وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة القادسية

كلية التربية

قسم الرياضيات

تحليل الارتباط القويم اللاخطي باستخدام بعض دوال كيرنل

بحث مقدم الى قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس علوم رياضيات

من قبل

الطالبة

نور محمد حسن

بأشراف

د. كوركيس شهيد محمد

١٤٣٩هـ **٢٠١٨م**

بسم الله الرحمن الرحيم

{نَرْفَعُ دَرَجَاتٍ مَّن
نَّشَاءُ ۗ وَفَوْقَ كُلِّ
ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ}

صدق الله العظيم

سورة يوسف آية (٧٦)

الإهـــداء

✍ اهدي محتوى هذا البحث الى الدكتورة كوركيس شهيد محمد ، استاذتي في هذا البحث التي لها الفضل الكبير في انجاز هذا البحث وتعزيزه بالمواضيع العلمية المسندة بالمصادر العلمية الموثوقة ، لها جزيل الشكر والتقدير على مساعدتها القيمة.

كما أهديه الى كل اساتذتي الكرام في قسم الرياضيات لهم كل الحب والأمتنا ن وكل من ساعدني والهمني القدرة والتشجيع. كما أهدي هذا البحث الى كل من يقرأه ويطلع على مضمونة وعسى ان تتعم الاستفادة للجميع والله ولي التوفيق .

الباحثة

نور محمد حسن

المحتويات

ت	الموضوع	الصفحة
١.	الآية الكريمة	
٢.	الاهداء	
٣.	الملخص	
٤.	المقدمة	٣-٤
٥.	**الفصل الاول: مفاهيم اساسية**	
٦.	**1.1** ***فضاءات المتجهات*** **vector spaces**	٥
٧.	***1.2*** **فضاء هلبرت الابتدائي Pre-Hilbert Space**	٦-٧
٨.	**الفصل الثاني : طريقة كيرنل في تحليل الارتباط القديم Kernel CCA**	٨-١٥

٩.	***2.1* المحاكاة**	١١-١٤
١٠.	**2.2 تحليل النتائج**	١٤-١٥
١١.	**الاستنتاجات**	١٦
١٢.	**المصادر**	١٧
١٣.	**الملحق**	١٨-١٩

المقدمة:

يفترض هذا التحليل وجود زوج من المتغيرات المتعددة $\in R^{n_x}, Y \in R^{n_y}$ ويعمل على ايجاد زوج من التحويلات الخطية التي تجعل معامل الارتباط بين المعالم المستخلصة اعظم ما يمكن وبافتراض ان X, Y لكل منهما متوسط مقداره صفر وتباين مقداره واحد فان التحويلات تكون كما ياتي:

$$U = \langle a, x \rangle, V = \langle b, y \rangle$$

حيث ان :

$\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle$ تمثل حاصل الضرب الداخلي (inner product) بين a, x و b, y على التوالي .

والهدف هنا هو ايجاد التحويل المناسب الى *a,b* والذي يجعل معامل الارتباط اعظم ما يمكن. وبمعنى اخر اذا كان لدينا متغير عشوائي يتكون من *p* من الابعاد هو X ومتغير يتكون من *q* من الابعاد هو *Y* ، هدفنا هو الحصول على تركيبات خطية من المتغيرات الاصلية تمتلك اعظم ارتباط، ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة رياضية بالشكل التالي :

$$\rho = MAX|corr(a^T X, b^T Y)| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ان المتغيرات الناتجة $U = a^T X, V = b^T X$ تدعى المتغيرات القويمة وان الارتباط القويم الاول ρ يعرف كقيمة مطلقة للارتباط بين مجموعتين من المتغيرات القويمة وكما في العلاقة رقم (١) ، ان المتغير القويم ذو المرتبة k، $1 < k <$ $Min(p, q)$ سيكون غير مرتبط مع كل المتغيرات القويمة ذات الرتب العليا.

ويمكن ايجاد b^T, a^T كمتجه مميز مرافق لقيم مميزه عظمى

افرض ان Σ تمثل مصفوفة التباين المشترك للمجتمع للمتغير العشوائي z حيث ان

$z = (X^T, Y^T)^T$ ويمكن وضع Σ بالشكل التالي:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}$$

وقد نستخدم مصفوفة الارتباطات R

$$R = \begin{bmatrix} R_{XX} & R_{XY} \\ R_{YX} & R_{YY} \end{bmatrix}$$

حيث يتم حساب المتجه المميز b^T *من العلاقة التالية:*

$$(M - \lambda I)\mathrm{b} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بفرض ان

$$M = \Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$$

عند استخدام مصفوفة الارتباطات

ان قيم المتجه المميز b^T *والذي يرتبط بكل قيمة من القيم المميزة* (λ) *الناتجة من المعادلة* (2) *تمثل اوزاناً للمجموعة* Y *من المتغيرات.*

وبعد حساب b^T *يمكن ان نحدد المتجه* a^T *المقابل للمجموعة* X *من المتغيرات من خلال العلاقة التالية :*

$$\mathrm{a}^T = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} R_{XX}^{-1} R_{XY} d^T$$

يستخدم تحليل الارتباط القويم عندما تكون X, Y متغيرات تتبع التوزيع الطبيعي المشترك وحتى يكون هذا الافتراض غير متحقق يمكن استخدامه في بعض الحالات وعندما يكون هدفنا هو الحصول على انحدار تلك المتغيرات فاننا نرغب في

الحصول على قيم كبيرة لمعاملات الارتباط. ولكن احياناً قد نحصل على قيم صغيرة لتلك المعاملات وقد يكون ذلك عائداً الى احد السببين التاليين:

١- عدم وجود اي علاقة بين X, Y.

٢- هناك علاقة غير خطية قوية بين X, Y.

في الحالة الاولى لايمكن الحصول على افضل مما تم الحصول عليه ولايمكن اجراء اي تحسينات تذكر. اما في الحالة الثانية فيمكن الحصول على العلاقة باستخدام بعض الطرق منها طريقة كيرنل (*Kernel Method*) في تحليل الارتباط القويم.

الفصل الاول

مفاهيم اساسية

المصفوفة: هي دالة رياضية خطية تحول مجموعة بداية اي انطلاق (مجال) الى مجموعة وصول او نهاية (مدى). مجموعة انطلاق والوصول يمكن ان تكون متكونة من اعداد صحيحة او عقدية او اشعة ممن الاعداد كم يمكن ان تكون هاتان المجموعتان متكونة بدورها من دالات رياضية او اشعة دالات رياضية ويمكن ان نرمز للمصفوفة كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} يمكن ان تكون اعداد صحيحة او مركبة كما يمكن ان تكون دالات رياضية

العمليات على المصفوفات

جمع مصفوفتين :

اذا كانت $A = (a_{ij}), = (b_{ij})$ مصفوفتين على الحقل F ومن نفس السعة فان جمع المصفوفتين A, B يعرف بالشكل التالي :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

حيث $C = A + B$

ضرب المصفوفات

اذا كانت $A = (a_{ij})$ *مصفوفة على الحقل* F *وكان الحقل* $c \in F$ عدد ثابت قياسي فان حاصل ضرب العدد c بالمصفوفة يعرف بالشكل

$$CA = (ca_{ij})$$

1.1 *فضاءات المتجهات* vector spaces

تعريف: نقول مجموعة E هي فضاء متجهات على $\mathcal{R}$ اذا كان تحقق مايلي:-

١. (الخاصية الاغلاق لعملية الجمع) اذا كان $u, v \in E$ فأن $u + v$.

٢. (الخاصية التجمعية لعملية الجمع) اذا كان $u, v, w \in E$ فأن $u +$
$(v + w) = (u + v) + w$

٣. (خاصية المحايد الجمعي) يوجد عنصر $0 \in E$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث
$u + 0 = 0 + u, \forall u \in E$

٤. لكل $u \in E$ يوجد عنصر يرمز له $-u$ ويسمى نظير u الجمعي ويحقق
$(-u) = (-u) + u = 0$

٥. (الخاصية الابدالية للجمع) اذا كان $u, v \in E$ فان $u + v = v + u$

٦. (الخاصية الاغلاق لعملية الضرب بعدد) اذا كان $u \in E$ و $a \in \mathcal{R}$ فأن
$au \in E$

٧. اذا كان $u, v \in E$ و $a \in \mathcal{R}$ فان $\alpha(u, v) = \alpha u + \alpha v$

٨. اذا كان $u \in E$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ فان $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

٩. اذا كان $u \in E$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ فإن $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta u)$

١٠.اذا كان $u \in E$ فان $1.u = u$

1.2 فضاء هلبرت الابتدائي *Pre-Hilbert Space*

ليكن X فضاء متجهات على الحقل F. الدالة $\langle . \rangle : X \times X \to F$ تسمى بدالة الضرب الداخلي *inner Product* على X اذا تحققت البديهيات الاتية:-

١. $\langle x, x \rangle \geq 0$ لكل $x \in X$.

٢. $\langle x, x \rangle = 0$ اذا وفقط اذا كان $x = 0$.

٣. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ حيث $\overline{\langle x, y \rangle}$ تعني العدد المرافق للعدد $\langle x, y \rangle$.

٤. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ لكل $x, y, z \in X$ لكل $\alpha, \beta \in F$

فضاء هلبرت الابتدائي (*Pre-Hilbert space*) او (فضاء الضرب الداخلي)

هو الثنائي $(x, \langle . \rangle)$ حيث X فضاء المتجهات على الحقل F, $\langle . \rangle$ ضرب داخلي على X. سوف تكتب X بدلاً من $(x, \langle . \rangle)$ في حالة عدم وجود التباس.

ملاحظة: كل فضاء جزئي م فضاء هلبرت الابتدائي يكون فضاء هلبرت الابتدائي.

مثال3: ليكن $X = \mathcal{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ معرفاً على الدالة الاتية:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

١- $\langle x_1, x_2 \rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 \geq 0$ لكل $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$

٢- $\langle x_1, x_2 \rangle = 0 \leftrightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$

$$\Leftrightarrow {x_1}^2 = 0, {x_2}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$= y_1 x_1 + y_2 x_2$$

رابعاً: ليكن $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$

$$\alpha x + \beta\, y = \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)\, z_2$$

$$= \alpha(x_1 z_1 + x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 + y_2 z_2)$$

$$= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$$

$\Leftarrow$ $\langle . \rangle$ ضرب داخلي على $\mathcal{R}^2$

الفصل الثاني

طريقة كيرنل في تحليل الارتباط القويم Kernel CCA

في هذه الطريقة يتم تحويل X,Y في فضاء هلبرت (Hilbert space) حيث :

$\emptyset_x(x) \in H_x, \emptyset_y(y) \in H_y$

وبأخذ حاصل الضرب الداخلي (inner product) للمعالم في فضاء هلبرت

$a \in H_x, b \in H_y$

نحصل على ما يأتي:

$$U = \langle a, \emptyset(x) \rangle, V = \langle b, \emptyset(y) \rangle$$

وبفرض وجود عينات $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ يمكن ايجاد a,b وذلك عن طريق حل علاقة لاكرانج التالية:

$$L_0 = E[(U - E[U])(V - E[V])] - \frac{\lambda_1}{2} E[(U - E[U])^2] - \frac{\lambda_2}{2} E[(V - E[V])^2]$$

ان علاقة لاكرانج لا تعمل بشكل جيد عندما تكون ابعاد فضاء هلبرت كبيرة ولهذا يجب اضافة حد انتظام تربيعي (Quadratic Regularization term) وذلك من اجل تحسين عمل علاقة لاكرانج وكما يأتي:

$$L = L_0 + \frac{\eta}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

حيث ان η تمثل ثابت انتظام (Regularization constant) ان معدل U يمكن حسابه من الصيغة التالية:-

$$\mathrm{E[U]} = \frac{1}{N} \sum_i \langle a, \phi_x(x_i) \rangle$$

ان فضاء هلبرت الابتدائي الكامل يدعى فضاء هلبرت بعبارة اخرى اذا كان X فضاء متجهات على الحقل F مع الضرب الداخلي $\langle . \rangle$ فان X يكون فضاء هلبرت اذا كان الفضاء المتري المتولد بواسطة المعيار $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ فضاء كاملاً.

ويمكن توضيح فضاء هلبرت الابتدائي او ما يسمى احياناً بفضاء الضرب الداخلي من خلال التعريف التالي:

تعريف: ليكن X فضاء متجهات على الحقل F. الدالة $\langle . \rangle : X \times X \to F$ تسمى بدالة الضرب الداخلي على X ، اذا تحققت البديهيات التالية:

١- $\langle x, x \rangle \geq 0$ لكل $x \in X$.

٢- $\langle x, x \rangle = 0$ اذا وفقط اذا كان $x = X$.

٣- $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ حيث $\overline{\langle x, y \rangle}$ تعني العدد المرافق للعدد $\langle x, y \rangle$.

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ لكل

$x, y, z \in X, \alpha, \beta \in F$

فضاء هلبرت الابتدائي (Pre-Hilbert space) او فضاء الضرب الداخلي هو الثنائي $(X, \langle \quad \rangle)$ حيث X فضاء متجهات على الحقل F و $\langle . \rangle$ داخلي على X.

وكذلك معدل UV يمكن حسابه بالشكل التالي:

$$E[UV] = \frac{1}{N} \sum_{i.j} \langle a, \phi_x(x_i) \rangle \langle b, \phi_y(y_i) \rangle$$

وباشتقاق L بالنسبة الى a ومساواة المشتقة الى الصفر نحصل على ما يأتي:

$$a = \sum_{i.j} \alpha_i \phi_x(x_i)$$

حيث ان α_i تمثل ثابت (scalar)

ونتيجة للخطوة السابقة فان:

$$U = \sum_{i} \alpha_i \langle \phi_x(x_i), \phi_x(x_i) \rangle$$

والتي يمكن حسابها عن طريق حاصل الضرب الداخلي . ان ما يسمى بخدعة كيرنل Kernel Trick يتلخص باستخدام دالة كيرنل $K_x(X_1, X_2)$ بدلا من حاصل الضرب الداخلي بين $\phi_x(X_1)$, $\phi_x(X_2)$ وبذلك لسنا بحاجة الى صيغة ϕ_x(X) نحتاج فقط الى تحددي K_x والتي تكون معرفة موجبة متماثلة . ويمكن اعادة كتابة L من حسب وجهة نظر طريقة كيرنل كما ياتي:

افرض ان

$$= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$$

$$(K_x)_{ij} = K_x(x_i, x_j)$$

$$(K_y)_{ij} = K_y(y_i, y_j)$$

فأن :

$$L = \alpha^T M \beta - \frac{\lambda_1}{2} \alpha^T L \alpha - \frac{\lambda_2}{2} \beta^T N \beta$$

حيث ان:

$$M = \frac{1}{N} K_x^T J K_y$$

$$L = \frac{1}{N} K_x^T J K_x + \eta_1 K_x$$

$$N = \frac{1}{N} K_y^T J K_y + \eta_1 K_y$$

$$J = I - \frac{1}{N} 11^T$$

$$1 = (1,1, \dots ,1)^T$$

$$\eta_1 = \frac{\eta}{\lambda_1}, \eta_1 = \frac{\eta}{\lambda_2}$$

واذا كانت $\eta > 0$ فإن كل من N,L سيكون مصفوفة معرفة موجبة *Positive definite matrix* ويمكن اثبات ان $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ونتيجة لذلك يكون لدينا ما يدعى بمشكلة قيمة مميزة عامة(*Generalized eigenvalue problem*) وكما يأتي:-

$$M\beta = \lambda L\alpha$$

$$M^T\alpha = \lambda N\beta$$

والتي يمكن حلها مشكلة قيمة مميزة عامة .

2.1المحاكاة:

لقد تم استخدام المحاكاة لغرض اجراء المقارنة بين مقدرات الارتباط القويم المحسوبة وفق الطريقة التقليدية ومقدرات الارتباط القويم المحسوبة وفق طريقة كيرنل باستخدام ثلاث دوال من كيرنل هي دالة (*Gaussian Kernal*) ودالة (*Uniform Kernel*) ودالة *Triangle Kernel* وذلك بهدف معرفة افضلية المقدرات وذلك بالاعتماد على كون الارتباط القويم يمثل اكبر الارتباطات للحكم على المقدر الافضل وتم كتابة برنامج باستخدام لغة (*V.B*) خاص بالتجربة لتحقيق هذا الهدف حيث تم تكراراها (*1000*) مرة لغرض الوصول الى نتائج مقنعة ويمكن ادراج خطوات اجراء المحاكاة وكالتالي:-

تولد قيم للمتغيرات (x_1 , x_2) لتكوين تركيبة خطية هي UC_i والتي يتم استخدامها في حساب الارتباط القويم وفق الطريقة التقليدية وتركيبة خطية اخرى هي UK_i والتي يتم استخدامها في حساب الارتباط القويم وفق طريقة كيرنل وبأحجام عينات $(n = 10,20,30,40,50,60,70,80,90)$ أي لكل متغير من متغيرات x نولد n من المشاهدات المذكورة حيث ان :

$$UC_i = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$UK_i = a_1K(x_1) + a_2K(x_2)$$

وان صيغ دوال كيرنل المستخدمة هي الصيغ التالية:

a) $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$

وهذه الدالة تدعى دالة (Gaussian Kernal)

b) $K(x) = \frac{1}{2}, \quad |x| \leq 1$

وهذه الدالة تدعى دالة (Uniform kernel)

c) $K(x) = (1 - |x|), \qquad |x| \leq 1$

وهذه الدالة تدعى دالة (Triangle kernel)

$$X = (\theta)sin3\theta + \varepsilon_1$$

حيث يتم توليد قيم θ على اساس انها تتبع التوزيع المنتظم المستمر على الفترة $[-\pi, \pi]$.

ε_1 : يمثل حد الخطأ العشوائي ويتم توليده على اساس انه يتبع التوزيع الطبيعي القياسي في الحالة الاولى ويتبع التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$ في الحالة الثانية اما في الحالة الثالثة فيتم توليده على اساس انه يتبع توزيع كاي بالمعلمة n.

يتم توليد متغيرات (y_1, y_2) لتكوين تركيبة خطية هي VC_i والتي يتم استخدامها في حساب الارتباط القويم وفق الطريقة التقليدية وتركيبة خطية اخرى هي VK_i والتي يتم استخدامها في حساب الارتباط القويم وفق طريقة كيرئل وباحجام عينات *(*n=10,20,30,40,50,60,70,80,90*) أي لكل متغير من متغيرات* y *تولد* n *من المشاهدات المذكورة حيث أن:*

$$VC_i = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$VK_i = b_1 k(y_1) + b_2 K(y_2)$$

وان $K(\mathrm{y})$ تاخذ نفس الصيغ السابقة وان الصيغة التي يتم الحصول على قيم y منه في الصيغة التالية:-

$$Y = e^{\frac{\theta}{4}}(cos2\theta)(\sin 2\theta) + \varepsilon_2$$

حيث يتم توليد قيم θ على اسا انها تتبع التوزيع المنتظم المستمر على الفترة $[-\pi, \pi]$.

ونولد قيم المتغير ε_2 مرة بالتوزيع الطبيعي القياسي ومرة اخرى بالتوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = 1/3$ ومرة ثانية بتوزيع مربع كاي بدرجة حرية (n).

يتم حساب معاملات الارتباط بين UC_i و VC_i حيث ان اكبرها يمثل معامل الارتباط القويم المحسوب وفق الطريقة كيرنل حسب الدالة المستخدمة أي يتم حساب معامل الارتباط القويم نوع كيرنل لدوال كيرنل الثلاث.

تيم المقارنة بين معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق طريقة كيرنل وبالدوال الثلاث .

2.2 تحليل النتائج:

بعد اجزاء تجربة المحاكاة تم الحصول على النتائج التالية :

١-من الجدول رقم (١) والذي يمثل قيم معاملات القويم المحسوبة باستخدام طريقة كيرنل وبالدوال الثلاث وكذلك معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق الطريقة التقليدية عندما يكون ε_1 , ε_2 يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي القياسي نلاحظ ان معاملات الارتباط القويم المحسوب وفق طريقة كيرنل كانت اكبر من تلك المحسوبة وفق الطريقة التقليدية ولجميع حجوم العينات وكانت اكبر تلك الارتباطات باستخدام دالة (Gaussian Kernal) ومن ثم باستخدام دالة (Uniform Kernal) وبعد ذلك باستخدام دالة (Triangle Kernel).

ونلاحظ بشكل عام ان الارتباطات المحسوبة وفق الطريقة التقليدية كانت صغيرة جداً.

٢-نلاحظ من الجدول رقم (٢) والذي يمثل قيم معاملات الارتباط القويم المحسوبة باستخدام طريقة كيرنل وبالدوال الثلاث وكذلك معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق الطريقة التقليدية عندما يكون ε_1 ε_2 يتبع كل منهما التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$ ان معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق طريق كيرنل كانت اكبر من تلك المحسوبة وفق الطريقة التقليدية عند استخدام دالة (Gaussian Kernel) وكذلك عند استخدام دالة (Uniform Kernel) ولجميع حجوم العينات بينما كانت تلك الارتباطات اقل مما كانت عليه ارتباطات الطريقة التقليدية عند استخدام دالة (Triangle Kernal) .

ونلاحظ بشكل عام ان الارتباطات المحسوبة وفق الطريقة التقليدية كانت اكبر مما كانت عليه في الجدول رقم (١).

٣-من الجدول رقم (٣) والذي يمثل قيم معاملات الارتباط القويم المحسوبة باستخدام طريقة كيرنل وبالدوال الثلاث وكذلك معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق الطريقة التقليدية عندما يكون ε_1 ε_2 يتبع كل منهما توزيع مربع كاي بالمعلمة n نلاحظ ان معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق طريقة كيرنل كانت اكبر من تلك المحسوبة وفق الطريقة التقليدية ولجميع حجوم العينات وكانت اكبر تلك الارتباطات باستخدام دالة (Gaussian Kernal) ومن ثم باستخدام دالة (Uniform Kernel) وبعد ذلك باستخدام دالة (Triangle Kernel). ونلاحظ بشكل عام ان الارتباطات المحسوبة وفق الطريقة التقليدية كانت اكبر مما كانت عليه في الجدول رم (١). ولكنها كانت اقل مما عليه في الجدول رقم (٢) عند حجوم العينات المتشابهة.

الاستنتاجات:

١-عندما يكون ε_1 ε_2 يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي القياسي او التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$ او توزيع مربع كاي بالمعلمة n نلاحظ ان معاملات الارتباط القويم المحسوبة وفق طريقة كيرنل كانت اكبر من تلك المحسوبة وفق الطريقة التقليدية ولجميع حجوم العينات فيما عدا في حالة التوزيع الاسي

حيث كانت الارتباطات القويمة المحسوبة باستخدام طريقة كيرنل اقل من الطريقة التقليدية عند استخدام دالة (Triangle Kernel).

٢-كانت الارتباطات القويمة المحسوبة وفق طريقة كيرنل باستخدام دالة (Gaussian Kernal) تمثل اكبر الارتباطات في جميع الحالات وعند جميع حجوم العينات.

المصادر :

1- Akaho, S, (2001),' "A kernel method for caonical correlation analysis", second edition , McGraw. Hill series in probability and statistics.

2- Anderson , T.W (1984), "An Introduction to Multivariate statistical analysis', Jonwiley and sons.

3- Donald F.Morrison (1988)."Multivariate statistical methods", second edition, McGraw. Hill series in probability and statistical.
4- Florian , M.(2003)"canonical Correlation Analysis with kernels", Computational Diagnostics Group seminar . Berlin.
5- Lai,p.l and C.fyfe(2000). "Kerenel and nonlinear canonical correlation analysis", International Journal of Neural systems 10(5), 365-377.
6- Lindeman, R,H(1980). "Introduction to bivariate and multivariate analysis, "Scott- Foresman company , Illinois , U.S.A.
7- Romanazzi, m.(1992), "Influence in canonical correlation analysis", Psychometrika, 57,237-259.
٨-المياحي، نوري فرحان وعلي حسين بتور (٢٠٠٥)، "مقدمة في التحليل الدالي"، مؤسسة النبراس للطباعة والنشر والتوزيع، النجف الاشرف، العراق.

الملحق

جدول (١)

يمثل الارتباطات القويمة المحسوبة وفق الطريقتين وبالدوال المختلفة عندما تتبع الاخطاء ε_1 ε_2

التوزيع الطبيعي القياسي

الطريقة	الدالة المستخدمة	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=70	n=80	n=90
Kernel CCA	Gaussian	0.82	0.80	0.79	0.78	0.78	0.77	0.77	0.77	0.77
	Uniform	0.63	0.62	0.61	0.59	0.58	0.57	0.57	0.57	0.58
	Triangle	0.55	0.52	0.50	0.47	0.46	0.45	0.45	0.46	0.46
CCA	Classical	0.10	0.03	0.02	0.002	0.02	0.04	0.04	0.04	0.03

جدول (٢)

يمثل الارتباطات القويمة المحسوبة وفق الطريقتين وبالدوال المختلفة عندما تتبع الاخطاء ε_1 ε_2

التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$

الطريقة	الدالة المستخدمة	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=70	n=80	n=90
Kernel CCA	Gaussian	0.73	0.72	0.71	0.71	0.71	0.71	0.72	0.72	0.72
	Uniform	0.56	0.54	0.54	0.53	0.52	0.52	0.53	0.54	0.54
	Triangle	0.47	0.44	0.43	0.42	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42
CCA	Classical	0.50	0.47	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44

جدول رقم (٣)

يمثل الارتباطات القويمة المحسوبة وفق الطريقتين وبالدوال المختلفة عندما تتبع الاخطاء ε_1 ε_2

توزيع مربع كاي بالمعلمة n

الطريقة	الدالة المستخدمة	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50	n=60	n=70	n=80	n=90
Kernel CCA	Gaussian	0.75	0.74	0.72	0.72	0.71	0.70	071	0.71	0.71
	Uniform	0.62	0.59	0.57	0.56	0.55	0.54	0.55	0.55	0.55
	Triangle	0.52	0.51	0.48	0.46	0.45	0.44	0.45	0.45	0.45
CCA	Classical	0.43	0.40	0.39	0.36	0.35	0.34	0.34	0.34	0.34