جامعة القادسية

كليــة التربيــة

قسم الرياضيات

أتمتة حل مسائل الفيزياء الرياضية

بحث مقدم من قبل الطالب

خيري شاكر عبد الله

الى مجلس قسم الرياضيات/كلية التربية/جامعة القادسية كجزء من متطلبات نيل شهادة البكلوريوس في علوم الرياضيات.

بأشراف

د. ميثاق حمزة كعيم

2019-2018

المحتويات

الملخص

تناول هذا البحث دراسة اتمتة بعض مسائل الفيزياء الرياضية ، والاتمتة هنا تختلف عن البرمجة حيث ان البرمجة تعني كتابة خوارزمية في احد لغات البرمجة وتنفيذها اما الاتمتة فتعني مناقشة كل حالات المسألة وحلها وكتابة كود خاص بهذه الحالات .

ان العديد من العلماء تصور ان الاتمتة تعني التخلي من اليد العاملة البشرية وهذا التصور غير صحيح حيث ان الاتمتة تخلق فرص عمل إضافية فبرمجة هذه الوظائف يؤدي الى إضافة عناصر برمجية تحتاج الى ايدي بشرية لادارتها وتنظيمها. حيث كشفت الدراسات وجود ملايين الأشخاص، الذين استفادوا من الأتمتة في الجمع بين وظيفتين واحدة ثابتة لضمان الأمن الاقتصادي، والأخرى متغيرة لتعويض النفقات غير المتوقعة ورفع مستوى المعيشة مما يساعد المدن في الانتقال من الركود للانتعاش .

ومن هنا فان الكثير من الفيزيائيين يحتاجون الى برمجة مسائل عديدة في الفيزياء وتكوين برنامج يحاكي التجارب الفيزيائية نظرياً، وهذا يؤدي الى اختصار الوقت والجهد في تنفيذ التجارب وتجنب المخاطر اثناء تنفيذها في المختبر.

الاية

بسم الله الرحمن الرحيم

((أَمَّنْ هو قانتٌ آناءَ اللَّيلِ ساجداً وقائماً يَحذَرُ الآخرةَ ويَرجو

رحمةَ ربِّهِ قلْ هل يستوي الَّذين يعلمونَ والَّذين لا يعلمونَ

إنَّما يَتَذكَّرُ أولوا الألباب)) المزمر–اية 9

صدق الله العلي العظيم

الاهداء

الفصل الاول

الفصل الثاني

المصادر

University of AL-Qadisiyah

Education College

Department of Mathematics

Automation solution of mathematical physic problems

A paper

Submitted to the council of mathematic dept.-College of education

University of Al- Qadisiyah As a Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree Of Bachelor of Science in Mathematics

By

KAiri Shaker Abdulla

Supervised By

Dr. Methaq Hamza Geem

2018-2019

Abstract:

This research deals with the study of the Automation of some mathematical physics problems, there is different between the automation and the programming. Programming means writing an algorithm in one of the programming languages and executing it. The automation means discussing all the cases of problem solving and writing a special code for these cases.

Many scientists believe that automatization means abandoning human labor. This perception is not true, as automation creates additional jobs. The programming of these functions leads to the addition of software elements that need human hands to manage and organize them. Studies have revealed that millions of people have benefited from automation by combining two fixed jobs to ensure economic security, and the other to compensate for unforeseen expenses and raise living standards, helping cities move from stagnation to recovery.

Hence, many physicists need to program many questions in physics and create a program that simulates physical experiments theoretically, and this reduces the time and effort in the implementation of experiments and avoid risks during the implementation in the laboratory.

المقدمة:

هي فرع من الفيزياء، يتسم بالنزعة الرياضية غير المسبوقة في أي من العلوم الأخرى. تحاول الفيزياء إيجاد حلول رياضية لتفسير الظواهر الطبيعية وصياغتها في نظريات شاملة. والنظرية السليمة هي تلك النظرية التي لا تقتصر على تفسير ظاهرة معينة فقط بل يمتد تطبيقها إلى التنبؤ بنتائج لظواهر أخرى تتعلق بالظاهرة التي تم تفسيرها رياضياً .مثال على ذلك النظرية النسبية لأينشتاين حيث أشارت حساباته إلى حيود الضوء عند مروره بمجال جاذبية جرم سماوي كبير، إذ أنه طبقا للنظرية النسبية العامة تتسبب الجاذبية في انحناء الفضاء حول الجرم السماوي مما يعمل على حيود الضوء (أي أن ينحني شعاع الضوء عن مساره المستقيم) المار بهذا المجال ويغير اتجاهه.

هذا ما وجدته النظرية النسبية، وبعدها بسنوات حدث خسوف كلي للشمس، وكانت فرصة للعلماء أن يختبروا خلال ذلك الخسوف الكلي اختبار صحة نظرية أينشتاين .وفعلا وقف الراصدون من جميع أنحاء العالم لمراقبة السماء التي أظلمت وقت الخسوف الكلي، ومشاهدة نجما كان من المفروض أن يكون وضعه خلف الشمس تماما. ولكن النجم ظهر بجانب الشمس المختفية، وهذا معناه أن الشعاع الخارج من النجم والذي يمر في مجال الجاذبية للشمس انحني عن مساره المستقيم ووصل الأرض ورآه الراصدون. وكان ذلك دليلا على صحة نظرية أينشتاين التي صاغها على أساس حسابات رياضية بحتة.

ومن علماء الرياضة البحتة من صاغ نظاما للمعادلات ودوالا مبنية على الرياضة البحتة. وتكون تلك الدوال بمثابة وسائل يستغلها الفيزيائيون لحل معضلات حساباتهم. ومثال على ذلك متسلسلة فورييه المركبة، وتحليل فورييه لحل بعض الدوال التي يصعب حلها بالطرق الرياضية العادية، فتستخدم متسلسلة فورييه المركبة لحل الدوال الفيزيائية التي تصف شكل الموجات في الدوال الدورية .وفي حالة أن تكون الدالة غير دورية نستخدم معها تحويل فورييه لحلها، فيكون تحليل فورييه بمثابة معول وأداة لمساعدتنا على حل مسألة يصعب حلها بالطرق المعتادة. وينضم إلى تلك الدوال تحويل لابلاس الذي يشكل أيضا وسيلة لحل المسائل المعقدة.

يتكون البحث من فصلين حيث ناقش الفصل الأول اوليات تحويل لابلاس وكذلك اهم قواعد النمذجة الرياضية باعتبار ان مسائل الفيزياء الرياضية هي نابعة من النمذجة الرياضية ، اما الفصل الثاني فقد تناول اساسيات برنامج Maple وكذلك برمجة المسائل الفيزياء الرياضية واتمتها التي هي موضوع الدراسة.

1.1 الفصل الاول/ البند الاول/تحويلات لابلاس.

1.1.1تعريف:

تحويل لابلاس هو تحويل خطي يتم فيه تحويل الدوال الى دوال ذات متغير جديد يعرف بمتغير لابلاس، كما يمكن التعبير عن تحويل لابلاس بالشكل الاتي:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

حيث ان:

$F(s)$: دالة بالمتغير s.

$f(t)$ دالة زمنية بالمتغير t.

L: يرمز الى تحويل لابلاس.

كما أن تحويل لابلاس العكسي يكن كتابته كما يلي:

$$L^{-1}\big(F(s)\big) = L^{-1}(L(f(t))) = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

1.1.2 مثال:

$$L\{ e^{at} \} = \frac{1}{s - a} \qquad ; \ L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{ \cos \square t \} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \cos t\, dt$$

$$= \left. \frac{e^{-st} (-s \cos wt + w \sin wt)}{w^2 + s^2} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

1.1.3 مثال:

(let t = z/s, dt = dz/s) $L\{ t^n \} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{z}{s}\right]^n e^{-z} \frac{dz}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty z^n e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , n = 1,2,3, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad L\{ t^n \} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

1.1.4 مبرهنة:

$$L\{ a\, f(t) + b\, g(t) \} = a\, L\{ f(t) \} + b\, L\{ g(t) \}$$

1.1.5 مثال:

$L\{ 1/t \} = ??$

$$L\{1/t\} = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}\, dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt$$

0 □≤ t ≤ 1, $e^{-st} \geq e^{-s}$;

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt \geq e^{-s} \int_0^1 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt$$

$$\int_0^1 t^{-1}\,dt = \lim_{A\to 0}\int_A^1 t^{-1}\,dt = \lim_{A\to 0} \ln t \Big|_A^1$$

$$= \lim_{A\to 0} (\ln 1 - \ln A) = \lim_{A\to 0} (-\ln A) = \infty$$

$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}\,dt$ متباعدة,

1.1.6 تعريف:

الدالة **f(t)** تسمى مستمرة متقطعة في الفترة $a \le t \le b$ اذا كانت مستمرة على فترات جزئية منتهية وكذلك تمتلك غاية من اليمين و اليسار على هذه الفترات.

1.1.7 مبرهنة:

لتكن **f** دالة مستمرة استمرارية متقطعة لكل $t \ge 0$ بحيث:

$$| f(t) | \le M e^{\gamma t}$$

حيث γ, M ثوابت ليست سالبة، فان: $L\{ f(t) \}$ موجود

البرهان:

$$| L\{ f(t) \} | = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \right| \le \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\,dt$$

$$\int_0^\infty M e^{\square t} e^{-st}\,dt = \frac{M}{s - g}$$

$\Rightarrow \quad L\{ f(t) \}$ موجودة.

1.1.8 مثال:

هل ان : $L\{ t^n \}$ موجودة؟

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad t^n \leq n!\, e^t$$

$\Rightarrow \quad L\{ t^n \}$ موجود.

1.1.9 مبرهنة:

$$L\{ f'(t) \} = s\, L\{ f(t) \} - f(0^+)$$

$$L\{ f^{(n)} \} = s^n L\{ f \} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

1.1.10 مثال:

$$L\{ e^{at} \} = ??$$

$$f(t) = e^{at}, \qquad f(0) = 1$$

$$f'(t) = a\, e^{at}$$

$$\Rightarrow \quad L\{ f'(t) \} = s\, L\{ f(t) \} - f(0)$$

$$L\{ a\, e^{at} \} = s\, L\{ e^{at} \} - 1$$

$$a\, L\{ e^{at} \} = s\, L\{ e^{at} \} - 1$$

$$\Rightarrow \quad L\{ e^{at} \} = \frac{1}{s - a}$$

1.1.11 مثال:

$$L\{ \sin at \} = ??$$

$$f(t) = \sin at \quad , f(0) = 0$$

$$f'(t) = a \cos at \quad ,f'(0) = a$$

$$f''(t) = a^2 \sin at$$

$$L\{ f''(t) \} = s^2 L\{ f(t) \} - s\, f(0) - f'(0)$$

$$\Rightarrow \quad L\{ a^2 \sin at \} = s^2 L\{ \sin at \} - s \times 0 - a$$

$$a^2 L\{ \sin at \} = s^2 L\{ \sin at \} - a$$

$$\Rightarrow \quad L\{ \sin at \} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

1.1.12 مثال:

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$$

الحل:

$$L\{ y'' - 4y \} = L\{ 0 \}$$

$$\mathbf{L\{ y'' \} -} 4 L\{ y \} = 0$$

$$\mathbf{s^2 L\{ y \} - s\, y(0) - y'(0)} - 4 L\{ y \} = 0$$

$$s^2 L\{ y \} - s - 2 - 4 L\{ y \} = 0$$

$$L\{ y \} = \frac{s + 2}{s^2 - 4} = \frac{1}{s - 2} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{2t}$$

1.1.13 ملاحظة:

$$L\{ f'(t) \} = s\, L\{ f(t) \} - f(0^+)$$

$$\text{if } f(0) = 0 \Rightarrow \quad L^{-1}\{ s\, \bar{f}(s) \} = f'(t)$$

1.1.14 مثال: اذا كان

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = \sin t$$

جد $L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} = ??$

الحل:بما ان :

$$\sin(0) = 0$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} = \frac{d}{dt}\, L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \Rightarrow$$

$$= \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

1.1.15 مبرهنة:

$$L\{ t^n f(t) \} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{d s^n} = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s) \quad -1$$

$$L\{ t\, f(t) \} = -\bar{f}\,'(s)$$

$$L\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} \bar{f}(\tilde{s})\, d\tilde{s} \quad -2$$

-3

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

$$g(t) = f(t-a)\,u(t-a)$$

-4

$$L\{ f(t-a)\,u(t-a) \} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,u(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt \quad (x = t-a)$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(x+a)} f(x)\,dx$$

$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = e^{-sa} L\{ f(t) \} = e^{-sa} \bar{f}(s)$$

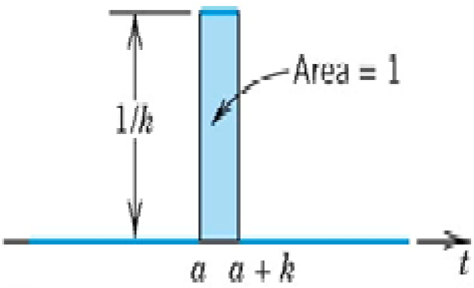
$$\Rightarrow \quad L\{ f(t-a)\,u(t-a) \} = e^{-as} L\{ f(t) \} = e^{-as} \bar{f}(s)$$

$$L^{-1}\{ e^{-sa} \bar{f}(s) \} = f(t-a)\,u(t-a)$$

1.1.16 تعريف: لتكن

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, a \le t \le a+k \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$I_k = \int_0^{\infty} f_k(t)\, dt = 1 \qquad ,$$



The function $f_k(t - a)$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t)\, g(t)\, dt = g(0)$$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\, g(t)\, dt = g(a)$$

$$L\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}(t-a)\, dt = e^{-as}$$

1.1.17 تعريف:

يعرف الالتفاف للدوال f,g كالاتي:

$$(f*g)(t) \equiv \int_0^t f(t-v)\, g(v)\, dv$$

1.1.18 مبرهنة:

(a) $f*g = g*f$

(b) $f*(g_1 + g_2) = f*g_1 + f*g_2$

(c) $(f*g)*v = f*(g*v)$

(d) $f*0 = 0*f = 0$

(e) $1*f \neq f$

1.1.19 مبرهنة:

ليكن :

$\bar{f}(s) = L\{f(t)\}$ and $\bar{g}(s) = L\{g(t)\}$

فان

$$L\{(f*g)(t)\} = \bar{f}(s)\,\bar{g}(s)$$

1.1.20مبرهنة:

1- $L(u_t) = pU(x,p) - u(x,0)$

$L(u_{tt}) = p^2U(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0)$

2- $L(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,p)$

$L(u_{xx}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,p)$

حيث $U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-pt}dt$

1.1.21 مثال: جد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$u_t = e^x \cos t \quad ; \quad u(x,0) = 0$$

الحل:

$$L(u_t) = L(e^x \cos t)$$

$$pU(x,p) - u(x,0) = e^x L(\cos t) = e^x \frac{p}{1+p^2}$$

$$pU(x,p) = e^x \frac{p}{1+p^2}$$

$$U(x,p) = e^x \frac{1}{1+p^2}$$

$$u(x,t) = e^x \sin t$$

1.2 حل مسائل العلوم الطبيعية بأستخدام المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية هي واحدة من الأدوات الأكثر شيوعاً والقوية لحل المسائل العلمية الرياضية. على وجه الخصوص أنها تستخدم لحل مسائل العلوم الطبيعية: الميكانيكا النظرية والفيزياء والكيمياء والبيولوجي. في العديد من مشاكل البصريات الهندسية ورسم الخرائط، وغيرها من مجالات العلوم الطبيعية، يصبح من الضروري العثور على منحنيات وتحديد خصائصها وعادة ما يتم حل مثل هذه المسائل (هندسياً) مع مساعدة المعادلات التفاضلية.

1.2.1 النمذجة الرياضية :

في دراسة رياضية لاي مسألة من مسائل العالم الحقيقي يمكن تحديد ثلاث مراحل وهي:

- بناء نموذج رياضي للمسألة.
- دراسة هذا النموذج الرياضي والحصول على حل للمسألة الرياضية المقابلة.
- تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها لمسائل عملية.

عند بناء نموذج رياضي لظاهرة أو عملية، فمن الضروري ايجاد امثليتها وتشكيلها ، في حالة مثالية الظاهرة، يتم فصل الظروف التي تؤثر بشكل كبير عليها من الظروف التي ليس لها تأثير كبير، فمثلاً مخطط لدراسة حركة البندول – في هذه الحالة، يتم تجاهل حجم وشكل الحمل، ومقاومة الهواء، والاحتكاك عند نقطة التعليق، ومرونة الخيط، وما إلى ذلك.

دراسة هذا المخطط المثالي يمكن أن تشكل من خلال تكوين معادلة التفاضلية. بعد ذلك، من الضروري التحقيق في مدى حدود وشروط هذا التشكيل، وكيفية تغير الحالة عند حساب العوامل المستبعدة، وما إلى ذلك.

<u>1.2.2 حل المسائل الفيزياوية بأستخدام المعادلات التفاضلية:</u>

ووفقا لما قيل في الفقرات، يجب أن يمر حل المسألة المادية في الحياة الحقيقية بثلاث مراحل:

- صياغة معادلة تفاضلية.
- حل هذه المعادلة.
- دراسة الحل الذي تم الحصول عليه.

ويوصى هنا بسلسلة من الإجراءات التالية:

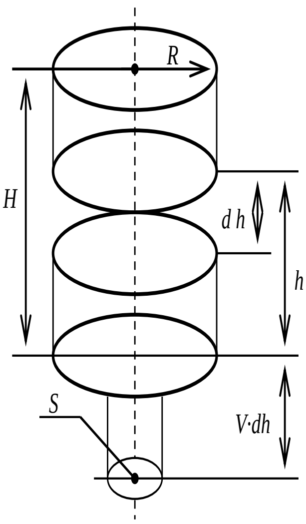
1. تعيين القيم التي تتغير في هذه الظاهرة، وتحديد القوانين المادية التي تربطهم.
2. تحديد المتغير المستقل ودالة المتغير المطلوب.
3. استنادا إلى شروط المشكلة، يتم تحديد الشروط الأولية أو الحدودية.
4. التعبير عن جميع الكميات في حالة المشكلة من خلال متغير مستقل، الدالة ، ومشتقات هذه الدالة.
5. بناء على شروط المشكلة والقانون المادي الذي تلتزم به هذه الظاهرة، تشكل معادلة تفاضلية.
6. إيجاد الحل العام أو التكامل العام للمعادلة التفاضلية.
7. في ظل الشروط الأولية أو الحدودية، يتم العثور على حل خاص.
8. التحقق من هذا الحل.

في كثير من الحالات، تستند صياغة المعادلة التفاضلية إلى ما يسمى "خطية العملية في الاصغرية"، أي على الاختلاف في الدوال التي تعبر عن اعتماد الكميات. وكقاعدة عامة، يمكننا أن نفترض أن جميع الكميات المشاركة في هذه العملية أو تلك تتغير في غضون فترة قصيرة من الزمن بمعدل ثابت. وهذا يسمح لنا بتطبيق القوانين المعروفة في الفيزياء، واصفا الظواهر التي تحدث بشكل موحد، لتكوين علاقة بين قيم t، $t + \Delta t$، أي بين الكميات المتضمنة في العملية وزياداتها. وليس للمساواة الناتجة سوى طابع تقريبي، لأن الكميات تختلف، حتى في فترة قصيرة من الزمن، بشكل عام،و بشكل غير متساو. ولكن، إذا قمنا بتقسيم كلا الجانبين من المساواة الناتجة عن Δt والذهاب إلى الحد الأقصى، عندما $\Delta t \to 0$، نحصل على المساواة بالضبط. أن هذا التشكيل يتضمن الوقت t، والكميات الفيزيائية ومشتقاتها التي تتغير مع مرور الوقت، وهذا هو معادلة التفاضلية التي تصف ظاهرة معينة. ويمكن الحصول على المعادلة نفسها في شكل تفاضلي باستبدال الزيادة Δt بواسطة dt التفاضلي، واستبدال الدوال بواسطة الفروق التفاضلية.

وهكذا، عندما نقوم بصياغة معادلة التفاضلية، فاننا نأخذ "لقطة موجزة" لعملية في وقت معين، وعند حل المعادلة للقطات لحظية، فان هذا يمكننا من استعادة استمرارية العملية. في اغلب الحالات يستخدم النموذج الخطي لوصف الظواهر ، وعلى الرغم من أن هناك عمليات يستحيل فيها النموذج الخطي (على سبيل المثال، حركة براونية)، فإن الطريقة الموصوفة في الغالبية الساحقة من الحالات يمكن ان تكون فعالة.

1.2.3 مثال:

في الجزء السفلي من وعاء أسطواني مليئة بالماء ذات ارتفاع H ونصف قطر القاعدة R، يتم إجراء ثقب صغير من المنطقة S (الشكل 1). في أي فترة من الزمن سوف تتدفق كل المياه من الثقب إذا ثلث المياه تتدفق في t_1 ثانية؟



الشكل(1)

الحل: إذا كان تدفق المياه يحدث بالتساوي، فان حل المشكلة سيكون تافه: كل المياه سوف تتدفق في وقت $3t_1$.

ولكن، اذا كان تتدفق الماء بسرعة معينة، ومع انخفاض مستوى المياه في الاسطوانة، ينخفض معدل الانتهاء. وبالتالي، فمن الضروري أن تأخذ في الاعتبار العلاقة بين سرعة التدفق v وارتفاع عمود السائل h فوق الفتحة السفلى.

أظهرت تجارب "توريسيلي" أن السرعة تعبر عنها تقريبا الصيغة

$$v = k\sqrt{2qh}$$

حيث q هو التعجيل بسبب الجاذبية و k هو ثابت العلاقة ويعتمد على لزوجة الوسط وشكل الثقب (للمياه في حالة ثقب دائري، k = 6).

$$-\pi R^2 h' = k\sqrt{2qh}\,.S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

الان لنقم بحل هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى وقابلة للفصل .

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{2qh}\,.S$$

$$-\pi R^2 dh = k\sqrt{2qh}\,.S\ \ dt$$

$$\frac{-\pi R^2 dh}{k\sqrt{2q}\,.S\,\sqrt{h}} = \ \ dt$$

$$\frac{-Adh}{\sqrt{h}} = \ \ dt\ ,\quad A = \frac{\pi R^2}{k\sqrt{2q}\,.S}$$

$$t = -A\left(2\sqrt{h} + C\right)\ ,\qquad C \text{ ثابت} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

ويعتمد الثابت A على حجم وشكل الفتحة، ولزوجة السائل وغيرها من المعلمات الفيزيائية، والثابت C نشأ أثناء حل المسألة. إن قيمهم ليست معروفة لنا، ولكن يمكن العثور عليها من خلال مراعاة الظروف غير المستخدمة للمسألة. لايجاد قيمة C، نستخدم الشروط الأولية: في بداية تدفق السائل، تم ملء القنينة، أي في $t = 0$، ارتفاع $h = H$.

وباستبدال $t = 0$، $h = H$ في معادلة (3)، نحصل على:

$$C = -2\sqrt{H}\,.$$

اي ان معادلة (3) تصبح بالشكل الاتي:

$$t = 2A\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$$

لايجاد قيمة A، نأخذ في الاعتبار أنه في أول دقيقة t_1، ثلث السائل بأكمله تدفق خارجاً. وهذا يقابل انخفاضا في مستوى السائل بمقدار $H / 3$. وبعبارة أخرى، بالنسبة إلى $t = t1$ لدينا: $h = H - H / 3 = 2H / 3$. وبالتالي نجد أن:

$$t_1 = 2A(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{2}{3}H}) = 2A\sqrt{H}(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$$

لذلك فان قيمة A هي:

$$A=\frac{t_1}{2\sqrt{H}\,(1-\sqrt{\frac{2}{3}})}=\frac{3t_1(1+\sqrt{\frac{2}{3}})}{2\sqrt{H}}\,........(4)$$

الآن ليس من الصعب العثور على وقت تفريغ القنينة، أي. العثور على قيمة t التي تجعل h = 0:

$$t=2A(\sqrt{H}-\sqrt{0})=\frac{3t_1(1+\sqrt{\frac{2}{3}})}{\sqrt{H}}(\sqrt{H}-0)=3t_1(1+\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

لايجاد t_1 ثم ايجاد الزمن الحقيقي:

$$t=3t_1(1+\sqrt{\frac{2}{3}})=\frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2q}}.$$

الجواب. كل المياه سوف تتدفق من خلال ثقب في فترة من الزمن:

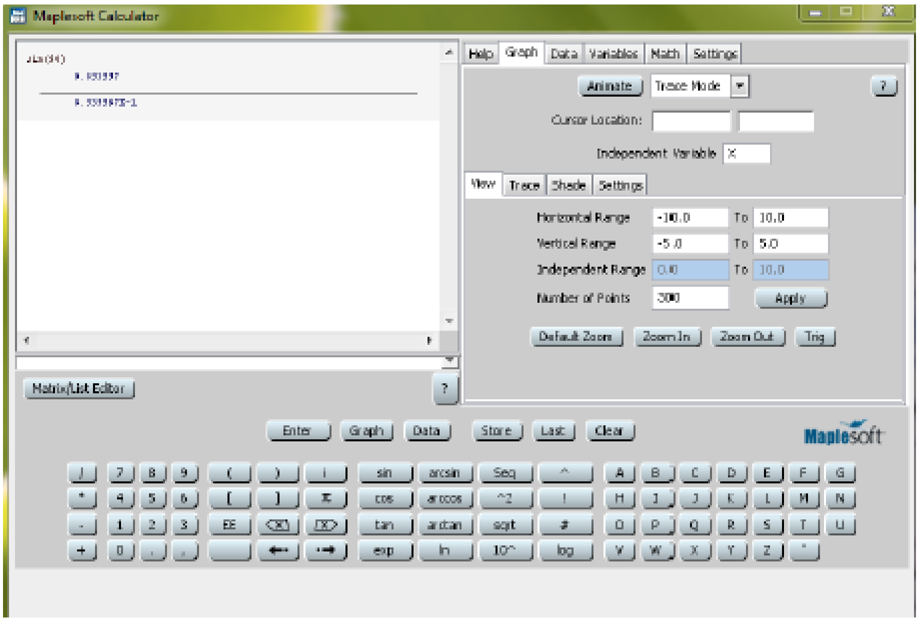
$$t=\frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2q}}.$$

2.1 برنامج Maple:

مابل (Maple) برنامج حساب تحليلي متقدم حيث يقوم بحل المسائل بالحلول العددية (numerical) و التحلول التحليلية (analytic) وهذا يعني مقدرة برنامج مابل على التعامل مع الدوال و التعابير الرياضية التي تحتوي على المتغيرات و الرموز .

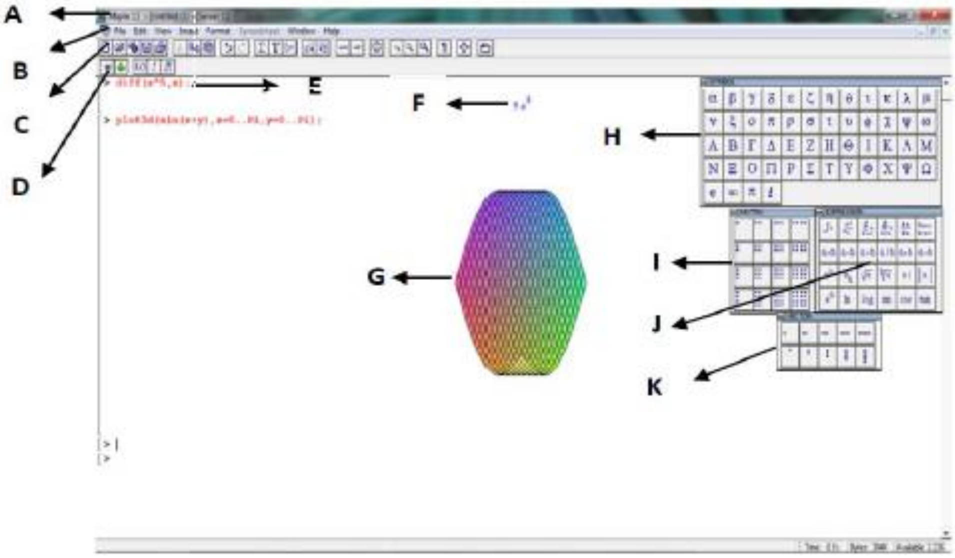
2.1.1 تشغيل برنامج Maple:

عند تنزيل برنامج مابل الى الحاسبة سوف تظهر ثلاث ايقونات الأولى هي الالة الحاسبة ومن خلالها نستطيع القيام بكل الحسابات العددية كما في الحاسبة العادية بالإضافة الى العديد من الحسابات المتقدمة و المعقدة بالإضافة الى قدرتها على رسم الدوال و التعابير الرياضية .



الشكل 1-1 الآلة الحاسبة لمابل

اما الايقونة الثانية فهي واجهة ادخال الأوامر بشكل مباشر ويتم تنفيذها مباشرة بعد الانتهاء من كتابة الامر و الضغط على مفتاح (enter) من لوحة المفاتيح.



الشكل 2-1 ورقة عمل مابل القياسية (Classic Worksheet Maple X)

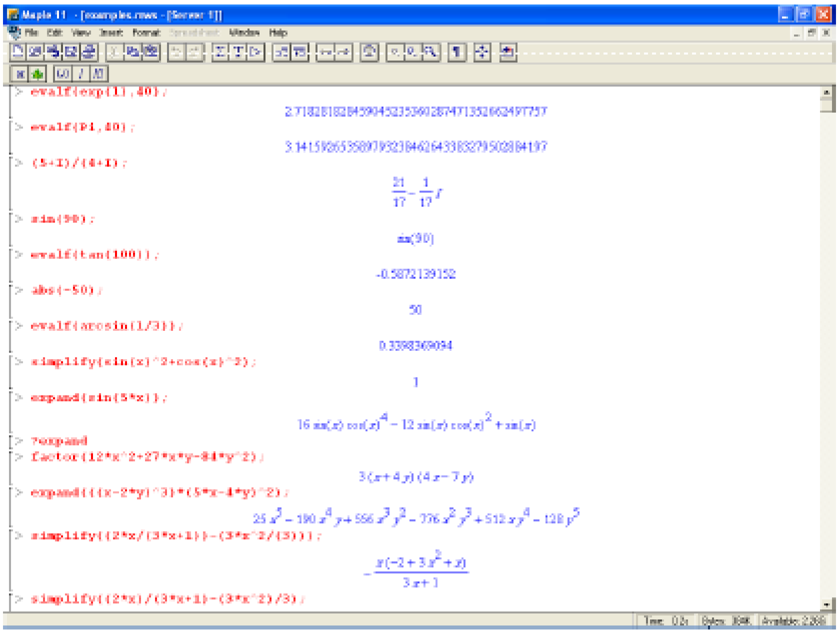
وتحتوي على عدة قوائم منها:

- **قائمة ملف (File)**
- **قائمة تحرير (Edite)**
- **قائمة عرض (View)**
- **قائمة ادراج (Insert)**
- **قائمة تنسيق (Formatting)**
- **قائمة النوافذ (Windows)**
- **قائمة المساعدة** (Help)

<u>2.1.2 فتح وحفظ وتصدير أوراق العمل :</u>

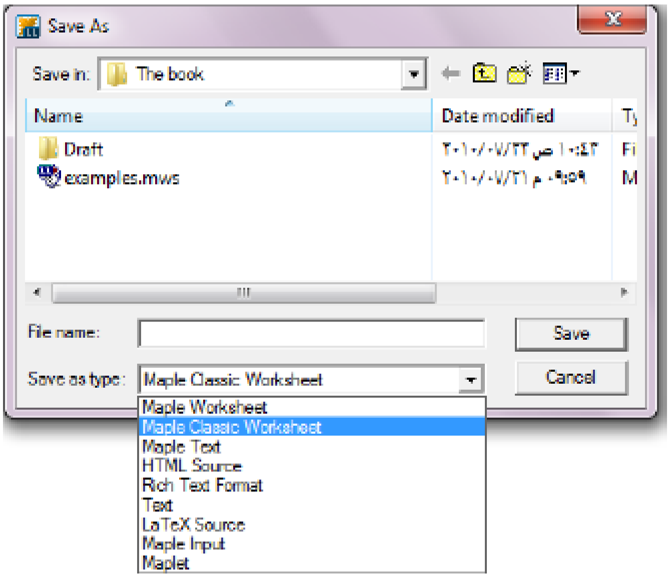
لفتح أي ملف خاص ببرنامج مابل يجب ان يكون امتداده (mws) . ممكن زيارة عدة مواقع لتحميل برامج ببرنامج مابل ومنها الموقع:

http://www.maplesoft.com/



الشكل 1-33 صفحة عمل مابل

لحفظ ورقة العمل في برنامج مابل عن طريق المسار الاعتيادي للحفظ وفتح نافذة الحفظ من قائمة ملف لتظهر النافذة الاتية:



ولتصدير ورقة عمل من برنامج مابل عن طريق المسار التالي:

File→ Export As

لتظهر النافذة الاتية:

2.1.3 العمليات الحسابية و التعابير الرياضية:

العملية	التعبير الاعتيادية	التعبير في برنامج مابل
+	a+b	a+b;
-	a-b	a-b;
*	a.b	a*b;
/	a/b	a/b;
^	a^b	a^b
الحساب التقريبي لتعبير معين expr ل n من المراتب الدقة	evalf(expr,n)	evalf(expr,n)
اللوغارتم الاعتيادي	Logx	Log(x)
اللوغارتم الطبيعي	Lnx	Ln(x)
الادالة الاسية	e^x	exp(x)
الدالة المطلقة	$\|x\|$	Abs(x)
الجذر التربيعي	$\sqrt{x}$	Sqrt(x)
مفكوك العدد	n!	n!
الدوال المثلثية	Sinx,cosx,tanx	Sin(x),cos(x),tan(x)
معكوس الدوال المثلثية	$Sin^{-1}x,cos^{-1}x,tan^{-1}x$	Arcsin(x),arccos(x),arctan(x)
دالة كاما	Gamma	Gamma
دالة بيسل	Bessel	Bessel
دالة ريمان زيتا	Rieman zeta	Zeta

2.1.4 حساب التفاضل و التكامل:

لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فاننا يمكن ان نجد المشتقات للدالة f عن طريق برنامج مابل وبالصيغ الاتية:

ت	تعبير الدالة	تعبير الدالة في مابل
1	$f'(x)$	Diff(f(x),x)
2	$f^{(n)}(x)$	Diff(f(x),x^n)
3	الاشتقاق الضمني	Implicitdiff(f(x)=expr,y,x);
4	تحليل الدوال	Factor(f(x));
5	التكامل	Int(f(x),x=a...b)
6	المشتقات الجزئية بالنسبة ل x	Diff(f(x,y),x)
7	المشتقات الجزئية بالنسبة ل y	Diff(f(x,y),y)
8	المشتقات الجزئية بالنسبة ل x,y	Diff(f(x,y),x,y)
9	المؤثر التفاضلي الجزئي ل x	D[1](f)(x,y)
10	المؤثر التفاضلي الجزئي ل y	D[2](f)(x,y)

2.1.5 المعادلات التفاضلية في مابل:

المعادلات التفاضلية الاعتيادية:

- `diff`

```
diff(y(x),x), diff(y(x),x,x), diff(y(x),x,x,x), . . .
```

ولحل المعادلة التفاضلية نستخدم الامر :

```
dsolve(ode,Y)
```

مثال:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{x+3}$$

```
> ode:=diff(y(x),x)=(y(x)-1)/(x+3);
```

$$ode := \frac{d}{dx}y(x)=\frac{y(x)-1}{x+3}$$

```
> dsolve(ode,y(x));
```

$$y(x)=1+(x+3)\_C1$$

2.1.6 الحلول العددية للمعادلات التفاضلية في مابل:

يمكن إيجاد الحل العددي للمعادلة التفاضلية عن طريق الامر numeric.

مثال:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^3, \quad y(0)=0$$

الحل:

```
> de:=diff(y(x),x)=3*x^3+2*y(x)^2:
IVP:={de,y(0)=0};
```

$$IVP := \{\frac{d}{dx}y(x)=3x^3+2y(x)^2, y(0)=0\}$$

```
> nsol := dsolve(IVP,y(x),numeric);
```

$$nsol := \mathbf{proc}\ (x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> for i from 0 to 9 do
nsol(i/10);
> end do;
>
```

$$[x = 0., y(x) = 0.]$$
$$[x = 0.10000000000000 , y(x) = 0.000075000645080260211\,8]$$
$$[x = 0.20000000000000 , y(x) = 0.0012001473125597276\,0]$$
$$[x = 0.30000000000000 , y(x) = 0.0060774326943384329\,0]$$
$$[x = 0.40000000000000 , y(x) = 0.0192338048746927906]$$

2.1.7 تحويلات لابلاس في مابل:

تحويلات لابلاس موجودة ضمن حزمة inttrans فلابد من استدعاء هذه الحزمة أولا ثم كتابة البرنامج المطلوب.

```
> with(inttrans);
```

مثال:

(1)

```
> laplace(1,t,s);
```

$$\frac{1}{s}$$

(2)

```
> laplace(exp(a*t),t,s);
```

$$\frac{1}{s-a}$$

(3)

```
> laplace(sin(b*t),t,s);
```

لايجاد المعكوس لتحويل لابلاس نستخدم الامر الاتي: invlaplace

مثال:

(1)

```
> invlaplace(2/s^3,s,t);
```

$$t^2$$

(2)

```
> invlaplace(3/(s^2+9),s,t);
```

$$\sin(3\, t)$$

(3)

```
> invlaplace((s-1)/(s^2-2*s+5),s,t);
```

$$e^{t} \cos(2\, t)$$

(4)

```
> invlaplace(5/(s-6)-
(6*s)/(s^2+9)+3/(2*s^2+8*s+10),s,t);
```

$$5\, e^{(6\, t)} - 6 \cos(3\, t) + \frac{3}{2}\, e^{(-2\, t)} \sin(t)$$

2.2 البرمجة في برنامج Maple:

2.2.1 جمل السيطرة و التحكم Flow control:

```
> if conditional_expression1 then
     statement_sequence1
  elif conditional_expression2 then
     statement_sequence2
  elif conditional_expression3 then
     statement_sequence3
  ...
  else
     statement_sequenceN
  end if;
```

مثال:

```
> a := 3; b := 5;
```

$$a := 3$$

$$b := 5$$

```
> if (a > b) then a
else b
end if;
```

$$5$$

مثال:

```
> x := 1173:
if not isprime(x) then
ifactor(x);
end if;
```

$$(3)\,(17)\,(23)$$

2.2.2 جمل التكرار:

```
> for counter from initial by increment to final do
    statement_sequence
  end do;
```

مثال:

جد الجذر التربيعي في الفترة [1,5].

الحل:

```
> for n to 5 do
evalf(sqrt(n));
end do;
```

$$1.$$
$$1.414213562$$
$$1.732050808$$
$$2.$$
$$2.236067977$$

2.2.3 اتمتتة بعض مسائل الفيزياء الرياضية:

مسألة -1:

لنأخذ المعادلة التفاضلية الاتية:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t)\ ,x>0,t>0,$$

$$u(x,0)=ic1(x)\quad ,u_t(x,0)=ic2(x),$$

$$u(0,t)=bc1(t)\quad ,u_x(0,t)=bc2(t),$$

البرمجة:

```
>f(x,t):=cos(t);
> a:=1;b:=1;
```

```
> expr:=a*diff(u(x,t),x,x)+b*diff(u(x,t),t,t);
> f(x,t);x >0 , t >0;
> ic1:=u(x,0)=ic1(x); x >0;
```

> ic2:= $D[2](u)(x,0) = ic2(x); x > 0;$

```
> bc1:=u(0,t)=bc1(t); t >0;
```

> bc2:= $D[1](u)(0,t) = bc2(t); t > 0;$

$$expr \coloneqq a(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + b(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) = f(x,t)\ , x > 0, t > 0,$$

$$ic1 \coloneqq u(x,0) = ic1(x)\ \ , ic2 \coloneqq D[2](x,0) = ic2(x),$$

$$bc1 \coloneqq u(0,t) = bc1(t)\ \ , bc2 \coloneqq D[1](u)(0,t) = bc2(t),$$

ثم نستخدم حزمة لابلاس و معكوسة لحل هذه المعادلة.

```
>with(intrans,laplace,invlaplace);
>laplace(expr,t,p);
>subs(v(t)=laplace(u(x,t),t,p)%);
>dsolve({%,v(0)=laplace(rhs(ic1),x,p),D(v)(0)=
>laplace(rhs(ic2),x,p)},{v(t)});
>subs(v(t)=laplace(u(x,t),t,p)%);
>invlaplace(%,p,x);
```

مسألة-2:

لناخذ مسالة الحرارة الاتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)\ , L > \ x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = ic(x) \quad ,$$

$$u(0,t) = 0 \ \ , u(L,t) = 0,$$

البرمجة:

```
>eq:=diff(u(x,t),x$2)+a*diff(u(x,t),t)=f(x,t);
>ic:=u(x,0)=ic(x);
>bc1:=u(0,t)=0;
>bc2:=u(L,t)=0;
```

$$eq := (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + a(\frac{\partial u}{\partial t}) = f(x,t)\ , L > \ x > 0, t > 0,$$

$$ic \coloneqq u(x,0) = ic(x) \quad ,$$

$$bc1 \coloneqq u(0,t) = 0 \ \ , bc2 \coloneqq \ u(L,t) = 0,$$

```
>with(inttrans,laplace,invlaplace);
>p:=laplace(eq,t,p);
>ode:=subs(laplace(u(x,t),t,p)=U(x),ic,p);
>res:=dsolve(ode,U(x));
>assume(x>0);u:=ivlaplace(U,p,t);x:='x';
```

المصادر

[1] G.S. Beloglazov, A.L. Bobrick, S.V. Chervon, MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEMS AND SOLUTIONS, Samara, Russian Federation,Samara University Press,2010.

[2] Frank Y. Wang, Physics with Maple™, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, December 11, 2005.

[3] Joel L. Schiff, The Laplace Transform:Theory and Applications, Springer , 2017.

[4] Michael Stone, Methods of Mathematical Physics I, PIMANDER-CASAUBON, Alexandria _ Florence _ London, USA, 2002.

[5] Michael P. Brenner, Physical Mathematics, School of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, 2010.

[6] Steven J. DESJARDINS, ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS LAPLACE TRANSFORMS AND NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS, Department of Mathematics and Statistics, Universit´e d'Ottawa / University of Ottawa , Canada K1N 6N5, 2011.

[7] الدكتور بلال بطيحة، المرجع البسيط في Maple ، جامعة طرابلس، ليبيا، 2015.