وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة القادسية

كلية علوم الحاسوب و الرياضيات

قسم الاحصاء و المعلوماتية

**بعض تطبيقات نظرية الموثوقية**

بحث مقدم الى

جامعة القادسية/كلية علوم الحاسوب و الرياضيات/قسم الرياضيات كاستكمال لجزئي لنيل شهادة البكالوريوس في الاحصاء و المعلوماتية

من قبل الطالبتين

رغدة جواد نعمة زيب حسن جراد

باشراف

ا.م.د. احسان جبار كاظم

2017-2018

**المستخلص**

**يهدف هذا البحث الى دراسة مختصرة لنظرية الموثوقية التي هي احدى تطبيقات نظرية الاحتمال لما لها فقد درسنا موثوقية نظام كدالة لمركبات الموثوقية. كما درسنا بعض توزيعات زمن العمر المعلمية, مثل توزيع بواسون والتوزيع الاسي و توزيع كاما.**

**المقدمة**

**تعد نظرية الموثوقية التي هي احدى فروع نظرية الاحتمال من النظريات المهمة جدا لما لها من تطبيقات واسعة جدا في مختلف ميادين الحياة وخاصة في تحديد طول عمر جهاز معين ومدى كفاءته وكذلك لها تطبيقات في مجال الرادارات و الرصد الجوي و الفلكي.**

**يتكون بحثنا هذا من فصلين:**

**تناولنا في الفصل الاول موثوقية نظام كدالة لمركبات الموثوقية و النظام و مركباته وكذلك المركبات المستقلة: نظام معولي و صلاحية الثبات و توزيع عمر نظام بدون تجديد مركبة.**

**اما الفصل الثاني:توزيعات زمن العمر المعلمية , عملية بواسون – التوزيعين الاسي و كاما و العمر و معدل الفشل**

**المحتويات**

**المستخلص**....................................................................................(i)

**المقدمة**.........................................................................................(ii)

**الفصل الاول:** موثوقية نظام كدالة لمركبات الموثوقية................................(1)

1.1 النظام و مركباته........................................................................(1)

1.2 المركبات المستقلة: نظام معولي و صلاحية الثبات................................(6)

1.3 توزيع عمر نظام بدون تجديد مركبة ...............................................(12)

**الفصل الثاني:** توزيعات زمن العمر المعلمية..........................................(18)

2.1 عملية بواسون – التوزيعين الاسي و كاما ........................................(18)

2.2 العمر و معدل الفشل ..................................................................(27)

**الفصل الاول**

 **موثوقية نظام كدالة لمركبات الموثوقية**

**1.1 النظام و مركباته**

في نظرية الموثوقية, كما هو الحال في اي نظرية, نفكر و نتعامل بدلالة النماذج. سنتفحص في هذا الفصل نموذج نظام (system), يتضمن عناصر او مركبات. هدفنا تطوير جهاز شكلي ليمكننا من استلام معلومات حول موثوقية نظام من معلومات حول موثوقية مركباته. العرض في هذا الفصل لايتضمن ومفاهيم احتمالية.

**النظام** هو مجموعة من **مركبات** components (عناصر elements). سنتامل مركبات ثنائية فقط, هذا يعني ان المركبات تمتلك حالتين فقط: **جاهزة للعمل** operational و **عاطلة** failed. ان حالة المركبة , حيث , ستوصف بالمتغير الثنائي : اذا كانت المركبة جاهزة, اذا كانت المركبة عاطلة.

 سنفترض ان النظام باكمله يمكن ان يكون باحدى الحالتين الاتيتين فقط: جاهز للعمل او عاطل. ان اعتماد حالة نظام ما على حالة مركباته سيحدد بواسطة ما يسمى **بدالة الهيكل** **structure** **function** , حيث : اذا كان النظام جاهز للعمل, اذا كان النظام عاطل.

كذلك سنستخدم الترميز *. هذا يعني ان مركبات*  اصغر او تساوي *مركبات , هذا يعني , لكن على الاقل مركبة واحدة , بحيث .*

**مثال 1.1.1 : (نظام التوالي Series system) الشكل 1.1.a.**

يكون النظام جاهز للعمل اذا و فقط اذا كانت جميع مركباته جاهزة للعمل. بشكل اكثر دقة



**مثال 1.1.2: (نظام التوازي Parallel system) شكل 1.1.b**

يكون النظام جاهز للعمل اذا وفقط اذا كان على الاقل واحدة من مركباته جاهزة للعمل. بشكل اكثر دقة





الشكل 1.1. يمثل (a) نظام التوالي و (b) نظام التوازي.

**مثال 1.1.3 نظام من out-of- system))**

يكون هذا النظام جاهز للعمل اذا وفقط اذا كان على الاقل من مركباته الـ جاهزة للعمل. هذا يعني



وان بخلاف ذلك.

**مثال 1.1.4: سلك ارسال جهاز التلفزيون (Cable TV transmitter) الشكل 1.2**

النظام مصمم للارسال من المحطة المركزية الى ثلاث محطات محلية . مرتبطة المحطات باسلاك مرقمة , و التي تمثل مركبات النظام. يكون النظام جاهز للعمل اذا كانت كل المحطات الجزئية مرتبطة بشكل مباشر او عبر محطة جزئية اخرى بالمحطة المركزية.

 يمكن ان نتحقق من ان



سنوضح لاحقا كيفية اشتقاق هذه الصيغة.



الشكل 1.2 سلك ارسال جهاز التلفزيون

**مثال 1.1.5: ربط التوالي لانظمة التوازي الشكل 1.3**

في هذا النظام يكون لدينا

 .



الشكل 1.3 ربط التوالي لانظمة التوازي

**مثال 1.1.6 ربط التوازي لانظمة التوالي (الشكل 1.4)**

في هذا النظام يكون لدينا

 .



الشكل1.4 ربط التوازي لانظمة التوالي

من المهم ان يكون لدينا طريقة نظامية لتكوين صيغة لدالة الهيكل . سنعمل ذلك باستخدام المسارات الصغرى (minimal paths) القطع الصغر (minimal cuts). قبل عمل ذلك دعنا نفرض بعض المطالب الطبيعية على .

**تعريف 1.1.1 النظام الرتيب Monotone System**

يسمى نظام مع دالة هيكل رتيب اذا كان يمتلك الخواص الاتية:

1. ,
2. .

بكلام اخر: يكون النظام عاطل اذا كان كل مركباته عاطلة, يكون النظام جاهز للعمل اذا كان كل مركباته جاهزة للعمل, ولايمكن ان تصبح حالة النظام اسوأ اذا تغيرت حالة اي من مركباته من عاطلة الى جاهزة للعمل.

**تعريف 1.1.2**

1. **متجه القطع cut vector** :يسمى متجه الحالة متجه قطع اذا كان .
2. **مجموعة القطع cut set**: تسمى المجموعة مجموعة قطع. بالاضافة الى ذلك, اذا كان لاي ,  **,**  فمجموعة القطع المقابلة تسمى مجموعة قطع صغرى (minimal cut set) او للسهولة قطع اصغري.
3. **متجه المسار path vector**: يسمى متجه الحالة متجه مسار اذا كان .
4. **مجموعة المسار path set**: تسمى المجموعة مجموعة مسار. بالاضافة الى ذلك, اذا كان لاي ,  **,**  فمجموعة القطع المقابلة تسمى مجموعة مسار صغرى (minimal path set) او للسهولة مسار اصغري.

مجموعة القطع الصغرى تكون اصغر مجموعة مركبات حالات عطلها تمثل حالات عطل النظام باكمله.

 اذا كانت جميع عناصر مجموعة المسار "جاهزة للعمل" فان النظام جاهز للعمل. مجموعة المسار الصغرى هي اصغر مجموعة مركبات جاهزيتها للعمل يضمن جاهزية النظام للعمل. ان مجموعة المسار الصغرى لايمكن ان تختزل, كما انها لاتمتلك عناصر زائدة عن الحاجة.

**مثال. لنتامل المثالين 1.1.5 و 1.1.6**

 في المثال 1.1.5, يكون متجه مسار. مجموعة المسار المناظرة هي . على اية حال, لاتكون تلك المجموعة مجموعة مسار صغرى لانه اذا تعطل العنصر سيبقى النظام جاهز للعمل. ان المجموعة مجموعة مسار صغرى. توجد ثلاث مجموعات مسار صغرى. اوجدها!

في المثال 1.1.6, هناك مجموعتي مسار صغرتين هما و . يمتلك النظام في الشكل 1.3 مجموعتي قطع صغرتين : و .

ان المجموعة كذلك تكون مجموعة قطع لكنها ليست صغرى. النظام في الشكل 1.4 يمتلك ستة مجموعات قطع صغرى من الصيغة , حيث ان و .

**مبرهنة 1.1.1 تمثيل دالة الهيكل Structure function representation**

1. لتكن مجموعات مسار صغرى للنظام. فان



1. لتكن مجموعات قطع صغرى للنظام. فان



**البرهان**

1. افترض وجود مجموعة مسار صغرى واحدة على الاقل, جميع عناصرها تكون جاهزة للعمل, قل . فان وهذا يقود الى ان . افترض الان ان النظام جاهز للعمل. فيجب ان يكون هناك مجموعة مسار صغرى واحدة تكون جميع عناصرها جاهزة للعمل. وعليه الطرف الايمن من (1.1.4) يساوي 1. لذلك, اذا وفقط اذا وجدت مجموعة مسار صغرى واحدة تكون جميع عناصرها جاهزة للعمل. هذا يبرهن (1.1.4).
2. يكون البرهان بالطريقة نفسها.

يتبع من مبرهنة1.1.1 انه اي نظام رتيب يمكن ان يمثل بطريقين متكافئين: كربط توالي لانظمة جزئية متوازية كل منها مجموعة قطع صغرى, او كربط توازي لانظمة جزئية متوالية كل منها مجموعة مسار صغرى. لذلك, يوجد طريقين لتمثيل دوال الهيكل. بعد تبسيطات مناظرة, يصبحان متطابقان, كما يبينه المثال الاتي.

**مثال: تامل المثال 1.1.5**

ان دالة الهيكل للنظام في الشكل1.3 المعطاة اعلاه تستند على القطعين الاصغرين و . يمتلك النظام اربع مسارات صغرى: . وعليه,

 .

 دالة الهيكل تستند على القطوع الصغرى المقدمة في مثال 1.1.5. كلتا الصيغتين تنتجان نتيجتين متطابقتين. للتحقق من ذلك, من الضروري ان نبسط كلا التعبيرين. لاحظ ان المتغيرات الثنائية, لاي عدد صحيح .

**1.2 المركبات المستقلة: نظام معولي و صلاحية الثبات**

على عكس البند 1.1, دعنا الان نفترض ان حالة المركبة تكون موصوفة بمتغير عشوائي ثنائي , معرف على النحو



حيث و تناظران حالة جاهزية العمل و حالة العطل على الترتيب.

سيفترض ان كل المركبات مستقلة بشكل متبادل. هذا يؤدي الى تبسيط اساسي معتبر:بالنسبة الى مركبات مستقلة, التوزيع المشترك للمتغيرات العشوائية تحدد بشكل كامل بموثوقيات المركبة .

 لنرمز لمتجه حالة النظام بـ . ان هذا المتجه متجه عشوائي. بالمقابل, دالة هيكل النظام تصبح متغير عشوائي ثنائي: تقابل حالة جاهزية النظام للعمل و تقابل حالة عطل النظام.

**تعريف 1.2.1 معولية (موثوقية) نظام System reliability**

موثوقية نظام هي احتمالية كون دالة هيكل النظام مساوية الى 1:



بما ان متغير عشوائي ثنائي, فان الصيغة الاخيرة يمكن ان تكتب كالاتي:



ان التعبير (1.2.3) مفيد جدا لان عملية اخذ التوقع اداة قوية جدا بالنسبة الى حسابات الموثوقية. المثال الاتي يبين كيفية حساب موثوقية نظام عن طريق دالة هيكل النظام نفسه.

**مثال 1.2.1: موثوقية نظام التوالي**

هنا ولذلك



**مثال 1.2.2 موثوقية نظام التوازي**

هنا . وعليه



**مثال :1.2.3 ربط التوالي لانظمة التوازي (مثال 1.1.5)**

من التعبير يتبع بشكل مباشر ان



**مثال 1.2.4 نظام 2 من 4 مع عناصر متطابقة.**

بالنسبة الى هذا النظام,



ليكن يرمز الى المتجه حيث استبدلت مركبته ذات الموقع بـ . لذلك

 .

**مبرهنة 1.2.1 التحليل المحوري**

ليكن ***موثوقية نظام رتيب مع مركبات مستقلة. فان***

**(1.2.8)**

**البرهان.** حسب التعريف, . حسب صيغة الاحتمال الكلي,

 ,

 او

بما ان مستقلة, فالمساواة الاخيرة تاخذ الصيغة



ان التعبير (1.2.9) يمكن ان يكتب على النحو



فيزيائيا, تعني موثوقية نظام مركبته ذات الموقع استبدلت باخرى موثوقة بشكل قطعي, بالمثل تعني موثوقية نظام مركبته ذات الموقع عاطلة. التمحور (1.2.10) يطبق الى ان يكون استبدال المركبات باخرى موثوقة بشكل قطعي و / او باخرى عاطلة قد انتج هيكل تحسب موثوقيته بكل سهولة, مثل نظام التوالي-توازي. دعنا وضح كيفية استخدام الصيغة المحورية لحساب موثوقية هيكل الجسر المبين في الشكل 1.5.



الشكل 1.5 هيكل جسر

**مثال 1.2.5 موثوقية هيكل جسر (Reliability of a bridge structure)**

الاختيار الافضل هو التمحور حول العصر 3. افترض ان المركبة 3 جاهزة للعمل. فيصبح الجسر ربط توالي لنظامين جزئيين متوازيين يتضمنان العنصرين 1,2 و 4,5 على الترتيب. موثوقيته (انظر 1.2.6) تكون معطاة على النحو

 .

اذا كانت 3 عاطلة, فان المجسر يصبح ربط توازي لنظامي توالي: احدهما بالمركبتين 1,4 و الثاني بالمركبتين 2,5. موثيقية النظام تعطى على النحو

 .

لذلك, موثوقية النظام تعطى على النحو

 .

من السهل ان ننهي الحسابات. النتيجة النهائية تعطى



انها مهمة للحصول على النتيجة نفسها باستخدام, على سبيل المثال, المساؤرات الصغرى. يمتلك المجسر اربعة مجموعات مسار صغرى: , , و . وعليه دالة الهيكل العشوائية تعطى على النحو



نشر الحدود في الاقواس, بسط التعبير مستخدما حقيقة كون وخذ التوقع.

الكثير حول استخدام التحليل المحوري يمكن ان يوجد في Gertsbakh (1989) و Barlow (1998) ومصادرهما.

 موثوقية نظام كما معرفة اعلاه ذات طبيعة "ساكنة" (static) صرفة: زمن تشغيل النظام لم يتجلى اطلاقا. فيما يتعلق "جاهزية عمل " و "عطل" المركبة يمكن ان نتخيل رمي قطعة نقود باحتمال و على الترتيب. اذن, بالنسبة الى هذه التجربة الساكنة, تمثل احتمالية كون النظام في حالة عمل.

 تفسير اخر يعطى بالاتي. نفترض لدينا زمن معين جاري على محور الزمن وان هي احتمالية كون العنصر يعمل عند الزمن . فحسب (1.2.2) يمثل احتمالية كون النظام يعمل عند الزمن . سنبين في البند اللاحق كيف تقود هذه الحقيقية للتعبير عند دالة توزيع زمن حياة النظام.

 يوجد تفسير اخر لمقدار الذي يتضمن الزمن و الذي يرتبط بما يسمى صلاحية النظام (system availability) . اولا, افترض ان كل مركبة تمتلك دورات عمل وعطل متناوبة على محور الزمن. كذلك يمتلك النظام باكمله دورات عمل وعطل متناوبة على محور الزمن. يوضح الشكل 1.6 هذه الحالة لنظام تولي مكون من مركبتين. دورات عمل النظام هي التي تكون عندها كلتا المركبتين في حالة عمل.

 تامل مركبة وارمز بـ و , لمتتابعة دورات العمل و العطل لهذه المركبة. افترض ان , متغيرات عشوائية مستقلة لها التوزيع نفسه (i.i.d.r.v.) . يسمى المقدار الاتي الصلاحية الثابتة (stationary availability) للمرقبة :



حيث ان , .



**الشكل 1.6. النظام يعمل اذا وفقط اذا كانت كلتا مركبته جاهزة للعمل.**

تمتلك التفسير الاحتمالي الاتي. لتكن احتمالية كون المركبة تعمل عند بعض الزمن المستمر . فان



يمكن ان نقول ان صلاحية الثبات هي احتمالية كون المركبة تعمل عند . تفسير اخرى يعطى كالاتي. ارمز بـ الى القيمة الكلية لزمن عمل المركبة في . فان



الان يمكننا ان ندعي الاتي. افترض انه لدينا صيغة تعبر عن احتمالية العمل "الثابتة" (static) للنظام كدالة بالنسبة الى احتماليات عمل المركبة , هذا يعني ان . ( تذكر انه قد افترض ان المركبات مستقلة.) افترض ان , , هذا يعني ان تساوي صلاحية ثبات المركبة ذات الموقع . فان صلاحية ثبات النظام تكون مساوية الى



صلاحية ثبات النظام يمكن ان تفسر على انها احتمالية النظام سيكون في حالة العمل على المدى البعيد.بمعنى اخر, لتكن تمثل المقدار الكلي لزمن عمل النظام على .فان

 .

ان برهان (1.2.15) يمكن ان يوجد في , على سبيل المثال, Barlow and Proschan (1975),Chap.7..

 بالنسبة الى نظام التوالي لعميات مستقلة والمركبات المصانة, تكون معطاة بالصيغة:



هذه صيغة مهمة و واسعة الاستخدام في التطبيق العملي للموثوقية.

 ستناقش صلاحية النظام في الفصل 4 بالربط مع عملية التجديد المتناوب.

**1.3 توزيع عمر نظام بدون تجديد مركبة**

 في هذا البند سيفترض ان خواص مركبات النظام الاتية للتوضيح.

1. المركبة لها عمر زمني مع دالة توزيع تراكمية (c.d.f) , .
2. متغيرات عشوائية مستقلة.
3. تكون جميع المركبات عاملة عند . المركبة التي تعطل لاتجدد او ترمم. المركبات التي تعطل تبقى على حالة العطل "الى الابد".

لتعريف **زمن عمر نظام** , نحتاج الى بعض المفاهيم الاضافية. ليكن متغير عشوائي ثنائي معرف على النحو

 .

بمعنى اخر, طالما تكون المركبة عاملة, وتصبح عندما تعطل هذه المركبة.

لتكن متجه حالة مركبة عند زمن .

**تعريف 1.3.1 : زمن عمر نظام System Lifetime**

زمن عمر نظام هو الزمن الذي مابعده يدخل النظام حالة الفشل:



نعرف موثوقية نظام على انها احتمالية ان تتجاوز :

 .

غالبا مايسمى **احتمالية البقاء** (survival probability) او **دالة البقاء** (survival function).

 لتكن الموثوقية "الساكنة" للنظام, انظر تعريف 1.2.1. المبرهنة الاتية تخبرنا عن كيفية ايجاد بدلالة الدالة .

ارمز بـ لموثوقية المركبة , هذا يعني .

**مبرهنة 1.3.1:** موثوقية نظام *تعطى على النحو*



حيث ان .

**البرهان**

يتبع من تعريف ان هي احتمالية كون النظام يعمل عند زمن . النظام الرتيب يحتوي على مركبات غير قابلة للتجديد وتبدأ عملها عند في حالة "عمل", اخير تدخل حالة "الفشل" وتبقى فيه الى الابد.هكذا, اذا كان النظام "يعمل" عند زمن مستمر , فانه يبقى "يعمل" خلال كل الفترة الزمنية , او ..

 المبرهنة 1.3.1 تنص على ان دالة موثوقية نظام يحصل عليها باستبدال موثوقيات المركبة في دالة الهيكل بدوال الموثوقية المناظرة .

**مثال 1.3.1 حسابات الحد الادنى-الحد الاعلى (Minimum-Maximum Calculus)**

بالنسبة لنظام التوالي يكون لدينا . فحسب مبرهنة 1.3.1,يكون لدينا



لتكن دالة التوزيع التراكمي لزمن عمر نظام . فان



لنتذكر يكيفية اشتقاق صيغة دالة التوزيع التراكمي c.d.f للزمن الاصغر لـ من المتغيرات العشوائية المستقلة . ان الحادثتين و متكافئتان. هكذا

 لذلك, زمن عمر نظام توالي مكون من مركبات مستقلة يتوافق مع الحد الادنى لزمن عمر مركباته.

 بالنسبة لنظام توازي, , لذلك



كما في نظام التوالي, من السهل ان نبين ان تمثل صيغة دالة التوزيع التراكمي c.d.f للزمن الاعلى لـ من المتغيرات العشوائية . بمعنى اخر, زمن عمر نظام التوازي يتزامن مع الحد الاعلى لزمن عمر مركباته.

 الان من الواضح ان زمن عمر نظام توازي-توالي يمكن ان يعبر عنه بواسطة ازمنة عمر المركبات مستخدمين عمليتي الحد الادنى minimaum و الحد الاعلى maximum .

دعنا نتامل, على سبيل المثال, النظام المبين في الشكل 1.7..



**الشكل 1.7 نظام توالي-توازي**

 ليكن . واضح ان زمن عمر النظام يعطى على النحو



واضح ان



وبالمثل,



الان , وحسب (1.3.7),



 نرى انه بالنسبة الى نظام توالي-توازي يكون سهل جدا اشتقاق تعبير لتوزيع عمر نظام. اصبح ان دالة موثوقية نظام رتيب مع مركبات مستقلة يمكن ان تقرب (approximated) من الاعلى و من الاسفل بدالة موثوقية لنظام توازي-توالي مختار بشكل خاص. هذا يلخص في العبارة الاتية, انظر, على سبيل المثال, Barlow and Proschan (1975),Chap.2.

**مبرهنة 1.3.2**

لتكن مجموعات مسار صغرى, و لتكن مجموعات قطع صغرى لنظام رتيب. ارمز لموثوقية مركبة ذات الموقع بالرمز , ولموثوقية النظام بالرمز . فان



تنص هذه المبرهنة على ان مقيدة من الاعلى بموثوقية النظام الافتراضي(الخيالي) (مع مركبات مستقلة) وهو ربط توازي لانظمة جزئية متوالية كل منها يكون مجموعة مسار صغرى للنظام الاصلي. بالمثل, القيد الادنى هو موثوقية نظام يتم الحصول عليه بربط تواي لانظمة جزئية متوازية كل منها تكون مجموعة قطع صغرى للنظام الاصلي. على سبيل المثال, "النظام الاسفل" (lower system) للمجسر مبين في الشكل 1.8a. بالمثل, الشكل 1.8b. يبين "النظام الاعلى" (upper system). لاحظ ان العنصرين و يفترض على انهما مستقلان.



**الشكل 1.8. (a) "النظام الاسفل" للمجسر (b) "النظام الاعلى " للمجسر**

ارمز للقيد الاسفل في (1.3.10) بالرمز و للقيد الاعلى *بالرمز . فباستخدام مبرهنة* 1.3.1*, يمكن ان نؤسس الاتي:*

**نتيجة 1.3.1**



بمعنى اخر, دالة موثوقية نظام مقيدة من الاعلى و من الاسفل بدالة موثوقية "النظام الاسفل" و "النظام الاعلى" , على الترتيب.

 اخيرا, دعنا نقدم صيغة مفيدة جدا لحساب القيمة الوسيطية لزمن عمر النظام.

**قضية 1.3.2.** افترض ان متغير عشوائي غير سالب, هذا يعني . لتكن دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي , هذا يعني . فان



**البرهان**

كامل بالتجزئة واستخدم حقيقة كون موجود, فان .

**مثال 1.3.3**

لتكن ولتكن ثابت. عرف . جد .

 المعنى الفيزيائية للمتغير العشوائي هو الاتي. افترض ان زمن عمر النظام. نوقف النظام اما عند عطله او عند "العمر" age , ايهما يحدث اولا. هذا الوضع مثالي لما يسمى عمر التبديل (age replacement) والذي سنتامله لاحقا في الفصل 4. فيكون امتداد الزمن العشوائي الذي يعمل النظام خلاله قبل ان يتوقف.

 لاحظ ان يمكن ان يظر اليه كمتغير عشوائي متقطع الذي جميع كتله الاحتمالية متمركزة في النقطة . ان له دالة التوزيع التراكمية الاتية:

 .

بالاضافة الى ذلك, مستقل عن . فحسب (1.3.3)



بما ان عندما , اذن



**الفصل الثاني**

**توزيعات زمن العمر المعلمية**

**Parametric Lifetime Distributions**

**2.1 عملية بواسون – التوزيعين الاسي و كاما**

افترض انا لاحظنا حوادث (events) معينة تظهر عند لحظات عشوائية من الزمن. على سبيل المثال, حادثة وصول الباصات عند المحطة النهائية للباص, المكالمات الهاتفية الموجهة الى شخص معين, او عطل قطعة من جهاز. على وجه الخصوص, سنشير لبعض الانواع الخاصة من الحوادث, ولتكن المكالمات الهاتفية.

ليكن يرمز الى العدد الكلي للمكالمات التي حدثت خلال الفترة . لكل زمن مثبت , يكون متغير عشوائي, وان عائلة المتغيرات العشوائية تصف حساب عملية عشوائية.

 نقصر اهتمامنا في هذا البند على عمليات تزايد ثابت (مستقر): عدد المكالمات في الفترة وعدد المكالمات في اي فترة اخرى طولها لهما التوزيع نفسه.

احدى العمليات المهمة جدا من هذا النوع هي ما تسمى بعملية بواسون (Poisson Process).ليكن يرمز للفترة و لتكن تمثل الحادثة " عدد المكالمات خلال مساو الى . لتكن يمثل عدد الحوادث في الفترة .

**تعريف 2.1.1**

يقال عن عائلة متغيرات عشوائية , بانها **عملية بواسون** (Poisson Process) بمعدل , اذا كان:

1. لاي مجموعة من الفترات غير المتداخلة , ولاي مجموعة من الاعداد الصحيحة , تكون الفترات مستقلة بالاشتراك,
2. عندما .,
3. عندما .

هدفنا هو اشتقاق صيغ للاحتماليات التي تمثل احتماليات وجود بالضبط من المكالمات في فترة طولها .

**مبرهنة 2.1.1**

 في عملية بواسون بمعلمة , يكون عدد النداءات في فترة طولها موزع توزيع بواسون بمعلمة .

**البرهان.**

 بالاضافة الى الفرضيات (i)-(iii) اعلاه, نفترض ان احتمالية امتلاك عدد اكثر من الحوادث الصفرية في فترة طولها صفر مساوية الى صفر: . لذلك .

يتبع من تعريف 2.1.1 ان وهكذا



اذن



الان دع , نحصل على المعادلة التفاضلية



والتي يجب حلها بالنسبة للشرط الابتدائي . الحل يعطى على النحو



بالمثل, بالنسبة الى



عوض في (2.14). هذا يقود الى المعادلة



يجب ان تحل هذه تحت الشرط .لنحذف اجراءات الحل النمطية ونقدم الجواب:



(تحقق منها). وبهذا ينتهي البرهان.

اصبح الوقت ملائم للتذكير الموجز حول توزيع بواسون.

 نقول ان متغير عشوائي يوتزع حسب توزيع بواسون او له توزيع بواسون بمعلمة ( وتكتب ( اذا كان

الوسط الحسابي للمتغير العشوائي يعطى على النحو و التباين يعطى على النحو .

ان توزيع بواسون مرتبط الى حد بعيد بتوزيع ذي الحدين binomial . افترض ان لدينا سلسلة مكونة من من التجارب المستقلة, كل منها يمكن ان تنجح (باحتمال ) او تفشل (باحتمال ).فالمتغير العشوائي الذي يحسب العدد الكلي للنجاحات في من التجارب له توزيع ثنائي الحدين:



سنستخدم الترميز .

 الان افترض ان وان , في هذه الحالة . فباستخدام عمليات جبرية بسيطة يمكن ان نبين ان



عندما .

يمكن ان نتخيل عملية بواسون بمعدل بالطريقة الاتية. قسم الفترة الى من الفترات الصفيرة, طول كل منها . تخيل ان "لعبة يا نصيب" تاخذ مكان في كل فترة من هذه الفترات الصغيرة, نتائج هذه اللعبة اما ان تكون "ناجحة" او "فاشلة", بشكل مستقل عن جميع اللعبات السابقة كل نجاح هو "حادثة" ( نداء) في عملية العد وهو العدد الكل للنجاحات في الفترة . الان لتكن احتمالية النجاح هي , هذا يعني متناسب مع طول الفترة الصغيرة. فعندما , يكون



عدد النجاحات في الفترة تتوزع, لاي عدد منتهي , حسب توزيع ذو الحدين, وهو بالغاية ( عندما ) يقترب من توزيع بواسون بمعلمة . ما مر اعلاه – حيث تم وصف "عملية اليا نصيب" المتقطعة- هو في الحقيقية النص المتقطع لتعريف 2.1.1 (مع ).

ارمز بـ للفترة بين النداء ذي الموقع والنداء ذي الموقع في عملية بواسون.

(افترض ان عدد النداءات صفر عند , انظر الشكل 2.1)



**الشكل 2.1 عملية بواسون**

المبرهنة 2.1.1 تؤدي الى الاتي

**نتيجة 2.1.1**

1. متغيرات عشوائية مستقلة لها التوزيه نفسه (i.i.d.r.v.) ,



1. عرف . فان



يدعى توزيع اسي (exponential) وسيرمز له بـ . انه يلعب دور كبير جدا في نظرية المعولية (الموثوقية). يدعى توزيع توزيع كاما (Gamma) وسيرمز له بـ .

**البرهان.**

الجزء (i) يتبع من حقيقية كون . في الحقيقية , انمها تنص على ان زمن النداء الاول يتجاوز باحتمالية . لذلك, ان زمن النداء الاول .

من تعريف عملية بواسون يتبع ان الزمن بين النداء الاول و النداء الثاني له التوزيع نفسه و مستقل عن , الخ.

 لبرهان (ii), لاحظ ان الحوادث و " يوجد او اقل من الحوادث في " متكافئة . هكذا,



ان التوزيع الاسي هو حالة خاصة من توزيع كاما: . ان وسط وتباين هذيت التوزيعين يعطيان في ادناه.,



 التوزيع الاسي هو التوزيع المستمر الوحيد الذي يتضمن مايسمى بخاصية انعدام الذاكرة (memoryless property). ليكن . فان

 .

افترض ان الحادثة معلومة. دعنا نحسب الاحتمالية الشرطية.



والتي تساوي . تنص المعادلة (2.1.14) فيزيائيا انه اذا "النظام" يعمل في الماضي زمن , فان فرص بقائه يعمل فترة اضافية طولها هي نفسها كما لو كان النظام جديد "brand new" .

للحصول على فهم افضل للتوزيع الاسي, دعنا نتامل الحالة المتقطعة. افترض ان محور الزمن تقسم الى فترات صغيرة طولها . تظهر في كل فترة من تلك الفترات

 حادثة معينة, لتقل عطل, مع احتمالية , مستقلة عن ظهورها في فترة اخرى. دعنا نعرف المتغير العشوائي على انه العدد الرتيبي لتلك الفترة التي طولها التي تظهر فيها حالة الفشل لاول مرة for the first time. واضح ان , .

من السهل ان نبين ان

الان دعنا نتامل الاحتمال الشرطي



هذه بالضبط الحالة المتقطعة المناظرة الى خاصية انعدام الذاكرة للتوزيع الاسي: اذا كان "النظام" ليس عاطلا خلال الفترات الـ الاولى, فان فرصة عدم الفشل في من الفترات الاخرى على الاقل هي نفس فرصة عدم الفشل خلال الفترات الاولى للنظام "الجديد".

 يقال للمتغير العشوائي والذي يتوزع حسب

بانه يمتلك توزيع هندسي (geometric distribution). سنرمز لذلك بـ . بالنسبة الى المتغير العشوائي هذا يكون التوقع و التباين معطيان على النحو



التوزيع الهندسي هو في الحقيقية الحالة المتقطعة للتوزيع الاسي. دعنا نتامل الوقت الذي يقاس فيه الزمن العمري في - وحدة: . فان

 *,*

*حيث ان وان . لذلك, اذا كانت احتمالية الفشل تتناسب مع طول الفترة تقريبا وتقترب من الصفر, فان التوزيع الهندسي يقترب الى التوزيع الاسي.*

يتبع من نموذج توزيع كاما, ان



ان كثافتي التوزيعين الاسي و كاما هما, على الترتيب,



التمميز الاكثر استخدام لتوزيع متغير عشوائي موجب هو معاملات التغاير coefficient of variation (c.v) مالمعرف على النحو



الاعلى هي دالة الكثافة c.f., والاصغر معاملات التغاير c.v.. بالنسبة الى عائلة كاما (2.1.18),





**الشكل 2.2.** كثافات كاما. جميع الكثافات الثلات لها الوسط نفسه 1. معامل التغاير c.v. هو 1, 1.5 و 0.35 بالنسبة للمنحنيات 1, 2 و 3 على الترتيب.

يبين الشكل 2.2 صيغة دوال الكثافة لعائلة كاما.



**الشكل 2.3** يظهر الفشل مع المظهر الخارجي للاهتزاز الـ .

ان توزيع كاما يستعمل كثيرا لنماذج الموثوقية لانه يصف زمن عمر مركبة ( نظام) لما يسمى خطوط الاهتزاز التراكمي (shock accumulation scheme) .تخيل ان صدمات خارجية وصلت طبقا لعملية بواسون بمعلمة وان المركبة يمكن ان تبقى عاملة ليس اكثر من من الصدمات. فان ظهور من الصدمات يعني العطل. لذلك, ستكون دالة توزيع زمن عمر المركبة .

اذا كان "كبير", فان التقريب الطبيعي يمكن ان يستخدم وان



اذن هي دالة التوزيع التراكمية الطبيعية القياسية. بما ان المتغير العشوائي الطبيعي يمتلك قيم سالبة وحسب التعريف يكون الزمن العمر متغير عشوائي موجب, فاستخدام التقريب الطبيعي يكون مسوغ اذا كان بالامكان اهمال ذيلها الايسر(سالب).ننصح باستخدام التقريب الطبيعي فقط بالنسبة الى .

التعديل المفيد لـ (2.1.10) هو التوزيع الاسي مع معلمة موقع. كثافتها اذا كان , وان



في التطبيقات, عادة يكون موجب, وفي نظرية الموثوقية يسمى معلم العتبة (البداية) threshold parameter. ان الكثفافة (2.1.22) ربما تعكس نموذج فشل الصدمة الاحادية التالية. تخيل وجود عملية تلف كامنة متواصلة في النظام, وخلال الفترة يكون التلف صغير نسبيا كي لا تسبب الصدمات عطل النظام. خلال فرة زمنية قصيرة نسبيا , يكون تقدم التلف سريعا و يجعل النظام قابل للاهتزاز. بعد ذلك, الصدمة الاحادية تسبب العطل. يستعمل الترميز للمتغير العشوائي بدالة كثافة (2.1.22).

بما ان التوزيع الاسي يلعب دورا بارزا في الموثوقية و في نظرية وقاية الصيانة (preventive maintenance theory) , سنقدم نموذجين اضافيين يقودان الى التوزيع الاسي.الاول هو تكوين مخطط نظام"كبير" قابل للتجديد.

افترض ان النظام يتكون من من المركبات المستقلة, حيث "كبير". عمر المركبة هو , متوسط العمر للمركبة هو . بعد عطل المركبة, تستبدل مباشرة باخرى مماثلة احصائيا. افترض ان جميع المركبات منظمة على التوالي, وعطل كل مركبة يسبب عطل النظام

دعنا نتامل المتتابعة المرتبة للحظات زمن فشل النظام . يتم الحصول على هذه المتتابعة بوضع جميع لحظات فشل مركبة على محور زمن مشترك.

الحقائق المهمة الاتية اكتشفت اولا من قبل Khinchine (1956). اذا كان وسط ازمنت عمرة مركبة لها الكمية نفسها تقريبا, فان الفترات بين عطلات النظام تسلك, عندما كمتغيرات عشوائية تتوزع اسيا بشكل مستقل. ان معلمة تلك المتغيرات العشوائية تقترب من .

 اذا كان , فان المتتابعة المجمعة للعطلات تكشكل عملية بواسون بالمعلمة . هذا يصبح واضح اذا تذكرنا انه في العملية المجمعة , احتمالية كون حادثة ما في الفترة مساوية الى . الحقيقية الموصوفة في اعلاه حول المتتابعات الاختيارية للمتغير العشوائي تصف نموذج لانشاء عملية عشوائية تقترب, تحت شروط ملائمة, الى عملية بواسون بمعدل حاثة ثابت.

 الان لننعطف باتجاه مجموع عدد من المتغيرات العشوائي التي لها التوزيع نفسه. هدفنا هو المتغير العشوائي



حيث . قد افترض ان مستقل عن المتغيرات المستقلة ذات التوزيع نفسه . تذكر ان



تم تكوين المتغير العشوائي بالطريقة الاتية. تخيل ان لدينا قطعة نقود تبين "صور" (فشل) باحتمالية . نرمي قطعة النقود الى ان نحصل يظهر الفشل لامل مرة. على سبيل المثال, اذا حصلنا عل المتتابعة "كتابة, كتابة, صورة", فان الفشل يظهر في التجربة الثالثة. المتغير العشوائي يحسب عدد التجارب الضرورية للحصول على صور للمرة الاولى. بعد ان يصبح معلوما و ان , نضع .

**مبرهنة 2.1.2**

اذا كان , فان



هذا يعني ان تتوزع توزيع اسي مضبوط (exact exponential distribution) بالمعلمة .

**2.2 العمر و معدل الفشل (Aging and Failure Rate)**

لنتامل في هذا الفصل نظام (مركبات) الذي لايستبدل عند فشله. الحادثة " الفشل" يمكن ان تعرف بعدة طرق, اعتمادا على ظروف ملائمة. ان هذا الفشل الميكانيكي, بسبب القيم المسموح بها.

 من اجل معالجتنا للموضوع, ان التعريف الخاص للفشل ليس مهما, لكن ماهو مهم هوا ان نثبت زمن معين, نعرف حادثة :الفشل" و قياس الزمن ينتهي من "بداية" تكوين النظام( من بداية عمله) الى "نهايته" أو فشله. نفترض كذلك ان زمن الحياة (lifetime), هذا يعني, الزمن من " البداية" الى "النهاية" , يكون متغير عشوائي موجب مستمر مع دالة كثافة و دالة كثافة احتمالية تراكمية (c.d.f) .

 *لاهمية و استخدام في تحليل الموثوقية هو الاحتمالية الشرطية لفشل النظام في فترة صغيرة بالنسبة للزمن هو "يعمل". بشكل اساسي نهتم بالاحتمالية الشرطية*

****

بما ان المقام في (2.2.1) مساوي تقريبا الى , نتوصل الى الصيغة التالية:



بكلام اخر, احتمالية الفشل المشروطة في بالنسبة الى عمل النظام عند زمن , بالنسبة الى كمية صغيرة , مساوية تقريبا الى .

**تعريف 2.2.1**

افترض ان الزمن العمري هو متغير عشوائي موجب مع دالة كثافة و دالة كثافة التراكمية . فتسمى الدالة



نسبة الفشل (failure rate) أو نسبة الخطر (hazard rate). لاحظ ان معرفة فقط لـ بحيث ان .

 تذكر ان التوزيع الاسي يظهر كزمن للحادثة الاولى في عملية بواسون, و ان احتمالية ظهور الحادثة في تتناسب مع , يجب ان نتوقع ان نسبة فشل الزمن العمر المتوزع توزيعا اسيا يكون ثابت. في الحقيقة, لـ و ,

 

 نفترض الان ان نسبة فشل النظام . هل يمكن ان نعيد بناء دالة الكثافة لزمن عمر النظام أو دالة الكثافة التراكمية بطريقة وحيدة؟ الجواب "نعم" لانه توجد علاقة بسيطة و مفيدة بين احتمالية البقاء وان نسبة الفشل :



لبرهان هذا التمثيل التكامل في (2.2.5) على النحو .

**تعريف 2.2.2**

 تكون نسبة فشل المتغير العشوائي من نوع متزايدة ( متناقصة) اذا كان معدل الفشل المناظر دالة لـ متزايدة (متناقصة) .

 نكتب  *أو*  *اذا كانت متزايدة (متناقصة). المتغير العشوائي الاسي يكون, حسب التعريف,* من النوع *و .*

***مبرهنة* 2.2.2** *ان الدالة متناقصة (متزايدة) في اذا كانت الدالة متزايدة ( متناقصة).*

 *في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة, ان تعريف*  *و يجب ان يعطى بدلالة احتمالية البقاء .*

*تعريف* 2.2.3 *ليكن , , متغيرات عشوائية مستقلة مع دالة كثافة . نقول خلط* (mixture) *لـ اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له هي*

**

***مبرهنة* 2.2.3**

*ان خلط التوزيعات الاسية له توزيع من النوع .*

***البرهان.***

*ليكن . واضح ان الاحتمالية يمكن ان يمثل بالصيغة*

 *حيث ان متغير عشوائي بحيث ان . فان نسبة فشل هي*

**

*الان تامل المشتقة بالنسبة الى . يمكن ان يخرج الاشتقاق خارج المؤثر :*

**

*الان نعرف و . البسط في التعبير الاخير يكون . هي غير سالبة حسب متراجحة كوشي –شوارتز, وبهذا يتم برهان المبرهنة.*

*دعنا نتفحص الان العلاقة بين نسبة فشل المركبات و نسبة فشل النظام. يفترض ان النظام يحتوي مركبات مستقلة. ان الحالة بسيطة جدا لنظام التوالي, كما تنص عليه المبرهة التالية:*

***مبرهنة* 2.2.4**

 *نسبة فشل نظام التوالي هو مجموع مركباته نسب فشل مركباته.*

***البرهان.*** *ان معولية نظام التوالي هي . ناخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين. نشتق بالنسبة الى . فنحصل على*

**

*حيث .*

 *واضح من* (2.2.7) *انه اذا كانت جميع المركبات من النوع* IFR (DFR) *, فان نظام التوالي يكون من النوع* IFR (DFR) .

***مبرهنة* 2.2.5**

*لتكن العمر المتوسط للمركبة . اذا كانت كل المركبات من النوع* IFR*, فان العمر المتوسط للنظام يحقق المتراجحة :*

**

***مبرهنة* 2.2.6**

*ليكن عمر النظام.اذا كانت وان , فان, لـ ,*

**

***نتيجة* 2.2.6**

*ليكن دالة موثوقية النظام. ( ان دالة هيكل النظام). فان, لـ ,*

**

**2.3 *التوزيع الطبيعي, اللوغاريتمي الطبيعي, و توزيع ويبل***

**2.3.1 *التوزيعين الطبيعي و الطبيعي اللوغاريتمي (Normal and Lognormal Distributions)***

*سنتدرس فس هذا البند التوزيع الطبيعي بالعملية التجميعية للعطل الموصوفة بالنموذج , حيث ان فترات بين حوادث النجاح في عملية بواسون. نقول ان اذا كان*



حيث ان و هما القيمة المتوسطة و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي , على التوالي. ان قوة التوزيع الطبيعي هو انه كل المحور ولذلك ان هذا التوزيع لايمكن ان يمثل متغير عشوائي موجب. على اية حال, اذا كان , الجزء السالب للتوزيع الطبيعي يهمل, ويمكن ان ينفع كدالة كثافة مشتركة لمتغير عشوائي موجب. دعنا نقارن, على سبيل المثال, التوزيع الطبيعي و توزيع كاما لـ . حسب (2.1.20) , فيكون معامل التغاير لتوزيع كاما هو . هكذا نتوقع احتماليات البقاء



بان تكون قريبة من بعضها ( كلا التوزيعين له الوسط نفسه و التباين نفسه). بالحقيقية هذا صحيح, كما يبين الشكل 2.4.



شكل 2.4 مقارنة احتمالات البقاء لتوزيع كاما و التوزيع الطبيعي

المتغير العشوائي الطبيعي من النوع IFR. الشكل 2.5 يبين المنحنيات النوعية لنسبة الفشل.

 التوزيع الطبيعي اللواغاريتمي (lognormal) يعرف بالطريقة الاتية. نقول ان المتغير العشوائي يتوزع توزيع طبيعي لوغاريتمي مع المعلمتين و ( سنرمز له , اذا كان



دالة الكثافة المناظرة هي



ليكن . كيف يتوزع ؟



لذلك, نرى ان . ان لوغاريتم المتغير العشوائي الذي يتوزع توزيعا طبيعي لوغاريتمي هو متغير عشوائي طبيعي.



**الشكل 2.5** بالنسبة للتوزيع الطبيعي. 1. بالنسبة , 2. بالنسبة لـ .

العزمين المركزيين الاولين للتوزيع الطبيعي اللواغاريتمي هما كالاتي:





بالنسبة للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي, ان معامل التغاير هو دالة لـ فقط:



جدول 2.1 يبين كيفية اعتماد معامل التغاير على .

الكثافة الطبيعية اللوغاريتمية هو الانحراف الايسر و له انحدار اليمين بالنسبة لقيم كبير لمعاملات التغاير. تصبح الكثافة اكثر تماثل بالنسبة لمعاملات تغاير صغيرة, انظر الشكل 2.6.





الشكل 2.6 الكثافة الطبيعية اللوغاريتمية لـ ( المنحنى 1) , (المنحنى 2) و (المنحنى 3).

ان التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي ذو الثلاث معالم له الكثافة



وان يسمى درجة الحساسية (threshod sensitivity). تستخدم الكثافة في (2.3.8) عندما تولد بينات زمن العمر الى الكثافة الطبيعية اللوغاريتمية لـ , و الفشل لايظهر على .

 تفحص نسبة الفشل حيث عندما و . هكذا , المتغير العشوائي الطبيعي اللواغاريتمي لا يكون من النوع IFR ولا من النوع DFR. ربما يكون هذا التوزيع مناسب لوصف زمر العمر للاشياء التي تعضر بما يسمى " تاثيرات التدريب" (training effects).