

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

القادسية

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم الرياضيات الطبية

# النموذج الرياضي لديناميكيات

## الالتهاب الرئوي مع الناقلين

By (Ong'ala Jacob, Mugisha Joseph, Oleche Paul)



كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في

علوم الرياضيات الطبية من كلية علوم الحاسوب والرياضيات

ببحث تقدمت به

الطالبتان

نور فوزي علي و زينب كريم داوود

اشرافه

أ.م.د. ضياء غازي صالح

٢٠١٧-٢٠١٨

(بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ)

(( وَنُنزِّلُ مِنَ الْقُرْآنِ مَا هُوَ شَفَاءٌ  
وَرَحْمَةٌ لِلْمُؤْمِنِينَ وَلَا يَزِيدُ الظَّالِمِينَ  
إِلَّا خَسَارًا ))

(صدق الله العظيم)

الآية (٨٢) من سورة الأسراء

## الأهداء

نهدي ثمرة جهودنا في السنوات الدراسية التي من ساندنا وكان  
بجانبنا في كل الظروف وهياً لنا كل السبل لكي نصل  
إلى ما نحن عليه وأخص بذلك والدي ووالدتي،  
وأيضاً جزيل الشكر لمن  
قدم لنا مساعدتهُ خلال هذه السنوات  
الأربع وأخص بذلك رئيس قسمنا أ.م.د. ضياء غازي صالح  
وأ.د. وقاص غالب وجميع الاساتذة الذين كان لهم الأثر  
الطيب في تعليمنا.

# الفهرست

٥	المقدمة .....
٦	الفصل الاول :أشتقاق النموذج .....
٨	الايجابية والحدودية للطول .....
١٠	الفصل الثاني تحليل النموذج .....
١٢	استقرار التوازن المتوطن .....
١٦	تحليل التشعب .....
١٩	المناقشة.....
٢٠	العددية.....
٢١	المناقشة.....
٢٢	المراجع.....
٢٣	الملحق.....

# المخلص

هناك تقدم كبير احرز لفهم وبائيات الامراض المعدية حيث ان اكثر من مليوني طفل في البلدان النامية لا يزالون يموتون بسبب الالتهاب الرئوي كل عام. ومن الممكن ان تكون الجهود المبذولة للكشف الفوري عن انتشار الالتهاب الرئوي ومعالجته والتحكم فيه امراً ممكناً اذا ما فهمت ديناميكياته. في هذه الورقة نقوم بتطوير نموذج رياضي للالتهاب الرئوي بين الاطفال دون سن الخامسة. يتم تحليل النموذج باستخدام نظرية المعادلات الافتراضية العادية والنظم الديناميكية.

لـ  $R_0$  ليل استقرار نقاط التوازن وتحليل التشعب. اظهرت نتائج التحليل ان هناك نقط توازن حرة للمرض مستقرة محلياً  $E^f$   $R_0 < 1$  والتوازن المستوطن الفريد  $E^e$   $R_0 > 1$ . وبين التحليل ايضاً هناك امكانية للتشعب الى الامام.

# المقدمة

الالتهاب الرئوي هو مرض يصيب الجهاز التنفسي، سريع الانتشار يتميز بحالة رطبة في الرئتين وينتج عن الكائنات الدقيقة وهي: البكتريا والفطريات والطفيليات والفايروسات. من بين اربعة الكائنات الحية الدقيقة المحتملة تهاب رئوي، يقال ان البكتريا هي السبب الرئيسي [18], [27] ودية الرئوية [9], [21], [23]. البكتريا تدخل الرئتين، وتستقر في الحويصلات الرئوية والممرات الرئوية حيث تنمو بسرعة .  
يج لان الجسم يحاول ان يخبيء [24]. هذا يجعل التنفس مؤلماً ويحد من دخول الاوكسجين.

معظم حالات الالتهاب الرئوي هي نتيجة قطيرات صغيرة ناتجة من السعال او العطاس التي تحتوي على البكتريا وتصل هذه القطيرات الى الهواء عندما يصاب الشخص بالسعال او العطاس. ويمكن ايضاً ان تحمل البكتريا في الفم التسبب في اي ضرر. ويشار الى هؤلاء الاشخاص باسم الناقلين. بالنسبة الى الناقلين، يمكن للبكتريا ان تنتقل الى الرئتين وتغزو لتسبب العدوى وهذا ممكن عندما تقل حصانة او مناعة الفرد.

وهناك معلومات محدودة عن انماط انتقال المكو الرئوية في العالم النامي ومع

التغذية، وعدم الرضاعة الطبيعية والتلوث الفيروسية  
السابقة بين الآخرين وعلى الرغم من التركيز المتزايد على الهدف من الاهداف الانمائية لمد (MDG) لحد من وفيات الاطفال فان ما يقارب مليون طفل لا يزالون يموتون من الالتهاب الرئة كل عام في البلدان النامية، وهو ما يمثل ( %) من الموتى عالمياً. وفي غينيا يساهم الالتهاب الرئوي % من وفيات الاطفال ومن الواضح اعراضه مع اعراض الملاريا ومن ثم احتمال اساءة المعاملة بالعقاقير يا [12].

الموت من الالتهابات الرئوية يمكن ان يحدث خلال ثلاثة ايام للمرضى والتأخيرات في اعطاء العلاج المناسب ربما لا تحفظ الحياة. [17]

# الفصل الاول

## 1-1 اشتقاق النموذج

وتعتبر ديناميكيات انتقال الالتهاب الرئوي بين السكان قيد الدراسة بين اربع حالات على اساس حالة المرض، وهذا هو الحساسون الناقلات، المعديات والمستردة.

$t$  ، والحجم الكلي للمجتمع هو  $(N)$  وينقسم الى: الحساس  $(S)$   $(I)$   $(C)$   $(R)$  بحيث:

$$N = S + C + I + R \quad (1)$$

ويشار الى معدل التوظيف للفرد في سكان المعرضين للخطورة .  
ان المهاجرين المصابين غي مشمولين لأنهم غير قادرين على السفر. يمكن ان تكون العدوى الجديدة بسبب الاتصال المباشر مع اي من الناقلين بأعراض، حيث يتم الإشارة الى قوة العدوى من الحساسون بواسطة ينظم الأفراد المصابون حديثا الى فئة الحامل مع احتمالية  
احتمالية  $(p-1)$  يمكن تغيير ان اوضاعهم لإظهار الاعراض (المصابين)

$n$ . طبع لة هنا  $p$ . الأفراد لمسح كل البكتريا من الجسم وكسب الحصانة الزمنية في حين  $(p-1)$  منهم لا يزالون يحملون البكتريا الناقلين يمكن ايضا يستعدون لكسب الحصانة الزمنية بمعدل  $\pi$  يستعيد

البكتريا من الجسم وكسب الحصانة الزمنية في حين  $(-)$  منهم لا يزالون يحملون البكتريا الناقلين يمكن ايضا يستعدون لكسب الحصانة الزمنية بمعدل  $\beta$ . في هذا النموذج، والحصانة الزمنية هي نتيجة لجميع الطرق الممكنة التي قد تؤدي الى امكانية اعادة الاصابة بمعدل  $\delta$  الموت الاعتيادية بمعدل  $\mu$

:  $\alpha$

$$\lambda = \psi \left( \frac{I + \varepsilon C}{N} \right) : \psi = k\rho \quad (2)$$

حيث  $K$  هو معدل الاتصال و  $p$  يكون احتمال ان جهة الاتصال هي كافية لتسبب العدوى. ومن خلال الجمع بين جميع التعاريف والافتراضات، يتم اعطاء

نموذج لديناميكيات انتقل الالتهاب الرئوي بواسطة المعدلات التالية:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= v + \delta R(t) - (\lambda + \mu)S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - \rho)\lambda s(t) + \Pi c(t) - (\mu + \alpha + \eta)I(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \rho(\lambda)S(t) + (1 - q)\eta I(t) - (\mu + \pi + \beta)C(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= q\eta I(t) + \beta C(t) - (\mu + \delta)R(t)\end{aligned}\quad (3)$$

## ٢-١ الايجابية والحدودية للحلول

ي ( ) متغيرات غير سلبية والحلول تبقى ايجابية لجميع الوقت  $t \geq 0$ . هنا المعلومات في النموذج يفترض ان تكون ايجابية. وتبين لنا ايضا ان الحلول الممكنة مقيدة في منطقة:

$$\left\{ \phi = (S, I, C, R) \in \mathbb{R}_+^4 : N(t) < \frac{v}{\mu} \right\}$$

برهنة ( - ) لتكن القيم الأولية للمعلومات هي

$$\{s(0) \geq 0, I(0) \geq 0, C(0) \geq 0, R(0) = 0 \text{ and } N(0) \geq 0\} \in \phi$$

وهو موجب لكل قيم  $\{s(t), I(t), C(t), R(t), N(t)\}$

البرهان

( )

$$\frac{ds}{dt} = v + \delta R - \lambda S - \mu S$$

لدينا

$$\frac{ds}{dt} \geq -(\lambda + \mu)S$$

$$\int \frac{1}{S} dS \geq \int -(\lambda + \mu) dt$$



$$S \geq S_0 e^{-(\lambda+\mu)t} \geq 0$$

$$S \geq 0$$

بعد ذلك، نعتبر المعادلة الثانية في ( )

$$\frac{dI}{dt} = (1-\rho)\lambda S + \pi C - (\mu + \alpha + \eta)I$$

$$\frac{dI}{dt} \geq -(\mu + \alpha + \eta)I$$

$$\int \frac{1}{I} dt \geq \int -(\mu + \alpha + \eta) dt$$

$$I \geq I_0 e^{-(\mu + \alpha + \eta)t} \quad I \geq 0$$

يمكننا المضي قدما بطريقة مماثلة لإثبات ايجابية  $N, C, R$ .

$\phi$

مبرهنة (1-1)

t 0

البرهان

. المشتقات فما يتعلق بالوقت t ( ) والاستعاضة عنها

( ) لدينا

$$\frac{dN(t)}{dt} = V - \alpha I - \mu N$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} \leq V - \mu N$$

$$\Rightarrow N \leq \frac{V}{\mu} + \left( N_0 - \frac{V}{\mu} \right) e^{-\mu t}$$

حيث  $N_0 =$  هو حجم السكان الأولي وهكذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(t) < \frac{V}{\mu}$$

باستخدام هذه النتيجة جنباً الى جنب مع الماخذ . لدينا

$$0 \leq N(t) \leq \frac{V}{\mu}$$

مما يعني ان  $N$  وجميع المتغيرات الاخذ  $(R, S, I, C)$  وجميع الحلول التي تبدأ في  $\phi$  النهج، دخول او البقاء في  $\phi$ .

# الفصل الثاني

## (تحليل النموذج)

نقوم بتحليل نموذج انتقال الالتهاب الرئوي استنادا الى الانقسام الفرعية التالية لتحديد القاعدة لمعالم لديناميكيات الالتهابات الرئوية.

### 1-2 تحليل استقرار التوازن الخالي من الأمراض ال(DFE)

( ) عن طريق مساواة الجانبين الأيمن من المعادلات في النموذج الى الصفر ويصف النموذج في غياب المرض او العدوى. وهنا نحدد الفئات الحاملة للمرض والعدوى ابة كطبقات مرضية، ويعطي (DFE)  $(E^f = (S^f, I^f, C^f, R^f))$

$$E^f = \left( \frac{V}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$$

مبرهنة (1-2) هناك (DFE) فريد  $E^f$  للنموذج الذي يمثله نظام المعادلات في ( )

### البرهان

ثبت هذا المآخذ عن طريق استبدال  $E^f$  ( ) . وتظهر النتائج جميع المشتقات (DFE) هو نقطة التوازن.

$E^f$  وسنستخدم نهج المشغل الجيل القادم على النظام ( )

$R_0$  باستخدام تدوين المصفوفتين  $F$  و  $v$ ، لدينا،

$$F = \begin{pmatrix} (1-\rho)\psi & (1-\rho)\psi\varepsilon \\ \rho\psi & \rho\psi\varepsilon \end{pmatrix} \text{ and } V = \begin{pmatrix} h_1 & -\pi \\ -(1-q)\eta & h_2 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \mu + \alpha + \eta \text{ و } h_2 = \mu + \pi + \beta$$

والقيم الذاتية للمصفوفة  $FV^{-1}$  هي

$$0, \psi \left( \frac{\rho[\varepsilon h_1 + \pi] + (1 - \rho)[h_2 + (1 - q)\varepsilon\eta]}{h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta} \right)$$

لذا من المبرهنة ( ) لدينا

$$R^0 = \psi \left( \frac{\rho[\varepsilon h_1 + \pi] + (1 - \rho)[h_2 + (1 - q)\varepsilon\eta]}{h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta} \right) \quad (4)$$

مبرهنة (٤.٢) يكون التوازن الخالي من المرض  $E^f$  ( ) وغير مستقرة عند  $R^0 >$  البرهان  
 $E^f$  ( ) تعطي كما يلي:

$$J(E^f) \begin{pmatrix} -\mu & -\psi & -\psi\varepsilon & \delta \\ 0 & -h_1 & \pi & 0 \\ 0 & (1 - q)\eta & -h_2 & 0 \\ 0 & q\eta & \beta & -(\mu + \delta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Trace}[J(E^f)] = -(2\mu + \delta + h_1 + h_2) < 0$$

$$\text{Det}[J(E^f)] = \mu(\delta + \mu)[h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta] > 0 \quad (5)$$

$\mu, \delta, h_1, h_2 < 0$  كلها موجبة  $(2\mu + \delta + h_1 + h_2) < 0$

$$\text{Trace}[J(E^f)] < 0$$

ومن ناحية اخرى  $R_0$  لا يمكن ان يكون سالبا البسط

$$\{\rho[\varepsilon h_1 + \pi] + (1 - \rho)[h_2 + (1 - q)\varepsilon\eta]\}$$

موجبة، يجب ان يكون المقاسم موجبا  $h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta > 0$  وهذا يعني

$$\text{Det}[J(E^f)] > 0$$

$$h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta > 0 \quad \mu(\delta + \mu) > 0$$

وهكذا

$$R^o = \psi \left( \frac{\rho[\varepsilon h_1 + \pi] + (1 - \rho)[h_2 + (1 - q)\varepsilon\eta]}{h_1 h_2 - (1 - q)\pi\eta} \right) < 1$$

$R^o < 1$  مستقرة محليا بشكل متناظر عند  $E^o$  ( )

## ٢-٢ استقرار التوازن المتوطن EE

(تحليل فركاتيون) ويشار الى التوازن المتوطن بواسطة  $E^e$  وتعرف كتحليلات حالة

$$E^e = \{S^e, I^e, C^e, R^e\} \quad ( )$$

$$S^e = \frac{N}{R_0}$$

$$C^e = \frac{(\mu + \delta)(1 - \rho)(1 - q)\eta + h_1 \rho)(R_0 - 1)V}{R_0((\mu + \delta)(h_2 h_1 - (1 - q)\pi\eta) - \delta(\rho(\pi\eta q + h_1 \beta) + (1 - \rho)(\eta q h_2 + (1 - q)\eta\beta)))}$$

$$I^e = \frac{(\delta + \mu)(\pi\rho + (1 - \rho)h_2)(R_0 - 1)V}{R_0((\mu + \delta)(h_2 h_1 - (1 - q)\pi\eta) - \delta(\rho(\pi\eta q + h_1 \beta) + (1 - \rho)(\eta q h_2 + (1 - q)\eta\beta)))}$$

$$R^e = \frac{(\rho(\eta\pi q + h_1 \beta) + (-\rho + 1)(h_2 q\eta + (1 - q)\eta\beta))(R_0 - 1)v}{R_0((\mu + \delta)(h_2 h_1 - (1 - q)\pi\eta) - \delta(\rho(\pi\eta q + h_1 \beta) + (1 - \rho)(\eta q h_2 + (1 - q)\eta\beta)))}$$

مبرهنة (٢-٢)  $R_0 > 1$  نقطة توازن متوطن فريدة  $E^e$  اي موجودة وليست نقطة توازن

### البرهان

والدليل على ان المرض متوطنا،  $\frac{dc}{dt} > 0$   $\frac{dI}{dt} > 0$

$$(1 - \rho)\psi \frac{S}{N} (I + \varepsilon C + \pi C - h_1 I) > 0 \quad (6)$$

$$\rho\psi \frac{S}{N} (I + \varepsilon C + (1 - q)\eta I - h_2 C) > 0$$

( ) لدينا

$$h_1 I > (1 - \rho)\psi \frac{S}{N} (I + \varepsilon C + \Pi c)$$

باستخدام حقيقة  $\frac{S}{N} \leq 1$

$$I < \frac{(1 - \rho)\psi I (1 - \rho)\psi \varepsilon C + \Pi c}{h_1} \quad (7)$$

( ) لدينا

$$C < \frac{\rho\psi I (1 - \rho)\eta I}{h_2 \rho\psi \varepsilon} \quad (8)$$

تعويض

$$I < \frac{(1 - \rho)\psi I + [(1 - \rho)\psi \varepsilon + \Pi] \frac{\rho\psi I + (1 - \rho)\eta I}{h_2 - \rho\psi \varepsilon}}{h_1}$$
$$I < \frac{(1 - \rho)\psi I + [(1 - \rho)\psi \varepsilon + \Pi] \rho\psi I + (1 - q)\eta I}{h_1 h_2 - h_1 \rho\psi \varepsilon} \quad (9)$$

$$h_1 h_2 - h_1 \rho\psi \varepsilon < (1 - \rho)\psi h_2 + \rho\psi \Pi + (1 - \rho)\psi \varepsilon + (1 - q)\eta + (1 - q)\eta \pi$$

$$1 < \frac{\psi[\rho(h_1 \varepsilon + \Pi) + (1 - \rho)(h_2 + (1 - q)\varepsilon \eta)]}{h_1 h_2 - (1 - q)\eta \pi} = R_0$$

وهكذا يوجد توازن متوطن فريد عند  $R_0 > 1$ .

### 1-2-2 تحليل الاستقرار المحلي للتوازن المتوطن

رار المحلي للتوازن المتوطن بتطبيق معيار روث هورويتز

هو مستقر محليا في  $G$

$E^0$

مبرهنة (2-3)  $R_0 > 1$

$$JE^{\circ} = \begin{vmatrix} -\bar{\lambda} - \mu & 0 & 0 & \delta \\ (1 - \rho)\bar{\lambda} & -h_1 & \pi & 0 \\ \rho\bar{\lambda} & (1 - q)\eta & h_2 & 0 \\ 0 & q\eta & \beta & -\mu - \delta \end{vmatrix}$$

$\lambda$  تعرف كقوة العدوى عند التوازن المتوطن حيث يتم تعريف  $JE^{\circ}$  مميزة / هو مصفوفة وحدة  $\times$  . بحيث تصبح المعادلة المميزة

$$\rho(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

وبالتالي من المعيار روث-هورويتز، لدينا المصفوفة

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \lambda^4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & 0 & \lambda^3 \\ \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} & \alpha_4 & 0 & \lambda^2 \\ \alpha_3 - \frac{\alpha_1\alpha_4}{\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)} & 0 & 0 & \lambda \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2\mu + \delta + h_2 + h_1 + \lambda$$

$$\alpha_2 = 2h_2\mu + 2h_1\mu + \mu\lambda + \mu^2 + h_2\delta + h_1\delta + \delta\lambda + \delta\mu + \mu\pi + \mu\pi + \rho + h_1h_2 + h_2\lambda + h_1\lambda$$

$$\alpha_3 = (\mu + \delta)(h_1 + h_2)(\mu + \lambda) + (\mu + \lambda) + (h_1h_2 - (1 - q)\eta\pi)(\lambda + \delta + 2\mu) - \lambda\delta(1 - q)(q\eta + \beta\rho)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= (1 - \rho)(q\pi - h_2q - (1 - q)\beta)\eta\lambda\delta \\ &\quad - (\mu + \lambda)(\mu + \lambda)(\mu + \delta)(\mu + \lambda)(\mu + \delta)(\eta\pi - h_1h_2) - \beta\rho\lambda\delta h_1 \\ &\quad + \eta\pi\mu q(\mu + \lambda + \delta) \end{aligned}$$

وفقا لمعيار روث-هورويتز  $R_0 > 1$

$E^e$  مستقر محليا إذا كان

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} > 0, \alpha_3 - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_1 \frac{\alpha_3}{\alpha_1}} > 0$$

### ٢-٢-٢ تحليل التشعب

التشعب هو تغيير نوعي في طبيعة مسارات الحل بسبب تغيير المعلمة. وتسمى النقطة التي يحدث فيها هذا التغيير نقطة التشعب. عند نقطة التشعب، يتغير عدد من نقاط التوازن او خصائص استقرارها او كليهما.  $R_0 > 1$  فان الأمراض المعدية لن تصيب السكان ما لم

ينص على خلاف ذلك. نحن نثبت استخدام مركز نظرية إمكانية التشعب  $R_0 = 1$

$$N = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad R = x_4, C = x_3, I = x_2, S = x_1$$

: ( ) ( )

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 = V + \delta x_4 - \psi \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 - \psi \varepsilon \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 - \mu x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2 = (1 - \rho) \psi \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 + (1 - \rho) \psi \varepsilon \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 \pi x_3 - h_1 x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3 = \rho \psi \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 + \rho \psi \varepsilon \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} x_1 + (1 - \rho) \eta x_2 - h_2 x_3$$

$$\frac{dx_4}{dt} = f_4 = \alpha \eta x_2 + \beta x_3 - (\mu + \delta) x_4 \quad ( )$$

$$R_0 = 1 \quad \psi_c, \text{ يتم حل } ( ) \quad \text{كمقياس متفرق } c$$

$$\psi_c = \frac{\mu^2 + \mu\alpha + \mu\eta + \pi\mu + \pi\alpha + \beta\mu + \beta\alpha + \beta\eta + \eta\alpha\pi}{\rho\sigma\mu \mid \rho\sigma\alpha \mid \mu \mid \pi \mid \beta \mid \sigma\eta \mid \sigma\eta\alpha \mid \rho\mu \mid \rho\beta \mid \rho\sigma\eta\alpha} \quad ( )$$

$$\psi = \psi_c \quad \text{وتعطى مصفوفة التحرير } f \quad ( )$$

:



$$JE^f|\psi = \psi c = J\psi c = \begin{pmatrix} -\mu & -\psi_c & -\psi_c \epsilon & \delta \\ 0 & -h_1 & \pi & 0 \\ 0 & (1-q)\eta & h_2 & 0 \\ 0 & q\eta & \beta & -(\mu + \delta) \end{pmatrix}$$

صفر هو قيمة ذاتية بسيطة لـ  $J\psi_c$  المتجه الذاتي الأيمن  $(w)$   $h_1 = \frac{\eta\pi(1-q)}{h_2}$

ترتبط مع المتجه الذاتي الصفري تعطى بواسطة  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$

$$w_1 = \frac{w_3(\eta\delta((1-q)\beta) - \psi(\mu + \delta)(h_2 + (1-q)\epsilon\eta))}{\eta(1-q)(\mu + \delta)\mu}$$

$$w_2 = \frac{w_3 h_2}{\eta(1-q)}$$

$$w_3 = w_3$$

$$w_4 = \frac{w_3(qh_2 + ((1-q)\beta))}{(1-q)(\mu + \delta)}$$

والمتجه الذاتي الأيسر  $(V)$   $(J\psi_c)$  المقابل لقيمة الصفر يعطي بواسطة

$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{V_3 h_2}{\pi}$$

$$V_3 = V_3$$

$$V_4 = 0$$

نحن الآن نعيد صياغة نظرية ذكرها كاستيلو تشافيز وسونغ

التفاضلية العادية مع المعلمة  $\Phi$

$$f \in C^2(R^n \times R)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \Phi), f: R^n \times R$$

$$: \quad (f(0, 0) = 0) \quad 0$$

$$A = D_x f(0,0) = \left( \frac{\delta f_i}{\delta x_j} (0,0) \right) - 1$$

هي المصفوفة الخطية للنظام حول نقطة التوازن  $0$  عند تقييمها عند  $0$

- الصفر هو المتجه البسيط من  $A$  وجميع القيم الذاتية الأخرى  $A$  الاجزاء الحقيقية السلبية.

-  $A$  لها المتجه  $w$  المتجه الأيسر  $V$  المقابلة الى القيمة الذاتية الصفرية ليكن  $f_k$  يكون  $k^{th}$  (f)

$$a = \sum_{k,i,j}^n V_k w_i w_j \frac{\delta^2 f_k}{\delta x_i \delta x_j} (0,0) \quad (12)$$

$$b = \sum_{k,i=0}^n V_k w_i \frac{\delta^2 f_k}{\delta x_i \delta \Phi} (0,0) \quad (13)$$

لذلك الديناميكيات المعلية للنظام  $x=0$  تحديد كلي بواسطة  $a$   $b$

$$\Phi < 0 \quad a > 0, b > 0 \quad -1$$

$$(0,0), \|\Phi\| \ll 1$$

هو تقارب محلي مستقر وهو مثبت وموجود غير متقارب عند التوازن

$$\Phi < 0 < \Phi \ll 1 (0,0),$$

وهو غير مستقر عندما يكون  $(, ) 0 < \Phi \ll 1$  مستقرا محليا بشكل غير منتظم، وهناك توازن إيجابي غير مستقر.

-  $a < 0$   $b > 0$  ، عندما يتغير  $\Phi$  من سالب الى ايجابي،  $x=0$  يتغير استقراره من مستقر الى غير مستقر. وفي المقابل يصبح التوازن السلبي غير المستقر محليا مستقر بشكل متناظر يظهر الحساب الجبري من نظرية ( . )

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_2} = -2 \frac{(1-\rho)\psi}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_2 \delta x_2} = -2 \frac{\rho\psi}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_2} = (1-\rho)\psi x_1 \left(-\frac{1}{x_1^2} - \frac{\epsilon}{x_1^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_2 \delta x_2} = \rho\psi x_1 \left(-\frac{1}{x_1^2} - \frac{\epsilon}{x_1^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_3} = -\frac{(1-\rho)\psi}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_3} = -\frac{(1-\rho)\psi}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_3} = (1-\rho)\psi x_1 \frac{\psi}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_2 \delta x_2} = -2 \frac{\rho\psi\epsilon}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_3 \delta x_4} = -\frac{(1-\rho)\psi\epsilon}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_3 \delta x_3} = -\frac{\rho\psi\epsilon}{x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \psi_c} = 1 - \rho$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_3 \psi_c} = -\rho$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \psi_c} = (1-\rho)\epsilon$$

$$\frac{\delta^2 f_3}{\delta x_3 \psi_c} = \rho\epsilon$$

اما بقية المشتقات الثابتة التي توجد في ( ) ( ) فهي صفرية بالتالي،

$$a = \left(-2 \frac{v^3 w_3^2 \psi}{\pi x_1}\right) (\rho\pi + (1-\rho)h_2) \left(\frac{h_2 + (1-\rho)C\eta}{\eta^2(1-\rho)^2(\mu+\delta)}(h_2\eta\rho + (1-\rho)\beta + \mu + \delta)(h_2 + (1-\rho)\eta)\right)$$

$$a < 0$$

$$b = \frac{v_3 h_2^2 w_3 (1-\rho)}{\pi \eta (1-\rho)} + \frac{v_3 h_2 w_3 ((1-\rho)\epsilon)}{\pi} + \frac{v_3 w_3 h_2 \rho}{(1-\rho)\eta} + v_3 w_3 (\rho\epsilon) \quad (14)$$

$$(15)$$

$$b > 0$$

باستخدام النتائج في نظرية . تشير النتائج في الى ان هناك تشعب الى الامام في  $\psi = \psi_c$  وهناك توازن واحد على الاقل مستقرة متوطنة عند  $R_0 > 1$ .

## ٣-٢-٢ المحاكاة العددية

لمراقبة ديناميكيات نموذج الالتهاب الرئوي مع الوقت ويتم اجراء المحاكاة العددية

. MAPLE

الى بيانات الاطفال دون سن الخامسة وقد استمدت بعض القيم المعينة للمعلومات من الادبيات الوبائية وقاعدة البيانات منظمة الصحة العالمية في حين سمح بتباين معلومات اخرى في الفترات الزمنية الممكنة وباستخدام قيم المعلومات تظهر المحاكاة العددية على انه من المرجح ان يحدث تشعب (Transcritical)  $R_0 = 1$  ,  $\psi = \psi_c = 0.47$  حيث لا يوجد سوى نقطة توازن مستقرة واحدة  $R_0 < 1$  خالية من المراض ومعدل تكاثر منخفض عندما يك  $R_0$  اعلا قليلا (انظر الشكل (a b) ومن المهم ان نستخلص انه لا يمكن ان يكون هناك توازن متوطني واحد الا عندما يكون  $R_0 > 1$  في النماذج ذات الطبقات المعدية متعددة المجموعات فان التشعب الامامي موجود عادة وهذا يمكن ان يكون السبب في وجود عب الى الامام لنقل الالتهاب الرئوي الديناميكي

## ٤-٢-٢ ترجمة النموذج البيولوجي ومضامينه

وتشير نتائج تحليل النموذج الى ان استراتيجية مكافحة الامراض المحتملة ستكون للحد من عدد الاصابات الثانوية الجديدة (اي الحد من قيمة رقم الاستنساخ الاساسي  $R_0$

$$R_0 = kp \frac{\rho[\epsilon(\mu + a + \eta) + \pi] + (1 - \rho)[\mu + \beta + \pi] - (1 - \rho)\epsilon\eta}{(\mu + a + \eta)(\mu + \beta + \pi) - (1 - \rho)\pi\eta}$$

$R_0$  يتناسب طرديا مع مدل الاتصال  $k$  وهذا يعني ان الوقت الذي يقضيه في

الطبقات المرضية

$$\frac{1}{(\mu + a + \eta)(\mu + \beta + \pi) - (1 - \rho)\pi\eta}$$

$k \rightarrow 0$  ومتوسط الوقت الذي يقضيه في الطبقات المرضية يضمن

الذي يقضيه في الطبقات المرضية عندما

$$R_0 \rightarrow 0$$

يتم تخفيض معدلات النقل بين الناقل والفئات المصابة ( اي  $\pi \rightarrow 0$  و  $q \rightarrow 1$  )

يتم زيادة معدل النقل من الطبقات المرضية (اي  $\pi \rightarrow 0$  و  $a, \beta \rightarrow \infty$ ). ويشير ذلك الى

الحجر الصحي (حيثما أمكن)، والتشخيص الفوري والعلاجي للناقلين والاشخاص المصابين قد يؤدي الى الحد من الاصابات الجديدة الى الصفر. وهناك اشارة الى السيطرة على الالتهاب

الرئوي عن طريق الحد من  $R_0$  تشير الى نتائج في تحليل في وجود تفرع ويدل ذلك على ان المرض يستطيع ان يحذف من السكان بواسطة فقط تقليل الـ  $R_0$

## المناقشة

وقد استخدمت النماذج الرياضية للأمراض المعدية في نجاح ديناميكيات انتقال العديد من الامراض وقد نما استخدام هذه النماذج بشكل مطرد منذ منتصف القرن العشرين وكان هدفنا الرئيسي في هذ هو تقديم شرح رياضي ديناميكيات انتقال الالتهاب الرئوي مع الاخذ بعين الاعتبار دور الناقلين وتدابير الاجراءات في الارسال ونحن نعتبر فقط الالتهاب الرئوي البكتيري لأنه هو الاكثر شيوعا بين الاطفال الذين هم تحت سن الخامسة من العمر.

النموذج الذي ناقشناه هنا يستند على النموذج الأولي الذي تمت دراسته بواسطة (Doura) وآخرون عند دراسة ديناميكيات انتقال الامراض المعدية بهدف اقتراح تدابير السيطرة فمن الطبيعي النظر في استقرار نقاط التوازن وامكانية .

في هذه الورقة انشأنا  $R_0$  وجود واستقرار نقاط التوازن ووجود نقطة التشعب. وتشير نتائجنا الرئيسية الى انه عندما يكون  $R_0 > 1$  ي

ويصبح غير  $R_0 > 1$  .

تعتبر القيمة الحرجة  $\psi_0$  عن طريق سوء التفرغ الامامي هذا المسح يشير

ثرة بمرض الالتهاب الرئوي متحققة عندما تقل  $R_0$

النتائج في هذه الورقة مع تلك الواردة في ( ).

لأهتمام في المحاكاة العددية. والحد من معدلات نقل بين الناقل والطبقة المصابة يقلل من انتشار المرض. هذه هي استراتيجية السيطرة التي يمكن استخدامها لديناميكيات الالتهاب

# المراجع

- [1] J. Bryce, C. B. Pinto, K. Shibuya, and R. Black. Childhood pneumonia in developing countries. WHO Child Health Epidemiology Reference Group, 365(9465):1147{1152, 2005.
- [2] C Castillo-Chavez and B Song. Dynamical models of tuberculosis and their applications. Mathematical Biosciences and Engineering, 1(2):361-404, 2004.
- [3] S. Cousens, E.R. Black, L. H. Johnson, I. Rudan, D. G. Bassani, and R. Cibulskis. Global, regional, and national causes of child mortality in 2008: a systematic analysis. Lancet, 375:1969{1987, 2010.
- [4] C. Davis. Pneumoniae: Retrieved september 2011, from medicinenet.com., 2010.
- [5] K. Doura, D. Malendez-Morales, G. Mayer, and L.E Perez. An s-i-s model of streptococcal disease with a class of beta hemolytic carriers. 2000.
- [6] J. Dusho\_, W. Huang, and C.Carlos. Backwards bifurcations and catastrophe in simple model of fatal diseases. Journal of Mathematical Biology, 36:227-248, 1998.
- [7] M. Ekman, T. Grayston, R. Visakorpi, M. Kleemola, C. Kuo, and P. Saikku. An epidemic of infections due to chlamydia pneumoniae in military conscripts. Clinical Infectious Diseases, 17(3):420{425, 1993.
- [8] K. Ghosh and G.B. Clements. Surveillance of mycoplasma pneumoniae infections in scotland 1986-1991. Journal of Infectious Diseases, 25(2):221-227, 1992.
- [9] B. Greenwood. The epidemiology of pneumococcal infection in children in the developing world. The Royal Society, 354:777{785, 1999.
- [10] W. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. Society for Industrial and Applied Mathematics, 42(4):599{653, 2000.
- [11] P. Hill, Y. Cheung, A. Akisanya, K. Sankareh, G. Lahai, B. Greenwood, and R. Adegbola. Nasopharyngeal carriage of streptococcus pneumoniae in gambian infants: A longitudinal study. Clinical Infectious Disease, 46(6):807-814, 2008.
- [12] K. Kallander, H. Hildenwall, P. Waiswa, E. Galiwango, S. Peterson, and G. Pariyo. Delayed care seeking for fatal pneumonia in children aged under \_ve years in uganda: a case-series study. Bulletin of the World Health Organization, 86(5):321-416, 2008.

Table (1) قيمة المعلمة

Parameter	Value	Source
	$\mu N_0$	[5]
$R$	1-10 per day	Estimated
$P$	0.89 to 0.99	[5]
$\Psi$	$RP$	Expressed as in (2)
$\epsilon$	0.001124	[5]
$\rho$	0.338	(13 , 14)
$\pi$	0.00274 to 0.01069 per day	[5]
$\eta$	0.0238 to 0.0476 per day	[26]
$q$	0.5 to 1	[5]
$\alpha$	0.33	Estimated
$\delta$	0.2	Estimated
$\mu$	0.00020 per day	[20]
$\beta$	0.0115	[11]

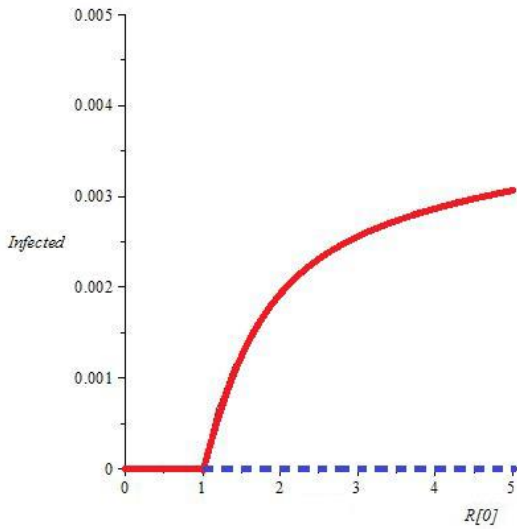
Table (2) إقران نموذجين للوسائل (اختبار للتباين الكبير)

Statistics	Infected population ( $\pi = 0.005, q = 0.75$ )	Infected population ( $\pi = 0, q = 0.999$ )
Mean	2.486300321	2.170599263
Variance	20.90683033	20.72202111
Observations	100	100
Hypothesis	Mean Difference=0	
df	99	
t Statistics	9.408577558	
P-Value	$2.1344 \times 10^{-15}$	
t Ceitical	1.9842169	

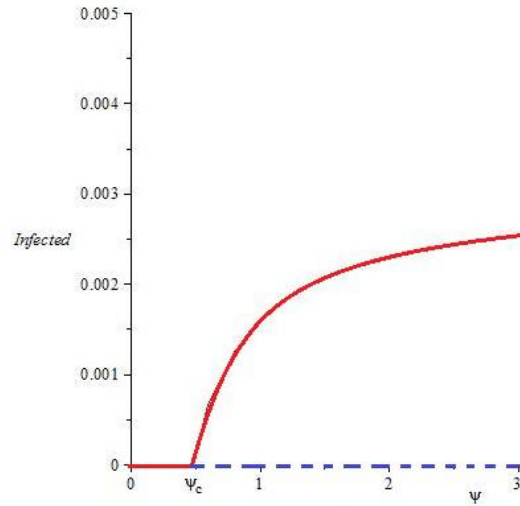
(1) \_\_\_\_\_ (a)  $I, R_0$  (b)  $I, \psi$  يمثل الخط

هناك توازنان مستقران (التوا

ويمثل الخط المنقط الحر  $R_0 > 1$



(a)



(b)

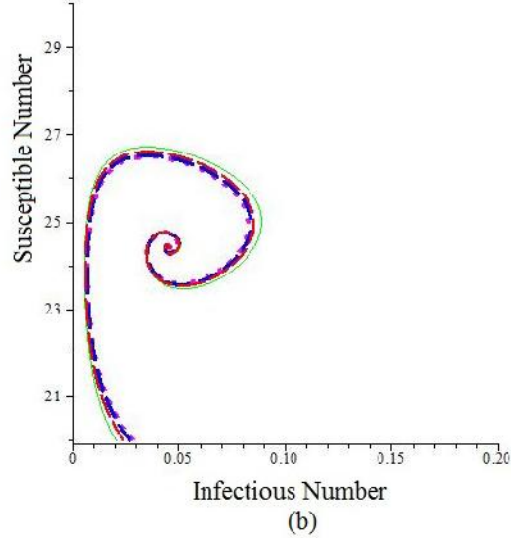
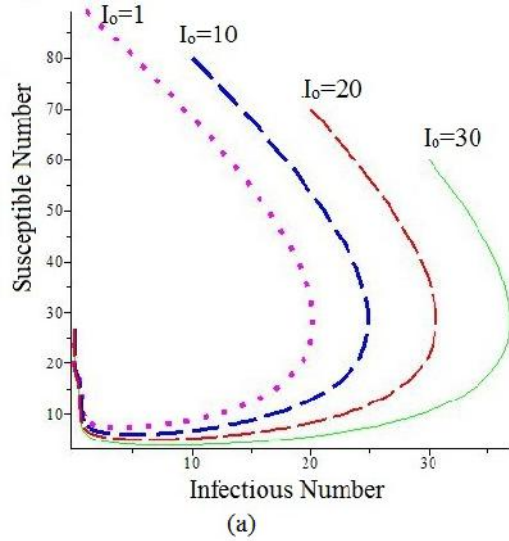


تتوافق المنحنيات

S

(2) \_\_\_\_\_

الشروط الأولية  $I_0 = 1$  على التوالي كلهم يتلاقون في  $I^e = 4.549013989$  كما في (ب) عندما يتم رسم المؤامرة. والتي تبين الاستقرار  $S^e = 24.41243257$



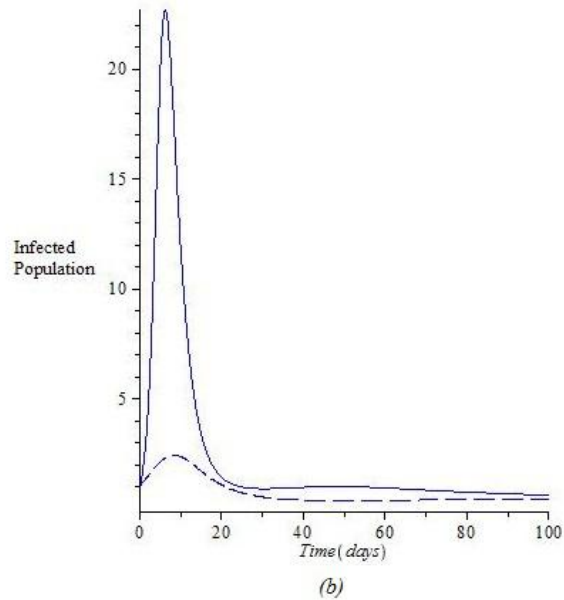
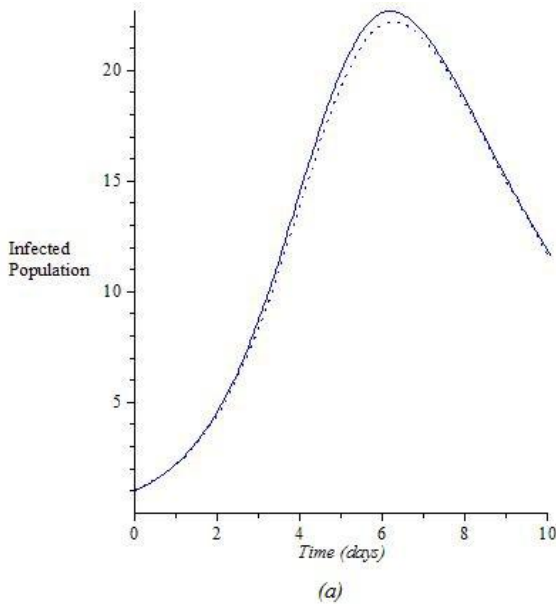
(3) \_\_\_\_\_ (a) الديناميات الي تراعي معدلات التفاعل المصابة بالناقل يتم رسم الخط

$\pi = 0$  عند  $q = 0.75$  بينما يتم رسم الخط المنقط عند  $\pi = 0.005$

الديناميات التي تنظر في معدل استرداد معدلات نقل المصابين والمصابين

بالناقل. يتم رسم الخط المستمر عند  $q = 0.75$   $\pi = 0.005$  بينما يتم رسم الخط المنقط

$\eta = 0.6$



$C(0) = 1, C(0) = 5 \quad C(0) = 10$  (a) (4) \_\_\_\_\_

$\beta = 0.01156, \pi = 0.005, q = 0.75$  (b) جميع المعلومات الأخرى هي نفسها

$\beta = 0.01156, \pi = 0.00005, q = 0.1$

