جمهوريـــــــة الـــــــــــــعراق

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامـــــــــعة الـــــــــــــقادسية

كليــــــة التربية / قسم الرياضيات

دراسة حول دوال السيني (sigmoid)

بحث مقدم

الى مجلس كلية التربية قسم الرياضيات

وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في علوم الرياضيات

تقدم به الطالب

أحمد فاهم عبد العباس

بإشراف

م. زينب عودة

٢٠١٩ م

١٤٤٠هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

وَفِي أَمْوَالِهِمْ حَقٌّ لِّلسَّائِلِ وَالْمَحْرُومِ (١٩) وَفِي الْأَرْضِ آيَاتٌ لِّلْمُوقِنِينَ (٢٠) وَفِي
أَنفُسِكُمْ ۚ أَفَلَا تُبْصِرُونَ (٢١) وَفِي السَّمَاءِ رِزْقُكُمْ وَمَا تُوعَدُونَ (٢٢) فَوَرَبِّ
السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ إِنَّهُ لَحَقٌّ مِّثْلَ مَا أَنَّكُمْ تَنطِقُونَ (٢٣)

صدق الله العظيم

(الذاريات ١٩ – ٢٣)

قائمة المحتويات

المقدمة

دالة ال sigmoid تمثل مجال الاهتمام بالنسبة للأساسيات وكذلك لأبحاث تطبيق المشتقة. وموضوع هذه الدالة يمثل كلا الاثنين من منظور وضائف هذه الدوال في العلوم الاساسية . كذلك هي ذات اهمية خاصة في المجالات المجردة مثل نظرية التقريب ، التحليل الحقيقي ونظرية الاحتمالات . بشكل اكثر تحديدا ، دالة السيني (sigmoid) هي موضوع اهتمام في تقريب هاوزدورف (Hausdorff) ، نظرية المجموعة الغامضة، دوال التوزيع لتراكمي ، دوال الاندفاع (impulsive)........... الخ .

من وجهة نظر الرياضيات التطبيقية والنمذجة دوال السيني (sigmoid)وجدت مكانها في العديد من مجالات الحياة والعلوم الاجتماعية والفيزياء والهندسة ، وعلى سبيل المثال لا الحصر التطبيقات ، ديناميكية السكان، الشبكات العصبية الاصطناعية ، واشارة ومعالجة الصور ، تقنيات تغذية الهوائي والمالية والتأمين . قد يجد القارىء لموضوع هذه الدوال بعض مهارات البرمجة الحاسوبية العديد من الافكار لكتابة برامج خاصة لتشغيل الرسومات من مختلف دوال السيني (sigmoid) .

ولغرض دراسة دالة السيني (sigmoid)نتذكر أولا الباحث Mocanu الذي ادعى من خلال تبيان ان دالة (Bernoulli) بالشكل $v(z)=\frac{١}{e^{z}-١}$ التي تكون تحليلية داخل القرص $u=\{z\in C:|z|<٢\pi\}$ مع تمثيلها كمتسلسلة $f(z)=١-\frac{z}{٢}+\sum_{n=١}^{\infty}\frac{B_{٢n}}{(٢n)!}z^{٢n}$ حيث $B_{٢n}$ هي اعداد برنولي ، وهي محدبة في u .

فيما بعد ، *Serb* بين نصف قطر التحدب لمعكوس دالة برنولي $v(z)$.بعدها الباحث

Fadipe-Joseph et al. درس دالة السيني $g(z)=\frac{٢}{١+e^{-z}}$ وبينا ان $Re\{g(z)\}>٠$ و $Re\{g'(z)\}>٠$ في القرص $u=\{z\in C:|z|<١\}\subset u_{s}=\{z\in C:|z|<\frac{\pi}{٢}\}$ وكذلك تم حساب متسلسلة دالة السيني بالشكل $g(z)=١+\sum_{m=١}^{\infty}\frac{(-١)^{m}}{٢^{m}}\left[\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{n}}{n!}z^{n}\right]^{m}$ وتم حل بعض مسائل المعاملات لتلك الدالة .

بحثنا هذا تضمن فصلين . الفصل الاول احتوى على تعارف وخصائص ونتائج اساسية . اما الفصل الثاني فقد تضمن بعض التطبيقات لدوال السيني في المستوى الحقيقي والمركب وكذلك تكلمنا فيه عن كيفية اشتقاق دالة السيني .

الفصل الاول

البند الاول (١.١)

تعريف (١.١.١) الدالة القابلة للاشتقاق.

لتكن f دالة مركبة فأن مشتقة الدالة f تعرف بالشكل :

$$f'(z_o) = \lim_{z\to zo} \frac{f(z)-f(zo)}{z-zo}$$

و تسمى f قابلة للاشتقاق عند النقطة zo اذا كانت غاية الطرف الايمن موجودة

أمثلة (١.١.٢)

١- الدالة المركبة $f(z) = z^{٣} + \frac{١}{٢} z^{٢}$ قابلة للاشتقاق عند كل $z \in \mathbb{C}$

٢- الدالة المركبة $f(z) = \frac{1}{z}$ قابلة للاشتقاق عند كل $z \setminus \{٠\}$

تعريف (١.١.٣) الدالة التحليلية

الدالة f بالمتغير المركب z تسمى دالة تحليلية عند z_o

اذا كان لها مشتقة عند كل نقطة تقع عند بعض الجوار عن النقطة z_o

أمثلة (١.١.٤)

١- $f(z)= e^{z}$ دالة تحليلية عند كل نقاط المستوي المركب

٢- الدالة $f(z)= \log z$ دالة تحليلية عند كل نقاط المستوي المركب ماعدا $z_o = ٠$

تعريف (١.١.٥) متسلسلة تايلور

لتكن $\boldsymbol{f}$ دالة تحليلية خلال القرص $|Z+Z_o|<R_o$ بالمركز Z_o و نصف القطر R_o فأن $\boldsymbol{f}$ لها متسلسلة قوى تمثل بالشكل :

$$f(\mathrm{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} an\ (\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_o\ )^2$$

$$\mathrm{an} = \frac{f^n(\mathrm{Z}_0)}{n!} \qquad n=٠,١,٢\ .... \qquad (\ |\ Z+Z_o\ |<R_o)$$

و هذه المتسلسلة تتقارب الى $f(\mathrm{Z})$ عندما Z تقع بالقرص المفتوح

و هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور حول نقطة Z_o و يمكن كتابتها بالشكل :

$$f(\mathrm{Z}) = f(\mathrm{Z}_o\ ) + \frac{f^{'}\mathrm{Z}_o}{1!}(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_o\ )\ + \frac{f^{''}(\mathrm{Z}_o\ )}{2!}(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_o\ )^2\ + \cdots$$

$(\ |\ Z+Z_o\ |<R_o)$

و عندما $Z_o=٠$ فأننا نحصل على متسلسلة ما كلورين والتي تكتب بالشكل

$$f(\mathrm{Z}) = \frac{f^{'}(0)}{1!}(\mathrm{Z})\ + \frac{f^{''}(\mathrm{Z}_o\ )}{2!}(\mathrm{Z})^2\ + \cdots$$

$(\ |Z|<R_o)$

أمثلة (١.١.٦)

١- متسلسلة تايلور للمعادلة $f(z)=e^{٣\mathrm{Z}}.z^{٢}$ هي:

$$f(\mathrm{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\mathrm{Z}^{n+2}}{n!}$$

$$|z| < \infty$$

٢- متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = ٢\cos z$

$$f(z) = \sum_{n=٠}^{\infty} \frac{(-١^{n})z^{٢n+١}}{(٢n)!} \qquad (|z| < \infty)$$

تعريف(١.١.٧) الدالة وحيدة القيمة

تسمى الدالة المركبة دالة القيم المركبة دالة وحيدة التكافؤ (univalent)

اذا كان لأي $z_١, z_٢ \in U$ ، $f(z_١) \neq f(z_٢)$ بالنسبة $z_١ \neq z_٢$.

مثال (١.١.٨)

$$f(z) = {}^{z}/_{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n$$

تعريف (١.١.٩)

لتكن $D \subset C$ مجموعة جزئية غير خالية الدالة التحليلية $f:D \to C$

تسمى متعددة التكافؤ من الرتبة P (P-Valent) اذا كانت المعادلة $f(z) = W$

لها على الاكثر P من الجذور في D و بعض W موجودة بحيث ان المعادلة

$f(z) = W$ لها بالضبط P من الجذور في D .

مثال (١.١.١٠):

١- $f(z) = \log z$ هي دالة متعددة القيم

٢- $f(z) = \sqrt{z}$ هي دالة متعددة القيم

البند الثاني (١.٢)

تعريف (١.٢.١):

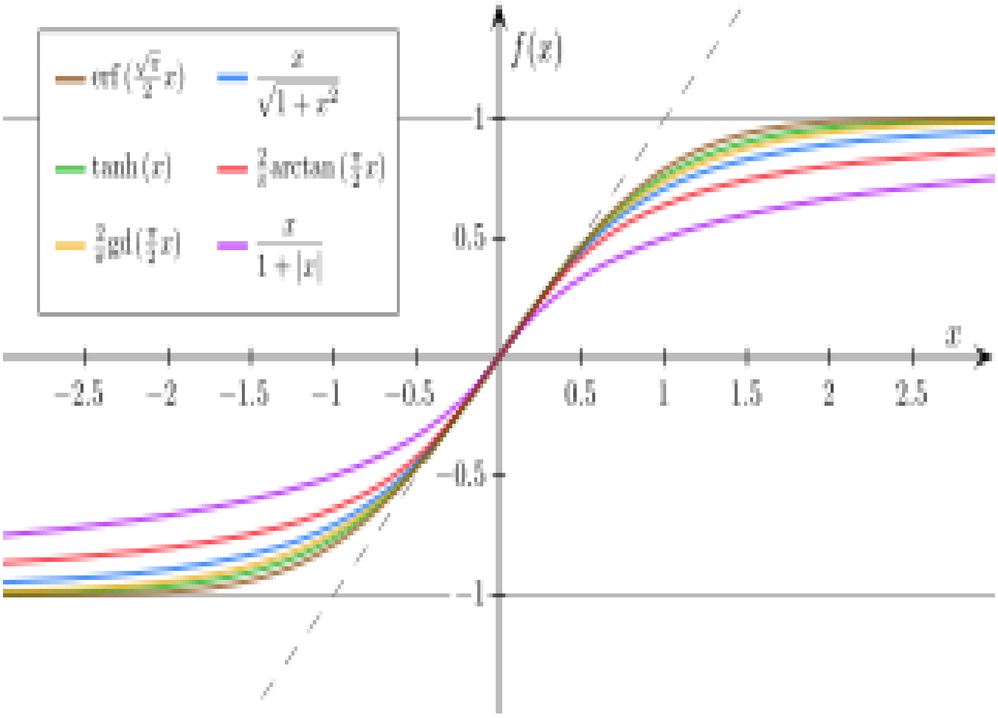
دالة (sigmoid) هي دالة مقيدة قابلة للاشتقاق و دالة قيم حقيقية و معرفة لكل القيم الحقيقية و مشتقاتها ليست سالبة عند اي نقطة.

مثال (١.٢.٢)

$$e\,r\,f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{٢}x\right) = \left(\frac{n}{\sqrt{١+n^{٢}}}\right)$$

$$t\,a\,n\,h\,(x) = \frac{٢}{\pi}\ \arctan\left(\frac{\pi}{٢}x\right)$$

$$\frac{٢}{\pi}\ g\,d\left(\frac{\pi}{٢}x\right) = \frac{x}{١+|x|}$$



ملاحظات (١.٢.٣):

خواص الدالة sigmoid

١- هي دالة رتيبة

٢- لها مشتقة اولى هي عبارة عن شكل كرة

٣- دالة constrained sigmoid زوج محاذيات افقي $\times \to \pm\infty$

امثلة (١.٢.٤)

١- دالة logistic بالصيغة $f(\times) = \frac{١}{١+e^{-١}}$

٢- المماس الزائدي

shifted and scared version of the logistic function above

$$f(x) = \tan hx = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

٣- دالة الظل تمام العكسي بالصيغة

$$f(x) = arc\tan(x)$$

٤- دالة الخطأ

$$f(x) = er\ f(x) = \frac{٢}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{x} e^{-x^{٢}}\ dt$$

٥- دالة *andermannion* بالشكل :

$$f(x) = gd(x) = \int_{٠}^{x} \frac{١}{cosht}\ dt = zare\tan(\tan h\ \frac{x}{٢}$$

٦- دالة (gendermanion logistic) بالصيغة :

$$f(x) = (١ + e^{-x})^{-\alpha} \qquad ,\alpha > ٠$$

٧- دالة الخطوط الملساء (smoth step) بالصيغة:

$$f(x) = \int_{٠}^{١} (١ - x^{٢})\, dx \qquad |x| \le ١$$

٨- بعض الدوال الجبرية مثل :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{١ + x^{٢}}}$$

ملاحظة (١.٢.٥)

التكامل لأي دالة مستمرة، ليست سالبة (bump – shaped) يكون دالة (sigmoided) و عليه التوزيع للعديد من التوزيعات الاحتمالية المشتركة هي (sigmoidedat) واحد تمثل هذا المثال هي دالة الخطأ و هي تتعلق بدالة التوزيع (cumulation) للتوزيع الطبيعي.

البند الثالث (١.٣)

تعريف (١.٣.١) دالة sigmoid بالعقدي

هي دالة مقيدة قابلة للاشتقاق و دالة قيم مركبة حيث Ƶ= x + iy حيث x, y متغيرات حقيقية و معرفة لكل قيم Ƶ و مشتقاتها ليست سالبة عند أي نقطة.

مثال (١.٣.٢)

لتكن g(ƶ) دالة مركبة معرفة بالشكل $g(ƶ) = \frac{٢}{١+e^{-ƶ}}$

نلاحظ ان $Re\big(g(ƶ)\big) > ٠$ ، $Re\left(g^{'}(ƶ)\right) > ٠$ في القرص

$$u = \{Ƶ \in c | |ƶ.| < ١ \subset u_s = \{Ƶ \in c | |ƶ| < \frac{\pi}{٢}$$

تعريف(١.٣.٣)

لتكن G(Ƶ) دالة sigmoid معرفة بالشكل :

$$G(ƶ) = \frac{١}{١\_e^{-ƶ}} \qquad , \qquad Ƶ \in C$$

فأن G(Ƶ) دالة تحليلية في القرص

$$Us = \{Ƶ \in C \; ; \; |Ƶ| < \pi$$

الفصل الثاني

البند الاول

(بعض الخواص التحليلية لدالة الاشارة)

نتيجة (٢.١.١)

لتكن الدالة $H:\mathbb{C}^{٢} \to \mathbb{C}$ تحقق الشرط $Re\{H(is,t)\} \leq ٠$ ،لكل عدد حقيقي مثل s ولكل $k \in N$, $t \leq -\frac{k(١+s^{٢})}{٢}$ فاذا كانت الدالة $p(z) = ١ + p_k z^k + \cdots$ دالة تحليلية في U وكان $Re\{H(p(z), zp'(z))\} > ٠$ حيث $z \in U$ فان $Re\{p(z)\} > ٠$ حيث $z \in U$.

نتيجة (٢.١.٢)

لتكن $\rho, \gamma \in \mathbb{C}$ و $\rho \neq ٠$ ولتكن $h(٠)=c$. اذا كان $Re\{\rho h(z)) + \gamma\} > ٠$ و $z \in U$ ، فأن الحل للمعادلة التفاضلية $q(z) + \frac{zq'(z)}{\rho q(z)+\gamma} = h(z) , z \in U ; q(٠) = c$ تحليلية في U وتحقق المتباينة المعطاة بالشكل $Re\{\rho q(z)) + \gamma\} > ٠$ و $z \in U$.

مبرهنة (٢.١.٣)

لتكن $f(z) = \log(١ + e^{z})$ و $z \in U$ ، اذا كانت

$$Re\left\{١ + \frac{z\chi''(z)}{\chi'(z)}\right\} > -\delta \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣.١)$$ ، حيث

$\chi(z) = F(z) + \frac{z}{\varsigma}F'(z)$ حيث $\theta \in (-\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢})$ و $z = re^{i\theta}$ ، $\tau > ٢\delta > ٠$ ، فأن $F(z)$ محدبة في U .

البرهان

لتكن $\emptyset(z) = ١ + \frac{zF''(z)}{F'(z)} = ١ + \frac{z}{١+e^{z}}$ ، نريد ان نبرهن ان $Re\{\emptyset(z)\} > ٠$ حيث $z \in U$.

بما ان $\chi(z) = F(z) + \frac{z}{\varsigma}F'(z)$ و $\chi'(z) = (1 + \frac{1}{\varsigma})F'(z) + \frac{1}{\varsigma}zF''(z)$ ،

$$١ + \frac{z\chi''(z)}{\chi'(z)} = \emptyset(z) + \frac{z\emptyset'(z)}{\emptyset(z) + \varsigma} = h(z) \ldots\ldots\ldots\ldots (٣.٢)$$

$$. z \in U \text{ حيث } Re\{h(z)) + \delta\} > ٠ \dots\dots\dots\dots\dots \quad (٣.٣)$$

من النتيجة (٢.١.٢) المعادلة التفاضلية (٣.٢) لها الحل $\emptyset \in \mathrm{H(u)}$ حيث $h(٠) = \emptyset(٠) = ١$.

لتكن $H(\vartheta, \eta) = \vartheta + \frac{\eta}{\vartheta + \varsigma} + \delta$ حيث $\varsigma > \delta > ٠$.

الان ، ومن $Re\{H(\phi(z), z\phi'(z))\} > ٠$ ، $z \in U$ ، نحتاج ان نبين ان $Re\{H(is,t)\} \leq ٠$ حيث

$s \in R, t \leq \frac{-(١+s)}{٢}$ وبما ان $Re\{H(is,t)\} = \frac{-\tau(١+\delta^٢)}{٢(\tau^٢+\delta^٢)} + \delta \leq \frac{-\mu(\tau,s)}{|\tau+is|}$ حيث

$$\mu(\tau,s) = (\tau - ٢\delta)s^٢ - (٢\delta\tau^٢ - ٤\delta^٢\tau)s + \tau^٣\delta^٢ - ٢\tau^٢\delta^٣ = (\tau - ٢\delta)(s - \delta\tau)^٢$$

بما ان $\tau > ٢\delta > ٠$ ، $\mu(\tau,s) \geq ٠$ من النتيجة (٣.١.١) نستنتج ان $Re\{\phi(z)\} > ٠$ و $z \in U$.

مبرهنة (٢.١.٤)

لتكن $G(z) = \frac{١}{١+e^{-z}}$. فان $G(z)$ دالة نجمية في U .

البرهان

لتكن $G(z) = \frac{١}{١+e^{-z}}$ ، فان

$$Re\left\{\frac{zG'(z)}{G(z)}\right\} = \frac{cos\theta + icos\theta cos\vartheta + i\vartheta sin\vartheta}{١+i^٢+٢icos\vartheta} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (٣.٤)$$

حيث $\vartheta = sin\theta$ ، $i = e^{cos\theta}$ ، $-\frac{\pi}{٢} < \theta < \frac{\pi}{٢}$. بما ان $-\frac{\pi}{٢} < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فان $Re\left\{\frac{zG'(z)}{G(z)}\right\} > ٠$.

مبرهنة (٢.١.٥)

لتكن $G(z) = \frac{١}{١+e^{-z}}$. فان $G(z)$ دالة محدبة في U .

البرهان

$$\left\{١ + \frac{zG''(z)}{G'(z)}\right\} = \left\{١ - z + \frac{٢z}{١+e^{-z}}\right\} = ١ - cos\theta + \frac{٢(cos\theta + icos\theta cos\vartheta + i\vartheta sin\vartheta)}{١+i^٢+٢icos\vartheta}$$

حيث $\vartheta = sin\theta$ ، $i = e^{cos\theta}$ ، $-\frac{\pi}{٢} < \theta < \frac{\pi}{٢}$. بما ان $-\frac{\pi}{٢} < \theta < \frac{\pi}{٢}$ ، $cos\theta \leq ١$ و

$Re\left\{\frac{zG'(z)}{G(z)}\right\} > ٠$ ، فان $\left\{١ + \frac{zG''(z)}{G'(z)}\right\} > ٠$ من ذلك نستنتج ان دالة محدبة في U .

مبرهنة (٢.١.٦)

لتكن $F(z) = \log(١ + e^{z})$ و $G(z) = \frac{١}{١+e^{-z}}$ و $z \in U$ ، فأن العبارات التالية متكافئة :

(١) $Re\{G(z)\} > ٠$.

(٢) $Re\left\{١ + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right\} > ٠$.

(٣) $Re\left\{١ + \frac{zG''(z)}{G'(z)}\right\} > ٠$.

البرهان

لتكن $G(z) = \frac{١}{١+e^{-z}}$ ، $\emptyset(z) = ١ + \frac{zF''(z)}{F'(z)}$ و $z \in U$. نفرض ان $G(z) > ٠$ اي ان

$Re\left\{\frac{e^{z}}{١+e^{z}}\right\} > ٠$. فان $Re\left\{\frac{z}{١+e^{z}}\right\} > ٠$ و $z \in U$. لذلك تكون (٢) صحيحة .

نفرض ان $Re\{\phi(z)\} > ٠$. من **مبرهنة (٣.١.٥)** (٣) تكون صحيحة .

نفرض (٣) صحيحة اي ان $Re\left\{z - \frac{z}{١+e^{-z}}\right\} = Re\left\{\frac{z}{١+e^{z}}\right\} > ٠$ حيث $z \in U$ ولكن

$Re\left\{\frac{z}{١+e^{z}}\right\} > Re\left\{١ + \frac{١}{١+e^{-z}}\right\} > ٠$ في U . فان $Re\left\{\frac{١}{١+e^{-z}}\right\} > ٠$.

الفصل الثاني

البند الثاني

(بعض التطبيقات لدالة السيني (Sigomid))

تعريف (٢.٢.١)

دالة التوزيع التراكمي $f(t;a,b,c)$ المعرفة بالنسبة ل $b,c>٠$ بالصيغة

$$f(t;a,b,c)=\frac{١}{١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣.٥)$$

ففي حالة *b=-a* نحصل على دالة *Log –Logistic* لخاصة التي تكتب بالشكل

$$f(t;a,b=-a,c)=\frac{١}{١+\left(\frac{t-a}{-a}\right)^{-c}} \ldots\ldots\ldots.\ldots \quad (٣.٦)$$

حيث $f(٠;a,-a,c)=\frac{١}{٢}$.

دالة ال *fisk* ، ودالة *Log –Logistic* درست بواسطة الباحث *P.Fisk* وقام *Shaw et al.* بدراسة نموذج جديد هو تعميم لدالة *Log –Logistic* والتي عرفت كالاتي :

تعريف (٢.٢.٢)

دالة التوزيع لتراكمي $H(t;a,b,c,\lambda)$ هي نموذج تعميم لدالة *Log –Logistic* بالنسبة ل $b,c>٠$ و $١>\lambda>١-$ تعرف بالشكل

$$H(t;a,b,c,\lambda)=\frac{١+\lambda}{١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}}-\frac{\lambda}{\left(١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}\right)^{٢}} \ldots\ldots\ldots \quad (٣.٧)$$

والحالة الخاصة منها هي

$$H(٠;a,b,c,\lambda)=\frac{١}{٢}=\frac{١+\lambda}{١+\left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}}-\frac{\lambda}{\left(١+\left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}\right)^{٢}}, \quad (٠<\lambda<١)\ldots\ldots \quad (٣.٨)$$

لتكن $u=\frac{١}{١+\left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}}$ من المعادلة (٣.٨) نحصل على

$$\lambda u^{٢}-(١+\lambda)u+\frac{١}{٢}=٠\ ,\ u_{١,٢}=\frac{١+\lambda\mp\sqrt{١+\lambda^{٢}}}{٢\lambda}$$

وحلها هو $u=\frac{١+\lambda-\sqrt{١+\lambda^{٢}}}{٢\lambda}$ ، تحويل الدالة الخاص ل *Log –Logistic* بالنسبة للمعلمات $b,c>٠$ و $١>\lambda>٠$ يعرف بالشكل

$$H(t;a,b,c,\lambda)=\frac{١+\lambda}{١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}}-\frac{\lambda}{\left(١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}\right)^{٢}}$$

$$\frac{١+\lambda}{١+\left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}}=\frac{١+\lambda-\sqrt{١+\lambda^{٢}}}{٢\lambda}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(٣.٩)$$

. $H(٠;a,b,c,\lambda)=\frac{١}{٢}$

مبرهنة (٢.٢.٣)

المسافة الهاوزدورفية *d(a,c)* بين دالة الخطوة *Heaviside* التي يرمز لها ب $h.$ ودالة

sigmoid log-logistic في (٣.٦) ممكن ان نعبر عنها بحدود لباراميترات ب *a<٠,c>٠* ولاي عدد حقيقي

$\frac{-c}{a}\geq ٢$ كالاتي

$$١-\frac{١}{\frac{c}{a}}<d<\frac{\ln\left(١-\frac{١}{\frac{c}{a}}\right)}{١-\frac{١}{\frac{c}{a}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(٣.١٠)$$

البرهان

من (٣.٨) نبين ان الدالة

$$F(d)=c\ln\left(١-\frac{d}{a}\right)-\ln\left(\frac{١-d}{d}\right)=c\ln\left(١-\frac{d}{a}\right)-\ln(١-d)-\ln\frac{١}{d}\ldots\ldots\ldots\ldots(٣.١١)$$

$$F'(d)=-\frac{c}{a}.\left(\frac{١}{١-\frac{d}{a}}\right)+\left(\frac{١}{١-d}\right)+\frac{١}{d}>٠\ \ldots\ldots\ldots\ldots(٣.١٢)$$

بما ان *F* دالة متزايدة رتيبة فان الدالة

$$G(d)=\left(١-\frac{c}{a}\right)d-\ln\frac{١}{d}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(٣.١٣)$$

ومن تمثيل تايلر

$$\left(١-\frac{c}{a}\right)d-cln\left(١-\frac{d}{a}\right)+\ln(١-d)=O(d^٢)$$

لذلك تكون

$$G(d)-F(d)=\left(١-\frac{c}{a}\right)d-cln\left(١-\frac{d}{a}\right)+\ln(١-d)=O(d^٢)$$

لذلك تكون G(d) هي تقريب ل F(d) مع ٠ $d\to$ عندما $O(d^٢)$ بالاضافة لذلك

$$G'(d)=\left(١-\frac{c}{a}\right)+\frac{١}{d}>٠$$

وعندما ٢ $\geq \frac{-c}{a}$ يكون لدينا

$$G\left(\frac{١}{١-\frac{c}{a}}\right)=١-ln\left(١-\frac{c}{a}\right)<٠$$

و

$$G\left(\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right)=lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)>٠$$

مبرهنة (٢.٢.٤)

لتكن $a,b,c,d\in R$ و

$$\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}-\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{\left(١-\frac{c}{a}\right)\left(١+\frac{١}{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}\right)}<d<\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}+\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{\left(١-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}-١\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (٣.١٤)$$

البرهان

المشتقة الثانية ل *G(d)* هي بالشكل ٠ $G''(d)=-\frac{١}{d^٢}<$ لها اشارة ثابتة في الفترة

$\left[\left(\frac{١}{١-\frac{c}{a}}\right),\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right]$ الخط المستقيم المعرف بالنقاط

$\left(\left(\frac{١}{١-\frac{c}{a}}\right),G\left(\frac{١}{١-\frac{c}{a}}\right)\right),\left(\left(\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right),G\left(\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right)\right)$ والمماس لدالة *G(d)* عند النقطة

$\left(\left(\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right),G\left(\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}\right)\right)$ يمر خلال الاحداثي السيني عند النقاط

$$\frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}+\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{\left(١-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}-١\right)} \quad , \quad \frac{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{١-\frac{c}{a}}-\frac{lnln\left(١-\frac{c}{a}\right)}{\left(١-\frac{c}{a}\right)\left(١+\frac{١}{ln\left(١-\frac{c}{a}\right)}\right)}$$

الفصل الثاني

البند الثالث

(بعض الخواص الرياضية لدالة sigmoid logistic)

ملاحظات (٢.٣.١)

(١) دالة *standard sigmoid logistic* هي دالة *logistic* بالبارميترات $k = ١, x_{.} = ٠ , L = ١$ وهي بالشكل

$$f(x) = \frac{١}{١+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{e^{x}+١} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\tanh(\frac{x}{٢})$$

وبصورة خاصة في الممارسة لعملية .بسبب طبيعة الدالة الاسية e^{-x} .ولها الخاصية المتناظرة

$$١ - f(x) = f(-x)$$

ولذلك $x \longmapsto f(x) - ١/٢$ دالة فردية .

(٢) مشتقة دالة *sigmoid logistic* هي دالة زوجية اي ان $f'(-x) = f'(x)$.

قضية (٢.٣.٢)

دالة *sigmoid logistic* هي ازاحة وقياس دالة مماس زائدية $f(x) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\tanh(\frac{x}{٢})$ او

$\tanh(x) = ٢f(٢x) - ١$.

البرهان

بما ان

$$\tanh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{x}(١-e^{-٢x})}{e^{x}(١+e^{-٢x})}$$

$$= f(٢x) - \frac{e^{-٢x}}{١+e^{-٢x}} = f(٢x) - \frac{e^{-٢x}+١-١}{١+e^{-٢x}} = ٢f(٢x) - ١$$

قضية (٢.٣.٣)

لتكن f دالة السيني (Sigomid)الحقيقية فان $f'(x) = f(x)(١ - f(x))$.

قضية (٢.٣.٤)

لتكن f دالة السيني (Sigomid)الحقيقية فان عكس التفاضل (التكامل) لدالة f يكون بالشكل

$\int \frac{١}{١+e^{-x}}\, dx = \log u$ حيث $u = ١ + e^{x}$.

البرهان

$\int \frac{١}{١+e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^{x}}{e^{x}+١}\, dx$ لتكن $u = ١ + e^{x}$ لذلك يكون

$$\int \frac{e^{x}}{e^{x}+١}\, dx = \int \frac{١}{u}\, du = logu = \log(e^{x}+١)$$

قضية (٢.٣.٥)

لدالة *sigmoid logistic* دوران تناظري حول النقطة (٠,½) .

البرهان

بما ان المجموع لدالة *sigmoid logistic* والانعكاس حول المحور العمودي هو ١=*f(-x)* اي ان

$$\frac{١}{١+e^{-x}} + \frac{١}{١+e^{-x}} = \frac{(١+e^{x})+(١+e^{-x})}{(١+e^{x})\,(١+e^{-x})}$$

$$\frac{٢+e^{x}+e^{-x}}{١+e^{x}+e^{-x}+e^{x-x}} = \frac{٢+e^{x}+e^{-x}}{٢+e^{x}+e^{-x}} = ١$$

لذلك يكون لدالة *sigmoid logistic* دوران تناظري حول النقطة (٠,½) .

المصادر

(١) Sigmoid functions some Approximation and modeling aspects, Nikolay Kyurkchiev and Svetoslav Markov, ٢٠١٥ .

(٢) On analytic properties of a sigmoid function ,Uzoamaka A. Ezeafulukwe ,Maslina Darus , Olubunmi Abidemi and Fadipe- Joseph ,Depart. Of Math. ,Int. J. OF Math. And Comput. Sci. ١٣*no.* ١*(*٢٠١٨*),*١٧١-١٧٨.

*(٣) On the derivatives of the sigmoid , Ali A.Minai and Ronald D.Williams ,Neural Network Vol.*٦*(*١٩٩٣*),* ٨٤٥-٨٥٣ .

(٤) A Survey on spiral- Like and related function classes , O.P.Ahuja and H.Silverman . *,Math.Chronicle* ٢٠*(*١٩٩١*),* ٣٩-٦٦

(٥) Modified sigmoid function in univalent function theory , O.A. Fadipe- Joseph . *,A.T.Oladipo , U.A.Ezeafulukwe , Int. J.Math. Sci. Engg. App.,* ٧*(*٢٠١٣*),*٣١٣-٣١٧

*(٦) Convexity of some particular functions, P.T.Mocanu , Studia Univ. Babes- Bolyai Math.,*٢٩*(*١٩٨٤*),* ٧٠-٧٣ .

*(٧) The radius of convexity and starlikeness of a particular function, I.Serb, Mathematica Montisnigri ,*٧*(*١٩٩٦*) ,*٦٥-٦٩ .