جامعة القادسية

كليـــة التربيـــة

قسم الرياضيات

الألعاب التفاضلية ونظرية السيطرة

بحث مقدم من قبل الطالبة

مريم كاظم جودة

الى مجلس قسم الرياضيات/كلية التربية/جامعة القادسية كجزء من متطلبات نيل شهادة البكلوريوس في علوم الرياضيات.

بأشراف

د. ميثاق حمزة كعيم

2019-2018

المحتويات

الملخص

تناول هذا البحث دراسة الألعاب التفاضلية و علاقتها بنظرية السيطرة ، حيث تعد الألعاب التفاضلية نوع من أنواع نظرية الألعاب والتي تحاكي نظام ديناميكي حركي يعتمد على المعادلات التفاضلية في تمثيله، كذلك فان نظرية السيطرة تعد واحدة من أنواع توازن الألعاب التفاضلية وإيجاد عنصر السيطرة في نظرية السيطرة يمثل إيجاد استراتيجية التوازن في نظرية الألعاب. ان دراسة هذا النوع من الألعاب يعد من المواضيع المهمة في الرياضيات حيث يوجد الكثير من الحلول لمسائل السيطرة المثلى وباستخدام نظرية الألعاب يمكن إيجاد افضل حل لتلك المسائل.

الاية

بسم الله الرحيم الرحيم

((أَمَّنْ هو قانتٌ آناءَ اللَّيلِ ساجداً وقائماً يَحذَرُ الآخرةَ ويَرجو

رحمةَ ربِّهِ قلْ هل يستوي الَّذين يعلمونَ والَّذين لا يعلمونَ

إنَّما يَتَذكَّرُ أولوا الألباب)) المزمر-اية 9

صدق الله العلي العظيم

الاهداء

اهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا . .

إلى . . من تكون الجنة تحت أقدامها وبدعوالها أكملت المسيرة . . . والدتي

إلى . . والدي الحبيب أطال الله في عمره . .

إلى . . الشموع المضيئة المنورة . . أخوتي وأخواتي

الفصل الاول

الفصل الثاني

المصادر

University of AL-Qadisiyah
Education College
Department of Mathematics

Differential Games and control theory

A paper
Submitted to the council of mathematic dept.-College of education
University of Al- Qadisiyah As a Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree Of Bachelor of Science in Mathematics

By
Marim Khathem Judo

Supervised By
Dr. Methaq Hamza Geem

2018-2019

Abstract:

This research deals with the study of the relation between the differential games and control theory, the differential games are a type of game theory that simulates a dynamic system which based on differential equations in its representation, the theory of control is one of the types of equilibrium of differential games and finding the control element in control theory is finding a equilibrium strategy in the theory of games. The study of this type of games is one of the important topics in mathematics, such that there are many solutions to the problems of optimal control and by using the theory of games we can find the best solution to those problems.

المقدمة:

نظرية اللعبة هو نظام مستقل يستخدم في الرياضيات التطبيقية ، العلوم الاجتماعية ، وأكثرها أهمية في الاقتصاد ، وكذلك في علم الأحياء والهندسة والعلوم السياسية ، العلاقات الدولية وعلوم الكمبيوتر والفلسفة. نظرية اللعبة هي دراسة رياضية للاستراتيجية والفائدة ، في نجاح العميل في اتخاذ الخيارات الذي يعتمد على اختيار الآخرين. تم تطويره في البداية في الاقتصاد لفهم مجموعة كبيرة من السلوكيات الاقتصادية ، بما في ذلك سلوك الشركات والأسواق والمستهلكين.

استخدمت نظرية الالعاب في وصف ونمذجة تصرفات البشر ، وكان بعض العلماء يعتقد ان من خلال ايجاد التوازن بين الالعاب يستطيعون ان يتنبؤوا كيف سيتصرف البشر فعلياً عندما يواجهون حالات مشابهة لحالة اللعبة التي تمت دراستها ، اما في مجال الاقتصاد والاعمال تعتبر نظرية اللعبة هي اسلوب رئيسي مستخدم في علم الاقتصاد الرياضي والعمل لنمذجة سلوك وكلاء التفاعل والتنافس ، وتشمل التطبيقات مجموعة واسعة من الظواهر والاساليب الاقتصادية ، مثل المزادات العلنية ، والمساومة ، وعمليات الدمج والتملك والتسعير . وفي مجال العلوم السياسية يرتكز تطبيق نظرية الالعاب في العلوم السياسية على مناطق متداخلة من التقسيم العادل والاقتصاد السياسي والاختيار العام والمساومة بالحرب والنظرية السياسية الايجابية ونظرية الاختيار الاجتماعية .

يتكون هذا البحث من فصلين ، حيث تناول الفصل الأول اوليات مهمة حول نظرية الألعاب و بعض الأمثلة والنظريات المهمة في نظرية الألعاب وتعريف الاستراتيجيات في اللعب ، اما الفصل الثاني فقد تناول أنواع الألعاب الرياضية و تطبيقاتها في المعادلات التفاضلة او مايسمى بالالعاب التفاضلية . حيث يمكن وصف اللعبة التفاضلية من لاعب واحد بالشكل الاتي:

$$\dot{x_i} = f_i\big(x_i(t), u(t)\big)\,, \qquad i = 1, \dots, n \ldots\ldots(*)$$

بحيث:

$$Min \quad J(u) = \int_0^T [< x^T, Qx > + < u^T, Pu >]dt$$

$$x, u \in R^n, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad Q = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right],$$

$$P \in R\,, P > 0$$

J(u) تسمى دالة الكلفة

u يسمى استراتيجية التوازن

أي ايجاد قيمة لاستراتيجية التوازن ولتكن u^* بحيث: $J(u^*) \leq J(u)$

الفصل الاول

1.1 اوليات وتعاريف

1.1.1 تعريف :

لتكن X_i مجموعة غير خالية ، $i = 1 , \ldots n$، ولتكن $X = X1 \times \ldots\ldots \times Xn$ اي ان

$$X = \{ X = (X1 ,\ldots Xn) \ : \ i = 1 , \ldots , n \}$$

$$Hi : X1 \times X2 \times \ldots \times Xn \longrightarrow R \qquad i= 1 \ldots, n$$ لكل

1.1.2 تعريف:

تعرف عمليات (خطوات) اللاعبين يمكن التعبير عنها بالشكل الاتي :

لكل لاعب i استراتيجية في اللعب ولتكن X_i في كل خطوة وفي النهاية تتكون مجموعة من الاستراتيجيات :

$$X = (X1 , X2 \ldots Xn)$$

تسمى حالة اللاعب i. وبالتالي فيمكن ايجاد فائدة اللاعب او نتيجة من خلال الدالة H حيث :

$$H (X) = (H1 (X) , \ldots, Hn (X))$$

1.1.3 تعريف:

اللاعب i في الحالة X افضل من الحالة X^* اذا كان :

$$Hi(X^*) \leq Hi (X)$$

اذا كان $Hi (X) = H (X^*)$ فان الحالتين X ، X^* للاعب i هي حالتي توازن .

1.1.4 تعريف النظام :

$$G = (N, \{ X_i \}_{i\in N} , \{ H i \}_{i \in N})$$

حيث :

$N = \{ 1,2,\ldots, n \}$ مجموعة اللاعبين ، X_i هي مجموعة الاستراتيجيات للاعب

i , Hi هي دالة الفائدة (الربح) اللاعب i.

1.1.5 تعريف :

اذا كانت X_i لكل $i= 1,\dots, n$ ، منتهية فان اللعبة تسمى لعبة منتهية ذات n وجه .

1.1.6 تعريف :

اللعبة المنتهية ذات 2 وجه تسمى ثنائية المصفوفة حيث يمكن وصفها بالشكل الاتي :

X_1 ، X_2 الدوال H_1 , H_2 يمكن وصفها بالشكل

$$H_1 = A =\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad H_2 = B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث ان العناصر α_{ij} , β_{ij} في المصفوفتين B , A تمثل ربح اللاعبين 2,1 في الحالات i,j

1.1.7 مثال (نزاع عائلي) :

لنأخذ اللعبة الثنائية

$$(A , B) = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{bmatrix} II_1 & II_2 \\ (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}$$

الزوج (اللاعب 1) والزوجة (اللاعب 2) ارادوا اختيار خيار واحد من خيارين لقضاء امسية : مشاهدة لعبة كرة قدم ومسرح . حيث ان اللاعب اتبع استراتيجية ($X = (I1 , I2$) حيث

I 1 = لعبة كرة القدم ، I 2 = المسرح ، واللاعب 2 اتبع استراتيجية { $X_1 = \{ I1 , I2$ حيث : لعبة كرة القدم : I 1 ، المسرح : I 2 لذلك في الحالة (I 1 , II1) اللاعب 1 يربح ، اما في الحالة (I2 , II2) اللاعب 2 يربح .

1.2 توازن الالعاب :

1.2.1 توازن اللعبة عند (ناش)

مفهوم التوازن عند ناش للالعاب المنتهية (n وجه) يمكن وصفها كالاتي :

$X = (X1 , \ldots , X_{i-1} , X_i , X_{i+1} \ldots in)$ حالة في اللعبة G ، Xi هي استراتيجية اللاعب i ،الان لناخذ نفس الحالة X ونبدل بها فقط الاستراتيجية Xi ،نصنع مكانها X_i لتصبح حالة جديدة وهي X^* حيث :

$$X^* = (X_1 , \ldots X_{i-1} , X^*_i , \ldots X n)$$

ونرمز لها بالرمز $X^* = (X \,||\, X^*_i)$

1.2.2 تعريف :

الحالة $x = (x_1 , \ldots, x_i ,\ldots ,x_n)$ تدعى حالة توازن ناش ، اذا لكل $x_i^* \in X_i$, $i = 1 , 2 , \ldots n$ تحقق المتراجحة

$$H_i (x) \geq H i (x \,||\, x_i^*)$$

مجموعة كل حالات توازن ناش للعبة G نرمز لها بالرمز $Z (G)$

1.2.3 ملاحظة :

في التعريف (1.2.2) نلاحظ انه اذا كانت في حالة توازن ناش ، فان لايوجد لاعب يكون مهتم برفض الاستراتيجية x_i من الحالة x عند استخدام اللاعب i استراتيجية x_i بدل x_i^* فانه يربح فقط عند تقق الشرط الاتي : يبقى اللاعبين على استراتيجياتهم المعطاة في الحالة X.

1.2.4 ماخوذة :

في اللعبة الثنائية $G (A , B)$ ، حيث A , B مصفوفتان $m \times n$ تمثل ربح اللاعبين 1 , 2 على التوالي فان الحالة (i^* , j^*) حالة توزان ناش ، اذا لكل $i = 1 , \ldots , m$ تتحقق المتراجحة : $\alpha_{ij^*} \leq \alpha_{i^*j^*}$ ولكل $j=1\ldots n$ تتحقق المتراجحة :

$$\beta_{i^*j^*} \leq \beta_{i^*j}$$

1.2.5ملاحظة :

يمكن توضيح اختيار $\alpha_{i^*j^*}$ و $\beta_{i^*j^*}$ حسب الماخوذة (1.2.4)وذلك كالاتي :

الحالة (i^* , j^*) حالة توزان ناش للعبة الثنائية G (A , B) اذا كان العنصر $\alpha_{i^*j^*}$ اكبر عنصر في العمود j^* من المصفوفة A و العنصر $\beta_{i^*j^*}$ اكبر عنصر في الصف i^* من المصفوفة B

1.2.6مثال :

جد مجموعة كل حالات توزان ناش للعبة الثنائية G (A , B) مصفوفتان قطريتان موجبتان اي ان ،

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} = 0 \quad , i \neq j,$$

$$\beta_{ij} \neq 0, \alpha_{ij} \neq 0 \quad , i = j,$$

الحل /

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للحالة (1,1) نلاحظ ان $\beta_{11} > 0$ و $\beta_{1j} = 0 \ , \ j = 2,3, \dots, n$ وبذلك نجد ان $\underset{j \in \{1,2,\dots,n\}}{Max} \ \beta_{1j} = \beta_{11}$ وبالتالي الحالة (1 , n) هي حالة توزان ناش ، وبنفس الطريقة نجد الحالات الاخرى للتوازن للاعبين الاخرين وهي :

(2 , 2) , …. (n , n)

وبذلك يصبح

Z (G) = { (1,1) , (2, 2) … (n , n) }

1.2.7مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل : لدينا القيم

$\text{Max } \alpha i1 = 3$, $\text{Max } \alpha i2 = 4$

$i \in \{ 1 , 2 \}$, $i \in \{ 1 , 2 \}$

الحالات (1, 1) و (2 , 2) هي حالات توزان ناش للمصفوفة A

الان باخذ B

$\text{Max } \beta\ 1\ j = 3$, $\text{Max } \beta\ 2\ j = 2$

$j \in \{ 1 , 2 \}$, $j \in \{ 1 , 2 \}$

الحالات (1, 1) (1,2) (2,1) هي حالات توازن ناش للمصفوفة B

وبالتالي حالات توزان ناش للعبة (G (A , B هو تقاطع الحالات للمصفوفتين وهو (1,1)

1.2.8 مثال

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 4 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

بالنسبة للمصفوفة A

$\text{Max } \alpha_{i1} = 5$, $\max \alpha_{i2} = 10$, $\max \alpha_{i3} = 10$

$i \in \{ 1 , 2 , 3 \}$

اذن حالات المصفوفة A هي (1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 3)

بالنسبة للمصفوفة B

$\text{Max } \beta_{1j} = 6$, $\max \beta_{2j} = 6$, $\max \beta_{3j} = 5$

$j \in \{ 1 , 2 , 3 \}$

اذن حالات المصفوفة B هي : (1,3) , (2,1) , (3,2)

وتقاطع مجموعة الحالات في A , B نحصل على :

ϕ المجموعة الخالية اي لا يوجد حالة توزان ناش لهذه اللعبة

1.2.9 تعريف

الاستراتيجية $x_i^* \in X$ تسمى متوازنة ن اذا هي دخلت في احدى حالات توازن ناش

1.2.10 تعريف :

الحالة x في اللعبة G تدعى امثلية باريتو ، اذا لا توجد حالة x∈X ، تحقق المتراجحة

$$H_i(x) \geq H_i(\bar{x}) \qquad , \quad H_{i_0}(x) \geq H_{i_0}(\bar{x})$$

مجموعة كل حالات امثلية باريتو يرمز لها بالرمز P (X)

1.2.11 تعريف :

الحالة الثنائية $(\bar{\imath},\bar{\jmath})$ سوف تكون امثلية باريتو في اللعبة الثنائية (G (A , B ، اذا لا توجد حالة (i , j)
بحيث متجه الربح (α_{ij} , β_{ij}) للاعبين 1 و 2 بمركباته اكبر من قيمة الربح $(\alpha_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}, \beta_{\bar{\imath}\bar{\jmath}})$

1.2.12 مثال :

لناخذ اللعبة (G(A,B حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

المطلوب ايجاد امثلية باريتو

الحل : لإيجاد الحالة الامثل نجد الحالات جميعا

(6, 2) , (3 , 7) , (2, 8) , (4 , 9) , (9 , 2) , (7 , 4) (8 , 4)

(0 , 8) , (3 , 3)

الان نبحث عن الحالة $(\alpha_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}, \beta_{\bar{\imath}\bar{\jmath}})$ بحيث:

$$\alpha_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \geq \alpha_{ij} \ , \ \beta_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \geq \beta_{ij}$$

بحيث ناخذ حالة – حالة ، مثلا (6 , 2) نقارنه مع الجميع لحد ما نجد حالة اكبر منه فنهمله :

$(\alpha_{11}, \beta_{11}) = (6, 2) \leq (\alpha_{31}, \beta_{31}) = (8, 4)$

فنقوم باهمال الحالة (6 , 2) وهكذا نجد ان :

$P(X) = \{ (2,1), (2,2), (3,1) \}$

1.2.13تعريف :

اللعبة المنتهية ذات 3 وجه تسمى ثلاثية المصفوفة حيث يمكن وصفها بالشكل الاتي :

X_1 ، X_2 ، X_3 الدوال $H1$, $H2, H_3$ يمكن وصفها بالشكل

$$H1 = A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, H2 = B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}, H_3 = C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث ان العناصر α_{ij} , β_{ij} γ_{ij} , في المصفوفات B , A ,C تمثل ربح اللاعبين 1,2,3 في الحالات i,j

1.2.14مثال :

جد مجموعة كل حالات توزان ناش للعبة الثنائية (G (A , B,C

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : لدينا القيم

$\text{Max } \alpha_{i1} = 11 \quad , \quad \text{Max } \alpha_{i2} = 2 \, , \, i \in \{1, 2\}$

الحالات (1, 1) و (1, 2) هي حالات توزان ناش للمصفوفة A

الان باخذ B

$\text{Max } \beta\, 1\, j = 6$, $\text{Max } \beta\, 2\, j = 1$

$j \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$

الحالات (1,2) (2,1) هي حالات توازن ناش للمصفوفة B

وبالتالي حالات توزان ناش لـ A,B هو تقاطع الحالات للمصفوفتين و هو (1,2)

والان نلاحظ الحالة (1,2) في المصفوفة C يجب ان تكون هي الأكبر فائدة من حيث الصفوف و الاعمدة معاً. وبهذا تكون مجموعة حالات التوازن للعبة G(A,B,C) هي :

$Z(G)=\{(1,2)\}$

الفصل الثاني

2.1 تصنيف الألعاب و الألعاب ذات المجموع الصفري

تصنف الألعاب حسب عدة معايير منها:

*حسب عدد اللاعبين:

- العاب ذات شخصين:أي ان عدد اللاعبين في اللعبة هو اثنان فقط.
- العاب متعددة الأطراف: أي ان عدد اللاعبين في اللعبة اكثر من اثنين.

*حسب الاستراتيجيات المستخدمة:

- العاب محددة: هي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة امام كل لاعب محدود.
- العاب مستمرة : هي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة امام كل لاعب غير محدد أي لانهائي.

*حسب نتيجة اللعبة:

- العاب ذات مجموع صفري: هي اللعبة التي يكون فيها ربح اللاعب الأول يساوي تماما خسارة اللاعب الاخر او التي يكون فيها مجموع القيم المتبادلة ثابتا.
- العاب ذات مجموع غير صفري: هي اللعبة التي يكون فيها ربح احد اللاعبين لايساوي خسارة اللاعب الاخر .

*حسب طبيعة اللعبة:

- لعبة غير تعاونية: حيث لايوجد أي تنسيق او تعاون او تفاوض بين اللاعبين ويسعى كل لاعب لجعل عوائده اكبر.
- لعبة تعاونية: هي اللعبة التي يوجد تنسيق او تعاون او تفاوض بين اللاعبين يؤدي الى زيادة الأرباح الكلية او المتوقعة لكل منهم.

2.1.1 الألعاب ذات المجموع الصفري:

تعتبر او تطوير في نظرية الألعاب وتسمى احياناً باللعبة المستفزة وقد لاينطبق هذا النوع من الألعاب الا على القليل من الحالات الواقعية الا ان طرق حلها تلعب دوراً كبير في حل الألعاب ذات المجموع الغير صفري.

- مميزات الألعاب ذات المجموع الصفري للاعبين:
- لكل لاعب عدد محدد من الاستراتيجيات المتاحة.
- أي ربح يحققه لاعب يعني خسارة اللاعب الاخر.
- الاستراتيجيات و الأرباح معروفة لدى اللاعبين.
- كل لاعب يحاول جعل أرباحه اكبر مايمكن.
- لايسمح بعمليات التحايل و المساومة ويتم ضمان ذلك من خلال اختيارهم للاستراتيجيات في ان واحد.

2.1.2 حل العاب ذات المجموع الصفري لشخصين:

اذا كان اللاعب A يمتلك الاستراتيجيات $x_1,x_2,\ldots,x_m$ واللاعب B يمتلك الاتسراتيجيات $y_1,y_2,\ldots,y_n$ والقيمة e_{ij} تمثل قيمة الربح العائد في الحالة (x_i,y_j) ولتكن:

$$v_L = \max_i(\min_j e_{ij})$$

أي ان اللاعب A لن يحصل اقل من v_L مهما كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B، تسمى القيمة v_L بالقيمة الدنيا للعبة.

ولتكن :

$$v_u = \min_j(\max_i e_{ij})$$

أي ان اللاعب A لن يحصل اكبر من v_u مهما كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B، تسمى القيمة v_u بالقيمة العليا للعبة.

وبشكل عام فان: $v_L \le v_u$

2.1.3 مثال:

لتكن اللعبة G الممثلة بالمصفوفة الاتية:

$$\begin{array}{cc|c} & & \text{Min} \\ G = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \text{Max} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \end{array}$$

$$v_L = 0 \ , \qquad v_u = 1$$

2.1.4 تعريف:

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة الربح للاعبين وليكن (i^*, j^*) استراتيجية بحيث:

$$a_{i^*j} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{ij^*}$$

فاننا نسمي الحالة (i^*, j^*) استراتيجية توازن.

2.1.5 تعريف:

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة الربح للاعبين فان المصفوفة A تمتلك استراتيجية توازن اذا كان :

$$v_L = v_u$$

2.1.6 نموذج الطريقة العامة حل لعبة ذات المجموع الصفري 2×2 :

لتكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة الربح للاعبين بحيث لاتمتلك نقطة توازن.

بتكرار كلا من الاستراتيجيتين بنسبة معينة من المرات أي ان يلعب كلاً منهما باحتمال مناسب يحسن من عائده المتوقع. وهنا العائد المتوقع يعني ان اللعبة تتكرر عدداً كبيراً من المرات حسب مفهوم التوقع في نظرية الاحتمالات.

اذا كانت (x_1, x_2) استراتيجية اللاعب الأول و (y_1, y_2) استراتيجية اللاعب الثاني بحيث:

$$x_1 + x_2 = 1 \ , y_1 + y_2 = 1$$

لذلك ولتسهيل عملية التوقع نجد ان:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = 1 - x \ , y_1 = y \ , y_2 = 1 - y$$

بما ان اللاعب الأول يرغب بالحصول على نفس الربح مهما كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب الثاني ونفس الشيء بالنسبة للاعب الثاني. الان نجد ان:

الربح الذي يحصل عليها اللاعب الأول اذا استخدم اللاعب الثاني الاستراتيجية الأولى:

$$ax + c(1 - x)$$

الربح الذي يحصل عليها اللاعب الأول اذا استخدم اللاعب الثاني الاستراتيجية الثانية:

$$bx + d(1 - x)$$

وبمساوات هذين الربحين نحصل على المعادلة التالية بـ x:

$$ax + c(1 - x) = bx + d(1 - x)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$x = \frac{d - c}{a - c - b + d}$$

وبذلك نحصل على :

$$1 - x = \frac{a - b}{a - c - b + d}$$

وبنفس الأسلوب نجد:

$$y = \frac{d - b}{a - c - b + d}$$

وبذلك نحصل على :

$$1 - y = \frac{a - c}{a - c - b + d}$$

2.2 الألعاب التفاضلية:

الألعاب التفاضلية هي اسقاط مفاهيم الألعاب الرياضية على نظرية المعادلات التفاضلية وحل مسائل الأنظمة الديناميكية وأنظمة السيطرة حيث ان الألعاب التفاضلية من لاعب واحد هي عبارة عن نظرية السيطرة المثلى.

الألعاب التفاضلية من لاعب واحد (نظرية السيطرة المثلى):

2.2.1 تعريف:

تعرف المنظومة الخطية بالصيغة الاتية :

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n$$

ويمكن اعادة كتابة هذه المنظومة بصيغة المعلومات لتكون بالشكل الاتي :

$$\dot{x} = A(t)X$$

$$A = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right]$$

2.2.2 تعريف: القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX=\lambda X$ حيث λ ثابت ويسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A.

لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX=\lambda X$ بالصورة:

$$(\lambda I-A)X=0$$

و التي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا $\det(\lambda I-A)=0$. والمحدد الموجود على يسار المعادلة السابقة يسمى المعادلة المميزة للمصفوفة A ونرمز له بالرمز P_n.

أي ان القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة المميزة $P_n(\lambda)$.

ولايجاد المتجهات الذاتية حيث كل قيمة ذاتية تحدد متجه ذاتي ، نفرض ان B هو متجه ذاتي للقيمة الذاتية λ_1 فيمكن ايجاده من خلال العلاقة الاتية:

$$(\lambda_1 I-A)\,B=0$$

2.2.3 حالات القيم الذاتية :

1- حالة الجذور حقيقية ومختلفة :-لتكن الجذور الحقيقية المختلفة هي
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n$

ولتكن المتجهات التالية هي متجهات خاصة مقابلة لهذه الجذور على التوالي هي
$B_1, B_2, B_3 \dots\dots B_n$

ان هذه المتجهات بالضرورة تكون متجهات مستقلة خطيا ,وبالتالي فأن كل متجه من المتجهات التالية:

$$B_1 e^{\lambda_1 t}, B_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, B_n e^{\lambda_n t}$$

هو حل للمنظومة وكذلك:

$$y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + B_n e^{\lambda_n t}$$

هو الحل العام.

2.2.4 مثال : لايجاد الحل العام للمنظومة $\dot{Y} = AY$

اذا كانت $A=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \left|\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4-\lambda)(2-\lambda) + 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 + 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -3 \quad , \quad \lambda = 1$$

بعد حساب القيم الخاصة للمصفوفة A والتي هي $\lambda=1$, $\lambda=-3$ جذور حقيقية مختلفة) ,ثم نحسب المتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم الخاصة :

-عندما $\lambda = 1$

$$(A - \lambda I)B = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)B = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}_{\lambda=1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5a - b \\ 5a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-5a-b=0$

$5a+b=0$

نجد ان المعادلتين اعلا متشابهتين، أي لدينا متغيرين و معادلة واحدة وهذا يعني يجب فرض احد المتغيرين وليكن $a=\alpha$ وبهذا نجد ان $b=-5a=-5\alpha$

أي ان المتجه الذاتي:

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -5\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \alpha$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة نجد المتجه الذاتي عندما $\lambda=-3$ وهو:

$$B_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وعليه فان الحل هو :

$$y = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

2.2.5 حالة الجذور اعداد مركبة :-

اذا كانت $\lambda_1=\alpha+i\beta$ احدى القيم الخاصة للمصفوفة A في المنظومة (3) فأن مرافق هذه القيمة ايضا قيمة خاصة اي ان $\lambda=\alpha-i\beta$ حيث ان $i=\sqrt{-1}$ وهذا يؤدي الى ان المتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم ايضا تكون احدهما مرافق للاخر . فمثلا اذا كانت B_1,B_2 متجهات خاصة مقابلة على التوالي للقيم الخاصة λ_1, λ_2 فأن $B_1=B_2$ وبالتالي فان كل متجه من المتجهات:

$$B_1 e^{\lambda_1 t}, B_1 e^{\lambda_2 t}$$

هو حل للمنظومة . وهكذا

2.2.6 مثال :

اذا كانت

$\dot{Y}=AY$ حيث $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

فأن القيم الخاصة هي $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$ والمتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم على التوالي هي $B1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ $B2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ اذا مصفوفة الحل هي:

$$y = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it}$$

2- حالة تكرار الجذور

ان جذور المعادلة المميزة قد يكون بعضها متكررا ,ولنفترض ان الجذر λ متكرر m من المرات في المنظومة (3) (حيث ابعاد المصفوفة A هي nxn) .

نعرف مجموعة من المتجهات Pn, ... ,P2,P1,Po كالاتي

$$(A-\lambda I)P_k=o$$
$$(A-\lambda I)P_{k-1}=KP_k$$
$$(A-\lambda I)P_{k-2}=(k-1)P_{k-1}$$
$$(A-\lambda I)P_{k-3}=(k-2)P_{k-2}$$
$$(A-\lambda I)P_1=2P_2$$
$$(A-\lambda I)P_o=P_1$$

لما كان $\det(A-\lambda I)=o$ فأن المعادلة الاولى لها حلا لاصفري ومن هذا الحل نستمر في ايجاد حلول المعادلات الباقية وعند حساب هذه المتجهات P_i نعرف B_k بالطريقة التالية

$$B_o(t)=P_k$$
$$B_1(t)=P_{k-1}+tP_k$$
$$B_2(t)=P_{k-2}+tP_{k-1}+t^2P^k$$
$$B_i(t)=P_{k-i}+tP_{k-i+1}+.....+t^{i-1}\,P_{k-1}+t^i\,P_k$$
$$B_k(t)=P_o+tP_1+.....+t^2\,P_2+t^k\,P_k$$

ومن هذه المتجهات نكون حلول مستقلة خطيا وهي

$$B_1(t)e^{\lambda t}\ ,\ B_2(t)e^{\lambda t}\ ,\ .....,\ B_k e^{\lambda t}$$

2.2.7 مثال : لتكن لدينا $\dot{Y}=AY$ حيث ان $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

المصفوفة المميزة للمصفوفة A هي

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة هي

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^2=o$$

وعليه فان القيم الخاصة هي : (-1) غير متكررة و(2) متكررة مرتين

لذا فان القيمة الاولى $\lambda=-1$ تعطينا مباشرة متجها خاصا B_1 من

$(A+I)B_1 = o$

اي ان $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

اما بالنسبة للقيمة الخاصة المتكررة $\lambda=2$ فتحسب متجهاتها الخاصة كالاتي
نحسب المصفوفة

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة واضح انها ذات رتبة (2) وعليه فان المتجهات الخاصة لـA نحصل عليها من

$(A-2I)P_1 = o$

وهذا يؤدي بنا الى

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ اما Po فيحسب من $(A-2I)P_o = P_1$

ومن هذه المنظومة نحصل على

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولما كانت

$B_o = P_1$

$B_1 = P_o + tP_1$

فان الحلول الثلاثة المستقلة خطيا هي

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} ، \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} ، \quad X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3t \\ 1-2t \end{bmatrix} e^{2t}$$

2.2.8 الصيغ التربيعية:

الدالة $f: R^n \to R$ المعرفة بالشكل الاتي:

$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$ تسمى صيغة تربيعية بحيث:

A مصفوفة متناظرة مربعة n×n و x متجه ذي بعد n.

2.2.9 مثال:

اذا كانت A مصفوفة متناظرة من الدرجة 2×2 فيمكن وصف الصيغة التربيعية بالشكل الاتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2]$$

$$\therefore \qquad x^T A x = [a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2]$$

2.2.10 تعريف:

اذا كان:

$$J = x^T A x = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2) \quad (2a_{22}x_2 + 2a_{12}x_1)]$$

2.2.11 تعريف:

1)اذا كان $x^T A x > 0$ فان A تسمى مصفوفة موجبة التعريف.

2) اذا كان $x^T A x < 0$ فان A تسمى مصفوفة سالبة التعريف.

3) اذا كان $x^T A x \geq 0$ فان A تسمى مصفوفة شبه موجبة التعريف.

2.2.12 ملاحظة:

يمكن تعريف الصيغ التربيعية باستخدام الضرب الداخلي:

$$< x^T, Ax >= x^T Ax$$

2.2.13 تعريف:

الصيغة العامة لامثلية المعادلات التفاضلية:

$$\dot{x_i} = f_i\big(x_i(t), u(t)\big)\,, \qquad i = 1, \dots, n \ldots\ldots(*)$$

بحيث:

$$Min \quad J(u) = \int_0^T [< x^T, Qx > + < u^T, Pu >] dt$$

$$x, u \in R^n, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad Q = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right],$$

$$P \in R\,, P > 0$$

J(u) تسمى دالة الكلفة

u يمسى متغير السيطرة المثلى

أي ايجاد قيمة لمتغير السيطرة ولتكن u^* بحيث: $J(u^*) \leq J(u)\,, \forall\, u$

2.2.14 طريقة هاملتون لايجاد حل امثلية المعادلات التفاضلية:

نتبع الخوارزمية الاتية:

1- $H = P_1 f_1 + \cdots + P_n f_n - [< x^T, Qx > + < u^T, Pu >]$

2- $\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\dot{P}_1\,,\ \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\dot{P}_2\,, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n} = -\dot{P}_n\,, \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \ldots\ldots.(**)$

بعد دمج المعادلات * و ** نقوم بحل هذا النظام لنجد حل النظام اعلاه والذي يمثل الحل الامثل.

2.2.15 مثال:

جد الحل الامثل للنظام الاتي:

$$\dot{x} = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\dot{y} = 2y + u \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

s.t.

$$Min \qquad J = \frac{1}{2}\int_0^T [x^2 - 3y^2 + u^2]dt$$

الحل:

بداية فان:

$$x(t) = e^t$$

$$H = p.x + q(2y + u) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}u^2$$

$$H_x = p - x = -\dot{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$H_y = 2q + 3y = -\dot{q} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$H_u = q - u = 0 \ \rightarrow u = q \ldots\ldots..(5)$$

بالتعويض عن قيمة u في معادلة (2) نجد ان:

$$\dot{y} = 2y + u = 2y + q$$

$$\dot{y} = 2y + q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\dot{q} = -2q - 3y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

المعادلتين (6),(7) تمثل نظام معادلات تفاضلية خطية وحلها كالاتي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

والقيم الذاتية هي :

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad , \quad \lambda = 1$$

والمتجهات الذاتية هي:

$$B2=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad B1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وبهذا فان الحل هو:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$y(t) = e^{t} + e^{-t}$$

$$u^{*}(t) = q(t) = -e^{t} - 3e^{-t}$$

2.2.16 مثال:

جد الحل الامثل للنظام الاتي:

$\dot{x} = -x + u$......................(8)

s.t.

$$Min \qquad J = \frac{1}{2}\int_0^T [x^2 + u^2]dt$$

الحل: $H = p.(-x+u) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2$

$H_x = -p - x = -\dot{p}$...................(9)

$H_u = p - u = 0 \ \rightarrow u = p$..........(10)

بالتعويض عن قيمة u في معادلة (8) نجد ان:

$\dot{x} = -x + p$.....................(11)

$\dot{p} = x + p$.....................(12)

المعادلتين (11),(12) تمثل نظام معادلات تفاضلية خطية وحلها كالاتي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

والقيم الذاتية هي :

$$|A - \lambda I| = 0 \ \rightarrow \left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda = -\sqrt{2} \ , \quad \lambda = \sqrt{2}$$

والمتجهات الذاتية هي:

B1=$\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{bmatrix}$ B2=$\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$

وبهذا فان الحل هو:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\p(t)\end{bmatrix}=B_1e^{\lambda_1 t}+B_2e^{\lambda_2 t}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{bmatrix}e^{\sqrt{2}t}+\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}e^{-\sqrt{2}t}$$

$$x(t)=(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}+(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u(t)=p(t)=e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}$$

المصادر

[1] C., Pierre, Introduction to di_erential games, Universit_e de Brest, 2010

[2] B.A., Bhuiyan, AN OVERVIEW OF GAME THEORY AND SOME APPLICATIONS, Philosophy and Progress: Vols. LIX-LX, January-June, July-December, 2016, pp.v59i1-2.36683.

[3] T., MYLVAGANAM, APPROXIMATE FEEDBACK SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL GAMES, A Thesis submitted in fulfillment of requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Control and Power Research Group Department of Electrical and Electronic Engineering
Imperial College London,2014.

[4] د .عدنان ماجد عبدالرحمن بري،مقدمة لتحليل القرارات و نظرية المباريات، جامعة الملك سعود،2015.