جامعة القادسية
كلية التربية
قسم الرياضيات

حول

انواع من المصفوفات المتعامدة

بحث مقدم الى
مجلس قسم الرياضيات كلية التربية كجزء
من متطلبات نيل درجة البكالوريوس
في علوم الرياضيات

من قبل
الطالب عباس جيجان فضيل

إشراف
الأستاذ المساعد الدكتور ستار حميد حمزه

" يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين

أوتوا العلم درجات والله بما

تعملون خبيرا "

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة (آية :11)

الإهـــــــــــــداء

إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة حب ..

إلى من كلت انامله ليقدم لنا لحظة سعادة ..

إلى من حصد الاشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم ..

إلى صاحب القلب الكبير (أبي العزيز)

إلى من أرضعتني الحب و الحنان ..

إلى رمز الحب و بلسم الشفاء ..

إلى القلب الناصع بالبياض (أمي الغالية)

إلى الروح الطاهرة ..

إلى أخي الشهيد البطل (قاسم جيجان) و إلى جميع شهداء العراق

و قبل أن انتهي أقدم أسمى آيات الشكر و الامتنان و التقدير و المحــبة إلأى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ..

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم و المعرفة ..

إلى جميع أساتذتي الافاضل و أخص بالذكر الأستاذ المساعد الدكتور ستار حميد حمزه

إلى من سرنا سويا ونحن نشق الطريق معا نحو النجاح ..

إلى اخوتي و اصدقائي و زملائي

الخلاصـــــــــــــة

في بحثنا تناولنا دراسة انواع من المصفوفات المتعامدة , هذه المصفوفات تعتبر تعميم للمصفوفات المتعامدة و المصفوفات الاحادية و المصفوفات المتعامدة من النمط h

و اعطينا المصفوفات المتعامدة من النمط I و التي تعتبر تعميم للمصفوفات المتعامدة . هذه المصفوفات تكون قابلة للعكس و القيم الذاتية لها يكون معيارها يساوي 1 و اعطينا خصائص تتعلق بهذه المصفوفات و خاصة ضرب رونكر لهذه المصفوفات و كذلك المصفوفات المتشابهة . و زودنا عملنا بالكثير من الامثلة و الخواص التي تتعلق بالمفاهيم اعلاه

المحتويات Contents

المقـــــــــــــدمة

موضوع المصفوفات من المواضيع المهمة في الريا ضيات و اول استخدام المصفوفات ظهر بين عام 200 و 300 قبل الميلاد في الكتابات الصينية و المسمى (Nine Chapter Of Mathematics) (الفصل التاسع من الرياضيات) . و الطريقة الحديثة لحلول المصفوفات طورت باستخدام كاوس و في العام 1545 م (Mayna) وضع قاعدة لحل نظامين من المعادلات الخطية و في العام 1683 م اول ظهور لمفهوم المحددات في اوربا سلفستر (1814- 1897) وهو رياضي و محامي انكليزي اول من استخدم مصطلح مصفوفة (Matrix) في 1850 , ارثر كيلي (1895_1821) و هو رياضي و محامي انكليزي آخر اول من نشر التعريف المحدد للمصفوفة في 1868 فقد اعطى كيلي جبر المصفوفة و عرف جمع و ضرب بعدد و المعكوس للمصفوفات في العام 1878 فروبينيس كتب عمل مهم حول المصفوفات على الصيغ الثنائية و عرف مفهوم رتبة المصفوفة و الذي استخدمه في عمله على المصفوفات المتعامدة

تعتبر المصفوفات من الانواع المهمة في المصفوفات و اشهر نوع من المصفوفات المتعامدة هو مصفوفات هارفرد و التي لها استخدامات كثيرة في موضوع التشفير و تحليل الصور و نظم الاتصالات و غيرها .

لقد قسمنا عملنا هذا الى فصلين ففي الفصل الاول البند الاول اعطينا مفاهيم اساسية عن المصفوفات و خواصها وفي البند الثاني اعطينا مفهوم ضرب رونكر و خواصه و في البند الثالث اعطينا التجزئة من نوع QR

وفي الفصل الثاني البند الاول اعطينا مفهوم المدور لمصفوفة من النمط h و درسنا خواصه و في البند الثاني اعطينا مفهوم تشابه المصفوفات من النمط I و زودنا عملنا بالكثير من الامثلة و الخواص التي تتعلق بالمفاهيم اعلاه

الفصـــــــل الأول

مفاهيــــم أســاسية
عــن المصـــــفوفات

1.1.1 تعريف : تسمى المصفوفة الحقيقية A سعة n متعامدة **Orthogonal** اذا كان $AA^T=I_n$ بمعنى آخر $A^T=A^{-1}$

حيث A^T يمثل مدور المصفوفة A

1.1.2 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة

1.1.3 تعريف:المصفوفة A من الدرجة n على الحقل F تسمى مصفوفة متناظرة **symmetric matrix** اذا كان $A=A^T$

1.1.4 مثال : المصفوفتان $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -2 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4i & 1+i & 2i\\ 1+i & -i & 2+i\\ 2i & 2+i & 3i\end{bmatrix}$ هما مصفوفتان متناظرتان

1.1.5 تعريف : المصفوفة A من الدرجة n على الحقل F تدعى مصفوفة ناظمية **normal matrix** اذا كان $AA^*=A^*A$

حيث A^* يمثل مرافق مدور المصفوفة A

1.1.6 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **هي** مصفوفة ناظمية

1.1.7 تعريف : المصفوفة A من الدرجة n على الحقل F تسمى مصفوفة الوحدة **unitary matrix** اذا كان $AA^*=I_n$, $A^*A=I_n$

1.1.8 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة $AA^*=I_n$

1.1.9 تعريف : المصفوفة A من الدرجة n على الحقل F تسمى مصفوفة هرمشية **hermitian matrix** اذا كان $A=A^*$

1.1.10 ملاحظة : اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n على الحقل F فان $A^0=I_n$ و ان

$$, A^n = \underbrace{A.A\ldots A}_{n\_times}$$

1.1.11 مبرهنة : لتكن d قيمة ذاتية للمصفوفة A و $k\in N$ فان :

١) d هي قيمة ذاتية لـ A^T

٢) $\frac{1}{d}$ هي قيمة ذاتية الى المصفوفة A^{-1} (اذا كانت A قابلة للعكس)

٣) d^k هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^k

٤) $\bar{d}$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة $\bar{A}$

1.1.12 مبرهنة : كان كل من A_1 و A_2 مصفوفة من الدرجة n بحيث $A_1.A_2=I_n$ فان $A_2.A_1=I_n$ وبالتالي $A_2=A_1^{-1}$

1.1.13 ملاحظة : اذا كان A_1 و A_2 مصفوفتين من الدرجة n و m عدد صحيح غير سالب فان $(A_1A_2)^m=A^m{}_1A_2{}^m$ اذا وفقط اذا كان A_1 و A_2 ابداليتين ($A_1A_2=A_2A_1$)

1.1.14 ملاحظة : اذا كانت A مصفوفة مربعة و l عدد صحيح غير سالب فان

١) $(A^t)^l=(A^l)^t$

٢) $(A^l)^{-1}=(A^{-1})^l$

1.1.15 ملاحظة : اذا كان A و B *مصفوفتين* ابداليتين قابلتين للعكس و من نفس الدرجة فان

$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ وبشكل عام $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-}$

1.1.16 تعريف : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان اثر المصفوفة (trace of A) يعرف على النحو الاتي $tr(A)=\sum_{i=0}^{n} aii$

اي ان tr(A) يمثل مجموع عناصر القطر الرئيسي

1.1.17 تعريف : المتجهان v و w في فضاء المتجهات يسميان متجهان متعامدان orthogonal اذا كان $\langle v,w\rangle=0$

1.1.18 مثال : ليكن $v,u\epsilon R^4$ حيث $u=\begin{bmatrix}2\\2\\3\\1\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}-2\\2\\3\\-9\end{bmatrix}$ فان $u^tv=0$ وعليه u و v متعامدان

1.1.19 تعريف : ليكن $(V,+,\cdot)$ فضاء متجهات على الحقل F و $v_1,v_2,....,v_n\in F$ المتجه $v\in F$ يدعى تركيب خطي من $v_1,v_2,...,v_n$ اذا كان $v=+d_jv_j=d_1v_1+d_2v_2+....+d_nv_n$ حيث $d_j\in F$ لكل $j=1,2,...,n$

1.1.20 تعريف : لتكن S تمثل مجموعة متجهات في V فان S تسمى مجموعة متعامدة احادية اذا كان كل متجهين في S متعامدين و ان $||u||=1$ لكل $u\in S$

1.1.21 مثال : ليكن كل من $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $x_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$ و $x_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$ متجهاٍ فان المجموعة $S=\{x_1,x_2,x_3\}$ هي مجموعة متعامدة

1.1.22 تعريف : ليكن $(V,+,\cdot)$ فضاء متجهات , المتجهات $v_1,v_2,...,v_n \in V$ تسمى متجهات مستقلة خطياٍ اذا كان $b_1v_1+b_2v_2+...+b_nv_n$ فان $b_1=b_2=....=b_n$

1.1.23 مبرهنة : لتكن W مجموعة مكونة من n من المتجهات في R^n و A مصفوفة عناصرها في W فان W مستقلة خطيا اذا وفقط اذا كان محدد A لا يساوي صفر $(det(A)\neq 0)$

1.1.24 تعريف : عدد الصفوفة (الأعمدة) المستقلة خطيا من المصفوفة A تسمى رتبةA (rank of A)

1.1.25 مبرهنة : لتكن A مصفوفة من الدرجة n على الحقل F فان العبارات الاتية متكافئة :

١) A قابلة للعكس (غير شاذة)

٢) محدد A لا يساوي صفر

٣) رتبة المصفوفة A تساوي n

٤) $Ax=0$ تمتلك الحل التافه فقط

1.1.26 تعريف : ليكن V فضاء متجهات و S مجموعة متجهات في V تسمى S مجموعة مولدة (span) اذا كان لكل متجه في V يكتب على شكل تركيب خطي من عناصر S و نرمز له بالرمز $V=\langle S\rangle$

1.1.27 تعريف : ليكن V فضاء متجهات ,فان المجموعة $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ الجزئية من V تسمى اساس الى V اذا كان

i) مجموعة مولدة الى V

ii) S مستقلة خطيا

1.1.28 مثال : المجموعة $S=\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}$ هي اساس لــ $\mathbb{R}^3$ وتسمى القاعدة القياسية (الاعتيادية) لـ $\mathbb{R}^3$

1.1.29 تعريف : ليكن V فضاء متجهات غير صفري , فان عدد المتجهات في قاعدة يسمى بعد V (dimension of V) ويرمز له بالرمز dim(V)

1.1.30 مبرهنة : ليكن V يمثل فضاء الضرب الداخلي المولد للمتجهات المستقلة $S=\{u_1,u_2,...,u\}$ وليكن W فضاء جزئي غير صفري ذو بعد m فان توجد قاعدة احادية $T=\{w_1,w_2,....,w_3\}$ الى W بحيث $\langle S\rangle=\langle T\rangle$

1.1.31 مثال : ليكن V فضاء جزئي على $\mathbb{R}^2$ بالضرب الداخلي القياسي بالقاعدة

$v_1=u_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ و , $S=\left\{u1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad ,u2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$

$V_2=u_2-\frac{\langle u1,v1\rangle}{\langle v1,v1\rangle}v1=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix}$

فان $\left\{\begin{bmatrix}\frac{-2}{\frac{5\sqrt{40}}{25}}\\ \frac{6}{\frac{5\sqrt{40}}{25}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\right\}=T=\{u_1,u_2\}$ هي قاعدة متعامدة لــ W

1.1.32 تعريف : ليكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n تسمى A,B متشابهتين اذا وجدت مصفوفة قابلة للعكس C بحيث $B=C^{-1}AC$

1.1.33 ملاحظة : اذا كانت A, B مصفوفتين متشابهتين فان :

١) A,B لهما نفس القيمة الذاتية

٢) A,B لهما نفس الرتبة

٣) A,B لهما نفس التتبع

٤) لهما نفس المحدد

1.1.34 تعريف : ليكن كل من A,B مصفوفة مربعة من الدرجة n على الحقل F يقال بان :

١) A وB متشابهتان وحدويا اذا وجدت مصفوفة واحدية C بحيث $A=C^{*}BC$

٢) A وB متشابهتان عموديا اذا وجدت مصفوفة متعامدة C بحيث $A=C^{t}BC$

1.2 *ضرب رونكر Kronecker Product*

1.2.1 تعريف : ليكن كل من $A=[a_{ij}] \in M_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]\in M_{p\times q}$, ضرب رونكر هو المصفوفة $A\times B$ من الدرجة $mp\times nq$ بحيث

$$A\times B=\begin{bmatrix} a11B & a12B & a1nB \\ a21B & a22B & a2nB \\ am1 & \dots & amnB \end{bmatrix}\in M_{mp\times nq}$$

1.2.2 مثال : ليكن $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ فان

$$A\times B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} & -3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 0 \\ 14 & 2 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & -15 & 0 \\ -21 & -3 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 8 & 10 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 14 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -6 & -9 \\ 8 & 10 & 0 & -12 & -15 & 0 \\ 14 & 2 & -4 & -21 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

1.2.3 مبرهنة : ليكن $E\in M_{m\times n}$, $A,B\in M_{p\times q}$ و $C\in M_{r\times s}$ و α ثابت ، فان :

١) $(\alpha E)\times B=\alpha(E\times B)=E\times(\alpha B)$

٢) $(E\times B)^t=E^t\times B^t$

٣) $(E\times B)^*=E^*\times B^*$

٤) $(E+B)\times A=E\times A+B\times A$

٥) $(E\times B)\times C=E\times(B\times C)$

٦) $(A\times B)(C\times A)=(A\times C)(B\times A)$

1.2.4 مبرهنة :ليكن B,E مصفوفتين مربعتين فان $(E\times B)^n=E^n\times B^n$

1.2.5 مبرهنة : اذا كان A,B مصفوفتين قابلتين للعكس فان $(A\times B)^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}$

1.2.6 مبرهنة : اذا كان B,A مضفوفتين قابلتين للعكس فان :

١) $tr(A\times B)=tr(B\times A)=tr(A)tr(B)$

٢) $det(A\times B)=det(B\times A)=(det(A))^n(det(B)^m$

1.2.7 تعريف : لتكن E و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة m و n على التوالي فان جمع رونكر للمصفوفتين يعرف على النحو : $E+B=(I_n\times E)+(B\times I_m)$

1.3 تجزئة QR QR_Decomposition

1.3.1 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة من الدرجة m×n اعمدتها مستقلة خطيا فان A يمكن تجزئتها الى A=QR بحيث Q متعامدة وحدويا و R مصفوفة مثلثية عليا من الدرجة n

1.3.2 مثال : ليكن $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ و $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$ و لدينا القاعدة

المتعامدة $T=\{w_1,w_2,w_3\}$ لفضاء اعمدة المصفوفة A حيث $w_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0\end{bmatrix}$, $w_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}\\ \frac{2}{\sqrt{15}}\\ \frac{-1}{\sqrt{15}}\\ \frac{3}{\sqrt{15}}\end{bmatrix}$, $w_3=\begin{bmatrix}\frac{-4}{\sqrt{35}}\\ \frac{-3}{\sqrt{35}}\\ \frac{-1}{\sqrt{35}}\\ \frac{-3}{\sqrt{35}}\end{bmatrix}$

فان $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{-4}{\sqrt{35}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{35}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{35}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{35}}\end{bmatrix}$ و $R=\begin{bmatrix}r11 & r22 & r33\\ 0 & r22 & r33\\ 0 & 0 & r33\end{bmatrix}$ بحيث $r_{ij}=<u_i,w_j>$ و I,j=1,2,3 و بالتالي

$R=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}}\\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{15}}\end{bmatrix}$ لذلك

$$QR=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{-4}{\sqrt{35}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{35}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{35}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{35}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r11 & r22 & r33\\ 0 & r22 & r33\\ 0 & 0 & r33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=A$$

1.3.3 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة حقيقية من الدرجة m×n فان توجد مصفوفتين U من الدرجة m و V من الدرجة n متعامدتين بحيث $A=ULV^{-1}$ حيث L مصفوفة من الدرجة m×n مدخلاتها الغير قطرية اصفار و $L_{11}\geq L_{22}\geq\ldots\geq L_{kk}\geq 0$ حيث k=min{m,n}

1.3.4 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة حقيقية من الدرجة $m\times n$ فان توجد مصفوفتين U من الدرجة m و V من الدرجة n متعامدتين بحيث $A=ULV^*$ حيث L مصفوفة من الدرجة $m\times n$ مدخلاتها الغير قطرية اصفار و $L_{11}\geq L_{22}\geq\ldots\geq L_{kk}\geq 0$ حيث $k=\min\{m,n\}$

1.3.5 مثال : لتكن $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^tA=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ القيم الذاتية لــ A^tA هي

$\lambda_1=6$ مع المتجه الذاتي $v_1=\begin{bmatrix} -0.9129 \\ -0.3651 \\ 0.1826 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=1$ مع المتجه الذاتي $v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ -0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$

$\lambda_3=0$ مع المتجه الذاتي $v_3=\begin{bmatrix} -0.4082 \\ 0.8165 \\ -0.4082 \end{bmatrix}$

الفصـــــــل الثـــــانــي

خـــــواص المصفـــــوفات المتعامـــــــــدة

1 مدور المصفوفة من النمط h

2.1.1 تعريف : لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m\times n$ على الحقل F فان مدور المصفوفة من النمط h و الذي يرمز له بالرمز A^t هو مصفوفة من الدرجة $n\times m$ بحيث $a_{ij}=a_{(m+1-j)(n+1-i)}$ لكل $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

2.1.2 مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}6 & 4 & 7\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}$ فان $A^h=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -1 & 4\\ 4 & 7\end{bmatrix}$

2.1.3 مبرهنة : اذا كان r ثابت و A,B مصفوفتين فان :

١) $(A^h)^h$

٢) $(A^h)^t=(A^t)^h$

٣) $(\bar{A})^h=\overline{A^h}$

٤) $(A+B)^h=A^h+B^h$

٥) $(AB)^h=B^hA^h$

٦) $(A^h)^{-1}=(A^{-1})^h$ بحيث A قابلة للعكس

٧) $(rA)^h=rA^h$

٨) $(A^n)^h=(A^h)^n$ بحيث $n=2,3,4,\dots$

2.1.4 مبرهنة : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n على الحقل F فان :

١) $\det(A)=\det(A^h)=\det(A^t)=\det((A^t)^h)$

A و A^h لهما نفس القيمة الذاتية

2.1.5 تعريف : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان $A^\theta=(\bar{A})^h=\overline{A^h}$

2.1.6 مبرهنة : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n على الحقل F فان :

١) $(A^\theta)^\theta=A$

٢) $(A+B)^\theta=A^\theta+B^\theta$

٣) $(AB)^\theta=B^\theta A^\theta$

٤) $(Ka)^\theta=\bar{k}\ A^\theta$ حيث $k\in\mathbb{C}$

٥) $(A^n)^\theta=(A^\theta)^n$

2.1.7 تعريف : المصفوفة المربعة سعة n على الحقل F تسمى مصفوفة متعامدة من النمط h اذا كان $AA^h=I_n$ وهذا يعني $A^{-1}=A^h$

2.1.8 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2i} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط h

2.1.9 تعريف : المصفوفة المربعة من الدرجة n على الحقل F تدعى من النمط I اذا كان $A^k(A^t)^k=I_n$, لبعض $k\in\mathbb{N}$ حيث k اصغر عدد صحيح موجب يحقق $A^k(A^t)^k=I_n$ و يدعى بدليل المصفوفة A و في مثل هذه الحالة نقول ان A هي متعامدة من النمط I و دورها k

2.1.10 امثلة : i) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ii) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, iii) $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ المصفوفتان A,B متعامدتان من النمط I و المصفوفة C ليس مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.11 ملاحظة : $A^{k+1}(A^t)^{k+1}=AA^k(A^t)^kA^t=AIA^t=AA^t$ كما في الشكل

2.1.12 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I

$K=1$, $AA^t=\begin{bmatrix} 1-2i & 2-i \\ 2-i & 2 \end{bmatrix}$

$K=2$, $A^2(A^t)A^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$K=3$, $A^3(A^t)A^3=\begin{bmatrix} -1+i & -2+i \\ -2+i & -2 \end{bmatrix}$

$K=4$, , $A^4(A^t)A^4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$K=5$, , $A^5(A^t)A^5=\begin{bmatrix} 1-2i & 2-i \\ 2-i & 2 \end{bmatrix}$

$K=6$, , $A^6(A^t)A^6=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$K=7$, , $A^7(A^t)A^7=\begin{bmatrix} -1+i & -2+i \\ -2+i & -2 \end{bmatrix}$

$K=8$, $A^8(A^t)A^8=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

دليل المصفوفة A هو 4 و ان $A^m(A^t)A^m=I_2$, حيث $m=4,8,12,...$ و A هي مصفوفة من الفترة 4

2.1.13 ملاحظة : كل مصفوفة متعامدة هي مصفوفة متعامدة من النمط I و العكس غير صحيح وعليه المصفوفة المتعامدة من النمط I هي تعميم للمصفوفة المتعامدة

2.1.14 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I و لكنها ليست متعامدة

2.1.15 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k فان $\det(A^k)=\pm1$

البرهان : نفرض ان Aمصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k و عليه

$$A^k(A^t)^k=I_n \Rightarrow \det(A^k(A^t)^k)=\det(I_n)$$

$$\Rightarrow \det(A^k(A^t)^k)=1$$

$$\det(A^k)\det(A^t)^k=1$$

(حسب مبرهنة ٢,١,٤) $\Rightarrow \det(A^k)\det(A^k)=1$ (

$$\Rightarrow \det(A^k)=1$$

$$\text{i.e } z^2=1, z\in\mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \det(A^k)=\pm1$$

2.1.16 امثلة : ١) المصفوفة $A=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $k=2$

$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $\det(A^2)=1$

٢) المصفوفة $A=\begin{bmatrix}\sqrt{i} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{i} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{i}\end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $k=2$ حيث

$$A^4=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

2.1.17 مبرهنة : اذا كانت Aمصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k فان المعكوس يعرف كالآتي

$$A^{-1}=A^{k-1}(A^t)^k$$

البرهان : من مبرهنة (2.1.15) نحصل على $\det(A)\neq0$ وبالتالي فان A قابلة للعكس

وعليه $A^k(A^t)^k=I_n$ و هذا يكافئ $(A^k)^{-1}=(A^t)^k$

$\Rightarrow (A^{-1})^K=(A^t)^k$

$\Rightarrow (A^{-1})^{k-1}(A^{-1})=(A^t)^k$

و بالتالي $A^{-1}=A^{K-1}(A^t)^k$

2.1.18 مبرهنة : اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة متناظرة متعامدة من النمط I و دليلها k فان $A^{-1}=A^{2k-1}$

البرهان : بما ان A مصفوفة متناظرة اذن $A^t=A$ وبما ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k فان $A^k(A^t)=I_n$

$\Rightarrow A^{2K}=I_n$

$\Rightarrow A^{2k-1}A=I_n$

و بالتالي $A^{-1}=A^{2k-1}$

2.1.19 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة متعامدة من النمط I و دليلها k=4

$A=\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{-1}\end{bmatrix}=A^{2k-1}=A^7$

2.1.20 مبرهنة : لتكن A مصفوفة مربعة سعة $n\times n$ فان العبارات التالية متكافئة :

١) A مصفوفة متعامدة من النمط I

٢) A^{-1} مصفوفة متعامدة من النمط I

٣) A^t مصفوفة متعامدة من النمط I

٤) $\bar{A}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

٥) A^* مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان : ١←٢ نفرض A مصفوفة متعامدة من النمط I

$A^k(A^t)^k=I_n$ لبعض $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow (A^k(A^t)^{-1})=I_n^{-1}$

بما ان $A^k(A^t)^k=(A^t)^kA^k$ اذن

$(A^k(A^t)^k)^{-1}=((A^t)^kA^k)^{-1}=I_n \Rightarrow (A^{-1})^k((A^{-1})^t)^k=I_n$

و عليه A^{-1} مصفوفة متعامدة من النمط I

٢←٣ : نفرض A^{-1} مصفوفة متعامدة من النمط I

فان $(A^{-1})^k((A^{-1})^t)^k=I_n$ لبعض $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow ((A^{-1})^k((A^{-1})^t)^k)^{-1}=I_n^{-1}$

$\Rightarrow (((A^{-1})^t)^k)^{-1}((A^{-1})^k)^{-1}=I_n$

$\Rightarrow (((A^{-1})^{-1})^k)^{-1}((A^{-1})^{-1})^k=I_n$

$\Rightarrow (A^t)^kA^k=I_n$

$\Rightarrow ((A^t)^kA^K)^k=I_n^t$

$\Rightarrow (A^t)^k((A^t)^t)^k=I_n$

لذا A^t هي مصفوفة متعامدة من النمط I

٣←٤ نفرض A^t *مصفوفة* متعامدة من النمط I

$((A^t)^t)^k=I_n$,$k\in\mathbb{N}$

$\overline{A^k(A^t)^k}=\overline{I_n} \quad \Rightarrow \quad (\overline{A})^K(\overline{A^t})^k=I_n$

$\Rightarrow (\bar{A})^k((\bar{A})^t)^k=I_n$

لذا ¯ *مصفوفة* متعامدة من النمط I

٤←٥ : نفرض $\bar{A}$ *مصفوفة متعامدة من النمط* I

$((\bar{A})^k((\bar{A})^t)^k)^t=I_n^t$

$\Rightarrow (((\bar{A})^t)^k)^t(A^*)^k=I_n$

$\Rightarrow (((\bar{A})^t)^t)^k(A^*)^k=I_n$

$\Rightarrow ((A^*)^t)^k(A^*)^k=I_n$

عليه A^* مصفوفة متعامدة من النمط I

٥←١: نفرض A^* مصفوفة متعامدة من النمط I

لذا $(A^*)^k((A^*)^t)^k=I_n$ *لبعض* $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow((A^*)^k((A^*)^t)^k)^*=I_n^*$

$\Rightarrow(((A^*)^t)^k)((A^*)^k)^*=I_n$

$\Rightarrow(((A^*)^*)^t)^kA^k$

$\Rightarrow(A^t)^kA^k=I_n$

و عليه A مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.21 امثلة : اذا كانت $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

(1

$A^{-1}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

(2

$A^t=\begin{bmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

(3

$A^*=\begin{bmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

(4

$\bar{A}=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ -i & i \end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.22 مبرهنة : اذا كانت $A_{n\times n}$ *و* $B_{n\times n}$ مصفوفتين ابداليتين متعامدتين من النمط I *و* دليليهما k_1 *و* k_2 على التوالي فان AB مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $k=L.C.M\{k_1,k_2\}$

البرهان : نفرض A و B مصفوفتين متعامدتين من النمط I *و* دليلهما k_1 *و* k_2 تواليا

$A^{k1}(A^t)^{k1}=I_n$

$B^{k2}(B^t)^{k2}=I_n$

لكن $k=L.C.M\{k_1,k_2\}$

$A^k(A^t)^k=I_n$

$B^k(B^t)^k=I_n$

الان $(AB)^k((AB)^t)^k=(AB)^k(B^tA^t)^k$

$=A^kB^K(B^t)^k(A)^k$

$=A^k(A)^k=I_n$

اذن AB مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.23 مثال : المصفوفتان $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفتان متعامدتان من النمط I و دليلهما 2 و 4 *على التوالي* $AB=BA=\begin{bmatrix} i & -1-i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ المضاعف المشترك الاصغر بين 4,2 هو 4
AB هي مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها 4 , $(AB)^4((AB)^t)^4=I_n$

2.1.24 نتيجة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k و $A\bar{A}=\bar{A}A$ فان كل من $A\bar{A}$ و $\bar{A}A$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

2.1.25 نتيجة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k و $AA^t=A^tA$ فان كل من AA^t و A^tA مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.26 مبرهنة : المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k لكل $m\in\mathbb{N}-\{1\}$

البرهان : $(\Leftarrow)$ نفرض ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

لذا $A^k(A^t)^k=I_n$

بما ان $A^k(A^t)^k=(A^t)^kA^k$ اذن $(A^k(A^t)^k)^m=((A^t)^kA^k)^m$

$\Rightarrow(A^m)^k((A)^m)^t)^k=I_n$

لذالك A^m مصفوفة متعامدة من النمط I

$$\mathrm{Ind}(A^m)=\mathrm{L.C.M}\ \underbrace{\{ind(A), ind(A), \dots, ind(A)\}}_{m\_times}$$

$$=\mathrm{L.C.M}\ \underbrace{\{k, k, \dots, k\}}_{m\_TIMES}$$

$$=k$$

$(\Rightarrow)$: الان نفرض ان A^m مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k لكل $m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$

بشكل خاص , كل من A^2,A^3 *مصفوفة* متعامدة من النمط I *و دليلها* k

$I_n=(A^3)^k((A^3)^t)^k=A^k(A^2)^k((A^2)^t)^k(A^t)^k$

$=A^k(A^t)^k$,

A مصفوفة متعامدة من النمط I

لذلك A مصفوفة متعامدة من النمط Iو دليلها k

2.1.27 ملاحظة : اذا كان A,B مصفوفتان متعامدتان من النمط I فليس من الضروري ان يكون A+B مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.28 مثال : المصفوتان $A=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ مصفوفتان متعامدتان من النمط I

$$A+B=\begin{bmatrix} i & -1 \\ i & i \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A+B)^t=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\neq I_2$$

$$(A+B)^2((A+B)^t)^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\neq I_2$$

$$(A+B)^3((A+B)^t)^3=\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}\neq I_2$$

$$(A+B)^k((A+B)^t)^k=\begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix}\neq I_2$$

اذن $(A+B)^k((A+B)^t)^k\neq I_2$ لبعض $k\in\mathbb{N}$

و بالتالي A+B ليست مصفوفة عمودية كم النمط I

2.1.29 ملاحظة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و C *ثابت* فليس من الضروري ان يكون c.A مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.30 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I ,نفرض c=2

$$2A=\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

$$(2A)(2A)^t=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\neq I_2$$

$(2A)^2((2A)^t)^2=\begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}\neq I_2$

$(2A)^3((2A)^t)^3=\begin{bmatrix}-64 & 0\\ 0 & -64\end{bmatrix}\neq I_2$

اذن $(2A)^k((2A)^t)^k=\begin{bmatrix}(-2)^k & 0\\ 0 & (-2)^k\end{bmatrix}\neq I_n$

لذا $2A$ ليست مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.31 ملاحظة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها فان ليس من الضروري ان يكون $adj(A)$ مصفوفة متعامدة من النمط I

$adj(A)=det(A)\ A^{-1}$

بما ان A^{-1} مصفوفة متعامدة من النمط I فان ليس من الضروري ان يكون $adj(A)$ مصفوفة متعامدة من النمط I (حسب ملاحظة 2.1.29)

2.1.32 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k فان كل من $A^*,A^{-1},A^t,\bar{A}$ مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان : نفرض ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

اذن A^t مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $ind(A)\leq k$ (حسب مبرهنة 2.1.20)

الان اذا كان $ind(A)<k$ اذن $ind(A^t)=k-r$ بحيث $1\leq r<k$

$(A^t)^{k-r}((A^t)^t)^{k-r}=I_n$

لذا $(A^t)^{k-r}A^{k-r}=I_n$

اذن $ind(A)=k-r$ و هذا تناقض لذلك $ind(A)=k$

2) من (مبرهنة 2.1.20) , A^* مصفوفة متعامدة من النمط I و $ind(A^*)\leq k$

نفرض ان $ind(A^*)=k-r$ بحيث $1\leq r<k$

فان $(A^*)^{k-r}((A^*)^t)^{k-r}=I_n$

$\Rightarrow(A^*)^{k-r}(\bar{A})^{k-r}=I_n$

$\Rightarrow((\bar{A})^t)^{k-r}(\bar{A})^{k-r}=I_n$

و باخذ المرافق للطرفين $\Leftarrow$ $(A^t)^{k-r}A^{k-r}=I_n$

و بالتالي $ind(A^*)=k-r$ وهذا تناقض لذلك $ind(A)=k$

و بنفس الطريقة بالنسبة الى $A^{-1},\bar{A}$

2.1.33 مبرهنة : اذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المتعامدة من النمط I و دليلها k فان $|\lambda|=1$

البرهان : لتكن A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

$$A^k(A^t)^k=I_n$$

$$\Rightarrow(A^k)^{-1}=(A^t)^k=(A^k)^t$$

بما ان λ قيمة ذاتية للمصفوفة اذن λ^k هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^k و $\frac{1}{\lambda^k}$ قيمة ذاتية للمصفوفة $(A^k)^{-1}$
بما ان A^k و $(A^k)^t$ لهما نفس القيمة الذاتية

اذن $\lambda^k=\frac{1}{\lambda^k} \Leftarrow (\lambda^k)^2=1$

$$|(\lambda^k)^2|=\underbrace{|\lambda||\lambda|\ldots|\lambda|}_{2k-times}$$

بما ان $|\lambda|\geq 0$ اذن $|\lambda|=1$

2.1.34 مثال : لتكن $A=\begin{bmatrix}\sqrt{i} & 0\\ 0 & \sqrt{i}\end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $k=4$ اذن القيمة الذاتية للمصفوفة I هي $\lambda_1=\sqrt{-i},\ \lambda_2=\sqrt{-i}$

$$|\lambda|=|(\lambda)|=1$$

2.1.35 مبرهنة : اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة متعامدة من النمط I فانها تحفظ الضرب الداخلي في المتجهات الذاتية فضاء جزئي

البرهان : نفرض λ قيمة ذاتية لـ A و كل من x و y متجه ذاتي يرتبط بـ λ

اذن

$$Ax=\lambda x\ ,\ Ay=\lambda y$$

لذا $\langle Ax\ ,\ Ay\rangle=\langle\lambda x\ ,\ \lambda y\rangle$

$$=\lambda\bar{\lambda}\langle x,y\rangle$$

$$=|\lambda|^2\langle x,y\rangle$$

$$=\langle x,y\rangle$$

(حسب مبرهنة 2.1.33)

2.1.36 نتيجة : اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة متعامدة من النمط I فانها تحفظ الطول في فضاء المتجهات الذاتية

البرهان : لتكن λ لـ A و X متجه ذاتي متصل بـــ λ

فان من (مبرهنة 2.1.35) $\Leftarrow$ $<Ax,Ax>=<x,x>$

لذا $||Ax||^2=||x||^2$

$||Ax||=||x||$

2.1.37 مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I و $\lambda=1,-1$ هي قيمة ذاتية

$x=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $y=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$

$<Ax,Ay>=(Ay)^*(Ax)=-2.5000$

$<x,y>=y^*x=-2.5000$

$<Ax,Ay>(Ax)^*(Ax)=1.2500$

$<x,x>=x^*x=1.2500$

2.1.38 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k و A مصفوفة ناظمية فان كل من AA^* , A^*A مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان : لتكن A مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k فان

$\Rightarrow(AA^*)^k((AA^*)^t)^k=(AA^*)^k((A^*)^t)A^t)^k$

$=A^k(A^*)^k((A^*)^t)^k(A^t)$

$=A^kI_n(A^t)^k$

$=I_n$ (A^* مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k)

بالتالي AA^* مصفوفة متعامدة من النمط I

وبصورة مشابهة بالنسبة الى A^*A

2.1.39 مبرهنة : اذا كانت AA^* مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k و A مصفوفة هرمشية فان A مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان : نفرض AA^* مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k

$\Rightarrow (AA^*)^k((AA^*)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow (AA)^*((AA)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow (A^2)^k\,((A^2)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow A^{2k}(A^t)^{2k} = I_n$

اذن A مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.40 مبرهنة : اذا كانت AA^t مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k و A مصفوفة متناظرة فان A مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان : لتكن AA^t مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k

اذن $\Rightarrow (AA^*)^k((AA^*)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow (AA)^k((AA)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow (A^2)^k\,((A^2)^t)^k = I_n$

$\Rightarrow A^{2k}(A^t)^{2k} = I_n$

عليه A مصفوفة متعامدة

2.1.41 مبرهنة : لتكن $A_{n\times n}$,$B_{n\times n}$ مصفوفتين متعامدتين من النمط I دليليهما k_1,k_2 على التوالي فان كل من $A\otimes B$, $B\otimes A$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها هو $L.C.M\{k_1,k_2\}$

البرهان : نفرض A,B مصفوفتين متعامدتين من النمط I و دليلهما k_1,k_2 تواليا فان

$A^{k1}(A^t)^{k1} = I_n$

$B^{k2}(B^t)^{k2} = I_n$

$k = L.C.M\{k_1,k_2\}$

$A^k(A^t)^k=I_n$

$B^{k2}(B^t)^{k2}=I_n$

$(A\otimes B)^k((A\otimes B)^t)^k=(A\otimes B)^k(A^t\otimes B^t)^k$

$=(A^k\otimes B^k)((A^t)^k\otimes(B^t)^k)$

$=A^k(A^t)^k\otimes B^k(B^t)^k$

$=I_n\otimes I_n$

$=I_n$

و بصورة مشابهة بالنسبة الى $B\otimes A$

2.1.42 مثال : المصفوفتان $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ مصفوفتان متعامدتان من النمط I و دليلهما $k=2$

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ i & 0 & -i & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)(A\otimes B)^t=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^2((A\otimes B)^t)^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

اذن $A\otimes B$ مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها $k=2$

2.1.43 مثال : المصفوفتان $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ متعامدتان من النمط I دليليهما 2 و 3 على التوالي

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)(A\otimes B)^t=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^2((A\otimes B)^t)^2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^3((A\otimes B)^t)^3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^4((A\otimes B)^t)^4=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^5((A\otimes B)^t)^5=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A\otimes B)^6((A\otimes B)^t)^6=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

المضاعف المشترك الاصغر بين 2,3 هو 6 اذن $(A\otimes B)^6((A\otimes B)^t)^6=I_n$

وبالتالي $A\otimes B$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها 6

2.1.44 نتيجة : اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k فان كل من $A\otimes A^t$ و $A^t\otimes A$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

البرهان : نفرض ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k اذن $A^k(A^t)^k=I_n$

بما ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k اذن A^t متعامدة من النمط I و دليلها k

اذن $A\otimes A^t,A^t\otimes A$ مصفوفتين متعامدتين من النمط I و دليلهما k

2.1.45 نتيجة : اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k فان :

1) كل من $A\otimes A^*$ و $A^*\otimes A$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k

2)كل من $A\otimes\bar{A}$, $\bar{A}\otimes A$ مصفوفة منتعامجة من النمط I *و دليلها* k

البرهان : 1) نفرض ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k اذن $A^k(A^t)^k=I_n$

بما ان A مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها k اذن A^* متعامدة من النمط I و دليلها k

و بالتالي كل من $A^*\otimes A, A\otimes A^*$ مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k

2) بنفس الطريقة

2.1.46 ملاحظة : كانت كل من A,B مصفوفة متعامدة من النمط I فان $A\oplus B$ ليس من الضروري ان يكون مصفوفة متعامدة من النمط I

2.1.47 مثال : لتكن كل من $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة من النمط I و دليلها $k=2$

$$A\oplus B=(I_2\otimes A)+(I_2\otimes B)$$

$$I_2\otimes A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$I_2\otimes B=\begin{bmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\oplus B=\begin{bmatrix}1+i & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A\oplus B)(A\oplus B)^t=\begin{bmatrix}2i & 1+i & 0 & 0\\ 1+i & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2i & 0\\ 0 & 0 & 1+i & -1\end{bmatrix}$$

$$(A\oplus B)^2((A\oplus B)^t)^2=\begin{bmatrix}-4 & -2+i & 0 & 0\\ -2+i & 2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -2+i\\ 0 & 0 & -2+2i & 2i\end{bmatrix}$$

$$(A\oplus B)^k((A\oplus B)^t)^k\neq I_n\ ,\ \forall\ k\in\mathbb{N}$$

2.2 *تشابه المصفوفات من النمط I*

2.2.1 تعريف : لتكن كل من A,B مصفوفة مربعة من الدرجة $n\times n$ تسمى المصفوفة A شبيه من النمط I للمصفوفة B اذا وجدت مصفوفة S متعامدة من النمط I بحيث $A=S^{-1}BS$ ويرمز لها بالرمز $A\sim_I B$

2.2.2 ملاحظة : اذا كان $A\sim_I B$ فان :

١) A,B لهما نفس القيمة الذاتية

٢) $\det(A)=\det(B)$

٣) $\mathrm{trace}(A)=\mathrm{trace}(B)$

٤) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

2.2.3 ملاحظة : $A\sim_0 B\Rightarrow A\sim_I B\Rightarrow A\sim B$ لكن العكس غير صحيح

2.2.4 مثال : لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ فان القيم الذاتية للمصفوفة B هما $1,2$ و تقابل المتجهات الذاتية $V1=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$ و $V2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$S=[V1 \quad V2]\Rightarrow S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

S مصفوفة متعامدة من النمط I

$$S^{-1}BS=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=A$$

عليه $A\sim_I B$

2.2.5 مبرهنة : اذا كانت A,B مصفوفتين متشابهتين من النمط I فان :

1) $A^{-1}\sim_I B^{-1}$ (اذا كانت A,B قابلتين للعكس)

2) $A^t\sim_I B^t$

3) $\bar{A}\sim_I\bar{B}$

4) $A^*\sim_I B^*$

البرهان : 1)

لدينا $A=S^{-1}BS$ (S مصفوفة متعامدة من النمط I)

$\Rightarrow A^{-1}=(S^{-1}BS)^{-1}$

$=S^{-1}B^{-1}(S^{-1})^{-1}$

$=S^{-1}BS$

اذن $A^{-1}\sim_{I}B^{-1}$

(2

$A=S^{-1}BS$

$\Rightarrow A^{t}=(S^{-1}BS)^{t}$

$=S^{t}B^{t}(S^{-1})^{t}$

$=(S^{t})^{-1}B^{t}S^{-1}$

بما ان S مصفوفة متعامدة من النمط I

اذن A^{t} مصفوفة متعامدة من النمط I

وعليه $A^{t}\sim_{I}B^{t}$

(3

$A=S^{-1}BS$

$\Rightarrow \bar{A}=\overline{S^{-1}BS}$

$=\bar{S}\ \bar{B}\ \overline{S^{-1}}$

$=\bar{S}\ \bar{B}\ (\bar{S})^{-1}$

$=C^{-1}\ \bar{B}\ C$

حيث $C=(\bar{\ })^{-1}$

بما ان S مصفوفة متعامدة من النمط I

فان $\bar{\ }$ مصفوفة متعامدة من النمط I

لذلك C مصفوفة متعامدة من النمط I $\Leftarrow \bar{B}\sim_{I}\bar{\ }$

(4

$A=S^{-1}BS$

بما ان $A\sim_I B$ اذن $A^t\sim_I B^t$ (حسب ٢)

لذلك $\overline{A^t} \sim_I \overline{B^t}$ (حسب ٣)

وعليه $A^*\sim_I B^*$

2.2.6 مبرهنة : علاقة التشابه من النمط I هي علاقة تكافؤ على مجموعة كل المصفوفات الابدالية مت الدرجة $n\times n$

البرهان :

للبرهنة على ان العلاقة انعكاسية

نفرض A مصفوفة من الدرجة $n\times n$ اذن $A=I^{-1}AI$

حيث المصفوفة المحايدة Iهي مصفوفة متعامدة من النمط I لذلك $A\sim_I A$

للبرهنة على ان العلاقة متناظرة

نفرض A مصفوفة متعامدة من النمط I مشابهة من النمط I بالنسبة لـ B

اذن $A=S^{-1}BS$ حيث مصفوفة متعامدة من النمط I

$SAS^{-1}=SS^{-1}BSS^{-1}=B$

$B=SAS^{-1}=(S^{-1})^{-1} A S^{-1}$

S^{-1}مصفوفة متعامدة من النمط I لان S مصفوفة متعامدة من النمط I

$B\sim_I A$

للبرهنة على ان العلاقة متعدية

نفرض $A\sim_I B$ و $B\sim_I C$

اذن $A=S^{-1}BS$ و $B=Q^{-1}CQ$ حيث كل من S,Qمصفوفة متعامدة من النمط I

$A=S^{-1}(Q^{-1}CQ)$

$=(S^{-1}Q^{-1})C(QS)$

$=(QS)^{-1}C(QS)$

بما ان S,Q متعامدتان من النمط I و S,Q ابداليتان اذن SQ مصفوفة متعامدة من النمط I

و بالتالي $A\sim_I C$

2.2.7 ملاحظة : يمكن ان نقول ان A مصفوفة مشابهة من النمط I بالنسبة لـ B او بالعكس

2.2.8 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها k و A,B متشابهتان تعامديا فان B مصفوفة متعامدة من النمط I

البرهان :

$B=S^{-1}AS$ لبعض S مصفوفة متعامدة

و $A^k(A^t)^k$

$$B^k(B^t)^k=\underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS)(S^tA^t(S^{-1})^t)\dots(S^tA^t(S^{-1})^T)}_{k-times}$$

$$=S^{-1}A^k(A^t)^k(S^{-1})^t$$

$$=S^{-1}I(S^{-1})^t$$

$$=I_n$$

لذلك B مصفوفة متعامدة من النمط I

2.2.9 مبرهنة : اذا كانت كل من A,B مصفوفة متماثلة من النمط I فان $A^m\sim_I B^m$ حيث $m=2,3,\dots$

البرهان : بما ان $A\sim_I B$ فان توجد مصفوفة S متعامدة من النمط I بحيث $A=S^{-1}BS$

لذا $B=S^{-1}AS$

اذن $B^m=(S^{-1}AS)^m$

$$=\underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS)}_{m-times}$$

$$=S^{-1}A^mS$$

اذن $B^m\sim_I A^m$ و كذلك $A^m\sim_I B^m$

2.2.10 تعريف : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة $n\times n$ على الحقل F تسمى A مصفوفة ضد متعامدة من النمط I اذا كان

$A^l(A^t)^l=(A^t)^lA^l=-I_n$ لبعض $l\in\mathbb{N}$

حيث l اصغر عدد صحيح موجب يحقق $(A^t)^l A^l=-I_n$

يسمى دليل المصفوفة A ويرمز له بالرمز $ind_a(A)$

2.2.11 مثال : 1) المصفوفتان

$A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1+I \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفتان ضد متعامدتان من النمط I

1) المصفوفة

$C=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ليست ضد متعامدة من النمط I

2.2.12 ملاحظة : كل مصفوفة ضد متعامدة من النمط I دليلها l هي مصفوفة متعامدة من النمط I دليلها 2l , و العكس غير صحيح

2.2.13 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I ولكنها ليست مصفوفة ضد متعامدة من النمط I

2.2.14 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متعامدة من النمط I و ضد متعامدة من النمط I

2.2.15 ملاحظة : اذا كانت A مصفوفة متعامدة من النمط فان دورة المصفوفة A هي دليل A

بمعنى آخر $period(A)=ind(A)=2ind_a(A)=2l$

2.2.16 ملاحظة :

$A^l(A^t)^l=-I$

$A^{2l+1}(A^t)^{2l+1}=AA^{2l}(A^t)^{2l}A^t$

$=A(A^l(A^t)^l)^2A^t$

$=A(-I)A^t$

$=AA^t$

2.2.17 مثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & i \end{bmatrix}$ هي مصفوفة ضد متعامدة من النمط I

$l=1,\ AA^t=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$l=2,\ A^2(A^t)^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=3,\ A^3(A^t)^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$l=4,\ A^4(A^t)^4=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$l=5,\ A^5(A^t)^5=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$l=6,\ A^6(A^t)^6=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=7,\ A^7(A^t)^7=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$l=8,\ A^8(A^t)^8=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=9\ ,\ A^9(A^t)^9=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اذن $ind_a(A)=3$ و دور المصفوفة A هو 6 و الذي يساوي دليل المصفوفة A

2.2.18 مبرهنة : اذا كانت A مصفوفة ضد متعامدة من النمط I دليلها l فان

$$\det(A^l)=\begin{cases} \pm 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ \pm i, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

البرهان : لتكن A مصفوفة ضد)متعامدة من النمط I دليلها l فان

$$A^l(A^t)^l=-I_n$$

$$\Rightarrow \det(A^l(A^t)^l)=\det(-I_n)$$

$$\Rightarrow \det(A^l(A^t)^l)=\begin{cases} 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ -1, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det(A^l)\det(A^t)^l=\begin{cases} 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ -1, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det(A^l)\det(A^l)=\begin{cases} 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ -1, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\det(A^l))^2 = \begin{cases} 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ -1, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

اذن

$$\mathrm{Det}\,(A^l) = \begin{cases} \pm 1, n \in 2\mathbb{Z} \\ \pm i, n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

2.2.19 مثال : 1) المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة ضد متعامدة من النمط I دليلها l=2 و n=2

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^4)=1$$

2) المصفوفة $A=\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ هي مصفوفة ضد متعامدة من النمط I دليلها l=1 و n=3

$$\det(A^l)=\det(A)=-i$$

References المصـــــــــــادر

[1] Abed al_Hamza M. Hamza and Hussein A. Hussein ''Construction New Type of Matrices '' , International Journal of Mathematics Trend and Technology ISSN:2231-5373,2016 .

[2] Anton H. , '' Elementary Linear Algebra " , 9th Ed. , John and Wiley , Inc. , 2010 .

[3] Bobbi Jo Broxon , " The Kronecker Product " , University of North Florida , 2006 .

[4] Finan B. M. , "Fundamental of Linear Algebra" , Arkansas Tech University, Texas, 2001