وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة القادسية

كلية التربية

قسم الرياضيات

استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية بدون

بحث تقدم به الطالب

احمد عادل رزوقي

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات

بأشراف

م.د. ندى زهير

١٤٣٩هـ ٢٠١٨م

بسم الله الرحمن الرحيم

{ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ }

صدق الله العلي العظيم

سورة الزمر آية (٩)

الإهـــداء

✍ اهدي محتوى هذا البحث الى الدكتورة ندى زهير، استاذتي في هذا البحث التي لها الفضل الكبير في انجاز هذا البحث وتعزيزه بالمواضيع العلمية المسندة بالمصادر العلمية الموثوقة ، لها جزيل الشكر والتقدير على مساعدتها القيمة.

كما أهديه الى كل اساتذتي الكرام في قسم الرياضيات لهم كل الحب والأمتنا ن وكل من ساعدني والهمني القدرة والتشجيع. كما أهدي هذا البحث الى كل من يقرأه ويطلع على مضمونة وعسى ان تتعم الاستفادة للجميع والله ولي التوفيق .

الباحث

أحمد عادل

رزوقي

ت	الموضوع	الصفحة
١.	الآية الكريمة	
٢.	الاهداء	
٣.	الملخص	
٤.	المقدمة	١
٥.	**الفصل الاول**	٣
٦.	1-1- المقدمة	٣
٧.	1-2- تعاريف	٣
٨.	1-2-1 المعادلة التفاضلية	٣
٩.	1-2-2 المعادلة التفاضلية الجزئية	٤
١٠.	1-2-2-1 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية	٥
١١.	1-2-2-1 حل المعادلة التفاضلية الجزئية	

١٢.	1-2-5 معكوس تحويل لابلاس	٧
١٣.	1-2-6 الشروط الابتدائية والحدودية	٧
١٤.	1-4تحويلات لابلاس لبعض الدوال المشهورة	٩
١٥.	1-5 خواص (نتيجة ٢,٧)	١٠
١٦.	**الفصل الثاني**	**١١-٣٢**
١٧.	2-2 حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة (n)	١١
١٨.	2-2-1 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية:	١١
١٩.	2-2-1-1 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة:-	١٣
٢٠.	2-2-1-2 حل المعادلات الخطية ذات الحدود اللامتجانسة والمعاملات الثابتة	١٨
٢١.	2-2-1-3 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة	٢٢
٢٢.	2-2-1-4 طريقة فصل المتغيرات	٢٤
٢٣.	طريقة رئيسية جديدة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بدون استخدام 2-3 أي شروط ابتدائية وشروط حدودية بواسطة استخدام تحويل لابلاس.	٢٥
٢٤.	المصادر	٣٣

الملخص:-

هدفنا في هذا البحث استخدام تحويلات لابلاس (L.T) لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية (LPDEs) الغير متجانسة وذات الحدود المتجانسة والمعادلات الثابتة ومن الرتبة (ى) بدون استخدام أي شروط ابتدائية (I.C) وشروط حدودية (B.C).

المقدمة :-

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة الى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي. من ثم يمكن القول دون تجاوز او مبالغة ان المعادلات التفاضلية يمتد تأثيرها ليشمل العديد من العلوم الطبية والاجتماعية مثل علم النفس والاقتصاد والاجتماع، حيث أن اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات أي مسالة هندسية أو فيزيائية تظهر على صورة معادلات تفاضلية. لفهم هذه المسائل كان لابد من حل هذه المعادلات التفاضلية، وتحويل لابلاس هو أحد الطرق لحل هذه المعادلات إن تحويل لابلاس عملية تجري على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال الى آخر، وعادة يكون التحويل من مجال الزمن الى مجال التردد، وهو شبيه بتحويل فوريي إلا أنه تطويرهما بشكل مستقل. وتحويل لابلاس مفيد في تحليل الأنظمة الخطية (بخلاف تحويل فوريي الذي يستخدم عادة في تحليل الأشارات)، كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها الى معادلات جبرية. ويسمى التحويل بهذا الاسم نسبةً الى العالم الفرنسي بيير لابلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر الذي يعد اول من درس خواص معادلة لابلاس والتي تأخذ الشكل التالي:-

$$\nabla^2\psi = 0$$

حيث ∇^2 رمز مؤثر لابلاس فيما تمثل أي دالة رياضية سلمية. وتعد معادلة لابلاس ابسط المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية كما انها تعد كذلك حالة خاصة من معادلة هلمهولتز (k=0). وكذلك تعد حالة خاصة من معادلة بواسون (f=0).

واي دالة تمثل حلاً لمعادلة لابلاس تدعى دالة توافقية ظهر أول استعمال لها في الميكانيكا التقليدية ثم تطور استعمالها ووجدت تطبيقات لها في علم الفلك والكهرباء

الساكنة وميكانيكا الموائع ومعادلة والانتشار والحركة البراونية وكذلك ميكانيكا الكم وما زالت.

الفصل الاول

١-١ مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل مجموعة من التعاريف مثل تعريف المعادلة التفاضلية وتعريف المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية. وتعريف تحويل لابلاس، ومكوس تحويلا لابلاس، وتعريف الشروط الابتدائية والحدودية كما سنتطرق الى نظرية تتناول تحويل لابلاس لبعض المشتقات الجزئية للدالة المستمرة $z(x,t)$ بالنسبة الى t بحيث $t > 0$ كما سنتناول تحويلات لابلاس لبعض الدوال المشهورة إن اول من استعمل اسم المعادلة هو العالم الألماني ليبنيز عام ١٦٧٦ وكان يقصد بالمعادلة التفاضلية علاقة (ليست متطابقة) أذن هي علاقة بين مفضلين dx, dy المعرفة على متغيرين x, y وعلى عدد من الثوابت $a, b, c, \ldots$ وتعرف المعادلة التفاضلية كالآتي: هي أي معادلة مكونة من دوال جبرية أو دوال متسامية وتحتوي مفضلات ومشتقات.

وتقسم المعادلة التفاضلية الى قسمين:-

١) معادلات تفاضلية اعتيادية.

٢) معادلات تفاضلية جزئية.

1-2- تعاريف

1-2-1 المعادلة التفاضلية

تعريف: هي معادلة تحتوي على دالة غير معلومة (المتغير المعتمد) وعلى مشتقات هذه الدالة بالنسبة للمتغيرات المستقلة. مثل : وإذا كانت الدالة الغير معلومة (المتغير المعتمد) هي بمتغير مستقل واحد فقط تسمى المعادلة التفاضلية بالمعادلة الاعتيادية مثل :

1- $\acute{y} = 2 + x - 1$
2- $\acute{\acute{y}} = \cos(2x + 3)$
3- $\acute{\acute{y}} = 4\mathrm{x}^3 - 3x^2 - 1$
4- $\acute{\acute{y}} = 9\mathrm{y} = 0$
5- $4\acute{\acute{y}} + \pi^2\mathrm{y} = 0$

رتبة المعادلة التفاضلية :

هي رتبة اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

درجة المعادلة التفاضلية: هي درجة اعلى مشتقة تظهر المعادلة التفاضلية بمعنى اخر اس اعلى مشتقة وتكون عدد صحيح موجب.

1-2-2 المعادلة التفاضلية الجزئية

تعريف: المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحتوي على مشتقات جزئية على النقيض من المعادلة التفاضلية الاعتيادية، حيث إن الدالة الغير معلومة تعتمد فقط على متغير واحد في المعادلات التفاضلية الجزئية الدالة الغير معلومة تعتمد على عدة متغيرات مثل:

1- $u_x + u_{yy} = sinx$
2- $z_t + z_{xt} = e^x$
3- $x^2 z_x + y^2 z_y = e^x$

بصورة عامة يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية بالمتغير المعتمد u والمتغيرين المستقلين x, y بالصورة التالية:-

$$f\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{xxx}, u_{yyy}, u_{xyy}, u_{yyx}\right) = 0$$

1-2-2-1 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

تصنف المعادلات التفاضلية بناءاً على اعتبارات عدة والتصنيف ذو مفهوم مهم لأن النظرية العامة وطرائق الحل عادة تطبق على صنف معن من المعادلات وتصنف المعادلات التفاضلية الجزئية كالآتي:-

١) رتبة المعادلة التفاضلية الجزية: هي رتبة اعلى مشتقة جزئية في المعادلة.

٢) درجة المعادلة التفاضلية الجزئية: هي درجة اعلى مشتقة جزئية تظهر في المعادلة التفاضلية بمعنى اخر هي اس اعلى مشتقة وتكون عدد صحيح موجب.

٣) عدد المتغيرات: هو عدد المتغيرات المعتمدة والمستقلة التي تظهر في المعادلة التفاضلية الجزئية.

٤) الخطية: تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية اذا كان :

أ) جميع المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى وغير مضروبة مع بعضها البعض.

ب)المتغير المعتمد من الدرجة الاولى وغير مضروب بالمشتقات.

٥) التجانس: تكون المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغير المعتمد u والمتغير المستقل x, y والتي شكلها العام

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \dots\dots *$$

تكون هذه المعادلة متجانسة اذا كانت $G(x, y) = 0$ وخلاف ذلك تكون المعادلة $*$ غير متجانسة اذا كان $G(x, y) \neq 0$.

٦) نوعية المعاملات: تكون المعادلة $*$ معادلة تفاضلية جزئية ذات معاملات ثابتة اذا كان جميع القيم A, B, C, D, E, F جميعها ثوابت.

٧) الانماط الثلاث الاساسية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية. كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل * هي من احد الانماط الثلاث الآتية:-

أ- معادلة قطع مكافئ أو تسمى معادلة من النوع المكافئ اذا كان

$$B^2 - 4AC = 0$$

ب- معادلة قطع زائد اذا كان $B^2 - 4AC > 0$

ت- معادلة قطع ناقص اذا كان $B^2 - 4AC < 0$

1-2-2-1 حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

هي تلك الدالة او العلاقة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة وتكون خالية من المشتقات الجزئية وتحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ويكون الحل على انواع:-

١-الحل العام: وهو حل المعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الدوال الاختيارية وتكون بقدر رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية.

٢-الحل الخاص: هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ويمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للدالة الاختيارية.

٣-الحل المنفرد: هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للدالة الاختيارية.

٤-الحل التام او الكامل: هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية.

1-2-5 معكوس تحويل لابلاس

تعريف: لتكن $v(x,y)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $z(x,t)$، فأن $z(x,t)$ تكون معكوس تحويل لابلاس ويشار اليها بواسطة $z(x,t) = L^{-1}(v(x,s)))$ عندما نعلم تحويل لابلاس يحوي دوال كسرية بالنسبة الى (s)فأن معكوس لابلاس يكون يتم الحصول عليه مباشرة أو مكتوب في الكسور الجزئية.

1-2-6 الشروط الابتدائية والحدودية

تعريف: عند دراستنا المعادلات التفاضلية الاعتيادية تصادفنا في بعض الاحيان معادلات تفاضلية مصحوبة بشروط معينة والمطلوب ايجاد الحل للمعادلة الذي يحقق تلك الشروط. فاذا كانت هذه الشروط لقيمة واحدة للمتغير المستقل فأن تلك الشروط تسمى شروط ابتدائية وتسمى المعادلة التفاضلية بمسألة القيم الابتدائية. واذا كانت الشروط الاكثر من قيمة واحدة للمتغير المستقل فأن تلك الشروط تسمى شروط حدودية وتسمى المعادلة التفاضلية بمسألة القيم الحدودية.

١-٣ نظرية : لتكن $z(x,t)$ دالة مستمرة بحيث أن $t > 0$ فأن :

1- $L(z_t) = sv(x,s) - z(x,0)$

2- $L(z_{tt}) = s^2 v(x,s) - sz(x,0) - z_t(x,0)$

3- $L(z_t) = \frac{d}{dx} v(x,s)$

4- $L(z_{xx}) = \frac{d^2}{dx^2} v(x,s)$

البرهان :

1- $L(z_t) = \int_0^\infty e^{-st} z_t dt$

$$z = e^{-st}, dv = z_t dt$$

$$dv = -se^{-st} \quad , v = z(z,t)$$

$$L(z_t) = e^{-st} z(x,t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty z(x,t) e^{-st} dt$$

$$= -z(x,0) + sv(x,s)$$

$$= sv(x,s) - z(x,0)$$

$$L(z_t) = sv - z(x,0)$$

2- $L(z_{tt}) = \int_0^\infty e^{-st} z_{tt}\, dt$

$$z = e^{-st}, \qquad dv = z_{tt} dt$$

$$dz = -se^{-st}, \qquad v = z_t(x,t)$$

$$L(z_{tt}) = e^{-st} z_t(x,t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty z(x,t) e^{-st} dt$$

$$e^{-st} z_t(x,t) \Big|_0^\infty + sL\big(z_t(x,t)\big)$$

$$= -z_t(x,0) + sL(z_t)$$

$$= z_t(x,0) + s\big(sv(x,s)\big) - z_t(x,0)$$

3- $L(z_x) = \int_0^\infty e^{-st} z_x(x,t)\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{dz(x,t)}{dx} dt$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-st} z(x,t)\, dt$$

$$= \frac{d}{dx} v(x,t) \quad , s > 0$$

4- $L(z_{xx}) = \int_0^\infty e^{-st} z_{xx}(x,t) dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2 z(x,t)}{dx^2} dt$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} z(x,t)\, dt$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} v(x,s)\ , s > 0$$

1-4 تحويلات لابلاس لبعض الدوال المشهورة

1- $L(0) = 0$

2- $L(1) = \frac{1}{s}$

3- $L(1) = \frac{k}{s}$

4- $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a} \qquad , \ s > a$

5- $L(sinax) = \frac{a}{s^2+a^2}$

6- $L(cosax) = \frac{s}{s^2+a^2}$

7- $L(sinhax) = \frac{a}{s^2-a^2}$

8- $L(coshax) = \frac{s}{s^2-a^2}$

9- $L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

10-$L(\sqrt{x}) = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

11-$L\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

1-5 خواص (نتيجة ٢,٧)

لتكن $z(x,t)$ دالة مستمرة بحيث إن $t > 0$ فأن بشكل عام

$$L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right] = \frac{d^n}{dx^n} v(x,s)$$

$$L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial t}\right] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(L(z_t)\right)$$
$$= s\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v(x,s) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} z(x,0)$$

$$L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2\partial t^2}}\right] = \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}\left(L(z_{tt})\right)$$

$$= s^2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} v(x,s) - s\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} z(x,0) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{\partial z(x,0)}{\partial t}$$

$$L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3}\partial t^3}\right]$$
$$= s^3\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} v(x,s) - s^2\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} z(x,0)$$
$$- s\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} z_t(x,0) - \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\frac{\partial^2 z(x,0)}{\partial t^2}$$
$$\vdots$$

$$L\left[\frac{\partial^n z}{\partial t^n}\right] = s^n v - s^{n-1} z(x,0) - s^{n-2}\frac{\partial z(x,0)}{\partial t} - \cdots$$
$$- \frac{\partial^{n-1} z(x,0)}{\partial t^{n-1}}$$

الفصل الثاني

2-1 *المقدمة*

سنتناول في هذا الفصل حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة (n) ويكون الحل حسب صنف المعادلة حيث إننا سنتناول حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذا الحدود المتجانسة والمعادلات الثابتة، والمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود اللامتجانسة والمعادلات الثابتة، كما أننا سنتطرق الى حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة كما إننا سندرس طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلة التفاضلية الجزئية. وسنركز الضوء على طريقة جديدة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية بواسطة تحويلات لابلاس .

2-2 حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة (n)

2-2-1 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية:

تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة (n) بالمتغير المعتمد (u) والمتغيرين المستقلين (x, y) بالصورة التالية:-

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^i} = f(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..*$$

$$\frac{\partial^0 u(x,y)}{\partial x^0 \partial y^0} = u(x,y) \qquad , \qquad i+j \le n$$

$$\ni A_{ij}(x,y),\ \ f(x,y)$$

هي دوال للمتغيرات x, y

ملاحظة: اذا كانت جميع المشتقات في المعادلة * بنفس الرتبة n فأن المعادلة * تسمى معادلة تفاضلية جزئية ذات حدود متجانسة وخلاف ذلك تسمى المعادلة ذات حدود غير متجانسة .

المؤثر التفاضلي الجزئي:-

يستخدم الرمز D في بعض المعادلات التفاضلية الجزئية ليعبر عن المشتقات الجزئية لدالة ما بالنسبة للمتغيرات المستقلة فاذا كان المتغير المستقل x فأن المشتقات الجزئية بدلالة المؤثر التفاضلي الجزئي D_x يكون بالصورة التالية:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad {D_x}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots, {D_x}^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

أما اذا كان المتغير y

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad {D_y}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \dots, {D_y}^2 = \frac{\partial^n}{\partial y^n}$$

اما اذا كان التغير x, y

$$D_x D_y = D_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

اذا كان المتغير المعتمد u *والمتغيرات المستقلة* x, y *يمكن كتابة المشتقات الجزئية بدلالة* u *وبالنسبة للمتغيرات المستقلة* x, y

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \ {D_x}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots., {D_x}^n u = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

$$D_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \ , \qquad {D_y}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots., {D_y}^n u = \frac{\partial^n u}{\partial y^n}$$

$$D_x D_y u = D_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بدلالة المؤثرات التفاضلية الجزئية بالشكل التالي :-

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j = f(x,y)$$

$$\phi\left(D_x, D_y\right) = f(x,y)$$

2-2-1-1 *المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة:-*

تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة من الرتبة n بالمتغير المعتمد u والمتغير المستقل x, y بالصورة التالية :-

$$a_0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1} \partial y^n} + \cdots + a_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = f(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(*)$$

حيث ان قيم $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_0 *ثوابت اختيارية وتكتب المعادلة * بدلالة المؤثر التفاضلي* D_x, D_y *بالصورة التالية :-*

$$a_0 D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} D_y u + \cdots + a_n D_y^n = f(x,y)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D_x^{n-i}\, D_y^i u = f(x,y)$$

ولمناقشة حل المعادلة * هنالك حالتان :

الحالة الاولى : اذا كان $f(x,y) = 0$ فأن المعادلة * تصبح متجانسة

$$a_0 D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} D_y u + \cdots + a_n D_y^n = 0$$

١) نفرض إن : $u = \emptyset(y + mx)$

$$a_0 D_x^n \emptyset(mx + y) + a_1 D_x^{n-1} D_y \emptyset(mx + y) + \cdots + a_n D_y^n \emptyset(mx + y) = 0$$

$$a_0 m^n \emptyset + a_1 m^{n-1} \emptyset + \cdots + a_n \emptyset = 0$$

$$(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_n)\emptyset(mx + y) = 0$$

$$\emptyset \neq 0$$

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots **$$

ثم نحلل المعادلة ** للحصول على جذورها المميزة

٢) نفرض إن : $u = \emptyset(x + \lambda y)$

$$a_0 D_x^n (x + \lambda y) + D_x^{n-1} D_y (x + y) + \cdots + D_y^n \emptyset(x + \lambda y) = 0$$

$$a_0 \emptyset + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n \emptyset = 0$$
$$(a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n)\emptyset(x + \lambda y) = 0$$
$$\emptyset \neq 0$$
$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..**$$

ملاحظة :

١) اذا كان $a_n, a_0 \neq 0$ اي إن D_x^n, D_y^n موجود في هذه الحالة يمكن اختيار اي من الفرضيتين في الحل .

٢) اذا كان $a_0 \neq 0$, هذا يعني أن موجود و D_y^n غير موجودة في هذه الحالة نستخدم الفرضية الاولى.

٣) اذا كان $a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ هذا يعني ان D_x^n غير موجودة و D_y^n موجودة في هذه الحالة نستخدم الفرضية الثانية.

٤) اذا كان $a_0 =$ اي ان D_x^n, D_y^n غير موجودة في هذه الحالة تكتب $\phi(D_y^n, D_x^n)$ بالصورة التالية:-

$$\left(a_0 D_x^n + a_1 D_x^{n-1} D_y + \cdots + a_n D_y^n\right)\mathrm{u} = 0$$

$$\phi(D_y^n, D_x^n)u = 0$$

$$\phi(D_y^n, D_x^n) = D_x^n D_y^k \phi_{n-(m+k)}(D_x, D_y)$$

ومن ثم نستخدم احدى الفرضيتين في الحل.

حالات الجذور

١-اذا كان كل من الجذور او القيم المميزة $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ اعداد حقيقية مختلفة عندئذ يكون الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل التالي

$$u(x,y) = \phi_1(m_1 x + y) + \phi_2(m_2 x + y) + \cdots + \phi_n(m_n x + y)$$

$$or: \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

$$u(x,y) = \phi_1(x + \lambda_1 y) + \phi_2(x + \lambda_2 y) + \cdots + \phi_n(x + \lambda_n y)$$

٢-اذا كانت الجذور او القيم المميزة $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ اعداد حقيقة متساوية أي ان $m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_n = m$ فأن الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل التالي :-

$$u(x,y) = \phi_1(mx + y) + x\phi_2(mx + y) + x^2\phi_3(mx + y) + \cdots + x^{n-1}\phi_n(mx + y)$$

$$or: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = \lambda$$

$$u(x,y) = \phi_1(x + \lambda y) + y\phi_2(x + \lambda y) + y^2\phi_3(x + \lambda y) + \cdots + y^{n-1}\phi_n(x + \lambda y)$$

٣-*اذا* كانت المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية وبمعاملات ثابتة حقيقة وكانت $\lambda = \alpha + i\beta$ و $\bar{\lambda} = \alpha + i\beta$ (حيث أن α, β) اعداد حقيقة

وكانت λ جذراً من جذور المعادلة المميزة لها فأن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية تكون بالشكل التالي :-

$$u(x,y) = \phi_1(\lambda x + y) + \phi_1(\bar{\lambda} x + y) + i[\phi_2(\lambda x + y) - \phi_2(\bar{\lambda} x + y)]$$

الحالة الثانية: عندما تكون $f(x,y) \neq 0$ فأن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة يتألف من الحل العام للجزء المتجانس u_c مضافاً اليه الحل الخاص u_p .

الحالات الخاصة للدالة $f(x,y)$:

الحالة الاولى: اذا كانت

$$F(x,y) = e^{ax+by}$$

$$\phi(D_x, D_y)u =$$

$$u_p = \frac{1}{\phi(D_x, D_y)} e^{ax+by}$$

١-اذا كان $\phi(a,b)$ فأن الحل الخاص يكون بالشكل التالي

$$u_p = \frac{1}{\phi(a,b)} e^{ax+by}$$

٢-اذا كان $\phi(a,b) = 0$ نعبر عن $\phi(D_x, D_y)$ بالشكل التالي

$$\phi(D_x, D_y) = \left(D_x - \frac{a}{b} D_y\right)^r G(D_x, D_y)$$

بحيث إن $G(a,b) \neq 0$ وعليه فأن الحل الخاص للمعادلة يكون بالشكل التالي :

$$u_p = \frac{x^r}{r!}\frac{1}{G(a,b)}e^{ax+by}$$

الحالة الثانية : أذا كانت

$f(x,y) = \sin(ax+by)$ or

$$= \cos(ax+by)$$

$$\ni \phi(-\mathrm{a}^2, -\mathrm{ab}, -\mathrm{b}^2) \neq 0$$

فأن الخل للجزء الخاص

$$u_p = \frac{1}{\phi(-\mathrm{a}^2, -\mathrm{ab}, -\mathrm{b}^2)}\begin{Bmatrix}\sin(ax+by)\\ \cos(ax+by)\end{Bmatrix}$$

الحالة الثالثة : اذا كانت $f(x,y) = x^a y^b$

حيث أن a, b اعداد صحيحة غير سالبة في هذه الحالة تعبر عن $\frac{1}{\phi(D_x, D_y)}$ بدلالة مفكوك ذو الحدين للقوى المتزايدة للمؤثر $\frac{D_x}{D_y}$ أو $\frac{D_y}{D_x}$ وتؤثر على هذا المفكوك بالدالة $x^a y^b$.

الحالة الرابعة : اذا كانت الدالة $f(x,y) = e^{ax+by}v(x,y)$ حيث أن v هي دالة بدلالة x, y .

وعليه فأن الحل الخاص للمعادلة هو

$$u_p = \frac{1}{\phi(D_x, D_y)}e^{ax+by}v(x,y)$$

$$u_p = \frac{e^{ax+by}}{\phi(D_x + a, D_y + b)}v(x,y)$$

الحالة الخامسة: اذا كانت $f(x,y) = g(ax+by)$

١) اذا كان $\phi(a,b)=0$ فأن

$$\phi(D_x,D_y)=(bD_x-aD_y)^n$$

$$u_p=\frac{1}{(aD_x-bD_y)^n}g(ax+by)=\frac{x^n}{n!}\frac{g(ax+by)}{b^n}$$

2-2-1-2 حل المعادلات الخطية ذات الحدود اللامتجانسة والمعاملات الثابتة:-

تقسم هذه المعاملات الى نوعين :

١-المعادلات التفاضلية الجزئية القابلة للاختزال.

٢-المعادلات التفاضلية الجزئية الغير قابلة للاختزال.

ويكون الحل العام لهذين النوعين من المعادلات $u=u_p+u_c$ حيث إن u_c هو الحل العام للجزء المتجانس والذي سوف نناقشه أما u_p فهو الحل الخاص للجزء الغير متجانس ويتم ايجاده بنفس الطريقة التي استخدمت لايجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية ذات الحدود المتجانسة.

١) المعادلات التفاضلية الجزئية القابلة للاختزال

هي معادلات تفاضلية جزئية خطية ذات حدود غير متجانسة ومعاملات ثابتة والتي يمكن تحليل مؤثرها التفاضلي الجزئي الى عوامل من الدرجة الاولى بمعاملات حقيقية D_x,D_y أي من الممكن ان نكتب $\phi(D_x,D_y)$ بالصورة التالية:-

$$\phi(D_x,D_y)=(a_1D_x+b_1D_y+c_1)(a_2D_x+b_2D_y+c_2)\dots$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_1D_x+b_1D_y+c_1)\quad \ni a_i,b_i,c_i,\qquad i=1\dots n$$

حيث أن a_i,b_i,c_i ثوابت حقيقة ولايجاد الحل العام للمعادلة

$$\phi(D_x, D_y)u = 0$$

نبحث اولاً في ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$(a_i D_x + b_i D_y + c_i)u = 0$$

$$a_i D_x u + b_i D_y u + c_i\, u = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية ومعاملاتها المساعدة هي

$$a_i D_x + b_i D_y = -c_i\, u$$

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} = \frac{du}{-c_i\, u}$$

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} \Longrightarrow b_i dx = a_i dy$$

$$b_i x = a_i y + A_1$$

$$A_1 = b_i x - a_i y$$

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{du}{-c_i\, u} \Longrightarrow \frac{c_i}{a_i} dx + \frac{du}{u} = 0$$

$$\frac{c_i}{a_i} x + lnu = B_1 \Longrightarrow lnu = B_1 - \frac{c_i}{a_i} x$$

$$u = e^{B_1 - \frac{c_i}{a_i} x}$$

$$A_2 = u e^{\frac{c_i}{a_i} x}$$

$$u = A_2 \qquad , A_2 = e^{B_1}$$

$$\phi(A_2, A_1) = 0 \Longrightarrow \phi(e^{B_1}, b_i x - a_i y) = 0$$

$$u e^{\frac{c_i}{a_i} x} = \psi(b_i x - a_i y)$$

$$\frac{dy}{b_i} = \frac{du}{-c_i\, u} \Longrightarrow \frac{c_i}{b_i} dy + \frac{du}{u} = 0$$

$$\frac{c_i}{b_i} y + lnu = B_2 \Longrightarrow lnu = B_2 - \frac{c_i}{b_i} y$$

$$u = e^{B_2 - \frac{c_i}{b_i} y} \Longrightarrow u = A_3 e^{-\frac{c_i}{b_i} y}, A_3 = e^{B_2}$$

$$A_3 = u e^{\frac{c_i}{b_i} y}, \qquad A_1 = b_i x - a_i y$$

$$F(A_3, A_1) = 0 \Longrightarrow F\left(u e^{\frac{c_i}{b_i} y}, b_i x - a_i y\right) = 0$$

$$u e^{\frac{c_i}{b_i} y} = F_1(b_i x - a_i y)$$

$$u = e^{-\frac{c_i}{b_i} y} F_1(b_i x - a_i y) \quad , \quad b_i \neq 0$$

ملاحظة: من ما تقدم نستنتج ما يلي :-

١) اذا كانت $a_i \neq 0$ ، $b_i \neq 0$ فأن الحل العام يكون في احدى الصورتين

$$u = e^{-\frac{c_i}{a_i} x} \psi_1(b_i x - a_i y), \qquad a_i \neq 0$$

$$u = e^{-\frac{c_i}{b_i} y} F_1(b_i x - a_i y) \quad , \quad b_i \neq 0$$

٢) اذا كان $b_i = 0, a_i \neq 0$ فأن الحل العام يكون بالصورة التالية:-

$$u = e^{-\frac{c_i}{a_i} x} \psi_1(b_i x - a_i y), \qquad a_i \neq 0$$

٣) اذا كان $b_i \neq 0, a_i = 0$ فأن الحل العام يكون بالصورة التالية:-

$$u = e^{-\frac{c_i}{a_i} y} F_1(b_i x - a_i y), \qquad b_i \neq 0$$

ولايجاد الحل العام للمعادلة $\phi(D_x, D_y) u = 0$ هناك حالتان :

الحالة الثانية :- اذا كان

$$\phi\left(D_x, D_y\right) = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)^k \prod_{i=k+1}^{n} (a_i D_x + b_i D_y + c_i)$$

بحيث أن أي من العوامل $a_i D_x + b_i D_y + c_i$ مستقل خطياً عن العوامل الاخرى لكل قيم $i = 1, \dots, n$ فأن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية يكون بالصورة التالية:-

$$u(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = e^{-\frac{c}{a}x} \sum_{i=1}^{k} x^{i-1} \psi_i(bx - ay) + \sum_{i=k+1}^{n} e^{-\frac{c_i}{a_i}x} \psi_i(b_i x - a_i y)$$

or:

$$u(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = e^{-\frac{c}{b}y} \sum_{i=1}^{k} y^{i-1} F_i(bx - ay) + \sum_{i=k+1}^{n} e^{-\frac{c_i}{b_i}y} F_i(b_i x - a_i y)$$

٢) المعادلات التفاضلية الجزئية الغير قابلة للاختزال (الغير قابلة للتحليل)

هي المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود الغير متجانسة والمعاملات الثابتة والتي لا يمكن تحليل مؤثرها التفاضلي الجزئي الى عوامل من الدرجة الاولى وبهذه الحالة يكتب الحل العام للجزء المتجانس u_c للمعادلة $\phi\left(D_x, D_y\right)u = 0$ بالشكل التالي:-

$$u_c = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{a_i x + b_i y}$$

حيث أن A_i ثوابت اختياري $\phi(a_i, b_i) = 0$

2-2-1-3 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة:-

تكتب المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة في المتغير المعتمد u والمتغيرات المستقلة x, y بالصورة التالية:-

$$A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u = F(x, y)$$

حيث إن $A_i(x, y)$ دوال لـ x, y و $i = 1, \dots, 6$.

- لحل هذه المعادلة سنناقش حالات خاصة:-

الحالة الاولى :- عندما تظهر المشتقة الثانية في حد واحد فقط من حدود الطرف الايسر أي أن

$$A_4 = A_5 = A_6 = 0$$

وواحده من الدوال

$$A_1, A_2, A_3 \neq 0$$

ففي هذه الحالة نحل المعادلة بالتكامل المباشر او انها تتحول الى معادلة ذات معادلات ثابتة وحدود متجانسة ومن الممكن حلها باستخدام الطرق السابقة.

الحالة الثانية:- عندما تكون كل المشتقات في الطرف الايسر بالنسبة لنفس المتغير (يعني اما كلها لـ x وأما كلها لـy وانما تجمع بين x,y) في هذه الحالة تتحول لمعادلة الجزئية الى معادلة اعتيادية خطية من الرتبة الاولى او معادلة جزئية من الرتبة

الثانية ثم نجد الحل العام لها حسب طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية ثم نكمل لهذا المتغير ونجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية .

- يعني إما يظهر الحد u_{xx} او يظهر الحد u_{yy} او يظهر الحد u_x او ...

تحول الى معادلة اعتيادية

تحول الى معادلة اعتيادية

1- $A_1 u_{xx} + A_4 u_x = F(x,y)$

2- $A_3 u_{xx} + A_5 u_y = F(x,y)$

3- $A_1 u_{xx} + A_4 u_x + A_6 u = F(x,y)$

4- $A_3 u_{yy} + A_5 u_y + A_6 u = F(x,y)$

تحول الى معادلة جزئية لأنها احتوت u

في الحالة الاولى (2,1) حتى تحولها الى اعتيادية نفرض $u_x = p$

$$A_1 \frac{\partial p}{\partial x} + A_4 p = F(x,y)$$

$$u_y = p$$

$$A_3 \frac{\partial q}{\partial y} + A_5 q = F(x,y)$$

الحالة الثالثة:- عندما تكون المعادلة التفاضلية الجزئية بالصورة التالية:-

1) $A_2 u_{xy} + A_4 u_x = F(x,y)$

2) $A_2 u_{xy} + A_5 u_y = F(x,y)$

في النقطة الاولى الحد الاكثر ظهوراً هو u_x إذن نفرض $u_x = p$

$$A_2 \frac{dp}{dy} + A_4 p = F(x,y)$$

في النقطة الثانية الحد الاكثر ظهوراً هو u_y إذن نفرض

$$u_y = q$$

$$A_2 \frac{dq}{dx} + A_5 q = F(x, y)$$

الحالة الرابعة: تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل التالي:-

1) $A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_5 u_y = F(x, y)$
2) $A_2 u_{xy} + A_1 u_{xx} + A_4 u_x = F(x, y)$

في النقطة الاولى الحد الاكثر ظهوراً هو u_y

$$u_y = q$$

$$A_2 \frac{\partial q}{\partial x} + A_3 \frac{\partial q}{\partial y} + A_5 q = F(x, y)$$

في النقطة الثانية الحد الاكثر ظهوراً هو u_x

$$u_x = p$$

$$A_2 \frac{\partial p}{\partial y} + A_1 \frac{\partial p}{\partial x} + A_4 p = F(x, y)$$

2-2-1-4 *طريقة فصل المتغيرات*

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة والتي يمكن فصلها الى معادلات تفاضلية اعتيادية بعدد المتغيرات المستقلة الموجودة في المعادلة التفاضلية الجزئية بحيث يؤمل الحصول على حلول لها تحقق الشروط الحدودية والابتدائية المعطاة.

تتلخص طريقة فصل المتغيرات في الخطوات التالية:-

١-نفرض المتغير المعتمد يساوي حاصل ضرب عدد من الدوال المجهولة والتي يكون عددها بقدر عدد المتغيرات المستقلة في المعادلة التفاضلية الجزئية وكل دالة في هذه الدوال تكون دالة في احدى المتغيرات المستقلة.

٢-نجد المشتقات الجزئية للمتغير المعتمد بدلالة الدوال المجهولة ومشتقاتها.

٣-نعوض عن المتغير المعتمد ومشتقاته الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية ثم نرتب حدود المعادلة الناتجة بحيث تتكون من عدد من الاجزاء الجمعية وكل جزء منها يعتمد على احد المتغيرات المستقلة وبما أن المعادلة التفاضلية وفي هذه الحالة فأن هذه الاجزاء مستقلة عن بعضها البعض أذن أن يكون كل جزء يساوي مقداراً ثابتاً (ثابت الفصل) بشرط ان يكون مجموع هذه الثوابت يساوي صفر.

٤-نحل هذه الاجزاء كمعادلات تفاضلية اعتيادية لاحتواء كل منهما على متغير مستقل واحد وذلك لإيجاد الدوال المجهولة ومن ثم نعوض عن تلك الدوال في الخطوة رقم (١) فيكون الناتج هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية.

2-3 *طريقة رئيسية جديدة لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بدون استخدام أي شروط ابتدائية وشروط حدودية بواسطة استخدام تحويل لابلاس.*

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية الغير متجانسة وذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة ومن الرتبة (n) بالمتغير المعتمد z والمتغيرات المستقلة t, x هي معادلة بالشكل:

$$A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial t} + \cdots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial t} = R(x,t) \ldots \ldots . . (3.1)$$

لحل المعادلة (3.1) بواسطة استخدام تحويل لابلاس، نأخذ تحويل لابلاس لكل طرفي المعادلة (*3.1*) بدون استخدام أي شروط ابتدائية وشروط حدودية أي أن:-

$$z(x,0), z_t(x,0), \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} z(x,0), z_x(x,0), \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} z(x,0)$$

معروف وتحويل لابلاس لـ$R(x,t)$ معروف نحصل :

$$L(A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial t} + \cdots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial t}) = \mathrm{L}(R(x,t))$$

$$A_1 L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right] + A_2 L\left[\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial t}\right] + \cdots + A_n L\left[\frac{\partial^n z}{\partial t}\right] = \mathrm{L}(R(x,t))$$

$$A_1 \frac{d^n}{dx^n} v(x,s) + A_2 s \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v(x,s) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} z(x,0) + \cdots$$
$$+ A_n\, s^n v(x,s) - A_n s^{n-1} z(x,0) - A_n s^{n-2} \frac{\partial z(x,0)}{\partial t}$$
$$- \cdots - A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} = L(R(x,t))$$

$$A_n\, s^n v(x,s)$$
$$= -A_1 \frac{d^n}{dx^n} v(x,s) - A_2 s \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v(x,s)$$
$$+ A_2\, z(x,0) - A_n s^{n-1} z(x,0) + A_n s^{n-2} \frac{\partial z(x,0)}{\partial t}$$
$$+ \cdots + A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \; L(R(x,t))$$

$$A_n\, s^n v(x,s) = D_1(S) + L(R(x,t))$$

$$v(x,s) = \frac{D_1(s) + L(R(x,t))}{A_n\, s^n}$$

$$v(x,s) = \frac{D_1(s)}{A_n\, s^n} + \frac{D_1(x,s)}{A_n\, s^n . k(s)}$$

حيث متعددة حدود بدلالة (s) يمثل قاسم تحويل لابلاس للدالة $R(x,t)$ ، نفرض $A_n s^n = F_1(s)$ ، ونفرض $F_1(s).k(s) = F_2(s)$ فأن المعادلة اعلاه تصبح

$$v(x,s) = \frac{D_1(s)}{F_1\ (s)} + \frac{D_2(x,s)}{F_2\ (s)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(3.2)$$

حيث $D_1(s)$ متعددة حدود بدلالة (s) درجتها اصغر من درجة $F_1\ (s)$ ، و $D_2(x,s)$ تمثل بسط الى تحويل لابلاس للدالة $R(x,t)$ ، درجتها اصغر من درجة $F_2\ (s)$.

الان ، بما أن $L\big(Z(x,t)\big) = v(x,s)$ ، فأن المعادلة (٢) تصبح :-

$$L\big(Z(x,t)\big) = \frac{D_1(s)}{F_1\ (s)} + \frac{D_2(x,s)}{F_2\ (s)}$$

وبواسطة أخذ (L^{-1}) لكلا طرفي المعادلة أعلاه، فأننا نحصل:-

$$Z(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + L^{-1}\left[\frac{D_2(x,s)}{F_2\ (s)}\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(3.3)$$

بما إن، $D_2(x,s)$ تمثل بسط الى تحويل لابلاس للدالة $R(x,t)$ وعليه

$$D_2(x,s) = H_1(x)\ H_2(s)$$

فأن المعادلة اعلاه تصبح في الشكل :-

$$Z(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + H_1(x)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2\ (s)}\right]$$

فأن الحل الكامل يعطي بواسطة

$$\begin{aligned} Z(x,t) = {} & B_2 g_1(t) + B_2 g_2(t) + B_2 g_3(t) + \cdots + B_n g_n(t) \\ & + H_1(x)[c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \cdots \\ & + c_m h_m(t)] \dots\dots\dots\dots..(3.4) \end{aligned}$$

حيث $B_1, B_2, \dots, B_n$ و $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت ، $h_1, h_2, \dots, h_n$ $g_1, g_2, \dots, g_n$ دوال بدلالة.

رقم الثوابت $B_i,\ i = 1,2, \dots, n$ ورقم الدوال $g_i, i = 1,2, \dots, n$ يساوي درجة $F_1(s)$ التي من المفترض ان يكون n ، ورقم الثوابت $c_i, i = 1,2, \dots, n$

ورقم الدوال $n_i, i = 1,2, \dots, m$ يساوي درجة $F_2(s)$ والتي من المفترض ان تكون (m) .

نحن نستطيع ان نتخلص من بعض هذه الثوابت $B_1, B_2, \dots, B_n$ و $c_1, c_2, \dots, c_n$ بواسطة الحصول علي قيمتها بواسطة تعويض الحل (٤) في المعادلة (١) ، وجدنا حل المعادلة (١) بدون استخدام أي شروط ابتدائية وشروط حدودية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بواسطة استخدام تحويل لابلاس.

2-4 أمثلة :

مثال 1-4-2: لحل معادلة الموجة $z_{tt} - z_{xx} = xtcost$

$$L(xtcost) = x\ L(xtcost) = \frac{xs}{(s^2+1)^2}$$

أذن $K(s) = (s^2+1)^2$

عليه $F(s) = s^2(s^2+1)^2$

$$\mathrm{z(x,t)} = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + H_1(x)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2\ (s)}\right]$$

$$\mathrm{z(x,t)} = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + xL^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{s^2.(s^2+1)^2}\right]$$

$$= L^{-1}\left(\frac{\mathrm{A}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{B}}{s^2}\right) + x[L^{-1}\left(\frac{\mathrm{C}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{Es}+\mathrm{H}}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{Gs}+\mathrm{H}}{(s^2+1)^2}\right)]$$

$$\mathrm{z(x,t)} = A + Bt + Cx + Dxt + Excost + Fxsint + Gxtcost + Hxsint$$

يمكننا أن نتخلص من بعض الثوابت بواسطة ايجاد

$$\mathrm{z}_{tt} = -Excost - Fxsint - Gxtcost - 2Gxsint - Hxtsint + 2Hxcost$$

$$\mathrm{z}_{xx} = 0$$

وبواسطة تعويض z_{tt}, z_{xx} في المعادلة ، نحصل على المعادلة التالية:-

$$-Excost - Fxsint - Gxtcost - 2Gxsint - Hxtsint + 2Hxcost = xtcost$$

وعليه $-E + 2H = 0, -F - 2G = 0\ , -G = 1, -H = 0$

بواسطة حل هذه المعادلات نحصل

$$H = 0, E = 0\ \ , G = -1\ \ , F = 2$$

ثم الحل الكامل يعطى بواسطة

$$\mathrm{z(x,t)} = A + Bt + Cx + Dxt + 2xsint - xtcost$$

حيث $A,\ B, C, D$ ثوابت .

مثال 2-4-2 : لحل معادلة الموجة

$$\mathrm{z}_{tt} = \mathrm{z}_{xx} + \mathrm{z}_{yy} + \mathrm{z}_{uu} + xyu^2t$$

$$L(xyu^2t) = xyu^2L(t) = \frac{xyu^2}{s^2}$$

أذن $K(s) = s^2$ وعليه

$$F(s) = s^2.s^2 = s^4$$

$$\mathrm{z(x,t)} = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + H_1(x,y,u)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2\ (s)}\right]$$

$$\mathrm{z(x,t)} = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + xyu^2L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{s^2.s^2}\right]$$

$$\mathrm{z(x,y,z,t)} = L^{-1}\left(\frac{\mathrm{A}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{B}}{s^2}\right) + xyu^2[L^{-1}\left(\frac{\mathrm{C}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{E}}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{F}}{s^4}\right)]$$

$$= A + Bt + xyu^2 + [L^{-1}\left(\frac{\mathrm{C}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{E}}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{\mathrm{F}}{s^4}\right)]$$

وعليه

$$\mathrm{z(x,y,u,t)} = A + Bt + Cxyu^2 + + \frac{E}{2}u^2xyt^2 + \frac{F}{6}u^2xyt^3$$

يمكننا أن نتخلص من بعض الثوابت بواسطة ايجاد

$$\mathrm{z}_{tt} = Exyu^2 + Fxyu^2t$$

$$\mathrm{z}_{uu} = 2Cxy + 2D\ xyt + Exyt^2 + \frac{1}{3}\ Fxyt^3$$

$$\mathrm{z}_{yy} = 0 \qquad , \ \mathrm{z}_{xx} = 0$$

وبواسطة تعويض

z_{tt}, z_{uu}, z_{yy} , z_{xx}

في المعادلة ، نحصل

$$Exyu^2 + Fxyu^2t - 2Cxy - 2D\,xyt - Exyt^2 - \frac{1}{3}\,Fxyt^3 = xytu^2$$

بواسطة حل هذه المعادلات نحصل

$$E = 0, \qquad F = 1, \qquad C = 0, \qquad D = 0, \qquad -\frac{1}{3}xyt^3 = 0$$

ثم الحل الكامل يعطي بواسطة

$$\mathrm{z(x, y, u, t)} = A + Bt + \frac{1}{6}xyu^2t^3$$

مثال: 3-4-2 لحل المعادلة

$$z_{xxxx} + z_{xxtt} + 2z_{tttt} = e^x sinu$$

$$L(e^x sint) = e^x L(sint) = \frac{e^x}{s^2 + 1}$$

أذن $K(s) = s^2 + 1$

وعليه

$$F(s) = 2s^4(s^4 + 1),$$

$$z(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{F_1\ (s)}\right] + H_1(x)L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{F_2\ (s)}\right]$$

$$z(x,t) = L^{-1}\left[\frac{D_1(s)}{2s^4}\right] + e^x L^{-1}\left[\frac{H_2(s)}{2s^4(s^2+1)}\right]$$

$$z(x,y,u,t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{A}{s}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{B}{s^2}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{C}{s^3}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{D}{s^4}\right) + \frac{1}{2}e^x\left[L^{-1}\left(\frac{E}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{F}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{G}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{H}{s^4}\right) + L^{-1}\left(\frac{Is+j}{s^2+1}\right)\right]$$

$$z(x,y,u,t) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bt + \frac{C}{4}t^2 + \frac{D}{12}t^3 + \frac{E}{2}e^x + \frac{F}{2}te^x + \frac{G}{4}t^2e^x + \frac{H}{12}t^3e^x + \frac{1}{2}e^x cost + \frac{j}{2}e^x sint$$

$$z_{xxxx} = \frac{E}{2}e^x + \frac{F}{2}te^x + \frac{G}{4}t^2e^x + \frac{H}{12}t^3e^x + \frac{1}{2}e^x cost + \frac{j}{2}e^x sint$$

$$z_{xxtt} = \frac{G}{2}e^x + \frac{H}{2}e^x t - \frac{1}{2}e^x cost + \frac{j}{2}e^x sint$$

$$z_{tttt} = \frac{1}{2}e^x cost + \frac{j}{2}e^x sint$$

بواسطة حل هذه المعادلات نحصل

$$E = 0, F = 0, G = 0, H = 0, j = \frac{1}{2}\ , I = 0$$

ثم الحل الكامل يعطى بواسطة

$$z(x,t) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bt + \frac{C}{4}t^2 + \frac{D}{12}t^3 + \frac{1}{4}e^x sint$$

حيث $A\ , B, C\ , D$ ثوابت

المصادر :

1. A.D.Polyanin, Handbook of "Linear paratial Differential Equation for Engineers and scientists", chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton, 2002.
2. Georgef. Carrler, "Paratial Differntial Equations Theory and Technique", 1976.
3. I.A.MALLOKI, "Thesis of the separation Technique for non Linear partial Differential Equations: General Results and it's connection with other methods", University of Keel, April, 1987.
4. Stanly J.Farlow , "Partial Differential Equations for scientists and Engineers", New york , 1989.
٥. طالب ناهي الخفاجي، عبد السلام عبد الله، "الميكانيك لطلبة العلوم والهندسة"، طبع بمطابع دار اكتب للطباعة والنشر.