الإهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلى بطاعتك.. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك..
ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك.. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

الله جل جلاله

الى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة.. ونصح الأمة.. الى نبي الرحمة ونور العالمين..

سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم

الى من كلله الله بالهيبة والوقار.. الى من علمني العطاء بدون انتظار.. الى من أحمل أسمه بكل افتخار.. ارجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد والى الأبد..

والدي العزيز

الى ملاكي في الحياة.. الى معنى الحب والى معنى الحنان والتفاني.. الى بسمة الحياة وسر الوجود.. الى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

الى من به أكبر وعليه أعتمد .. الى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي ..
الى من بوجودها أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها ..الى من عرفت معها معنى الحياة الى من رعانا وحافظ علينا، الى من وقف الى جانبنا عندما ضللنا الطريق...

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي...

(إخوتي)

شكر وتقدير

الحمد لله يقول الله في محكم كتابه { لئن شكرتم لأزيدنكم } والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد (صلى الله عليه واله وسلم) القائل: من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق.

بداية اشكر الله عز وجل الذي ساعدني على اتمام بحثي وتفضل علينا بإتمام هذا العمل.. وبعد

شكرا وتقديرا لحضرة الاستاذة الفاضلة ندى زهير على ما بذلته من سعة صدر وكرم طبعها ورحابة خاطرها وارشاد وتوجيه وتسديد لأفكاري

فجزاه الله خير جزاء المحسنين

الباحث

جامعة القادسية

كليــة التربيــة

قسم الرياضيات

Using (L.T) for solving (LPDEs) without using any (I.C) and (B.C)

بحث مقدم من قبل الطالبة

هند عبد الله هادي

الى مجلس قسم الرياضيات/ كلية التربية/ جامعة القادسية

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس علوم في الرياضيات

بأشراف

م.م. ندى زهير

٢٠١٨-٢٠١٩

(اللّهُ لاَ إِلَـهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا الَّذِي يَشْفَعُ عِنْدَهُ إِلاَّ بِإِذْنِهِ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلاَّ بِمَا شَاء وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضَ وَلاَ يَؤُودُهُ حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ)

سورة البقرة الآية﴿٢٥٥﴾

الفصل الاول اوليات

١.١ مقدمة .

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية الهندسية والحيوية بالإضافة على مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي . من ثم يمكن القول دون تجاوز او مبالغة ان المعادلات التفاضلية امتد تأثيرها ليشمل العديد من العلوم الطبية والاجتماعية مثل علم النفس والاقتصاد والاجتماع . حيث ان اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين المتغيرات اي مسألة هندسية او فيزيائية تظهر على صورة معادلات تفاضلية . لفهم هذه المسائلات لابد من حل هذه المعادلات التفاضلية . وتحويل لا بلاس هو احد الطرق لحل هذه المعادلات . ان تحويل لا بلاس عملية تجري على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال الى اخر وعادةً يكون التحويل من مجال الزمن الى مجال التردد وهو شبيه بتحويل فوريي الا انه تطويرهما بشكل مستقل وتحويل لا بلاس مقيد في تحليل الانظمة الخطية (بخلاف تحويل فوريي الذي يستخدم عادةً في تحليل الاشارات).

كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها الى معادلات جبرية وسمي التحويل بهذا الاسم نسبه الى العالم الفرنسي بيير ل ابلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر الذي يعد اول من درس خواص معادلة لا بلاس والتي تأخذ الشكل الاتي :-

$$\nabla^2 \psi = 0$$

حيث رمز ∇^2لا بلاس فيما تمثل اي دالة رياضية سليمه وتعد معادلة لا بلاس ابسط المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية كما انها تعد كذلك حالة خاصة من معادلة بواسون $(f = 0)$

اي دالة تمثل حل لمعادلة لا بلاس تدعى دالة توافقية ظهر اول استعمال في الميكانيكا ثم تطور استعمالها ووجدت تطبيقات لها في علم الفلك والكهرباء.

الخلاصة

هدفنا في هذا البحث استخدام تحويلات لا بلاس لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية الغير متجانسة وذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة ومن الرتبة (n) وبدون استخدام شروط ابتدائية وحدودية.

الفصل الأول

((أوليات))

(1.1) مقدمة

سندرس في هذا الفصل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات المعادلات الثابتة من الدرجة (n) ذات الحدود الغير متجانسة والتحويلات التكاملية بضمنها تحويلات لا بلاس لبعض الدوال. وكذلك حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لا بلاس والتعرف على الشروط الابتدائية والشروط الحدودية .

(2.1) تعاريف

(1.2.1) المعادلة التفاضلية الجزئية :- هي المعادلة التي تحتوي على متغير واحد ومتغيرين مستقلين او اكثر وتحتوي أيضاَ على المشتقات الجزئية للمتغير المعتمد بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

1- $\mathcal{U}_x + \mathcal{U}_{yy} = \sin x$

2- $\mathcal{Z}_x + \mathcal{Z}_{xt} = e^x$

(.2.2.1) المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية :. تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية اذا تحقق الشرطين التاليين :-

1- جميع المشتقات في المعادلة من الدرجة الاولى وغير مضروبة ببعضها .

2- المتغير المعتمد في المعادلة من الدرجة الاولى وغير مضروب بالمشتقات الجزئية .

تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة (n) بالمتغير المعتمد $(\mathcal{U})$ والمتغيرين المستقلين (x, y) بالصورة الأتية :-

$$\sum_{i=0}^{P}\sum_{j=0}^{n}\mathcal{A}_{ij}(x,y)\frac{\partial_{i+j}\,\mathcal{U}}{\partial_{x^i}\partial_{y^j}}=f(x,y)\ldots..(*)$$

$$\frac{\partial^{\circ}_{\mathcal{U}}(x,y)}{\partial_{x^{\circ}}\partial_{y^{\circ}}}=\mathcal{U}(x,y)\qquad ,i+j\leq n$$

هي دوال للمتغيرات x,y $\quad \ni \mathcal{A}_{ij}(x,y),f(x,y)$

(3.2.1). التحويلات التكاملية :- لتكن f دالة معرفة في الفترة (a,b) . التحويل التكاملي للدالة fيرمز له بالرمز $I(f_{(x)})$ ويعرف بالشكل التالي:

$$I\left(f_{(x)}\right)=\int_{a}^{b}k_{(s,x)}f_{(x)}d_x=F_{(x)}$$

حيث $k_{(s,x)}$دالة معرفة وتسمى بنواة التحويل وهي الجزء او العنصر الذي يميز تحويلا عن آخر ،ان الفترة (a,b) تتغيرمن تحويل لأخر

(4.2.1). تحويل لا بلاس :- لتكن f دالة معرفة على الفترة $[0,\infty]$ فان تحويل لابلاس للدالة f والذي يرمز له بالرمز Lيعرف بالشكل الاتي

$$L\left(f_{(x)}\right)=F_{(P)}=\int_0^{\infty}f_{(x)}e^{-Px}d_x$$

حيث ان

A- $F_{(s)}$:- الدالة المحولة بدلالة الكمية المركبة$(s=\sigma+iw)$

B- $f_{(t)}$:- الدالة الاصلية بدلالة الزمن.

C- L:- رمز لا بلاس.

(5.2.1.) معكوس تحويل لا بلاس :- لتكن $\mathcal{V}_{(x,s)}$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $\mathcal{Z}_{(x,t)}$ فأن $\mathcal{Z}_{(x,t)}$ تكون معكوس تحويل لا بلاس ويشار اليها بواسطة $\mathcal{Z}_{(x,t)=}L^{-1}(\mathcal{V}_{(x,s)})$ عندما تعلم تحويل لابلاس يحوي دوال كسرية بالنسبة الى (s) فأن معكوس لابلاس يتم الحصول عليه مباشرة او مكتوب في الكسور الجزئية ويمكن كتابة بالشكل الاتي:-

$$L^{-1}\left(F_{(s)}\right) = L^{-1}\left(Lf_{(s)}\right) = F_{(s)}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int F_{(s)}e^{st}d_s$$

(3.1.) نظرية

لتكن $\mathcal{Z}(x,t)$ دالة مستمرة بحيث ان $t > 0$ فأن

1- $L(\mathcal{Z}_t) = SV(x,s) - \mathcal{Z}(x,0)$

2- $L(\mathcal{Z}_{tt}) = S^2V(x,s) - S\mathcal{Z}(x,0) - \mathcal{Z}_t(x,0)$

3- $L(\mathcal{Z}_x) = \frac{d}{d_x}V(x,s)$

4- $L(\mathcal{Z}_{xx}) = \frac{d^2}{d_{x^2}}V(x,s)$

البرهان :-

1-

$$L(\mathcal{Z}_t) = \int_0^\infty \mathcal{Z}_t d_t$$

$$\mathcal{Z} = e^{-st} \qquad , \ d_V = \mathcal{Z}_t d_t$$

$$d_V = -se^{-st} \quad , \ V = \mathcal{Z}(\mathcal{Z},t)$$

$$L(\mathcal{Z}_t) = e^{-st}\mathcal{Z}(x,t)|_0^\infty + S\int_0^\infty \mathcal{Z}(x,t)e^{-st}d_t$$

$$= -\mathcal{Z}(x,0) + SV(x,s)$$

$$= SV(x,s) - \mathcal{Z}(x,0)$$

$$\therefore L(\mathcal{Z}_t) = SV - \mathcal{Z}(x,0)$$

2-

$$L(\mathcal{Z}_{tt}) = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{Z}_{tt}\ d_t$$

$$\mathcal{Z} = e^{-st} \quad , \ d_V = \mathcal{Z}_{tt}d_t$$

$$d\mathcal{Z} = -se^{-st} \quad , \qquad V = \mathcal{Z}_t(x,t)$$

$$\mathrm{L}(\mathcal{Z}_{\mathrm{tt}}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathcal{Z}_{\mathrm{t}}(\mathrm{x},\mathrm{t})|_0^\infty + \mathrm{S}\int_0^\infty \mathcal{Z}(\mathrm{x},\mathrm{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}_{\mathrm{t}}$$

$$e^{-st}\mathcal{Z}_t(x,t)|_0^\infty + SL(\mathcal{Z}_t(x,t))$$

$$= -\mathcal{Z}(x,0) + SL(\mathcal{Z}_t)$$

$$= \mathcal{Z}_t(x,0) + S\big(SV(x,s)\big) - \mathcal{Z}_t(x,0)$$

3-

$$L(\mathcal{Z}_x) = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{Z}_x(x,t)d_t$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\frac{d\mathcal{Z}(x,t)}{d_x}d_t$$

$$= \frac{d}{d_x}\int_0^\infty e^{-st}\mathcal{Z}(x,t)d_t$$

$$= \frac{d}{d_x}V(x,t) \quad , \qquad S > 0$$

4-

$$L(\mathcal{Z}_{xx}) = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{Z}_{xx}(x,t)d_t$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{d^2\mathcal{Z}(x,t)}{d_{x^2}}d_t$$

$$= \frac{d^2}{d_{x^2}}\int_0^\infty e^{-st}\mathcal{Z}(x,t)d_t$$

$$= \frac{d^2}{d_{x^2}}V(x,s) \ \ , \ S > 0$$

(4.1.) تحويلات لا بلاس لبعض الدوال:-

الدالة	تحويلات لا بلاس
1- $L(l)$	1- $\frac{1}{s}$
2- $L(k)$	2- $\frac{k}{s}$
3- $L\{e^{ax}\}$	3- $\frac{1}{s-a}$
4- $L(\sin ax)$	4- $\frac{a}{s^2+a^2}$
5- $L(\cos ax)$	5- $\frac{s}{s^2+a^2}$
6- $L(\sin hax)$	6- $\frac{a}{s^2+a^2}$
7- $L(\cos hax)$	7- $\frac{s}{s^2+a^2}$
8- $L(x^n)$	8- $\frac{n!}{sn+1}$
9- $L(\sqrt{x})$	9- $\frac{1}{25}\sqrt{\frac{x}{5}}$
10- $L(\frac{1}{\sqrt{x}})$	10- $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$
11- $L(e^{at}\cos bt)$	11- $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

(.5.1) الشروط الابتدائية والشروط الحدودية:-

(.1.5.1) الشروط الابتدائية:- تصادفنا في بعض الأحيان معادلة تفاضلية مصحوبة بشروط معينة والمطلوب ايجاد الحل للمعادلة الذي يحقق تلك الشروط. فاذا كانت هذه الشروط لقيمة واحده للمتغير المستقل فأن تلك الشروط تسمى شروط ابتدائية وتسمى المعادلة التفاضلية بمسألة القيم الابتدائية.

مثال :- أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$y'' = x \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$

الحل:-

$$\int y'' = \int x$$

$$\int y' = \int \frac{x^2}{2} + c \qquad ....(1)$$

$$y = \frac{x^3}{6} + cx + B \qquad ....(2)$$

نعوض $y'(0) = -1$ ب (1)

$$\boxed{-1 = c}$$

نعوض $y(0) = 1$ ب (2)

$$\boxed{1 = B}$$

$$\therefore y = \frac{x^3}{6} + (-1)x + 1$$

$$\therefore y = \frac{x^3}{6} - x + 1$$

(2.5.1.) الشروط الحدودية :- اذا كانت الشروط المصحوبة للمعادلة التفاضلية لا كثر من قيمة واحدة للمتغير المستقل فأن تلك الشروط تسمى شروط حدودية وتسمى المعادلة التفاضلية بمسألة القيم الحدودية.

مثال :- أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$y'' = 6x + 2 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y(2) = 8$

الحل :-

$\int y'' = \int 6x + 2$

$\int y' = \int 3x^2 + 2x + A$ .....(1) $\quad y = x^3 + x^2 + Ax + A$ .....(2)

الان نجد قيم الثوابت حتى نحصل على الحل الخاص

نعوض $y(0) = 2$ ب (2)

$2 = B$

نعوض $y(2) = 8$ ب (2)

$8 = 8 + 4 + 2A + 2$

$8 = 14 + 2A$

$\therefore 2A = -6 \rightarrow A = \frac{-6}{2} \qquad \therefore A = -3$

الحل الخاص

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

(6.1) حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة ذات الحدود المتجانسة والمعادلات الثابتة بوجود الشروط الابتدائية والحدودية باستخدام لا بلاس.

لحل هذا النوع نتبع الخطوات الأتية:-

1- نؤثر بتحويل لا بلاس على طرفي المعادلة

2- نستخدم قانون تحويل لا بلاس على التفاضل

3- نحصل في النهاية على $y = \phi(s)$

4- نؤثر بنظير لا بلاس لنحصل على $y = L^{-1}(\phi)$

مثال :-
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 3cos - 11sin3t$$

$$y(0) = 0 \qquad , \qquad y'(0) = 6$$

الحل :- نأخذ لا بلاس للطرفين.

$$\mathrm{L(y") + L(y') - 2L(y) = 3L(cos3t) - 11(sin3t)}$$

$$\left[sL(y) - sy_{(0)} - y'_{(0)}\right] + \left[sL(y) - y_{(0)} - 2L(y)\right]$$

$$= 3.\frac{S}{S^2+9} - 11.\frac{3}{S^2+9}$$

بعد التعويض الشروط الابتدائية نحصل.

$$S^2L(y) - 6 + SL(y) - 2L(y) = \frac{3S - 33}{S^2 + 9}(S^2 + S - 2) = \frac{3S - 33}{S^2 + 9}$$

$$L(y) = \frac{S^2 + 3S + 21}{S^2 + 9} = \frac{3(2S^2 + S + 7)}{(S^2 + 9)(S^2 + S - 2)} = \frac{3(S^2 + S + 7)}{(S^2 + 9)(S + 2)(S - 1)}$$

بدلالة الكسر الجزئي

$$L(y) = \frac{1}{S-1} - \frac{1}{S+2} - \frac{3}{S^2+9}$$

ومن ثم نأخذ معكوس لا بلاس لكل الطرفين

$$\therefore y = e^1 - e^{2t} + sin3t\ .$$

الفصل الثانی

1.2. المقدمة

درسنا سابقاً حل المعادلات التفاضلية الجزئية الغير متجانسة ذات الحدود المتجانسة والمعادلات الثابتة من الدرجة (n) بطرق عديدة ومنها طريقة تحويلات لابلاس (بوجود الشروط الحدودية و الأبتدائية).

سنتناول بهذا الفصل حل المعادلة التفاضلية الجزئية الغير متجانسة ذات المعاملات الثابتة والحدود المتجانسة من الدرجة (n) بطريقة تحويلات لابلاس بعدم وجود الشروط الأبتدائية والحدودية .

(2.2.) خاصية

$$L(Z_{xt}) = SV'(x,t) - Z_x(x,0)$$

Proof:-

$$L(Z_{xt}) = \int_0^{\infty} e^{-st} Z_{xt} d_t$$

$$= e^{-st} Z_x(x,t)|_0^{\infty} + S\int_0^{\infty} e^{-st} Z_x d_t$$

وبالتالي

$$= -Z_x(x,0) + SV'$$

$$L(Z_{xt}) = SV'(x,t) - Z_x(x,0)$$

(3.2.) نظرية :- لتكن $Z(x,t)$ داله مستمرة بحيث فأن :

$$L\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) = \frac{d^n}{dx^n} V(x,s)$$

$$L\left(\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^{n-1}\partial_t}\right)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(L(\mathcal{Z}_t)\right)=S\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x,s)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\mathcal{Z}(x,s)$$

$$L\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)=\ S^nV-S^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)-S^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)-S^{n-2}\frac{\partial \mathcal{Z}(x,0)}{\partial t}\dots.\frac{\partial^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)}{\partial t^{n-1}}$$

(4.2.) نتائج رئيسية جديدة لحل المعادلة الجزئية التفاضلية بدون استخدام اي من الشروط الأبتدائية والحدودية.

وتكتب المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية الغير متجانسة والحدود المتجانسة مع معاملات ثابتة من الدرجة (n) للمتغير التابع $\mathcal{Z}$ والمتغيرات المستقلة t,x بالشكل التالي.:

$$\mathcal{A}_1\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^n}+\mathcal{A}_2\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^{n-1}\partial t}+\cdots+\mathcal{A}_n\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial t^n}=R(x,t)\qquad \dots.(1)$$

لحل المعادلة (1) باستخدام تحويلات لا بلاس نأخذ تحويل لا بلاس للطرفين للمعادلة (1) بدون استخدام اي من الشروط الابتدائية والحدودية.

$$L\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^n}+\mathcal{A}_2\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^{n-1}\partial t}+\cdots+\mathcal{A}_n\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial t^n}\right)=L\big(R(x,t)\big)$$

$$\mathcal{A}_1L\left[\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^n}\right]+\mathcal{A}_2L\left[\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial x^{n-1}\partial t}\right]+\cdots+\mathcal{A}_nL\left[\frac{\partial^n \mathcal{Z}}{\partial t^n}\right]=L\big(R(x,t)\big)$$

$$\mathcal{A}_1\frac{d^n}{dx^n}V(x,s)+\mathcal{A}_2S\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x,s)-\quad \mathcal{A}_2\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\mathcal{Z}(x,0)+\cdots+$$
$$\mathcal{A}_nS^nV(x,s)-\quad \mathcal{A}_nS^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)-\mathcal{A}_nS^{n-2}\frac{\partial \mathcal{Z}(x,0)}{\partial t}\dots-\quad \mathcal{A}_n\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}=$$
$$L\big(R(x,t)\big)$$

$$\mathcal{A}_nS^nV(x,s)=-\mathcal{A}\frac{d^n}{dx^n}V(x,s)-\mathcal{A}_2S\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x,s)+\mathcal{A}_2\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\mathcal{Z}(x,0)-$$
$$\cdots+\mathcal{A}_nS^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)+\mathcal{A}_nS^{n-2}\frac{\partial \mathcal{Z}(x,0)}{\partial t}\dots+\mathcal{A}_n\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}+L(R(x,t))$$

وعلى فرض ان

$$D_1(s)=(-\mathcal{A}\frac{d^n}{dx^n}V(x,s)-\mathcal{A}_2S\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x,s)+\mathcal{A}_2\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\mathcal{Z}(x,0)-$$
$$\cdots+\mathcal{A}_nS^{n-1}\mathcal{Z}(x,0)+\mathcal{A}_nS^{n-2}\frac{\partial \mathcal{Z}(x,0)}{\partial t}\dots+\mathcal{A}_n\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}+L(R(x,t))\ )$$

نحصل على

$$\mathcal{A}_n S^n V(x,s) = D_1(s) + L\big(R(x,t)\big)$$

$$V(x,s) = \frac{D_1(s) + L\big(R(x,t)\big)}{\mathcal{A}_n S^n}$$

نوضع للمقدار $D_2(x,s)$ على شكل شرح $\mathrm{L(R)} = \frac{\mathrm{D_2(x,s)}}{\mathrm{K(s)}}$

$$V(x,s) = \frac{D_1(s)}{\mathcal{A}_n S^n} + \frac{D_2(x,s)}{\mathcal{A}_n S^n.\ K(s)}$$

عندما $\mathrm{K(s)}$ هي متعددة حدود ل (s) يمثل قاسم لتحويل لا بلاس للدالة $R(x,t)$

نفرض $\mathcal{A}_1 S^n = F_1(s)$

ونفرض $F_1(s).K(s) = F_2(s)$

من المعادلة اعلاه نحصل على

$$V(x,s) = \frac{D_1(s)}{F_1(s)} + \frac{D_2(x,s)}{F_2(s)} \qquad \dots\dots(2)$$

عندما $D_1(s)$ هي متعددة حدود ل (s) ودرجته اصغر من $F_1(s)$ و $D_2(x,s)$ يمثل البسط لتحويلات لابلاس للدالة $R(x,t)$ ودرجته اصغر من درجة $F_2(s)$.

الان $L\big(\mathcal{Z}(x,t)\big) = V(x,s)$,

من المعادلة (2) نحصل

$$L\big(\mathcal{Z}(x,t)\big) = \frac{D_1(s)}{F_1(s)} + \frac{D_2(x,s)}{F_2(s)}$$

ويأخذ معكوس لا بلاس (L^{-1}) للطرفين من المعادلة اعلاه نحصل

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{F_1(s)}\right) + L^{-1}\left(\frac{D_2(x,s)}{F_2(s)}\right) \quad \dots(3)$$

$D_2(x,s)$ يمثل البسط لتحويل لابلاس للدالة $R(x,t)$ بالتالي

$$D_2(x,s) = H_1(x)H_2(s)$$

من المعادلة اعلاه يصبح

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1(s)}\right) + H_1(x)L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F_2(s)}\right)$$

ثم نكمل الحل بإيجاد معكوس لا بلاس فنحصل على

$$\mathcal{Z}(x,t) = B_1 g_1(t) + B_2 g_2(t) + \cdots + B_n g_n(t)$$
$$+ H_1(x)[C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) + \cdots$$
$$+ C_m h_m(t)] \qquad \ldots(4)$$

عندما $C_1, C_2, \ldots, C_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ ثوابت

و $h_1, h_2, \ldots, h_m, g_1, g_2, \ldots, g_n$ دوال

عدد الثوابت $B_i, i = 1, \ldots, n$ والدوال $g_i, i = 1, \ldots, n$ مساوي لدرجة $F_1(s)$ الذي من المفترض من الدرجة (n) وعدد الثوابت $C_i, i = 1, \ldots, m$ والدوال $h_i, i =$ $1, \ldots, m$ مساوي لدرجة $F_2(s)$ الذي من المفترض ان يكون (m) يمكننا تقليص بعض الثوابت $C_1, C_2, \ldots, C_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ من خلال الحصول على قيمتها باشتقاق الحل (4) وتعويضه في المعادلة (1) حتى نحصل على بعض هذه الثوابت ، بهذه الطريقة نحصل على الحل للمعادلة (1) بدون استخدام اي شروط ابتدائية وحدودية لمعادلة تفاضلية خطية جزئية باستخدام تحويلات لا بلاس.

(.5.2) أمثلة

(.1.5.2) مثال :- لحل معادلة الموجة

$$\mathcal{Z}_{tt} - \mathcal{Z}_{xx} = xtcost$$

$$K(s) = (S^2+1)^2$$

فأن , $L\big(xt(cost)\big) = xL(tcost) = \frac{xs}{(S^2+1)}$

بالتالي $F(s) = S^2(S^2+1)^2$

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{F_1(s)}\right) + H_1(x)L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F_2(s)}\right)$$

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{S^2}\right) + xL^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{S^2.(S^2+1)^2}\right]$$

$$= \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathrm{s}}\right) + \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s}^2}\right) + \mathrm{x}\left[\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{s}}\right) + \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{Es}+\mathrm{F}}{\mathrm{S}^2+1}\right) + \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{Gs}+\mathrm{H}}{(\mathrm{S}^2+1)^2}\right)\right]$$

وبالتالي

$$\mathcal{Z}(x,t) = \mathcal{A} + Bt + (x+1)xt + Excost + Fxsint + Gxtcost + Hxtsint$$

يمكن التخلص من بعض الثوابت بإيجادها

$$\mathcal{Z}_{tt} = -Excost - Fxsint - Gxtcost - 2Gxsint - Hxtsint + 2Hxcostand\ \mathcal{Z}_{xx} = 0$$

واستبدال $\mathcal{Z}_{xx}.\mathcal{Z}_{tt}$ في المعادلة نحصل

$$-Excost - Fxsint - Gxtcost - 2Gxsint - Hxtsint + 2Hxcost = xtcost$$

بالتالي $-E + 2H = 0, -F - 2G = 0, -G = 1, -H = 0$

بحل المعادلات نحصل على

$$H = 0\ , E = 0\ , G = -1\ , F = 2$$

و بإعطاء الحل الكامل من خلال

$$\mathcal{Z}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathcal{A} + \mathrm{Bt} + \mathrm{Cx} + \mathrm{Dxt} + 2\mathrm{xsint} - \mathrm{xtcost}$$

ثوابت عشوائية $\mathcal{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{C}$ عندما

(.2.5.2)

مثال :- لحل المعادلة

$$\mathcal{Z}_{tt} = \mathcal{Z}_{xx} + \mathcal{Z}_{yy} + \mathcal{Z}_{uu} + xyu^2t$$

$L(uyu^2t) = xyu^2L(t) = \frac{xyu^2}{S^2}$ ، فأن $R(s) = S^2$

بالتالي $F(s) = S^2S^2 = S^4$,

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{F_1(s)}\right) + H_1(x,y,u)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2(s)}\right]$$

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{S^2}\right] + xyu^2L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{S^2.S^2}\right]$$

$$\mathcal{Z}(x,y,\mathcal{Z},t) = L^{-1}\left(\frac{\mathcal{A}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{B}{s^2}\right) + xyu^2\left[L^{-1}\left(\frac{C}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{D}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{E}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{F}{s^4}\right)\right]$$

$$= \mathcal{A} + Bt + xyu^2\left[L^{-1}\left(\frac{C}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{D}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{E}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{F}{s^4}\right)\right]$$

بالتالي

$$\mathcal{Z}(x,y,u,t) = \mathcal{A} + Bt + (xyu^2 + Dxyu^2\ t + \frac{E}{2}u^2xyt^2 + \frac{F}{6}xyu^2t^3$$

يمكن التخلص من بعض الثوابت بإيجادها.

$\mathcal{Z}_{tt} = \mathrm{E}xyu^2 + Fxyu^2t$,,

$\mathcal{Z}_{uu} = 2Cxy + 2Dxyt + Exyt^2 + \frac{1}{3}Fxyt^3$,,

$\mathcal{Z}_{yy} = 0$,, $\mathcal{Z}_{xx} = 0$

و باستبدال $\mathcal{Z}_{xx}$,, $\mathcal{Z}_{tt}$,, $\mathcal{Z}_{yy}$

$$Exyu^2 + Fxytu^2 - 2Cxy - 2Dxyt - Exyt^2 - \frac{1}{3}Fxyt^3 = xytu^2$$

لحل المعادلات نحصل على الاتي :

$$E = 0\,, F = 1\,, C = 0\,, D = 0\,, -\frac{1}{3}xyt^3 = 0$$

و بإكمال الحل نحصل على

$$\mathcal{Z}(x,y,u,t) = \mathcal{A} + Bt + \frac{1}{6}xyu^2t^3$$

ثوابت عشوائية B , $\mathcal{A}$ عندما

(.3.5.2)

لحل المعادلة

$$\mathcal{Z}_{xxxx} + \mathcal{Z}_{xxtt} + 2\mathcal{Z}_{tttt} = e^x sint$$

، فأن $K(s) = S^2 + 1$

$$L(e^x sint) = e^x L(sint) = \frac{e^x}{S^2+1}$$

بالتالي $F(s) = 2S^4(S^2+1)$

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1(s)}\right] + H_1(x)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2(s)}\right]$$

$$\mathcal{Z}(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{2S^4}\right] + e^x L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{2S^4(S^2+1)}\right]$$

$$\mathcal{Z}(x,y,u,t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{\mathcal{A}}{s}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{B}{s^2}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{C}{s^3}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{D}{s^4}\right) + \frac{1}{2}e^x\left[L^{-1}\left(\frac{E}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{F}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{G}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{H}{s^4}\right) + L^{-1}\left(\frac{Is+j}{s^3+1}\right)\right] *$$

$$\mathcal{Z}(x,y,u,t) = \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{B}{2}t + \frac{C}{4}t^2 + \frac{D}{12}t^3 + \frac{E}{2}e^x + \frac{F}{2}te^x + \frac{G}{4}t^2e^x + \frac{H}{12}e^xt^3 + \frac{I}{2}e^x cost + \frac{j}{2}e^x sint$$

$$\mathcal{Z}_{xxxx} = \frac{E}{2}e^{x} + \frac{F}{2}te^{x} + \frac{G}{4}t^{2}e^{x} + \frac{H}{12}e^{x}t^{3} + \frac{I}{2}e^{x}cost + \frac{j}{2}e^{x}sint$$

$$\mathcal{Z}_{xxtt} = \frac{G}{2}e^{x} + \frac{H}{2}e^{x}t - \frac{I}{2}e^{x}cost - \frac{j}{2}e^{x}sint$$

$$\mathcal{Z}_{tttt} = \frac{I}{2}e^{x}cost + \frac{j}{2}e^{x}sint$$

وبحل المعادلات نحصل

$$E = 0\ , F = 0\ , G = 0\ , H = 0\ , j = \frac{1}{2}\ , I = 0$$

و بإكمال الحل نحصل

$$\mathcal{Z}(x,t) = \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{B}{2}t + \frac{C}{4}t^{2} + \frac{D}{12}t^{3} + \frac{1}{4}e^{x}sint\,.$$

عندما $\mathcal{A}, C, D, B$ ثوابت عشوائية