جامعة القادسية
كلية التربية
قسم الرياضيات

حول

تبولوجيا البيان الموجه

بحث مقدم الى
مجلس قسم الرياضيات كلية التربية كجزء
من متطلبات نيل درجة البكالوريوس
في علوم الرياضيات

من قبل
الطالبة فاطمة عبد الامير

إشراف
الأستاذ المساعد الدكتور ستار حميد حمزه

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سَبِّحِ اسْمَ رَبِّكَ الْأَعْلَى (١) الَّذِي خَلَقَ فَسَوَّى (٢) وَالَّذِي قَدَّرَ فَهَدَى
(٣) وَالَّذِي أَخْرَجَ الْمَرْعَى (٤) فَجَعَلَهُ غُثَاءً أَحْوَى (٥) سَنُقْرِئُكَ فَلَا
تَنْسَى (٦) إِلَّا مَا شَاءَ اللَّهُ إِنَّهُ يَعْلَمُ الْجَهْرَ وَمَا يَخْفَى (٧)

الايات(١-٧)

سورة الاعلى

الاهداء

الى من بلغ الرسالة وادى الأمانة ونصح الأمة .. الى نبي الرحمة .. ونور العالمين سيدنا محمد (صلى الله علية واله وسلم)

* * * *

الى من اعطاه الله بالهيبة والوقار .. الى من علمني العطاء دون انتظار
الى من احمل اسمه بكل افتخار .. الى من حصد الأشواك عند دربي
ليمهد لي طريق العلم .. والدي العزيز

* * * *

الى ملاكي في الحياة .. الى معنى الحب والحنان والتفاني
الى بسمة الحياة وسر الوجود .. الى من كان دعاءها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي
الى القلب الناصع بالبياض .. والدتي العزيزة

*

* * *

الى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة الى رياحين حياتنا .. اخوتي واصدقائي

* * * *

الى الذين بذلوا كل جهد وعطاء لكي اصل الى هذه اللحظة .. اساتذتي الك
الى كل من ساعدني في انجاز هذا العمل شكري الجزيل وامتناني
الى الذين يضحون بأنفسهم لأجلنا
الى جيشنا الباسل والحشد الشعبي المقدس

الخلاصة

بحثنا يتناول دراسة تبولوجيا البيان الموجه وقدمنا خلال البحث طرق تعريف تبولوجيا مقترنة مع البيان الموجه ودراسة خصائص هذه التبولوجيا وتطرقنا أيضا إلى تعريف البيان المتولد من التبولوجيا وكذلك تشاكل البيان الموجه ودراسة خصائصه.

المحتويات

المقدمة

في الرياضيات ، البيان هو بنية بسيطة تتكون من عقد ووصلات ... عادة ما تمثل العقد عناصر المسألة وتكون الوصلات هي العلاقة بين هذه العناصر ...

في العالم الحقيقي ... قد تكون هذه العقد مدناً ... والوصلات هي الطرق بينها ... أو قد تكون العقد جزيئات كيميائية والوصلات هي الروابط بينها ...

إن الإمكانيات الهائلة التي يستطيع البيان تمثيلها جعلت منه موضوعاً واسعاً جديراً بالدراسة ..

يعود أول استخدام لمصطلح البيان بمدلوله الحالي للعام (١٨٧٨) ... حيث وصف العالم (Sylvester) العلاقات بين الثوابت المتجانسة والطردية في الجبر والمخططات الجزيئية بواسطة البيان (الغراف) ... إلا أن أقدم وثيقة في نظرية البيان هي للعالم (Euler) تعود لعام (١٧٣٦) وتعرف الوثيقة ب مسألة جسور مدينة كونيغسبرغ السبعة .

على مدى عقدين .. استخدم البيان لحل كثير من المسائل كمسألة فارس رقعة الشطرنج ... (إذا وضع فارس على إحدى مربعات رقعة الشطرنج هل بإمكانه أن يزور كلاً من المربعات الأخرى مرة واحدة فقط ويعود إلى مكان انطلاقه) ... هذا السؤال يعود للقرن التاسع الميلادي

إلا أن العالم أويلر كان أول من حاول التفكير بها بنحو رياضي لتحل لاحقاً عام (١٨٢٣) بخوارزمية (Warnsdroff) وعن طريق دراسة بسيطة لدرجات عقد البيان ...

من مسائل البيان القديمة الأخرى مسألة الألوان الأربع التي طرحها (Guthrie) عام (١٨٥٢) وتنص على أن (هل صحيح أن أي خريطة مبسطة يمكن تلوينها فقط بأربع ألوان بحيث أن أي منطقتين متجاورتين سيكون لهما لونان مختلفان؟) ... بقيت هذه المسألة بدون برهان لأكثر من قرن حيث حاول عدد كبير من علماء الرياضيات حلها دون فائدة ولها العديد

من البراهين الخاطئة المنشورة حتى استطاع العالم (Heesch) إيجاد حل بمساعدة الحاسوب عام (١٩٦٩) إلا أن برهان هذه المسألة لم يأت حتى وقت لاحق ... تعد مسألة الألوان الأربع من أهم مسائل البيان لأنها كانت خطوة كبيرة قادت إلى دراسة في تلوين البيان و أنواع جديدة من الدراسات والتصنيفات ...

على الرغم من استخدام البيان في الكثير من مجالات الحياة إلا أنه لم يدرس بحد ذاته حتى

العام (١٩٣٦) حيث ألف العالم (Konig) كتاباً اسماه نظرية البيان ... أصبحت من بعده نظرية البيان فرعاً من فروع الرياضيات يبحث من خلاله عن حلول في مختلف المجالات ...

من تطبيقاتها الحديثة ... في مجالات الطب والصيدلة تستخدم نظرية البيان لدراسة ألية انتشار

الفيروسات ووضع نمط لمحاربتها والحد من انتشارها لا بل وصنع مستحضرات وعقاقير مضادة ... وهناك دراسات حديثة تجري الآن لحل مشاكل معقدة في البيان بيولوجياً واستخدام البيان في المقابل في الوراثة الجينية للحصول على نتائج أفضل (كاستخدام البيان في إيجاد عقارمضاد للأنفلونزا الخنازير) ...

ويجدر بالذكر أيضاً أن البيان يستخدم في تصميم اللوحات الأم و الدارات المتكاملة الحديثة

اللحواسيب ... فضلاً عن استخدامه في تصميم الشبكات الحاسوبية والبرامج المعقدة ...

ففي الشبكات يهمنا أن نعرف أن هناك فرعاً خاصاً من البيان اسمه (Web Graph) يهتم

بدراسة الشبكة العنكبوتية كبيان فيه صفحات الويب هي العقد والروابط التشعبية هي الوصلات ليؤمن بذلك طرقاً سهلة لوضع خوارزميات البحث وتنظيم صفحات الشبكة العنكبوتية ... وفي البرمجيات قبل أن نبدأ بكتابة أي برنامج يجب أن نضع تصوراً له ... وكما ذكرنا فإن البيان قادر على تمثيل أي مشكلة ببساطة ليدرس بذلك المبرمج المشكلة بتجرد ثم يبدأ بإيجاد حل برمجي باستخدام الحاسوب ...

و درسنا في بحثنا طرق توليد تبولوجيا من بيان موجه وقد اخترنا طريقتين ودرسنا الخصائص المتعلقة بها.

وقد قسمنا البحث إلى فصلين ففي الفصل الأول البند الأول اعطينا تعاريف أساسية حول البيان وأنواعه وفي البند الثاني وضحنا طرق تمثيل البيان الموجه وفي الفصل الثاني البند الأول اعطينا الطريقة الأولى لتوليد تبولوجيا من بيان موجه وفي البند الثاني تناولنا مفهوم المجموعات المفتوحة المقترنة مع بيان موجه وتمثل الطريقة الثانية لتوليد تبولوجيا من بيان موجه وفي البند الثالث تناولنا مفهوم تشاكل البيان الموجه ودراسة خصائصه.

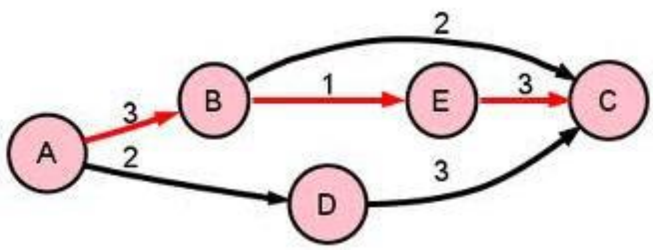
الفصل الأول

نظرية البيان

١,١تعاريف ومفاهيم اساسية

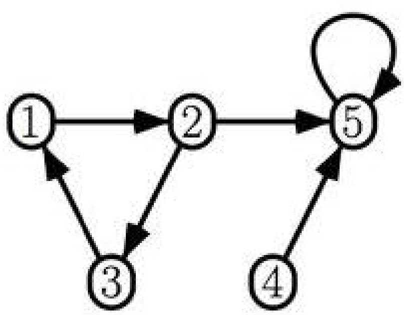
١,١,١. **تعريف: البيان graph= (V,W) =** G يتألف من مجموعة من العقد V ومجموعة من الوصلات E , كل وصلة هي ثنائية (V,W) حيث $v,w \in V$, إذا كانت الثنائية (v,w) مرتبة هذا يعني أن البيان موجه . إذا كان هناك وصلة كان هناك وصلة من v إلى w هذا يعني أن $(v,w) \in V$, بمعنى v عقدة بداية و w عقدة نهاية , ولذلك في البيان الغير موجه من الوصلة(v,w) هناك وصلة من v الى w , و وصلة من w الى v , أحياناً يربط بالوصلة عنصر ثالث هو التكلفة أو الوزن .

١,١,٢. **تعريف: المسار path** في بيان هو سلسلة من العقد w1,w2,w3,...,wn حيث $(wi,wi+1) \in E$ من أجل $1\leq I< N$. طول المسار والتي هي مساوية N−1.



الشكل ٢,١ مسار باللوم الاحمر من A الى B

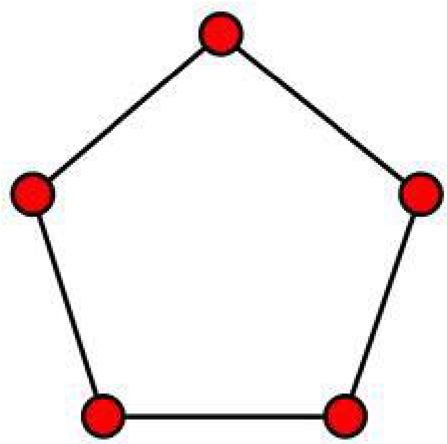
١,١,٣. **تعريف: الحلقة Loop** إذا كانت الوصلة من العقدة نفسها (v,v) .



الشكل ١,٣ بيان يحوي حلقة Loop عند العقدة 5

١,١,٤. **تعريـف: المســار البســيط simple path:** فيـه كـل العقـد تكـون مميـزة بمعنـى غيـر مكررة , باستثناء العقدة الأولى والاخيرة ممكن أن تكون نفسها .

١,١,٥. **تعريـف: الـدورة cycle:** فـي بيـان موجـه هـي مسـار طولـه 1 علـى الاقـل وفيـه w1=wn , هـذه الحلقـة بسـيطة إذا كـان المسـار بسـيط , مـن اجـل البيـان الغيـر الموجـه undirected graph نحتاج أن تكون الوصلات مميزة و غير مكررة .

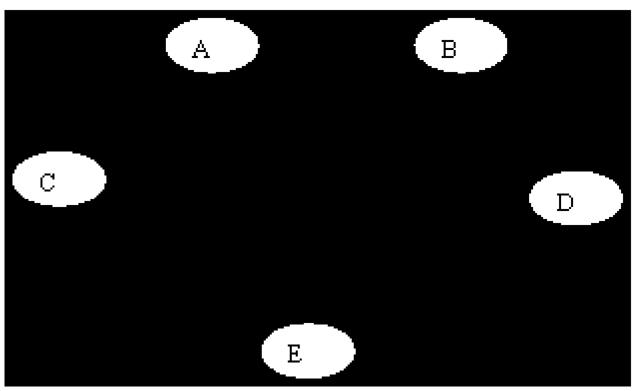


الشكل 1-4 بيان عبارة عن دورة cycle

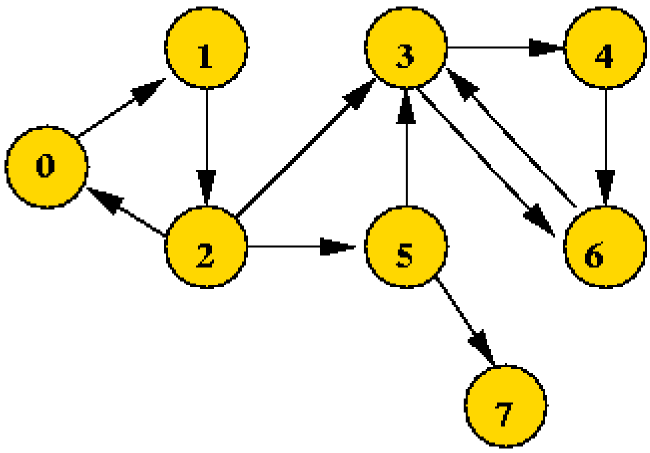
البيان الموجه يسمى acyclic إذا كان لا يحوي دورات .

١,١,٦. **تعريـف:** البيـان المتصـل graph connected هـو بيـان يحـوي مسـار مـن أي عقـدة إلـى أي عقدة أخرى ضمن البيان .

البيـان المتصـل بقـوة graph connected strongly هـو بيـان موجـه يحـوي مسـار مـن أي عقـدة إلى أي عقدة أخرى ضمن البيان .

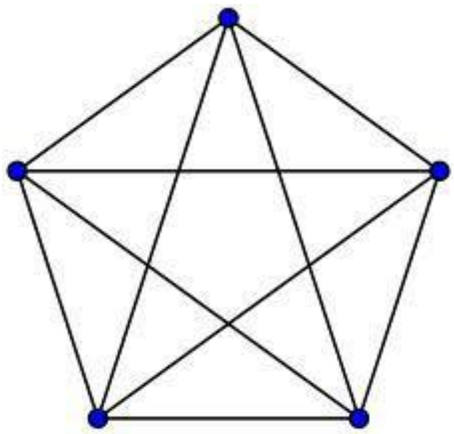


الشكل ١,٥ بيان متصل بقوة



الشكل 1-6 بيان غير متصل بقوة

١,١,٧. **تعريف:** البيان التام complete graph هو بيان يحوي وصلة بين كل زوج من العقد

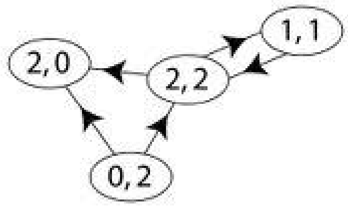


الشكل1-7 بيان تام

١,١,٨. **تعريـف:** درجـة العقـدة degree درجـة العقـدة فـي البيـان الموجـه هـو عـدد الاضـلاع (الوصلات) المرتبطة بهذه العقدة , وهناك نوعان من درجة العقدة في البيان الموجه :

درجة الدخول indegree وهي عدد الاضلاع الداخلة الى هذه العقدة والقادمة من عقد اخرى .

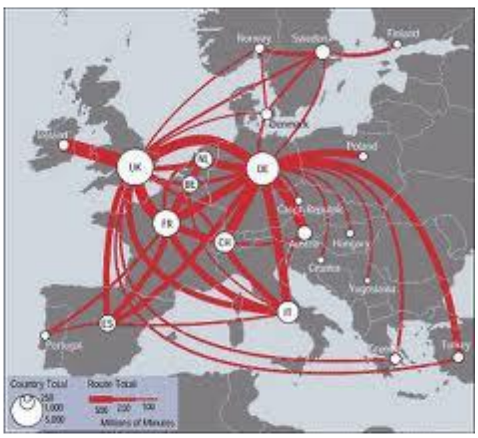
درجة الخروج outdegree وهي عدد الاضلاع المنطلقة من هذه العقدة الى عقد أخرى .



الشكل ١,٨ يوضح درجات العقد

١,١,٩. ملاحظــة: كمثـال مـن الحيـاة الواقعيـة التـي يمكـن تمثيلهـا كبيـان نظـام المطـارات , كـل مطـار هـو عبـارة عـن عقـد vertex , وكـل عقـدتين بينهمـا وصـلة edge إذا كـان هنـاك رحلـة مباشـرة بـين المطـارين و الممثلـة بعقـد , الوصـلة edge ممكـن ان تكـون لهـا تكلفـة cost تمثـل الوقـت , المسـافة , أو تكلفـة الرحلـة . ممكـن ان نعتبـر ان البيـان الموجـه directed , علـى اعتبـار أن الرحلـة ممكـن ان تسـتغرق وقـت اطـول او تكلفـة اكبـر بحسـب الضـرائب المتبعـة حسـب الدولـة عنـد السـفر فـي اتجـاهين متعاكسـين . وقـد نرغـب فـي التأكـد مـن أن نظـام المطـارات متصـل بقـوة strongly connected , و بالتالي هناك دائماً رحلة من أي مطار إلى مطار آخر .

وقـد نرغـب بتحديـد أفضـل رحلـة بـين مطـارين , "أفضـل" قـد يعنـي أن المسـار مـع أقـل عـدد مـن الوصلات أو قد يؤخذ واحدة أو أكثر من قياسات التكلفة (الزمن , المسافة , تكلفة الرحلة) .



الشكل 1−9 تمثيل نظام الطائرات كبيان موجه

مثـال آخـر حركـة المـرور Traffic flow ممكـن تمثيلهـا عـن طريـق البيـان , كـل تقـاطع شـارعين يمثـل عقـدة Vertex , كـل شـارع يمثـل وصـلة edge , تكلفـة الوصـلة ممكـن أن تمثـل حسـب عـدة

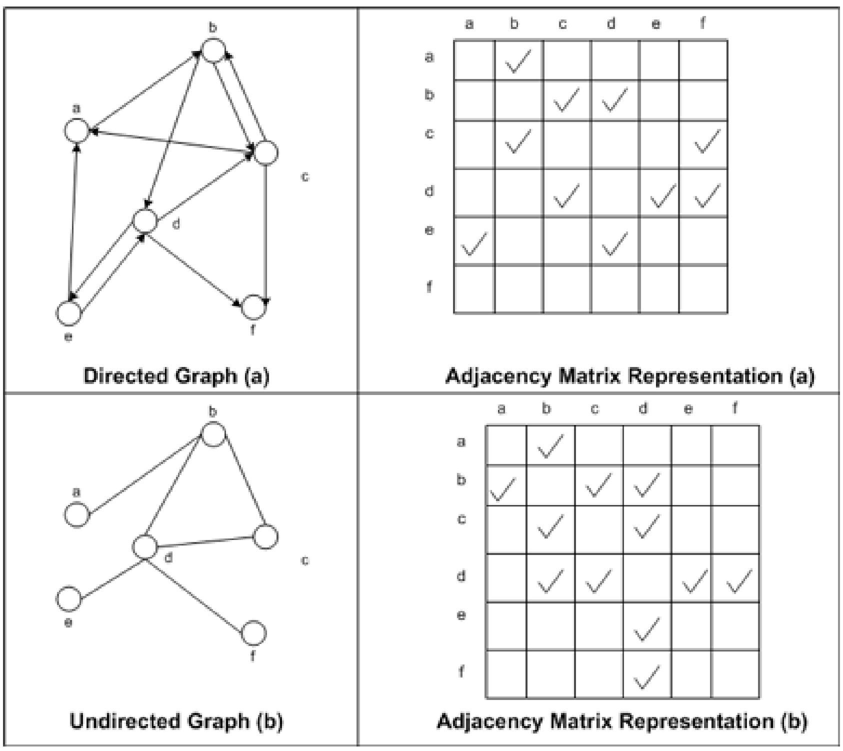
أشــياء , حــد الســرعة المســموحة أو الســعة , عنــدها ممكــن أن نتســاءل عــن اقصــر طريــق , أو استخدام هذه المعلومات لإيجاد أفضل موقع ملائم من حيث ناحية الاختناق المروري .

١,٢ تمثيل البيان الموجه

يمكن تمثيل بيان موجه بعدة طرق حيث نذكر منها ثلاثة:

١,٢,١ تمثيل البيان المتوجه باستعمال مصفوفة تجاور Boolean Adjacency Matrix

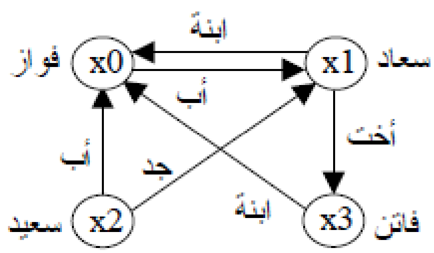
تكــون مصــفوفة التجــاور (M(AdjacencyMatrix فــي هــذه العمليــة مربعــة الاســطر و الأعمــدة فيهــا هــي أرقــام العقــد , نضــع فــي العنصــر M[i][i] القيمــة true إذا كــان يوجــد وصــلة موجهــة مــن العقــدة vi إلــى العقــدة vj , علــى حــين نضــع false عنــد عــدم وجــود رابــط بــين العقــدتين نلاحــظ بــأن فــي حالــة البيــان غيــر الموجــه , تصــبح هــذه المصــفوفة متنــاظرة بالنســبة إلــى القطــر الرئيسي . إذا يصبح المثيل على الشكل التالي:



الشكل 1−10 مصفوفة تجاور بوليانية لتمثيل البيان الموضح جانباً

١,٢,٢ تمثيل البيان الموجه باستعمال مصفوفة تعطي كلفة الوصلات

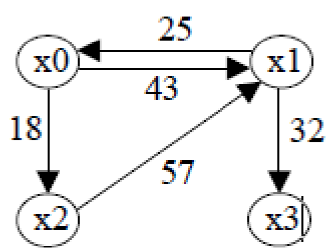
يمكـن للبيـان الموجـه أن يبـين كلفـة الانتقـال مـن عقـدة إلـى أخـرى , مثـال : يمكـن أن نبـين نـوع القرابة ما بين عدة أشخاص :



الشكل ١١,١ بيان يوضح العلاقات العائلية

تكـون مصـفوفة التجـاور M فـي هـذه الحالـة أيضـاً مربعـة , الأسـطر و الأعمـدة فيهـا هـي أرقـام العقـد . نضـع فـي العنصـر M[i][i] قيمـة كلفـة الانتقـال مـن العقـدة vi إلـى العقـدة vj . علـى حـين نضـع القيمـة 1− عنـد عـدم وجـود وصـلة بـين العقـدتين . نلاحـظ أنـه فـي حالـة البيـان غيـر الموجـه , وتصـبح هـذه المصـفوفة متنـاظرة بالنسـبة إلـى القطـر الرئيسـي , إذاً يصـبح التمثيـل علـى الشـكل التالي :

يتم تمثيل البيان الموجه المجاور بالشكل التالي:



-1	43	18	-1
25	-1	-1	32
-1	57	-1	-1
-1	-1	-1	-1

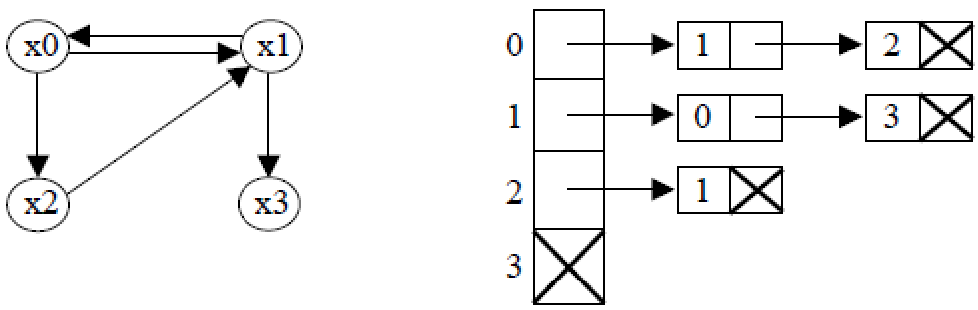
الشكل ١٢,١ تمثيل البيان الموضح عبر مصفوفة تعطي تكلفة الوصلات

١,٢,٣ تمثيل البيان الموجه بواسطة سلاسل التجاور(قوائم التجاور)Adjacency Lists

في حالة البيان بواسطة سلاسل التجاور Lists Adjacency نمثل البيان بواسطة شعاع من المؤشرات بعده هو عدد لعقد في البيان و مرقم حسب ارقام العقد , خانة كل عقدة i هي مؤشر إلى بداية سلسلة خطية تحوي جميع العقد j التي ترتبط بـ i وفق الاتجاه i الى j , و تكون هذه السلسلة مرتبة تصاعدياً حسب ارقام العقد .

إذاً يصبح التمثيل على الشكل التالي :

يتم تمثيل البيان الموجه المجاور بواسطة سلاسل التجاور على الشكل التالي:



الشكل 1−13 قوائم التجاور

الفصل الثاني

الفضاءات التبولوجية

المنتهية والبيان

2.1 الفضاءات التبولوجية المقترنة بالبيان

2.1.1 تعريف: البيان G (v,E) يسمى متعدي اذا كان $xy, yZ\in G$ وZ $x\neq$ فانة xZ∈G

2.1.2 تعريف : لتكن v مجموعة غير خالية ولتكن T عائلة مجموعات جزئية من V يسمىT تبولوجيا على V اذا كان

١) Ø,V∈T

٢) اذا كان A,B∈T فانه A⋂B∈T

٣) اذا كان Ai∈T و i∈I فانة ∪ Ai∈T ويسمى الزوج (V,T) فضاء تبولوجيا وتسمى العناصر V بنقاط وعناصر T بـ مجموعات مفتوحة وتسمى قسمة المجموعة المفتوحة بـ المجموعة المغلقة

2.1.3 تعريف: ليكن (V,T) فضاء تبولوجيا ولتكن A⊆V فانه انغلاق A الذي يرمز له بالرمز A يعرف بانه تقاطع كل المجموعات المغلقة في v والتي تحتوي A

2.1.4 تعريف: ليكن (V,T) فضاء تبولوجيا ولتكن A⊆V و W∈V يسمى W نقطة غاية اذا كان (U∩A)-(v)≠Ø لكل مجموعة مفتوحة U تحوي W

وتسمى مجموعة كل نقاط الغاية A بـمشتقة A وترمز لها برمز A^{d} .

2.1.5 تعريف : ليكن (V,T) فضاء تبولوجيا فانه يسمى

١) (V,T) فضاء T_0 اذا كان لكل x∈V فانه $[\mathrm{x}]^{\mathrm{d}}$ تساوي المجموعات مغلقة او بعبارة و كانت لكل x,y∈x و x≠y فانة $\overline{[\mathrm{x}]} \neq \overline{[y]}$

٢) (V,T) فضاء T_1 اذا كان لكل x∈X فانه $[\mathrm{x}]^{\mathrm{d}} = \emptyset$ او بعبارة وكانت $\overline{[\mathrm{x}]} = [\mathrm{x}]$ لكل X∈x.

٣) (V,T) فضاء S- T_{d} اذا كان $[\mathrm{x}]^{\mathrm{d}}$ مجموعة مغلقة لكل X∈X .

2.1.6 ملاحظة: من الواضح $T_0 \Leftarrow T_d \Leftarrow T_1$

2.1.7 تعريف : يسمى الفضاء التبولوجيا (V,T) منتمي اذا كانت v مجموعة منتهية

2.1.8 ملاحظة: اذا كانت (V,T) فضاء منتهي فانة

(١) $T_0 \Leftrightarrow T_d$

(٢) $T \Leftrightarrow T_1$ يمثل فضاء مبعثر.

2.1.9 تعريف: ليكن (V,T) فضاء تبلوجي وليكن x,y∈V يقال بان x تخص y اذا وفقط اذا كانت $X \in \overline{[y]}$

2.1.10 ملاحظة: العلاقة $R = \{(x,y) \in vxv / y \text{ تخص } x^a\}$ تكون علاقة انعكاسية ومتعدي لكنها ليست ضد متناظرة ولبيان ذلك $X \in \overline{[x]}$ لكل X∈X وعلية $(X,X) \in R$ وبالتالي R علاقة انعكاسية واذا كان $X \in \overline{[y]}$ فانه $\overline{[y]} \subseteq \overline{[y]}$ وبما ان $y \in [z]$ وعلية

$\overline{[y]} \subseteq \overline{[z]}$ وبالتالي $\overline{[x]} \subseteq \overline{[z]}$ xE وعلية $(x,z) \in R$ وبالتالي R علاقة متعدية. وتكون هذه العلاقة ليست ضد متناظرة لانه من الممكن في الفضاءات التبولوجية ان تكون النقاط مختلفة وتمتلك انغلاق متساوي.

2.1.11 ملاحظة: ليكن T_V يمثل عائلة كل الفضاءات التبلوجيا على V و GV تمثل عائلة كل البيانات الموجهه على V

2.1.12 قضية: لتكن $F : T_V \to G_V$ دالة معرفة بالصيغة $F((V,T))=(V,E)$ حيث

فانة $E= \{xy: x \in \overline{\{y\}}, x \neq y \}$

(١) f دالة متباينة

(٢) (V,E) بيان متعدي.

البرهن (١) اذا كان T T تبولوجيين مختلفتين على V فانه يوجد على الاقل نقطة X حيث $[x]_T \neq [x]_{T1}$ وعلية توجد نقطة y بحيث $y \in \overline{[x]}_T$ و $y \notin \overline{[x]}_{T'}$ وعلية $yx \in E$ و $yx \notin E'$ وبالتالي $F(V,T) \neq F(V,T')$ وعلية تكون F متباينة

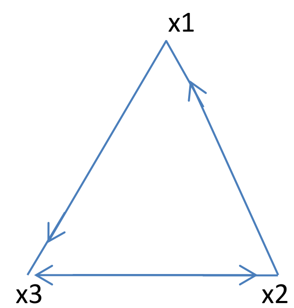
(٢) بستخدام 1.2.9 علاقة التخصص متعدية .

2.1.13 ملاحظة: من الممكن ان نقرن فضاء التبولوجيا مع كل بيان موجة وباستخدام الغاية في التعريف الاتي.

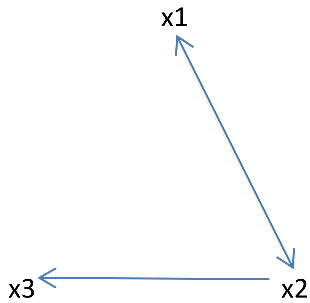
2.1.14 تعريف: ليكن $g: G_V \to T_V$ دالة معرفة بالصيغة $g((v_1E)=(V,i)$ حيث T تبولوجيا مولدة بواسطة الاساس الجزئي للمجموعات المغلقة $G\downarrow=\{X\downarrow: X \in V\}$ حيث $X\downarrow=\{y: yX \in E\}\cup\{x\}$

2.1.15 مثال: جد التبلوجيا المقترنة مع كل البيانات الاتية:

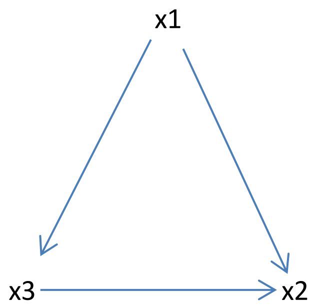
(1



(2



(3



$G1=\{X\downarrow: X\in V\}=\{X_1\downarrow, X_2\downarrow, X_3\downarrow\}$ (1) الحل

$=\{(X_{1,}X_2),(X_{2,}X_3),X\}$

$T=\{(X_1),(X_1,X_2)\ (X_{2,}X_3),\ X_{,\emptyset}\}$

$G=\{X_1\downarrow,: X_2\downarrow, X_3\downarrow\}$ (2)

$\{(X_{1,}X_2),(X_{2,}X_1),(X_{2,}X_2)\}$

$T=\{(X_2),(X_1,X_2)\ (X_{2,}X_3),\ X_{,\emptyset}\}$

$G=\{X_1\downarrow, X_2\downarrow, X_3\downarrow\}$ (3)

$=\{(X_{1,}X_2),(X_2,X_3)\ (X_{1,}X_3)X\}$

T=TdiS

2.1.16 قضية: ليكن G = (v,E) بيان موجة دائري فانة التبولوجيا T المقترنة معه تكون تبولوجيا مبعثرة

البرهان: لتكن V=$\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ ولتكن $X_1,X_2,\dots,X_n,X_{N+1}$ بحيث $X_{N+1}=X_1$ تمثل دورة وبما انة $X_i,X_{i+1}\in G$ لكل $1\le i\le n$

وعلية $X_1\downarrow=\{X_N,X_1\}$ و $X_1\downarrow=\{X_{1+1},X_1\}$ لكل i=2,....,n

وبتالي $X_i\downarrow\cap x_{i+1}\downarrow=\{X_i\}$ لكل i = 1,2, n

وعلية $\{X_i\}\in T$ i=1,2,...-n

وبالتالي T=Tdis

2.1.17 قضية: ليكن (v,E) بيان متعدي وليكن (v,T) التبولوجيا المقترنة معة فان $x\downarrow = \overline{\lceil X \rceil}$ لكل $x \in X$

البرهان : بما ان $G\downarrow=\{X \downarrow : X \in X\}$ تمثل اساس جزئي منة

المجموعات المغلقة للتبولوجيا T وعلية المجموعات المغلقة في T نحصل عليها من تقاطع لاتحاد المجموعات $x\downarrow$ وعلية سنحصل على اصغر مغلقة منه $x\downarrow$ وسوف لتقاطع المجموعات المغلقة التي تحتوي y بالصفر $cy= \cap x\downarrow$ لكل $y \in X$

$yGx\downarrow$

وعلية cy اصغر مجموعة مغلقة تحتوي y وبالتالي$cy= \overline{\{y\}}$ وبالتالي $cy=y\downarrow$ وبما ان

$Cy\downarrow$ $\cap x\downarrow$ لانه $y\downarrow$ هواحد مجموعات التقاطع وعلية اذ كان $z \in y \downarrow$ و $y \in x \downarrow$ باستخدام خاصية التعدي يكون $z \in x \downarrow$ لكل x بحيث $y \in y \downarrow$ وعلية $cy= \cap x\downarrow$ وبالتالي $x\downarrow = \overline{\lceil X \rceil}$

2.1.18 قضية: ليكن (v,E) بيان موجة فانة (v,E) بيان $\frac{yGx\downarrow}{y\downarrow c \cap x\downarrow}$

متعدي اذا وفقط اذا كان $xy\in E \leftrightarrow x\downarrow Cy\downarrow$

البرهان $\Leftarrow$ اذا كان (v,E) بيان متعدي و $xy\in E$ و $z\in x \downarrow$ فانة $zy \in E$ و $z\in y\downarrow$ وبالتالي

$\downarrow cy\downarrow$ $x\in x$ يوازي $xy\in E$

$\Leftarrow$ اذا كان $xy, yZ \in E$ و $X \neq Z$ اذا و فقط اذا كان $cz\downarrow$ $x\downarrow Cy\downarrow$ بحيث $X \neq Z$ اذا وفقط اذا كان $xZ\in E$

2. ٢ المجموعة المفتوحة المقترنة مع البيان الموجة.

في هذا البند سوف نقدم تعريف اخر للمجموعات المفتوحة المقترنة مع البيان الموجة

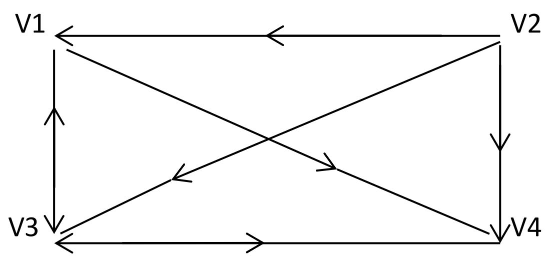
٢.2.1 تعريف: ليكن (v,E) بيان موجة ولتكن A مجموعة جزئية منة A يقال بان مجموعة مفتوحة مقترنة مع (v,E) اذا وجدت فانة من A الى A^C

بعبارة اخرى

A مجموعة مفتوحة اذا كان $\mathrm{p}_i \in$A و $p_i \in \mathrm{A}^c$ فانه $p_ip_i \in \mathrm{E}$ وتسمى A مجموعة مغلقة مقترنة مع البيان (v,E) اذا كانت A^C مجموعة مفتوحة.

٢,٢,٢ ملاحظة : لكل بيان موجة (v,E) يولد تبولوجيا وحيد نرمز لة بالرمز T(v,E)

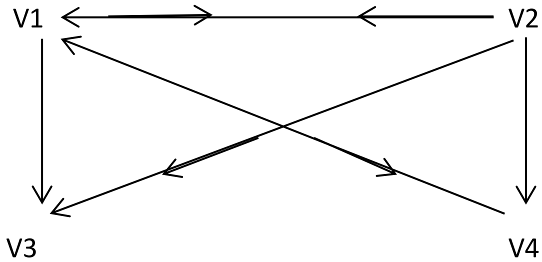
٢,٢,٣ مثال: ليكن V=$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ليكن (v,E) بيان موجة ممثل بالمخطط الاتي



فان التبولوجبا المولدة بواسطة (v,E) تكون على النحو الاتي

T(v,E) =$\left\{\emptyset, V, \{V_1\}, \{V_2, V_3\}\right\} \{V_1, V_2, V_3\}$

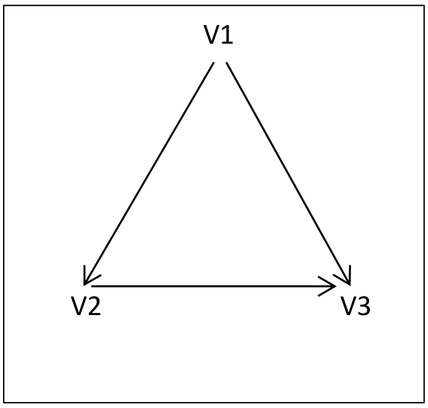
٢,٢,٤ مثال: ليكن V= $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ وليكن (v,E) بيان موجة مثل بالمخطط الاتي



فان التبولوجيا المولدة بواسطة (v,E) تكون على النحو الاتي

$$T(v,E) =\left\{\emptyset, v, \{V_1\}, \{V_2\}, \{V_1, V_2\}\right\}$$

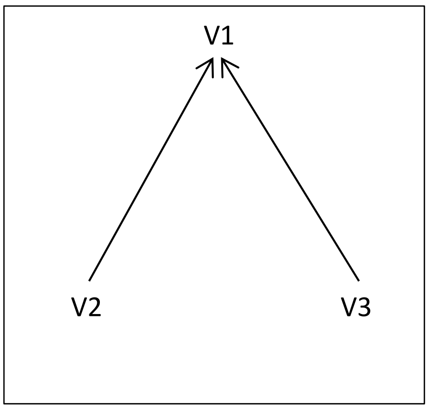
٢,٢,٦ مثال: ليكن $V= \{V_1, V_2, V_3\}$ وليكن (v,E) بيان موجة مثل بالمخطط الاتي



فان التبولوجيا المولدة بواسطة (v,E) تكون على النحو الاتي

$$T(v,E) =\left\{\emptyset, V, \{V_1\}, \{V_1, V_2\}\right\}$$

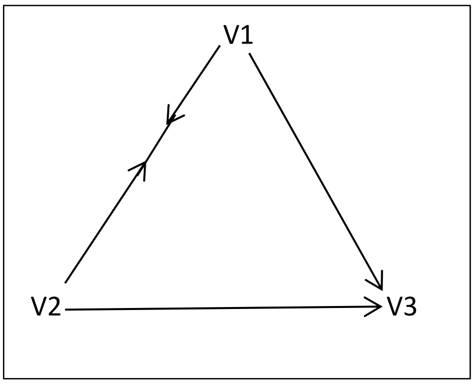
٢,٢,٧ مثال: ليكن $V= \{V_1, V_2, V_3\}$ وليكن (v,E) بيان موجة مثل بالمخطط الاتي



فان التبولوجيا المولدة بواسطة (v,E) تكون على النحو الاتي

$$T(v,E) =\left\{\emptyset, V, \{V_1, V_2\}\right\}$$

٢,٢,٨ مثال: ليكن $\{V_1, V_2, V_3\}$ =V وليكن (V,E) بيان موجة مثل بالمخطط الاتي



فان التبولوجيا المولدة بواسطة v تكون على النحو الاتي

$$T(v,E) = \left\{\emptyset, V, \{V_1\}, \{V_2, V_3\}\right\} \{V_1, V_2, V_3\}$$

2.3 تشاكل البيان الموجه

2.3.1 تعريف: ليكن (V,E) و $(\acute{V}, \acute{E})$ بيان موجة فانة تشاكل البيان الموجة
$L:(V,E)\to(\acute{V}, \acute{E})$ هو الدالة $L: v\to V^1$ حيث اذا كان $xy\in E$ فانه L(X) = L(V) او
$L(X)\, L(y)\in \acute{E}$

وتشاكل البيان الموجة يسمى تشكل تقابل اذ كانت L دالة متقابلة و L^{-1} تشكل بيان موجة

2.3.2 تعريف: ليكن (V,E) و $(\acute{V}, \acute{T})$ فضائين تبولوجين فانة الدالة

$L: (v,T) \to(V^1, T^1)$ مستمرة اذ كان $L(\overline{A}) \subset \overline{L(A)}$ لكل $A \subset V$ ولكون الدالة
المستمرة L تشاكل تبولوجي اذا كان L دالة متقابلة و كان $L(\bar{A}) = \overline{L(A)}$ لكل $A\subset V$

2.3.3 قضية : ليكن (V,T) و $(\acute{V}, \acute{T})$ فضائين تبولوجيين منتهيين فان

(١) $L: (V,T) \to(\acute{V}, \acute{T})$ مستمرة اذا فقط اذا كان $L(\bar{X}) \subset \overline{L(X)}$

(٢) $L:(V,T)\to(\acute{V}, \acute{T})$ تشاكل تبولوجي اذا وفقط اذا كان $L(\bar{X})= \overline{L(X)}$ لكل $X\subset X$

البرهان: باستخدام الحقيقية $L(A\cup B) = L(A)\cup L(B)$ وكذلك الحقيقة $\overline{A\,\cup}=A\cup B$ وعلية ليكن
كتابة A بالشكل $A =_{X\in A}^{\cup x}$

2.3.4 قضية: اذا كان (V,T) و $(\acute{V}, \acute{T})$ فضائيين تبولوجين يحققان صفة T_o وليكن (V,E)
و $(\acute{V}, \acute{E})$ البيان الموجة المتعدي الدائري المقترن بها وليكن $L: V\to \acute{V}$ دالة فان

(١) $L: (V,T) \to(\acute{V}, \acute{T})$ دالة مستمرة اذا وفقط اذا كان $L: (V,E) \to(\acute{V}, \acute{E})$ تشاكل
بيان موجة
(٢) $L: (V,T) \to(\acute{V}, \acute{T})$ تشاكل تبولوجي اذا و فقط اذا كان $L: (V,E) \to(\acute{V}, \acute{E})$ تشاكل
بيان موجة متقابل

البرهان: اذا كان L دالة مستمرة وكان $Xy \in E$ فان $X \in \bar{y}$ يؤدي الى $L(X) \in L(\bar{y}) \subset \overline{L(y)}$
وعلية

$L(X)\ L(y) \in \acute{E}$ او $L(X) = L(y)$

وبالتالي L تشاكل بيان موجة

وبالعكس اذا كانت L تشكل بيان موجة فانة لكل $z \in \bar{x}$ و $x \neq z$ نحصل على $zx \in E$

وبالتالي ان $L(Z) = L(X)$ او $L(Z)\ L(y) \in \acute{E}$ وفي كلا الحالتين يكون $L(z) \in \overline{L(x)}$

وعلية تكون الدالة L مستمرة.

المصادر الاجنبية:

[1] Bhargara. T. and A-HL Born,T. “ on Topological spaces associated with digraph ”A cta Mathematics (1968) vol.9, No. 2, pp47-52.

[2] Chae, H. “ Finite Topological space and Graph” comm. Kdrean math soc.32 (2017) No. t, pp. (83-19).

[3] MarIjuan c. “ Finites Topo logies and Digraphs “ prooye cciones

Journal of matheam Hcs vol.29 No. 3 pp. 291-307.

المصادر العربية:

[1]علي عزيز علي" مقدمة في نظرية البيانات" الموصل مطبعة جامعة الموصل١٩٨٣