(p+2)]}\left[\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right]-\mu\left[\frac{p^4b^4[1+\lambda(p-1)]^2}{64[1+\lambda(p-1)]^2}\right]$$

وبالتالي من (1.4) نستطيع بسهولة من (1.2) اذا كان $p = 1$ من المبرهنة (1.4).

قضية (2.4.2)

اذا كان $f(z) \in M_\lambda(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_2a_4-\mu\, {a^2}_3\right| \le \frac{|b|^2}{16}\left|\frac{1}{3(1+\lambda)[1+3\lambda]}\left[\frac{b^2}{2}-\frac{1}{3}\right]-\mu\frac{b^2}{4[1+2\lambda]}\right|$$

مبرهنة (2.4.3)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $G_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+1}a_{p+3} - \mu\, a^2{}_{p+2}\right| \le \frac{p^2|b|^2}{16[1+\lambda p(p+1)]^2}|\eta - \mu\sigma| = h_5 \ldots\ldots.(4.3)$$

Where $\eta = \frac{[1+\lambda p(p+1)]}{[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left[\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]} - \frac{1}{3}\right]$

And $\sigma = \frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)]^2}$

البرهان:-

$$a_{p+1}a_{p+3} - \mu\, a^2{}_{p+2} = \frac{p^2|b|^2}{16[1+\lambda p(p+1)][3+\lambda(p+2)(p+3)]}$$

$$\left[\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]} - \frac{1}{3}\right] - \mu\left[\frac{p^4b^4}{64[2+\lambda(p+1)(p+2)]^2[1+\lambda(p+1)]^2}\right]\ldots\ldots(4.4)$$

نتيجة (2.4.4)

اذا كان $f(z) \in G_\lambda(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+1}a_{p+3} - \mu\, a^2{}_{p+2}\right| \le \frac{|b|^2}{16[1+2\lambda]^2}\left|\frac{[1+2\lambda]}{(3+12\lambda)}\left[\frac{b^2}{[2+6\lambda][1+2\lambda]} - \frac{1}{3}\right] - \mu\frac{b^2}{[2+6\lambda]^2}\right|$$

مبرهنة (2.4.5)

اذا كان $f(z)\in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $M_{P,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+1}a_{p+2}-a_{p+3}\right| \le \frac{p^3|b|^3[1+\lambda(p-1)]^2}{16(1+\lambda p)[1+\lambda(p+1)]} - \frac{pb[1+\lambda(p-1)]}{24[1+\lambda(p+2)]}\left[\frac{p^2b^2}{2}-\frac{1}{3}\right]$$
$$= h_6 \ldots\ldots (1.5)$$

البرهان:-

باستخدام (1.2) و (2.3) و (3.2) والنتيجة (2.5.1)

مبرهنة (2.4.6)

اذا كان $f(z)\in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $G_{p,\lambda}(b,\phi_{m,n})$ فأنه

$$\left|a_{p+1}a_{p+2}-a_{p+3}\right| \le \frac{p^3b^3}{8[1+\lambda p(p+1)]^2[2+\lambda(p+1)(p+2)]}$$
$$-\frac{pb[1+\lambda(p-1)]}{8[3+\lambda(p+2)(p+3)]}\left[\frac{p^2b^2}{[2+\lambda(p+1)(p+2)][1+\lambda p(p+1)]}-\frac{1}{3}\right] = m_6 \ldots\ldots (2.5$$

البرهان:-

باستخدام (2.12) و (2.3) و (2.13) و (4.2) والنتيجة (1.2.5).

مبرهنة (2.4.7)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $M_{p,\lambda}(b, \phi_{m,n})$

فأنه

$$|H_3(p)| \leq h_1 h_5 + h_2 h_6 + h_3 h_4$$

عندما

$$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \ and \ h_6$$

تعطى بواسطة (3.2) و (4.2) و (3.1) و (5.1).

مبرهنة (2.4.8)

اذا كان $f(z) \in A_p$ من (1.2) تنتمي الى $G_{p,\lambda}(b, \phi_{m,n})$

فأنه

$$|H_3(p)| \leq m_1 m_5 + m_2 m_6 + m_3 m_4$$

عندما

$$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \ and \ m_6$$

يعطى بواسطة (3.2) و (4.2) و (3.1) و (5.1).

Reference المصادر

[1] subclasses of Multivalent Function of Complex order Rrlated to Sigmoid Function, Gagandeep Singh[1] and Gurcharanjit Singh[2], [1]Department of Mathematics, India, 17(2018), 38- 48.

[2] Determinants of Hankel Matrices, Estelle L. Basor[*], Harold Widom and Yang Chen, [1]Department of Mathematics, USA, 8(2000), 1-18.

[3] Some Nice Hankel determinants, J. CIGLER, Fakultät fur Mathematic Wien.