УДК 517.958, 530.145.6

© *Л. И. Родина, А. Х. Хаммади*

ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ[1]

Изучаются характеристики, связанные с инвариантностью или слабой инвариантностью заданного множества $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ относительно управляемой системы $\dot{x} = f(t,x,u)$ на конечном промежутке времени. Одной из таких характеристик является относительная частота $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ поглощения множества достижимости $D(t,X)$ данной системы множеством $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, равная отношению меры Лебега тех t из $[\tau,\tau+\vartheta]$, при которых $D(t,X) \subseteq M(t)$, к длине данного отрезка. Другая характеристика, $\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf\limits_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины ϑ. Доказаны теоремы об оценке и вычислении этих характеристик для различных многозначных функций $M(t)$ и $D(t,X)$. В частности, получены равенства для нахождения $\operatorname{freq}_T(D,M)$ для функции $M(t)$, периодической с периодом T и функции $D(t,X)$, которая при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяет включению $D(t+T,X) \subseteq D(t,X)$. Рассмотрены примеры вычисления и оценок данных характеристик.

Ключевые слова: управляемые системы, дифференциальные включения, множество достижимости.

Введение

Задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений является одной из важнейших задач математической теории управления и теории дифференциальных игр. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой, Ж. П. Обена, Е. Л. Тонкова и Е. А. Панасенко, В. Н. Ушакова, Ф. Хартмана и многих других авторов.

Первый результат в этой области опубликован М. Нагумо в 1942 году, которым было изучено свойство слабой инвариантности заданного множества относительно дифференциального уравнения. Эти исследования продолжил Ф. Хартман [1], сформулировав необходимые и достаточные условия слабой инвариантности для системы дифференциальных уравнений. Большое внимание изучению вопросов инвариантности и «выживаемости» (как называют в иностранной литературе слабую инвариантность) уделял Ж. П. Обен [2], который получил условия выживаемости множества $K \subset \mathbb{R}^n$ относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U(x)$$

в предположении, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $f(x,U(x))$ выпукло и компактно. Ж. П. Обен называет множество K *выживающим* относительно данной системы, если для любой начальной точки $x_0 \in K$ существует хотя бы одно решение $x(t)$ этой системы, начинающееся в x_0 и выживаемое в том смысле, что $x(t) \in K$ для всех $t \geqslant 0$.

Е. Л. Тонков и Е. А. Панасенко [3, 4] сформулировали условия, при которых заданное множество обладает свойствами положительной инвариантности, инвариантности, устойчивой или асимптотически устойчивой инвариантности относительно нестационарного дифференциального включения. Наличие инвариантного множества позволяет им рассматривать сужение включения на это множество и исследовать в нем различные экстремальные движения. А. Б. Куржанский исследовал структуру слабо инвариантных множеств гибридных систем, движение которых осуществляется путем мгновенного переключения с одной из «стандартных систем» на другую.

Отметим, что свойство слабой инвариантности находится в тесной связи с задачами о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством, исследуемыми Н. Н. Красовским, А. И. Субботиным, В. Н. Ушаковым и многими другими авторами. При решении этих

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части госзадания (проект № 2003).

задач возникает вопрос о том, в какой степени заданное множество не является инвариантным относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой (см. работы В. Н. Ушакова и его учеников [5,6]). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в применении инфинитезимального представления свойства инвариантности и вычисления дефекта инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности.

В работах [7–11] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

в момент времени t из начального множества X. Множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

называется *статистически инвариантным* относительно системы (0.1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице.

В данной работе изучаются характеристики, связанные с инвариантностью или слабой инвариантностью заданного множества $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ относительно управляемой системы (0.1) на конечном промежутке времени. Одной из таких характеристик является относительная частота $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ поглощения множества достижимости $D(t,X)$ данной системы множеством $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, равная отношению меры Лебега тех t из $[\tau,\tau+\vartheta]$, при которых $D(t,X) \subseteq M(t)$, к длине данного отрезка. Другая характеристика,

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$$

отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины ϑ. Доказаны теоремы об оценке и вычислении этих характеристик для различных многозначных функций $M(t)$ и $D(t,X)$. В частности, получены равенства для нахождения $\operatorname{freq}_T(D,M)$ для функции $M(t)$, периодической с периодом T и функции $D(t,X)$, которая при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяет включению $D(t+T,X) \subseteq D(t,X)$. Рассмотрены примеры вычисления и оценок данных характеристик.

§ 1. Основные определения и свойства характеристик

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$, и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Допустимым процессом управляемой системы* (1.1) назовем функцию $t \mapsto (u(t),x(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) решение $x(t)$ системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t,x,u(t))$ в смысле Каратеодори определено для всех $t \geqslant 0$;

3) имеет место включение $u(t) \in U(t,x(t))$.

Рассмотрим отвечающее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,U(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$.

Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости системы (1.1) в момент времени t из начального множества X, то есть множество, состоящее из всех значений в момент t решений $\varphi(t,x)$ включения (1.2), когда начальное условие $\varphi(0,x)=x$ пробегает все множество X. Предполагаем, что для каждого X множество достижимости $D(t,X)$ существует для всех $t\geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x\in X$ существует решение $\varphi(t,x)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x)=x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$.

Пусть множество $\mathfrak{M}\doteq\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x\in M(t)\big\}$ задано функцией $t\mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа, и для каждого $t\in[0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Для определения характеристик множества достижимости введем в рассмотрение множество $\alpha(\tau,\vartheta,X)\doteq\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}$.

Определение 1.2 (см. [7,9]). *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t,X)$ системы (1.1) множеством $\mathfrak{M}$ называется следующий предел

$$\operatorname{freq}(D,M)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta}=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta},\tag{1.3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (1.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(D,M)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta},\quad \operatorname{freq}_*(D,M)\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta}\tag{1.4}$$

называются, соответственно *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t,X)$ системы (1.1) множеством $\mathfrak{M}$.

Определение 1.3 (см. [10]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t,X)$ системы* (1.1) *множеством $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$* называется характеристика

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)\doteq\frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta}=\frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ для любого момента времени $\tau\geqslant 0$, поэтому естественно для заданного $\vartheta>0$ определить характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)=\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от пределов (1.3), (1.4) тем, что она отражает свойство *равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$* на отрезке заданной длины. Величина $\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)$ равна минимальной доли времени, в течение которого множество $D(t,X)$ содержится в множестве $\mathfrak{M}$ на каждом временном отрезке длины ϑ.

Теорема 1.1. *Имеют место следующие свойства:*

1) *для любого $\vartheta>0$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)\leqslant\operatorname{freq}_*(D,M);\tag{1.5}$$

2) *если функции $t\mapsto D(t,X)$ и $t\mapsto M(t)$ периодические с периодом $T>0$, то предел $\operatorname{freq}(D,M)$ существует и*

$$\operatorname{freq}_T(D,M)=\operatorname{freq}(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T};$$

3) *если функция $t\mapsto M(t)$ периодическая с периодом $T>0$ и для всех $t\geqslant 0$ имеет место включение $D(t+T,X)\subseteq D(t,X)$, то*

$$\operatorname{freq}_T(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T}.\tag{1.6}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения отметим, что неравенство (1.5) следует из равенства

$$\operatorname{freq}_*(D,M)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1}\operatorname{mes}\{t\in[i\vartheta,(i+1)\vartheta]:\,D(t,X)\subseteq M(t)\}}{k\vartheta}$$

и неравенства

$$\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[i\vartheta,(i+1)\vartheta]:\,D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}}{\vartheta}\geqslant\operatorname{freq}_\vartheta(D,M),$$

которое верно для любых $i=0,1,\ldots$ и $\vartheta>0$.

Докажем второе утверждение. Поскольку функции $t\mapsto D(t,X)$ и $t\mapsto M(t)$ периодичны с общим периодом $T>0$ и $\vartheta=T$, то выполнены следующие равенства

$$\operatorname{freq}_T(D,M)\doteq\inf_{\tau\geqslant0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T}=$$
$$=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T}=\operatorname{freq}(D,M).$$

Последнее равенство получено в [9, с. 53–54].

Докажем третье утверждение. Пусть функция $t\mapsto M(t)$ периодическая с периодом T и $D(t+T,X)\subseteq D(t,X)$ для всех $t\geqslant0$. Тогда если для некоторого $t^*\geqslant0$ имеет место включение $D(t^*,X)\subseteq M(t^*)$, то

$$D(t^*+T,X)\subseteq D(t^*,X)\subseteq M(t^*)=M(t^*+T).$$

Поэтому для любого $\tau\geqslant0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\tau]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}\leqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[T,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}.\tag{1.7}$$

Пусть $\tau\geqslant T$, тогда

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\tau]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}=$$
$$=\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}+\operatorname{mes}\bigl\{t\in[T,\tau]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\},$$
$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[T,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}=$$
$$=\operatorname{mes}\bigl\{t\in[T,\tau]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}+\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}.$$

Следовательно, из (1.7) получаем

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}\leqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}.\tag{1.8}$$

Далее, если $\tau<T$, то отрезки $[0,T]$ и $[\tau,\tau+T]$ имеют непустое пересечение — отрезок $[\tau,T]$. В этом случае неравенство (1.8) получаем из неравенств

$$\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}=$$
$$=\operatorname{mes}\{t\in[0,\tau]:D(t,X)\subseteq M(t)\}+\operatorname{mes}\{t\in[\tau,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[T,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}+\operatorname{mes}\{t\in[\tau,T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}=$$
$$=\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t,X)\subseteq M(t)\}.$$

Таким образом, (1.8) верно для всех $\tau\geqslant0$ и поэтому

$$\inf_{\tau\geqslant0}\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]\colon D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}=\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]\colon D(t,X)\subseteq M(t)\bigr\}.$$

Последнее равенство равносильно (1.6). $\square$

Следствие 1.1. *Если $M(t)=M$ для всех $t\geqslant0$ и $D(t+\vartheta,X)\subseteq D(t,X)$ для некоторого $\vartheta>0$ и всех $t\geqslant0$, то*

$$\operatorname{freq}_\vartheta(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:D(t,X)\subseteq M\}}{\vartheta}.$$

Доказательство. Поскольку $M(t+\vartheta)=M(t)$ для всех $t\geqslant0$, то данное утверждение следует из утверждения 3) теоремы 1.1. $\square$

§ 2. Об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, заданное непрерывной многозначной функцией $M(t)$, и многозначные функции $D(t)$, $\widetilde{D}(t)$, также непрерывные в метрике Хаусдорфа. В частности, множество $D(t) = D(t,X)$ может является множеством достижимости управляемой системы (1.1), а множество $\widetilde{D}(t) = \widetilde{D}(t,\widetilde{X})$ — множеством достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

в момент времени t из некоторого начального множества $\widetilde{X}$.

Предполагаем, что для каждого $t \geqslant 0$ множества $M(t)$, $D(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ непустые, компактные и функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T > 0$ (под T-периодической функцией будем понимать функцию $d(t)$, удовлетворяющую при всех $t \geqslant 0$ равенству $d(t+T) = d(t)$). Обозначим через $\operatorname{dist}(A,B)$ расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В следующей теореме получена оценка характеристики $\operatorname{freq}_T(D,M)$ и приведены условия, при которых можно найти ее значение.

Теорема 2.1. *Пусть функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T > 0$ и выполнено равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big) = 0$. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(D,M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\}}{T}$;

2) *если $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$ для всех $t \geqslant 0$, то* $\operatorname{freq}_T(D,M) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M)$.

Доказательство. Для каждого $\tau \geqslant 0$ определим функцию

$$R(\tau) \doteq \operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : D(t) \subseteq M(t)\big\} - \operatorname{mes}\big\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\big\}.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы нужно показать, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau) \leqslant 0$. По свойствам меры Лебега (так как из σ-аддитивности меры следует ее непрерывность [12, с. 274]) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\big\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t) \setminus M(t)\big\} \leqslant \varepsilon.$$

Далее, поскольку $h(t) \doteq \operatorname{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big) \to 0$ при $t \to +\infty$, для ε_0 существует момент времени t_0 такой, что $h(t) \leqslant \varepsilon_0$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, для всех $\tau \geqslant t_0$ выполнены неравенства

$$\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : D(t) \subseteq M(t)\big\} \leqslant \operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{h(t)}(t)\big\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\big\}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) в силу периодичности функций $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ получаем, что для всех $\tau \geqslant t_0$

$$R(\tau) \leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\} - \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\} = \\ = \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\} - \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\} = \\ = \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t) \setminus M(t)\} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, имеет место неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau) \leqslant 0$, из которого в силу определения функции $R(\tau)$ и относительных частот следует неравенство

$$\operatorname{freq}_T(D,M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Если $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$ для всех $t \geqslant 0$, то при всех $\tau \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : D(t) \subseteq M(t)\big\} \geqslant \operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\big\} = \\ = \operatorname{mes}\big\{t \in [0,T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\big\},$$

поэтому $R(\tau) \geqslant 0$ для всех $\tau \geqslant 0$ и $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau) \geqslant 0$. Учитывая доказанное выше неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau) \leqslant 0$, получаем, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau) = 0$, следовательно $\operatorname{freq}_T(D, M) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M)$. $\square$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^2$ вида

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, c]\big\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ниже приведено следствие из теорем 1.1 и 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть функции $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ и $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны, $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическая с периодом $T > 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\big(\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)\big) = 0$. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T\big(\varphi, (-\infty, c]\big) \leqslant \operatorname{freq}_T\big(\widetilde{\varphi}, (-\infty, c]\big) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{\varphi}(t) \leqslant c\}}{T}$;

2) *если* $\varphi(t) \leqslant \widetilde{\varphi}(t)$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то* $\operatorname{freq}_T\big(\varphi, (-\infty, c]\big) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{\varphi}, (-\infty, c])$;

3) *если* $\varphi(t) > \widetilde{\varphi}(t)$ *и* $\varphi(t + T) < \varphi(t)$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(\varphi, (-\infty, c]) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \varphi(t) \leqslant c\}}{T}.$$

Доказательство. Отметим, что функции $\varphi(t)$ и $\widetilde{\varphi}(t)$, удовлетворяющие условию следствия, ограничены, поэтому существует постоянная $E > 0$ такая, что $|\varphi(t)| \leqslant E$ и $|\widetilde{\varphi}(t)| \leqslant E$ для всех $t \geqslant 0$. Для каждого $t \geqslant 0$ рассмотрим множества $D(t) \doteq [-E, \varphi(t)]$ и $\widetilde{D}(t) \doteq [-E, \widetilde{\varphi}(t)]$. Тогда выполнены равенства

$$\operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) = |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)|,$$
$$\operatorname{freq}_T\big(\varphi, (-\infty, c]\big) = \operatorname{freq}_T\big(\varphi, [-E, c]\big) = \operatorname{freq}_T\big(D, [-E, c]\big),$$

и неравенство $\varphi(t) \leqslant \widetilde{\varphi}(t)$ равносильно неравенству $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$. Поэтому данное утверждение является следствием теорем 1.1 и 2.1. $\square$

Замечание 1. Если функция $\varrho(t) = \varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)$ — убывающая на $[0, +\infty)$, то для любого $T > 0$ неравенство $\varrho(t + T) < \varrho(t)$ (равносильное неравенству $\varphi(t + T) < \varphi(t)$) выполнено для всех $t \geqslant 0$. Обратное утверждение неверно. Например, функция $\varrho(t) = \sin t + e^{-t}$ не является убывающей, но $\varrho(t + 2\pi) < \varrho(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$ (для всех $t \in \mathbb{R}$).

Пример 2.1. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = -x + (\cos t + 1)u, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R},$$

где $u \in U = [-1, 1]$, и найдем множество достижимости $D(t, X)$ данной системы из начального множества $X = [x_1^0, x_2^0] : D(t, X) = \big[x_1(t, x_1^0), x_2(t, x_2^0)\big]$, где

$$x_1(t, x_1^0) = e^{-t}\Big(x_1^0 + \frac{3}{2}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) - 1,$$
$$x_2(t, x_2^0) = e^{-t}\Big(x_2^0 - \frac{3}{2}\Big) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) + 1, \quad t \geqslant 0.$$

Если $X = \widetilde{X} = \Big[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\Big]$, то многозначная функция

$$t \mapsto D(t, \widetilde{X}) = \Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) - 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) + 1\Big]$$

периодическая с периодом 2π.

Пусть $\mathfrak{M} = \left\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$, тогда $\operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{D}, M) = \dfrac{1}{4}$ в силу теоремы 1.1. Если $\widetilde{X} \subseteq X$, то $D(t+2\pi, X) \subseteq D(t,X)$, поэтому (см. следствие 1.1)

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(D,M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,2\pi] : D(t,X) \subseteq M\}}{2\pi}.$$

Если $X \subseteq \widetilde{X}$, то $D(t,X) \subseteq D(t,\widetilde{X})$ для всех $t \geqslant 0$. Далее, $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\big(D(t,X), D(t,\widetilde{X})\big) = 0$, поэтому в силу теоремы 2.1 выполнено равенство

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(D,M) = \operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{D},M) = \frac{1}{4}.$$

§ 3. Характеристики инвариантности решений, возникающие в физических, химических, биологических и экономических процессах

Пусть $z(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{z} = w(t,z), \quad z(0) = z_0.$$

Во многих прикладных задачах величина $z(t)$ не может принимать отрицательные значения, например, в физических процессах неотрицательными являются энергии частиц, в химических — концентрации реагирующих веществ, в биологических — размер популяции, в экономических — величины производств и цены на продукцию (соответствующие примеры приведены, в частности, в работах [13–16]). Поэтому для исследования этих задач введем следующие характеристики, определенные для любого $c > 0$:

$$\begin{gathered}\operatorname{freq}_{\vartheta}\big(z,(-\infty,c]\big) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] :\, z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta},\\ \operatorname{freq}\big(z,(-\infty,c]\big) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta}\end{gathered} \tag{3.1}$$

(если последний предел существует).

Отметим, что если по содержанию задачи величина $z(t)$ может быть отрицательной, то можно определить характеристики (3.1) для любого $c \in \mathbb{R}$. Также представляет интерес исследование характеристики

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}\big(z,[c_1,c_2]\big) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] :\, z(t) \in [c_1,c_2]\big\}}{\vartheta},$$

равной минимальной доли времени, в течение которого решение $z(t)$ находится в множестве $[c_1,c_2]$ на каждом временном отрезке длины ϑ.

Для управляемых процессов, которые имеют периодический характер, будем рассматривать характеристики $\operatorname{freq}_{\vartheta}\big(z,(-\infty,c]\big)$ и $\operatorname{freq}_{\vartheta}\big(z,[c_1,c_2]\big)$ при $\vartheta = T$, где $T > 0$ — период данного процесса.

П р и м е р 3.1. Получим равенства для вычисления характеристики $\operatorname{freq}_T\big(z,(-\infty,c]\big)$, где $z(t)$ — численность популяции, динамика которой задана задачей Коши

$$\dot{z} = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t)z\big)z, \quad z(0) = z_0. \tag{3.2}$$

Здесь $z_0 \geqslant 0$, $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ — непрерывные периодические функции с периодом $T > 0$. Предполагаем, что существуют постоянные α_1, α_2 и ε_1, ε_2 такие, что

$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_2, \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2. \tag{3.3}$$

Несложно показать, что для любого начального размера популяции $z_0 > 0$ с течением времени кривая численности популяции $z(t)$ стремится к периодической кривой, которая задается следующей функцией:

$$\widetilde{z}(t) = \frac{\widetilde{z}_0 \exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{\widetilde{z}_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}, \quad \text{где} \quad \widetilde{z}_0 = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_0^T \varepsilon(\tau)d\tau\Big) - 1}{\displaystyle\int_0^T \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds}.$$

Действительно, решение задачи Коши (3.2) имеет вид:

$$z(t) = \frac{z_0 \exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{z_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}.$$

Тогда $z(t) - \widetilde{z}(t) = h(t) \cdot g(t)$, где

$$h(t) = \frac{z_0 - \widetilde{z}_0}{z_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}, \quad g(t) = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{\widetilde{z}_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}.$$

Из неравенств (3.3) несложно получить, что функция $g(t)$ ограничена, а функция $h(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ (если $z_0 > 0$). Поэтому, если $z_0 > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} (z(t) - \widetilde{z}(t)) = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.3) также следует, что $\widetilde{z}_0 > 0$.

Пусть $z_0 \in (0, \widetilde{z}_0)$, тогда $\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Из (3.4) в силу следствия 2.1 получаем равенства

$$\operatorname{freq}_T\big(z, (-\infty, c]\big) = \operatorname{freq}\big(\widetilde{z}, (-\infty, c]\big) = \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\big\}}{T}.$$

Пусть $z_0 > \widetilde{z}_0$. Несложно проверить, что неравенство $h(t+T) \leqslant h(t)$ выполнено для всех $t \geqslant 0$. Учитывая периодичность и положительность функции $g(t)$, получаем

$$\varphi(t+T) = h(t+T)g(t+T) = h(t+T)g(t) \leqslant h(t)g(t) = \varphi(t)$$

для всех $t \geqslant 0$. Тогда в силу следствия 2.1 выполнено равенство

$$\operatorname{freq}_T\big(z, (-\infty, c]\big) = \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, T] : z(t) \leqslant c\big\}}{T}.$$

Список литературы

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Aubin J.-P. Viability theory. Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 1991. 543 p.
3. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 859–860.
4. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
5. Ушаков В.Н., Малев Я.А. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199–222.
6. Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.

7. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
8. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
9. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
10. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35–48.
11. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2014. № 11. С. 50–63.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
13. Давыдов А.А., Пастрес Р., Петренко И.А. Оптимальное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 30–35.
14. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 324 с.
15. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
16. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.

Поступила в редакцию 31.03.2016

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Хаммади Алаа Хуссейн, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com

L. I. Rodina, A. H. Hammady

Characteristics of invariancy for the attainability set of a control system

Keywords: control systems, differential inclusions, attainability set.

MSC: 34H05, 34H99, 93C10

We study characteristics associated with invariancy or weak invariancy of a given set $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ with respect to a control system $\dot{x} = f(t,x,u)$ on a finite time interval. One of such characteristics is relative frequency $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ of containing the attainability set $D(t,X)$ of this system in the set $\mathfrak{M}$ on a segment $[\tau,\tau+\vartheta]$. This characteristic is equal to the quotient of the Lebegues measure of those t from $[\tau,\tau+\vartheta]$ at which $D(t,X) \subseteq M(t)$ to the length of the given segment. Other characteristic, $\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf\limits_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ displays uniformity of containing the attainability set $D(t,X)$ in the set $\mathfrak{M}$ on a segment of the fixed length ϑ. We prove theorems about estimation and calculation of these characteristics for various multivalued functions $M(t)$ and $D(t,X)$. In particular, we receive equalities for $\operatorname{freq}_T(D,M)$ if the function $M(t)$ is periodic with a period T and the function $D(t,X)$ satisfies the inclusion $D(t+T,X) \subseteq D(t,X)$ for all $t \geqslant 0$. We consider examples of calculation and estimations of these characteristics.

REFERENCES

1. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. Translated under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.
2. Aubin J.-P. *Viability theory*, Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 1991, 543 p.
3. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Lyapunov functions and the positive invariant sets of differential inclusions, *Differ. Uravn.*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 859–860 (in Russian).
4. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, no. 1, pp. 194–212.
5. Ushakov V.N., Malev A.G. On the question of the stability defect of sets in an approach game problem, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2011, vol. 272, no. 1, pp. 229–254.
6. Ushakov V.N., Zimovets A.A. Invariance defect of sets with respect to differential inclusion, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 98–111 (in Russian).

7. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288 (in Russian).
8. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 17–27.
9. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).
10. Rodina L.I., Hammady A.H. The characteristics of attainability set connected with invariancy of control systems on the finite time interval, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 35–48 (in Russian).
11. Rodina L.I., Hammady A.H. Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 11, pp. 43–53.
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of functions theory and functional analysis), Moscow: Nauka, 1976, 544 p.
13. Davydov A.A., Pastres R., Petrenko I.A. Optimization of the spatial distribution of pollution emission in 1D flow, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 30–35 (in Russian).
14. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modeling of processes of selection), Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State University, 2007, 324 p.
15. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on mathematical models in biology. Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 232 p.
16. Nedorezov L.V. *Kurs lektsii po matematicheskoi ekologii* (Course of lectures on mathematical ecology), Novosibirsk: Sibirskii khronograf, 1997, 161 p.

Received 31.03.2016

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Hammady Alaa Hussein, Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com