وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية – كلية التربية
قسم الريـــاضيـــات

الارتباط بين قيم المتغيرات ورتبها في عينة من القوة الرابعة الكاملة للتوزيع الاسي

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية – قسم الرياضيات وهو جزء من
متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

من قبل الطالبة
بدور غسان الشباني

بإشراف

د. گورگيس شهيد محمد

٢٠١٨ م ١٤٣٩ هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

(لِيَجْزِيَ اللَّهُ كُلَّ نَفْسٍ مَّا كَسَبَتْ إِنَّ
اللَّهَ سَرِيعُ الْحِسَابِ)

(سورة ابراهيم ، الآية : ٥١)

الاهداء

اهداء الى روح ابي الراحل الذي علمني كيف امسك بالقلم وكيف اخط الكلمات بلا ندم . . .

الى أمّي الحبيبة أهديكِ قطرة من الخليج، وزهرة من بستان الأريج، وكلمات حبّ من قلبي البهيج، حفظكِ الله يا أمّي .

إلى سندي وقوتي وملاذي بعد الله

إلى من آثروني على نفسهم

إلى من علموني علم الحياة

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة إخوتي

بدور

شكر وتقدير

أول الشكر و الثناء و عظيم الامتنان إلى صاحب العزة و الجلال و المنّة سبحانه وتعالى. والحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على اشرف الخلق والأنام والمرسلين الرسول الهادي الأمين محمد بن عبد الله وعلى اله الطيبين الطاهرين .

أقدم فائق الشكر و التقدير و الاحترام إلى أستاذتي الفاضلة المشرفة الدكتورة " گورگيس شهيد محمد " لمد يد العون لي ، وقبولها الإشراف على دراستي ولما بذلته من جهد مخلص و صادق وأمين وما قدمته من رعاية و إرشاد و توجيه في اختيار الموضوع ودقة الإشراف منهجاً ومضموناً.

فهرس المحتويات

ت	الموضوع	الصفحة
١.	ملخص البحث	١
٢.	المقدمة	٢
٣.	أنواع المتغيرات العشوائي	٣
٤.	خواص المتغيرات العشوائية	٥
٥.	الارتباط X , Y	١٠
٦.	التوزيع ذي الحدين	١١
٧.	توزيع بواسون	١٢
٨.	التوزيع الطبيعي	١٢
٩.	التوزيع الاسي	١٣
١٠.	خواص التوزيع الاسي	١٤
١١.	الفصل الثاني : الارتباط بين قيم المتغيرات ورتبها في عينة من القوة الرابعة الكاملة للتوزيع الاسي	١٦
١٢.	المقدمة	١٦
١٣.	تعريف التوزيع الاسي ذات الاس الكامل الرابع	١٧
١٤.	الإحصاء المرتب	١٨
١٥.	التوزيعات المتساوية	١٨
١٦.	الرتب الإحصائية	١٩
١٧.	الارتباط بين قيم المتغيرات والرتب في عينات من التوزيع (CFPE)	١٩
١٨.	نظرية	١٩
١٩.	البرهان	٢٠
٢٠.	نتائج المقارنات	٢١
٢١.	الاستنتاج	٢٢

٢٢.	الجدول -١-	٣٢
٢٣.	الجدول -٢-	٢٤
٢٤.	المصادر	٢٥

ملخص البحث

في هذا البحث تم استخدام عينات الرتب بدلاً من العينات العشوائية المقابلة لها وذلك للتقليل من الأخطاء التي تحدث اثناء عمليات اجراء التجارب للتوزيع الاسي من الاس الرابع وتم دراسة اهم خواص هذا التوزيع نظرا لما يتمتع به هذا التوزيع من التشابه الكبير بالتوزيع الطبيعي. حيث تضمن البحث فصلين في الفصل الاول تطرقنا للتعاريف الاساسية المتعلقة بالبحث اما الفصل الثاني درسنا مفهوم التوزيع الاسي الكامل من الدرجة الرابعة ودرسنا اهم خواصه .

١-١ مقدمة :

في هذا الفصل تم استعراض اهم التعاريف الخاصة بالبحث حيث تطرقنا الى تعريف المتغير العشوائي وانواعه وخواصه وكذلك ذكرنا بعض التوزيعات من النوع المتقطع مثل التوزيع ذي الحدين والتوزيع الهندسي وبعض الامثلة الخاصة بها وكذلك بعض التوزيعات من النوع المستمر مثل التوزيع الطبيعي والتوزيع الاسي وبعض الامثلة الخاصة بها

٢-١ تعريف:

دالة المتغير العشوائي: إذا كان Ω الفضاء عينة لتجربة عشوائية ما، فإن أي دالة X تخصص عدداً حقيقياً $X(\omega)$ لكل عنصر $\omega\in\Omega$ تدعى متغيراً عشوائياً. فإذا كانت ω عنصراً من Ω و كان X هو المتغير العشوائي، فإن $X(\omega)$ هي قيمة X عند ω، أي:

$X(\omega)$ هي القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي X عند العنصر ω، و بمعنى آخر فإن $X(\omega)$ هو العدد الحقيقي الذي خصصته الدالة X ليرافق العنصر ω.

و على ذلك فإن المتغير العشوائي X على فضاء العينة Ω هو عبارة عن دالة من Ω في مجموعة الأعداد الحقيقية R بحيث أن الصورة العكسية لكل مجال في R هي حادثة في Ω. و بمعنى آخر إذا كانت A حادثة في Ω، و كانت T هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي خصصتها الدالة X كصورة للحادثة A، فيقال إن A هي الصورة العكسية للمجموعة T اي

$X\text{-}1\ (T) = A$ و في هذه الحالة يقال إن: $\Omega\ A \leftrightarrow R\ T$ و إن $P(T) = P(A)$.

1-3: أنواع المتغيرات العشوائي: تقسم المتغيرات العشوائية الى نوعين:

١-٣-١ :المتغير العشوائي المنفصل discrete random variable

يقال إن المتغير العشوائي المنفصل إذا كان يأخذ قيماً تنتمي الى مجموعة منتهية، أو غير منتهية و لكنها قابلة للعد، أي أنه يأخذ قيماً منفصلة عن بعضها البعض (أي يوجد بينها ثغرات). و يرمز لمجموعة قيم المتغير العشوائي X بالرمز Rx، و بالتالي تكون Rx من الشكل: $X2,\ldots,$ $Xn\}Rx=\{X1,$ أو من الشكل $Rx = \{X1, X2\ldots, Xi\}$.

مثال (1): لدى أسرة ثلاثة أطفال، و ليكن X المتغير الدال على عدد الذكور لدى هذه الأسرة.

عندئذ تكون عدة فضاء العينة (أي عدد نتائج هذه التجربة) هو: $|\Omega| = 8 = 23$

و يكون فضاء العينة (أي مجموعة نتائج هذه التجربة):

$\Omega = \{GGG,GGB,GBG,BGG,GBB,BGB,BBG,BBB\}$

حيث رُمز للأنثى بـG و للذكر بـB كما يلي:

و تكون مجموعة قيم المتغير العشوائي X من الشكل: $\{RX=\{0,1,2,3$

و إذا كانت الحادثة [X=2] مثلاً، فإن الصورة العكسية ل X=2 أي X-1(2) هي:

$$[X=2] = X\text{-}1\ (2) = \{GBB,BGB,BBG\}$$

و نلاحظ أن المتغير يأخذ، عند كل نقطة من النقاط الثماني التي يتضمنها فضاء العينة لهذه التجربة، قيمة واحدة فقط من هذه القيم الممكنة و الجدول التالي يبين ذلك:

و نلاحظ أن X يمثل دالة عددية معرفة على فضاء العينة Ω

حيث $X: \Omega \rightarrow \{0,1,2,3\}$

$$X(GGG) = 0\ ;\ X(GGB) = 1\ ;\ \ldots\ ;\ X(BBG) = 2\ ;\ X(BBB) = 3$$

مثال (2): إذا كان X متغيراً عشوائياً يدل على الوجه الحاصل من تجربة القاء حجر نَرْد متوازن مرة واحدة، تكون Rx من الشكل: $Rx = \{1,2,3,4,5,6\}$

٢-٣-١ : المتغير العشوائي المتصل continuous random variable

يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا كان يأخذ قيماً تنتمي الى مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد، بمعنى أن المتغير يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيُره، أي Rx تكون من الشكل

$$Rx = \{x: a \leq x \leq b;\ a, b \in R\}$$

مثال (3): تجربة اختيار نقطة من قرص دائري مركزه مبدأ الاحداثيات و نصف قطره r.

ليكن X المتغير الدال على المسافة بين النقطة المختارة و مبدأ القرص الدائري.

عندئذ تكون RX من الشكل: $rRx = \{x: 0 \leq x \leq \}$ و هذه المجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد.

١-٤ : خواص المتغيرات العشوائية

Characteristics of random variables

هناك العديد من المزايا و الخواص تميز التوزيعات الاحتمالية، و قد لا تكون المعلومات عن التوزيع الاحتمالي مهمة، إلا أنه قد يكون المطلوب معرفة خواصه و هي مقادير إحصائية تصف و تمثل التوزيع محل الدراسة، فمثلاً لا تكون معرفة كل تفاصيل التوزيع الاحتمالي لأعمار الصمامات الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع أمراً مهماً و لكن يكتفي ببعض الخواص التي تميز هذا التوزيع مثل متوسط عمر الصمام.

١-٤-١ : التوقُع الرياضي أو القيمة المتوقعة mathematical expectation or the expected value

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي هي مقدار يقيس متوسط القيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي و تعرف كالآتي: من أجل X كمتغير عشوائي منفصل يأخذ القيم (x1,x2, x3,…n)f

(x1),f(x2),f(x3)…f(n)f على الترتيب، فإن القيمة المتوقعة للمتغير أو للتوزيع و يرمز لها E(X) أو μ تعطى بالعلاقة:

$$\mu = E\ (X)\ =\ \Sigma_{i=1}\chi_i \mathrm{f}\ (\chi_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

يشترط أن يتقارب هذا المجموع تقارباً مطلقاً أي أن:

$$\Sigma_{i=1}\left|\chi_i\right| f\ (\chi_i) < \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

و من أجل X كمتغير عشوائي متصلٍ كثافته الاحتمالية f(x) يكون:

$$\mu = E\ (X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\ f\ (\chi) d_\chi \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بشرط أن يتقارب التكامل تقارباً مطلقاً أي أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| f(\chi) d_\chi < \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

و إذا لم يتقارب المجموع أو التكامل تقارباً مطلقاً فإنه لا يوجد للمتغير قيمة متوقعة أو متوسط.

مثال (4): بالعودة للمثال (1) و المثال (2)والمثال (3)يكون توقع X:

$$E(X) = \Sigma_{i=1} \chi_i f(\chi_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = 1.5 \quad \ldots(5)$$

و هذه يعني أن القيمة 1.5 هي القيمة المتوقعة رياضياً لعدد الذكور لدى الأسرة، فهي متوسط التوزيع الاحتمالي، و التفسير العلمي للقيمة 1.5 هي أنها تمثل القيمة المتوسطة لعدد الذكور لدى الأسر التي تمتلك ثلاثة أطفال على المدى الطويل (أي متوسط مجتمع القياسات).

بمعنى آخر لو كُررت التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات للأسر التي تمتلك ثلاثة أطفال و سُجلت في كل مرة عدد الذكور لديها ثم حُسب متوسط هذه الأعداد لكانت النتيجة 1.5.

مثال (5): بالعودة للمثال (2) و المثال (4) يكون توقع X:

$$E(X) = \Sigma_{i=1} \chi_i f(\chi_i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ldots\ldots(6)$$

ملاحظة: يلاحظ أن التقارب المطلق محقق في الأمثلة الثلاثة أعلاه.

1-4-2 القيمة المتوقعة لأي دالة في المتغير العشوائي

"expectedvalue of a function in the random variable X"

إذا كان X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي f(x) و كان Y=g(x) دالة فيX فإن Y يكون هو الآخر متغيراً عشوائياً و تكون قيمته المتوقعة من الشكل:

$\sum g(\chi) f(\chi)$: (إذا كان χمتغيراً منفصلاً) .....(7)

$\int_{-\infty}^{+\infty} g\ f\ (\chi) d_{\chi}$: (إذا كان χمتغيراً متصلاً) .....(8)

بشرط أن يتقارب المجموع و التكامل تقارباً مطلقاً.

مثال (6): بالعودة للمثال (1) و للمثال (4) يكون:

$$E(X^2) = \sum \chi^2\ f\ (\chi) = (0)^2 \times \frac{1}{8} + (1)^2 \times \frac{3}{8} + (2)^2 \times \frac{3}{8} + (3)^2 \times \frac{1}{8} = 3 \quad \text{.....(9)}$$

مثال (7): بالعودة للمثال (2) وللمثال (5) يكون: (الشكل 20)

$$E\ (X^2) = \sum \chi^2\ f\ (\chi) = (1)^2 \times \frac{1}{6} + (2)^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + (6)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \quad \text{.....(10)}$$

مثال (8): بالعودة للمثال (2) والمثال (٥) يكون:

$$E\ (X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2\ f\ (\chi) d_{\chi} = \int_0^2 \chi^2 \left(\frac{\chi}{2}\right) d_{\chi} = \int_0^2 \frac{\chi^3}{2} d_{\chi} = \left[\frac{\chi^4}{8}\right]_0^2 = 2 \quad \text{.....(11)}$$

تجدر الملاحظة الى أن التوقع الرياضي يتمتع بالخواص الآتية:

أ) إذا كان C مقداراً ثابتاً فإن: E(C) = C

ب) من أجل a, b أعداد ثابتة فإن: = E (ax + b) aE (x) +b

ج) من أجل ثوابت عددية C1, C2, C3, …n و X1, X2, X3, …n متغيرات عشوائية فإن:

$$E(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i E\ (X_i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

٣-٤-١ : التباين و التشتت Variance: و هو من أهم صفات التوزيعات الاحتمالية و يرمز لها بالرمز V(X)أو s^2 و يعرف على أنه:

$$\sigma^2 = {\sigma_x}^2 = V(\chi) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2 = E(X2) - \mu^2 \quad \ldots(13)$$

و هو يمثل متوسط مربع انحرافات قيم المتغير العشوائي X عن قيمته المتوقعة و بالتالي:

$$\sigma^2 \begin{cases} \sum(\chi - \mu)^2 f(\chi) = \sum \chi^2 f(\chi) - \mu^2 (X\text{متغير منفصل}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi - \mu)^2 f(\chi) d_\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^3 f(\chi) d_\chi - \mu^2 \qquad (X\text{متغير منفصل}) \end{cases} \ldots(14)$$

٤-٤-١: الانحراف المعياري standard deviation

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي هو الجذر التربيعي الموجب للتباين و يرمز له بالرمز أو σأي أن: و هو يقيس مقدار تباين أو تشتت أو اختلاف قيم المتغير العشوائي بعضها عن بعض.

مثال (9): بالعودة للأمثلة (1-4-6)يكون تباين X:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2 = 3 - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75 \ldots(15)$$

مثال (10): بالعودة للأمثلة (2-5-7) يكون تباين X:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{91}{6} = (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12} \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

و يكون الانحراف المعياري للمتغير X:

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1.708 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

مثال (11): بالعودة للمثال (8) يكون تباين X:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 2 - \left(\frac{8}{6}\right) = \frac{2}{9}$$

و يكون الانحراف المعياري للمتغير X :

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0.471 \ldots\ldots\ldots(18)$$

تجدر الاشارة هنا الى أنه إذا كان الانحراف المعياري صغيراً فهذا يعني أن القراءات قريبة من بعضها أي متجانسة، أما إذا كان كبيراً فهذا يعني أن قيم المتغير مشتتة أو مبعثرة و غير متجانسة.

كما أن التباين يتمتع بالخواص التالية:

أ) إذا كان C ثابتاً عددياً فإن $V(C) = 0$

ب) إذا كانت a, b ثوابت عددية فإن: $V(aX + b) = aV(X)$

ج) إذا كان Y,X متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

و من أجل $\varepsilon = \sqrt{2}\,\sigma$ أي $\varepsilon^2 = 2\sigma^2$ يكون: $\varepsilon = \sqrt{2(1.708)} = 2.415, \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}$

فإن متباينة تشيبشف تكون من الشكل:

$$\rho\left[|X-\frac{7}{2}|\geq 2.415\right]\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots..(19)$$

مثال (12): بالعودة للأمثلة (13-16) حيث وجد:

$$\mu=\frac{8}{6}\ ;\ \sigma^2=\frac{2}{9}\ :\ \sigma=0.471$$ و من أجل $\varepsilon=\frac{2}{3}$ فإن :

$$\rho\left[|X-\frac{8}{6}|\geq\frac{2}{3}\right]\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

و إذا حُسبت القيمة الفعلية للاحتمال:

$$\rho\left[|X-\frac{8}{6}|\geq\frac{2}{3}\right]=1-\rho\left[|X-E(X)|\leq\frac{2}{3}\right]=1-\rho\left[\frac{2}{3}\leq X,\frac{8}{6}\leq\frac{2}{3}\right]$$

$$=1,\rho\left[\frac{8}{6}+\frac{2}{3}\leq X\leq\frac{2}{3}+\frac{8}{6}\right]=1,\rho\left[\frac{2}{3}\leq X\leq 2\right]-1,\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(\chi)\,d_\chi$$

$$\rho=1\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{X}{2}d_\chi=1-\left[\frac{X^2}{4}\right]_{\frac{2}{3}}^{2}=1-\left[1-\frac{4}{36}\right]=\frac{1}{9}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

٥-٤-١ :ارتباط Y,X:

يرمز الى الارتباط بين متغيرين Y,X بالرمز P(X,Y)و يعطى حسب العلاقة التالية:

$$\rho(X,Y)=\frac{ov(X,Y)}{\sigma_\chi\sigma_y}$$

❖ خواص الارتباط:

$$1)\ \rho(X,Y)=\rho(Y,X)$$

$$2)-1\leq\rho\leq 1$$

$$3)\ \rho(X,Y)=1\quad,\quad\rho(X,-X)=-1$$

$$4)\ \rho(aX+b\ \ ,cY+b)=\rho(X,Y),\sin a,c\neq 0$$

نذكر في ما يلي بعض التوزيعات :

1- توزيع ذي الحدين:- Binomial Distribution

و هو احتمال وقوع K من النجاح في n من المحاولات المكررة هو:

$$b(k,n,p) = C_k^n p^n p^{n-k}$$

$b(k,n,p) \equiv$ احتمال توزيع ذي حدين

عدد مرات النجاح $\equiv k$ ، عدد مرات التجربة $\equiv n$

احتمال النجاح $\equiv p$ ، احتمال الفشل $\equiv q$

❖ خواص توزيع ذي الحدين:

1) $Mean = \mu = np = E(x)$

2) $Variance = \sigma^2 = npq = Var(x)$

3) $Standard\ deviation = \sigma = \sqrt{npq} = \sigma_y$

2- التوزيع الهندسي:- Geometrical Distribution

التوزيع الهندسي هو نفس توزيع برنولي (توزيع ذي الحدين) لكن عدد تجاربه غير محدودة مع ملاحظة أن التجربة تتوقف عندما يتحقق النجاح.

و إذا تحقق النجاح بعد k من المحاولات فإن التوزيع الهندسي يعطي حسب العلاقة التالية:

$$\rho(X = K) = pq^{k-1}$$

خواص التوزيع الهندسي

1) $Expectation = \mu = \frac{1}{p} = E(X)$

2) $Variance = \sigma^2 = \frac{q}{p^2} = Var(X)$

3) $Standard\ Deviation = \frac{\sqrt{a}}{p} = \sigma_y$

3- توزيع بواسونPoisson Distribution

توزيع بواسون ناتج عن عدد كبير من المحاولات المكررة لتجربة ما و يرمز له بالرمز p(k ; λ) و يعطى حسب العلاقة التالية:

$$p(k\ ;\ \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k=0,1,2,……. ، ثابت اختياري ≡λ ، العدد النيبيري≡e

خواص توزيع بواسون:

1) $E(X) = \mu = \lambda = np$

2) $Variance = Var(X) = {\sigma_x}^2 = \lambda$

3) $Standard\ deviation = \sigma_x = \sqrt{\lambda}$

4-التوزيع الطبيعي:Normal Distribution

الصورة العامة لمعادلة التوزيع الطبيعي هي:

$$\int(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/d^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$

حيث σ و μ ثوابت و هذا الاقتران هو من أهم أنواع التوزيعات الاحتمالية المتصلة.

٥-١: تعريف :

يسمى المنحني الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ و تباينهُ σ^2 فالمنحني الطبيعي القياسي و يرمز له بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$ و إذا فرضنا أن $\gamma = \frac{\chi-\mu}{\sigma}$ و إذا عوضنا هذه الفرضية في المعادلة رقم (1) فأن المعادلة ذاتها تصبح على الصورة التالية:

$$\emptyset(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2), (\mu = 0 , \sigma^2 = 1)$$

احتمال ان يقع المتبقي العشوائي X بين X=bو X=a

و يرمز له بالرمز $\rho(a \leq X \leq b)$ و يعطى حسب العلاقة التالية:

$$\rho(a \leq X \leq b) = \rho(a' \leq X^* \leq b')$$

حيثُ $a' = \frac{a-\mu}{\sigma}$, $b' = \frac{b-\mu}{\sigma}$

خواص المنحني الطبيعي:

1) $Mean = u = E(X)$

2) $Variance = \sigma^2 = Var(X)$

3) $Standard\ Deviation = \sigma$

5- التوزيع الأسي: Exponential Distribution

إذا كان عدد المشاهدات واصفة لتوزيع بواسون ، فإن الوقت الذي يمضي بين المشاهدات يتخذ شكل التوزيع الأسي. إذن هناك علاقة بين توزيع بواسون و التوزيع الأسي.

و يعطى حسب العلاقة التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}\chi} & :0 \leq \chi \leq a \\ 0 & :else\ where \end{cases}$$

خواص التوزيع الأسي:

1) $E(X) = \theta$

2) $Var(X) = \theta^2$

3) $\sigma_x = \sqrt{var(x)} = \theta$

يستخدم توزيع بواسون لحساب الاحتمال المرتبط بالمتغير العشوائي Y الذ يمثل عدد الحوادث لنتيجة معطاة ضمن مجال مستمر معرف مع العنصر λ.

لذلك نهتم بالزمن بين هذه النتائج عندئذ سيستخدم التوزيع الأسي لصنع الاحتمال.

يزود التوزيع الأسي الاحتمال بأن "البعد" بين متغيرين عشوائيين متتاليين لبواسون. نشير لهذا المتغير العشوائي المستمر الجديد X "المجال بين نتيجتين متتاليتين"

احتمال X يأخذ القيمة العظمى من xهو $\rho(X \leq x) = 1 - \rho$ (لا نتيجة ضمن مجال الطول X) لكن P (لا نتيجة ضمن مجال الطول X) يمثل الاحتمال ببساطة أن المتغير العشوائي Y له توزيع بواسون حيث يأخذ القيمة 0 ضمن مجال الطول X
P(Y)=0 لذلك

$$fpo(y\ ;\ \lambda x) = \frac{(\lambda x)^y}{y!} e^{-\lambda x}$$

$$\rho(Y = 0) = fpo(0\ ;\ \lambda x) = \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$$

ذلك هو تابع التوزيع للتوزيع الأسي بمعنى X موزع بشكل أسي.

$$\rho(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

لذلك توجد علاقة بين توزيع بواسون و الأسي، يستعمل عادة التوزيع الأسي لنمذجة طول الزمن للعمليات المستمرة كأزمنة انتظار.

على سبيل المثال:

- زمن الانتظار قبل الخدمة في المطعم أو البنك أو محطة الوقود.
- زمن الخدمة (الزمن لتحميل الشحنة، الزمن لتنفيذ التصليح).
- فترة الحياة لشخص ما.
- الوقت المعتبر للمكالمة الهاتفية.
- الوقت المعتبر قبل التقرير القادم عن الأضرار لشركة التأمين.

يرتبط الشرط التالي عادة بالتوزيع الأسي:

$$(\rho(X \leq t + s \,|X \geq t) = \rho(X \leq s)$$

يعني هذا الشرط أن الزمن المرتبط بالنتيجة لا يعتمد على الأزمنة السابقة.

سيعطي التمثيل البياني للمتغير العشوائي الموزع أسياً في صيغة تابع الكثافة الاحتمالي و يشير لحالة المتغير العشوائي.

1-٢: المقدمة

في هذا الفصل تم استخدام بيانات مرتبة بدل البيانات الاعتيادية وذلك للتقليل من الاخطاء التي تحدث اثناء التجارب او فقدان المعلومات عند استخدام البيانات الاعتيادية (المتغيرات العشوائية) وكذلك اعطاء نتائج افضل .

في هذا البحث تم اشتقاق معامل الارتباط بين قيم المتغيرات و الرتب من عينات التوزيع الأسي الكامل من الدرجة الرابعة حيث تم استخدام هذا النوع من التوزيع الأنه مشابه الى حد كبير الى التوزيع الطبيعي . يتم استخدام الرتب الاساسية بدلاً من القيم الحقيقية .

درس ستيوارت (1955) الحالة عندما لم يكن هناك اختلاف في توزيع معين، و أظهرت أنه بالنسبة للتوزيع المستمر بدون لحظات و التي تكون رتابة في نهاية المطاف، فإن الارتباط بين القيم المتغيرة و رتبها هو صفر .

في عام (1982) قاس أوبراين من خلال محاكاة متوسط نسبة التباين بين قيم التباين و رتبها للعينات الصغيرة الحجم من التوزيعات المختلفة.

و قد وجد أوبراين ان هذه الارتباطات مرتفعة بشكل عام و عندما يزيد حجم العينة فإنها تصل القيم المحددة التي قدمها ستيوارت (1955,1954).

هذه النتيجة تدعم فكرة استخدام الرتب بدلاً من القيم المتغيرة بقليل من الخطأ حتى بالنسبة للعينات الصغيرة.

سنقوم بعرض عام حول توزيع (CFPE) و بعض خصائصه. و من ثم نستخدم صيغة ستيوارت لاشتقاق العلاقة بين القيم المتغيرة و الرتب في عينات من توزيع (CFPE).

ثم نتطرق الى خصائص هذا التوزيع ونشتق العلاقة بين القيم المتغيرة والرتب باستخدام ستيوارت.

٢-٢ تعريف :

يعرف التوزيع الاسي ذات الاس الكامل الرابع كالآتي :

ليكن (X) متغير عشوائي يتوزع وفق الدالة الاحتمالية التالية :

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{2}{\beta\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}exp^{\left[-\frac{(X-\propto)^4}{\beta^4}\right]}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\beta>0\ ،\ ،-\propto< X<\infty-\infty<\alpha<\infty$$

حيث ان α معلمة الموقع و β هو معلمة القياس.

ان الدالة المميزة لهذا التوزيع هو:

$$\emptyset X(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}C_{2j}^{m}\alpha^{(m-2j)\beta 2j}\frac{\Gamma(\frac{2j+1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}\frac{(it)^m}{m!}$$

حيث $[m/2]$هو اكبر عدد صحيح أقل من $m/2$و من خلال هذه الحالة المميزة نستطيع الحصول على:

$$\mu1'=\mu=E(X)=\alpha\quad,\qquad \mu2'=E(X^2)=\alpha^2+\beta^2\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$\mu3'=E(X^3)=\alpha^3+3\beta^2\alpha\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$\mu4'=E(X^4)=\alpha^2+6\beta^2\alpha^2\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}+\frac{1}{4}\beta^4$$

$$\mu2=\sigma^2=\beta^2\frac{2\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2},\quad \mu3=0\quad,\quad \mu4=\frac{1}{4}\beta^4$$

و للسهولة نختار الحالة الخاصة لتوزيع CHPE عند $\alpha = 0$، حيث أنه من السهل تجميع البيانات حول المتوسط. وبالتالي :-

$$f(x;\beta) = \frac{2}{\beta r(\frac{1}{4})} \exp\{-(\frac{x}{\beta})^4\} \text{ , } -\infty < x < \infty, \beta > 0.$$

$$\text{And } \mu = \alpha = 0, v(x) = \sigma^2 = \beta^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{\left[r(\frac{1}{4})\right]^2}$$

2-3 *تعريف :*

الاحصاء المرتب :-

ليكن x1, x2, x3….xn هي متغيرات عشوائية من النوع المستمر لها دالة الاحتمال المشترك فإن F(x1, x2, x3……..xn) وليكن y 1 أصغر قيمة من قيم المتغير x*i* أي أن y *1=min(xi)* و y *2* أكبر من y *1* وأقل من المتغيرات الاخرى وهكذا فإن y n= Max(xi).

ويمكن تمثيل العلاقة بالشكل الاتـي :

$$y1 \leq y2 \leq y3 \leq \cdots \leq yn$$

ان هذه العلاقة تسمى بالقسم المرتبة للمتغيرات العشوائية x1, x2, x3……..xn .

٤-٢ تعريف

التوزيعات المتساوية :-

ليكن S و T متغيرين عشوائيين يكونان متساويين في التوزيع اذا كانا يمتلكان نفس الدالة التجميعية ، ولكي نعرف تساوي التوزيعات يكتب بالصورة : $S \overset{d}{=} T$.

ليكن x1, x2, x3….xn متغيرات عشوائية مستقلة موزعة بالتساوي (*i.i.d*) ،

وليكن(α1, α2, α3….αn) يدل على أي تبديل من العدد الصحيح من (*1,2,… n*) اذن :

$$(x1, x2, x3 \ldots . xn) \overset{d}{=} (x_\alpha 1, x_\alpha 2, x_\alpha 3 \ldots . x_\alpha n)$$

٢-٥ تعريف :

الرتب الاحصائية :

ليكن $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ هي متغيرات عشوائية من النوع المستمر *لها الدالة التجميعية* $F(z)$ ، *وليكن* $Z_1<Z_2<\ldots<Z_n$ *بالنسبة للإحصاء المرتب* .

Z_1 *يمتلك رتبة* Ri *من بين* $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ ، *اذا كانت* $Zi=Z_{(Ri)}$ *على فرض* Ri^{th} *احصاءً مرتباً اذن تكون محددة بشكل فريد.*

٢-٦ الارتباط بين قيم المتغيرات والرتب في عينات من التوزيع (CFPE)

سوف نستخدم صيغة ستيوارت (1954) لاشتقاق العلاقة بين قيم المتغيرات و الرتب في العينة من توزيع CFPE.

حيث اعتبر ستيوارت (1954) الارتباط بين القيم

X_i و رتبها R_i، $P(X_i, R_i)$ تعطى كالآتي:-

$$\rho(X_i\,,R_i)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)d_f(x)-\frac{1}{2}\mu\right]\left[\frac{12(n-1)}{(n+1)\sigma^2}\right]^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث n هو الحجم العينة ، العامل الثاني على الجانب الايمن في (2) يقترب الى $2\sqrt{3}/\sigma$، كما n تقترب الى الما لانهاية في النظرية التالية، نستخدم (2) لاشتقاق الارتباط بين قيم المتغيرات و رتبتها في عينة من توزيع CFPE.

٢-٧ نظرية :

الارتباط بين قيم المتغيرات و رتبتها مع عينة من توزيع CFPE حيث $\alpha = 0$ يعطى بالشكل التالي:

$$\rho=\rho(X_i\,,R_i)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\quad,\ n\to\infty,\rho\to\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}=0.728\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

البرهان :

نفرض أن : $\alpha = 0$ ، و بالتالي:

$$f(X,\beta) = \frac{2}{\beta\Gamma\sqrt{\frac{1}{4}}} exp^{[-(x/\beta)^4]} \ , -\infty < X < \infty \ , \qquad \beta > 0$$

$$and \quad \mu = \alpha = 0 \quad , \ V(X) = \sigma^2 = \beta^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2} \qquad then$$

$$E[X\,f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{xF(x)\} f(x)dx = \frac{4}{\beta^2\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} xe^{-\frac{1}{\beta^4}(t^4+x^4)} dt\,dx$$

$$Let \ \frac{X^2}{\beta^2} = r\cos\theta \rightarrow X = \beta r^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\theta \qquad and$$

$$\frac{t^2}{\beta^2} = r\sin\theta \rightarrow X = \beta r^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta$$

أن جاكوبيا (Jacobian) من التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\beta r^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\theta & -\frac{1}{2}\beta r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}\theta \sin\theta \\ \frac{1}{2}\beta r^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta & \frac{1}{2}\beta r^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\beta^2 \left[\sin^{-\frac{1}{2}}\theta \cos^{\frac{3}{2}}\theta + \cos^{-\frac{1}{2}}\theta \sin^{\frac{3}{2}}\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\beta^2 \sin^{-\frac{1}{2}}\theta \cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

حيث:

$$E[X\,f(X)] = \frac{8}{\beta^2[\Gamma]^2} \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \beta r^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\theta) e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} (\frac{1}{4}\beta^2 \sin^{\frac{-1}{2}}\theta \cos^{\frac{-1}{2}}\theta) d_r d_\theta$$

$$E[X\,f(X)] = \frac{2\beta}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^{\frac{1}{2}} e^{-r^2}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\, d_r d_\theta$$

$$Let \quad Z = r^2 \;\rightarrow \frac{1}{2}Z^{-\frac{1}{2}}d_z = d_r$$

حيث :

$$E[X\,f(X)] = \frac{2\beta}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} Z^{-\frac{1}{4}}e^{-Z}d_z\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta d_\theta\right)$$

$$E[X\,f(X)] = \frac{2\beta}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}\left[\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{4})\right]\left[\frac{1}{4}\beta(\frac{1}{4},\frac{1}{2})\right] = \frac{\beta\,\Gamma(\frac{1}{2})}{4\,\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

الآن باستخدام (2) نحصل على:

$$\rho(X_i\,,R_i) = \left[\frac{12(n-1)\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}{(n+1)\beta^2\sqrt{2}\,\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\beta\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

و أن

$$n \rightarrow \infty \quad , \quad \rho \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}} = 0.728$$

٨-٢ نتائج المقارنات : Comparisons results :

ستيوارت (1954) قدمت باستخدام الصيغة في (2) و الارتباط بين قيم المتغيرات و الرتب في عينات من التوزيع الأسي (λ=1)، و الطبيعي (0,1) .

من (3) نحصل على الارتباط بين قيم المتغيرات و الرتب في عينات من توزيع CFPE(0,b) الذي يساوي 0.728 عندما يكون n كبيراً بشكل كبير، أنظر الجدول (1).

بالإضافة الى ذلك باستخدام تقنية المحاكاة لتقدير الكمية $E[X\,f(X)]$ في (2).

حصلنا على نتيجة التقريب للعلاقة بين قيم المتغيرات و الرتب في عينات من التوزيعات الاخرى التي لا تحتوي على صيغة صريحة.

و ترد نتائج التقريب في الجدول (2).

يمكننا ان نشير الى ان العلاقة لتوزيع السجل العادي (0,1) هي أقرب ال (أقل من) توزيع CFPE مقارنة بالتوزيعات الاخرى.

٩-٢ الاستنتاج Conclusion :

في هذا البحث تم اشتقاق معامل الارتباط بين قيم المتغيرات و الرتب في عينة من توزيع الأسي الرابع الكامل CFPE.

ووجدنا ان النتائج تكون غير مُرضية عندما تكون البيانات اعتيادية (متغيرات عشوائية) في توزيعات (CFPE) وكذلك التوزيع الطبيعي .

أما عندما تكون البيانات رتب تكون النتائج أفضل في التوزيعين المذكورين اعلاه .

الجدول 1

معامل الارتباط بين قيم المتغيرات و الرتب لبعض من التوزيعات:

Distribution	μ	σ^2	$E[X\,f(X)]$	ρ	n → ∞
Unform (0,1)	1/2	1/12	1/3	$\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$	1
Exponential λ=1	1	1	3/4	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≈ 0.866
Normal (0,1)	0	1	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$	$\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ ≈ 0.977
Logistic (0,1)	0	$\frac{\pi^2}{3}$	1/2	$\frac{3}{\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$	$\frac{3}{\pi}$ ≈ 0.955
CFPE (0,b)	0	$\beta^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2}$	$\frac{\beta\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{1}{4})}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}$ ≈ 0.728

النتائج المضبوطة من النموذج Exponential و Normal ذكرت بوساطة ستيوارت (1954)، حيث أن Logistic نتائجهُ ذكرت في اوبرين (1982)(O'Brien).

الجدول 2.

Distribution	μ	σ^2	$E[X\,f(X)]$	ρ
Chi-squave (5df)	5	10	3.347	0.928
Gamma (5,1)	5	5	3.117	0.956
F (4,10)	1.250	1.563	0.909	0.787
Beta (1,2)	0.333	0.056	0.233	0.973
Lognormal (0,1)	1.649	4.671	1.253	0.687
Weibull (5,1)	0.918	0.044	0.518	0.974

المصادر

١- سمور ، خالد قاسم ، الاحصاء ، الطبعة الاولى ، ٢٠٠٧ ، دار الفكر ناشرون وموزعون ، عمان – الاردن .

2- Amira,T. and Mazloum, R. (1993). Complete Fourth Power Exponential Distribution Geometric and statistical study. *Econometric and Business Review, Ain Shams University.*

3- O'Brien R.M. (1982). The correlation between variate-values and ranks in small size samples. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*.

4- Stuart, A. (1954). The correlation between variate-values and ranks in samples from a continuous distribution.British Journal of Statistical Psychology.

5- Stuart, A. (1955). The correlation between variate-values and ranks in samples from distributions having no variance. *British Journal of Statistical Psychology.*