جامعة القادسية

كليـة التربيـة

قسم الرياضيات

حل مسائل العلوم الطبيعية باستخدام المعادلات التفاضلية

بحث

مقدمة إلى مجلس قسم الرياضيات/كلية التربية/جامعة القادسية

وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكلوريوس علوم في الرياضيات

من قبل

بشائر موسى هرموش

بإشراف

د.ميثاق حمزة كعيم

المقدمة

ان العديد من المسائل للعلوم والهندسة والميكانيكا وعلوم الحياة والطب وغيرها من فروع المعرفة العلمية يمكن وصفها من خلال النمذجة الرياضية وتمثيل العمليات على شكل صيغة رياضية، أي في شكل دوال ومتغيرات. على سبيل المثال، تحويل عمليات في الهندسة ، حركة التفاعلات الكيميائية، ديناميكية السكان البيولوجية، حركة الأجسام الفضائية، نماذج التنمية الاقتصادية الى صيغ رياضية باستخدام المعادلات التفاضلية.

هذا هو السبب الرئيس لاختيار موضوع العمل. وكانت المادة لهذا العمل نظرية المعادلات التفاضلية والمشاكل الأكثر شهرة في العلوم الطبيعية، وحلها بمساعدة المعادلات التفاضلية. الغرض من هذا البحث هو النظر في إمكانية تطبيق المعادلات التفاضلية لحل المسائل في تخصصات العلوم الطبيعية. ويقسم العمل الى قسمين لتحقيق الهدف من هذا البحث:

١. وصف الأساس النظري للمعادلات التفاضلية.

٢. النظر في بعض طرق حل المسائل في الفيزياء والهندسة وعلم الأحياء والكيمياء باستخدام المعادلات التفاضلية.

ويتألف العمل من جزأين رئيسيين:

– الجزء النظري وهو المفاهيم الأساسية لنظرية المعادلات التفاضلية.

–الجزء العملي وهو الحل الفعلي لمشاكل العلوم الطبيعية بمساعدة المعادلات التفاضلية.

الفصل الأول. أساسيات نظرية المعادلات التفاضلية.

١,١ اوليات عامة:

١,١,١ تعريف [3]:

يقال إن المعادلة هي معادلة تفاضلية إذا احتوت على مشتقات للمتغير المعتمد بالنسبة للمتغيرات المستقلة وتكون المعادلة التفاضلية عادية إذا كان المتغير المعتمد يعتمد على متغير مستقل واحد. وتسمى المعادلة التفاضلية بالمعادلة التفاضلية الجزئية إذا كانت تحتوي على عدة متغيرات مستقلة، ودوال هذه المتغيرات، والمشتقات الجزئية لهذه الدوال.

١,١,٢ تعريف [3]:

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

١,١,٣ تعريف [13]:

حل المعادلة التفاضلية هو نظام من الدوال التي تحقق المعادلة التفاضلية وتخلو من المشتقات. في حالة المعادلات التفاضلية العادية، يمكن أن تكون الحلول عامة، خاصة و منفردة. اذ ان الحلول العامة للمعادلات التفاضلية هي الحلول التي تحتوي على العديد من الثوابت الاختيارية حسب رتبة المعادلة التفاضلية. الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية هي الحلول التي تم الحصول عليها من اختيار قيم للثوابت الاختيارية في الحل العام. الحلول المنفردة للمعادلات التفاضلية هي الحلول التي لا يمكن الحصول عليها من الحل العام.

حلول المعادلات التفاضلية الجزئية تحتوي على دوال اختيارية. ويتم الحصول على حل الخاص عن طريق الاختيار المناسب للدوال الاختيارية.

١,١,٤أمثلة:

١- $\frac{dy}{dx} + xy = sinx$

٢- $tanxydx + sinxdy = 0$

٣- $(x + y - 1)dx + (2x - 4y)dy = 0$

٤- $xlnydx + \frac{1}{x}dy = 0$

1.2. المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى:

1.2.1 مفاهيم أساسية [6]:

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى هي:

$$F(x, y, y') = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث F دالة بالمتغيرات x,y,y'. وتسمى الصيغة (١) بالصيغة الضمنية للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى بالشكل الاتي:

$$y' = f(x,y) \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

او

$$\mathrm{M(x,y)}dx + N(\mathrm{x,y})dy = 0 \dots\dots\dots (3)$$

تسمى الدالة $y = \phi(x)$ حل للمعادلة التفاضلية اذا حقق المعادلة اي عند استبدال قيمة y و y' بالقيم $\phi(x), \phi'(x)$ فان المعادلة تتحقق بالتطابق. تسمى المعادلة $F(x,y,c) = 0$ التكامل التام للمعادلة التفاضلية ويمكن الحصول عليه من خلال تكامل منحنيات حل المعادلة التفاضلية. مخطط حل المعادلة التفاضلية يسمى المنحني التام.

يسمى الشرط :

$$y = y_0, x = x_0$$

او

$$y(x_0) = y_0 = \phi(x_0)$$

بالشرط الابتدائي للمعادلة التفاضلية.

1.2.2 *المعادلات التفاضلية القابلة للفصل* [6]:

تسمى المعادلة التفاضلية الاعتيادية قابلة للفصل اذا امكن كتابتها بالشكل الاتي:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \dots\dots\dots (4)$$

وبتكامل طرفي معادلة (٤) نحصل على الحل العام.

أمثلة:

$$1)\ (y+1)dx + (x+1)dy = 0$$

$$\frac{1}{(x+1)}dx + \frac{1}{(y+1)}dy = 0$$

$$ln(|x+1|) + ln(|y+1|) = c$$

$$y+1 = \frac{A}{x+1} \quad , \quad A = e^c$$

1.2.3 المعادلات التفاضلية الخطية [3]:

وهي معادلة تفاضلية اعتيادية بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \dots\dots\dots (5)$$

او بالشكل:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y) \dots\dots\dots (6)$$

والحل العام لها هو:

$$yu - \int Q(x)udx = c$$

$$u = e^{\int p(x)dx}$$

مثال:

اوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}$$

$$u=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{lnx}=x$$

$$yx-\int\frac{1}{x}x\,dx=c$$

$$yx-\int dx=c$$

$$yx-x=c$$

$$p(x)=\frac{1}{x}\quad,\quad Q(x)=x^2$$

1.2.4 معادلة برنولي التفاضلية الاعتيادية ***[6]***:

وهي معادلة تفاضلية اعتيادية بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n \dots\dots\dots(5)$$

او بالشكل:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)x^n \dots\dots\dots(6)$$

والحل العام لها هو:

$$z = y^{1-n} \rightarrow dz = (1-n)y^{-n}dy$$

بالتعويض

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$$

وهي خطية تحل بالشكل الاتي:

$$zu - (1-n)\int Q(x)udx = c$$

$$u = e^{(1-n)\int p(x)dx}$$

<u>مثال:</u>

اوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}y^2$$

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$u = e^{(1-2)\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-lnx} = \frac{1}{x}$$

$$z\frac{1}{x} - (1-2)\int \frac{1}{x}\frac{1}{x}\, dx = c$$

$$z\frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = c\,, z\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = c, \frac{1}{y}\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = c$$

١,٢,٥. التفاضل التام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية [13]:

تسمى المعادلة التفاضلية الاعتيادية:

$$Mdx + Ndy = 0$$

تفاضل تام لدالة معينة $F(x,y)$ اذا كان:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

اي ان:

$$dF = Mdx + Ndy$$

$$dF = Mdx + Ndy = 0$$

$$F = \int M(x;y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \right] dy = c$$

١,٣. المعادلات التفاضلية الاعتيادية من رتب أعلى [13]:

1.3.1 مفاهيم أساسية [13]:

الصيغة العامة لها هي:

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

ادى الطرق المتبعة لحل هذا النوع من المعادلات هو تخفيض الرتبة.

1.3.2 تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية الاعتيادية *[13]*:

١- في حالة ظهور المتغير x وعدم ظهور المتغير y.

نعوض: p=y' , p'=y" فتصبح بالشكل الاتي:

F(x,p,p')=0

وهي معادلة من الرتبة الاولى يمكن حلها حسب جدول المعادلات من الرتبة الاولى.

$$xy'' = y'$$

$$xp' = p$$

$$x\frac{dp}{dx} = p \rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$lnp = lnx + c$$

$$p = ax \rightarrow y' = ax \rightarrow y = a\frac{x^2}{2} + b$$

٢-- في حالة ظهور المتغير y وعدم ظهور المتغير x.

نعوض: $p = y', y'' = p\frac{dp}{dy}$ فتصبح بالشكل الاتي:

F(y,p, $p\frac{dp}{dy}$)=0

وهي معادلة من الرتبة الاولى يمكن حلها حسب جدول المعادلات من الرتبة الاولى.

$$yy'' = y'$$

$$yp\frac{dp}{dy} = p$$

$$y\frac{dp}{dy} = 1 \rightarrow dp = \frac{dy}{y}$$

$$\int dp = \int \frac{dy}{y} + c$$

$$p = lny + c$$

$$p = ay \rightarrow y' = ay \rightarrow dy = aydx$$

$$\frac{dy}{y} = adx \rightarrow lny = ax + b$$

1.3.3 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n [13]:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي معادلة بالصيغة:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),$$

حيث تكون y(x) دالة غير معرفة، $a_1(x), a_2(x),\ldots, a_n(x), f(x)$ دوال معرفة مستمرة. ويسمى التعبير الموجود على الجانب الأيسر من المعادلة بالمؤثر التفاضلي الخطي من الرتبة n:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y .$$

تسمى المعادلة:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة. وتسمى المعادلة:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),\ f(x)\neq 0$$

المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة.

تكتب المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة في الشكل: $L(y) = 0$ و $L(y) = f(x)$، على التوالي. إذا كانت في المعادلة المتجانسة $a_i(x)$ $(i=1,..,n)$ هي نفسها كما في المعادلة غير المتجانسة، فإن المعادلة المتجانسة تسمى معادلة متقابلة مع المعادلة غير المتجانسة.

إذا كان y1، y2،. . . y_n– حلول خاصة للمعادلة الخطية المتجانسة L (y) = 0، فان مجموعها

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

هو حل ايضاً. حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية.

تسمى الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مستقلة خطياً اذا كان التركيب الخطي:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$$

فان: $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

اذا كانت الدوال y1، y2،. . . y_n– مستقلة خطياً و حلول خاصة للمعادلة المتجانسة ، فانها تسمى النظام الاساسي للحل. الحل العام للمعادلة المتجانسة يمكن ان يكتب بالصيغة الاتية:

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ ، حيث y1، y2،. . . y_n– الحل الاساسي للمعادلة المتجانسة ، $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية. الان يمكن تحديد حل خاص للمعادلة التفاضلية بحيث يحقق الشروط الاتية:

$$y = y_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad , \quad x = x_0.$$

اذا كان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ حل للمعادلة المتجانسة ، فان حل المعادلة غير المتجانسة يمكن ايجاده من خلال استخدام طريقة تغير الثوابت الاختيارية. اذا كان لدينا الحل من النوع:

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \ldots + c_n(x) y_n$$

بحيث $c_1(x),c_2(x),\ldots,c_n(x)$ دوال غير معرفة تحقق نظام المعادلات التفاضلية الاتية:

$$\begin{cases} y_1\dfrac{dc_1}{dx}+\cdots+y_n\dfrac{dc_n}{dx}=0; \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}\dfrac{dc_1}{dx}+\cdots+y_n^{(n-2)}\dfrac{dc_n}{dx}=0; \\ y_1^{(n-1)}\dfrac{dc_1}{dx}+\cdots+y_n^{(n-1)}\dfrac{dc_n}{dx}=f(x); \end{cases}$$

وبحل هذا النظام نحصل على $\frac{dc_j}{d}=\varphi_j(x)$ ثم نحصل على الحل:

$$c_j=\int\varphi_j(x)\,dx+A_j$$ حيث A_j ثوابت التكامل.

1.3.4 **المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة *[6]*:**

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة هي:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

حيث $a_1,a_2,\ldots a_n$ ثوابت اختيارية.

الحل العام لهذا النوع من المعادلات سوف يكون بالصيغة الاسية ، اي e^{kx} حيث k جذر للمعادلة المميزة :

$$k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

وتوجد هناك عدة حالات لحالة جذور هذه المعادلة وهي:

١-اذا كانت جميع الجذور $k_1,k_2,\ldots,k_n$ حقيقية مختلفة فان الحل العام هو:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \cdots + c_n e^{k_n x}$$

٢-اذا كان احد الجذور يتكرر m من المرات وليكن الجذر k_i اي ان:

$K_i=k_{i+1}=\ldots=k_{i+m-1}$

فان الحل العام لها هو:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + \cdots + c_{i-1} e^{k_{i-1} x} + (1 + x + \cdots + x^{m-1}) c_i e^{k_i x} + c_{i+1} e^{k_{i+1} x} + \cdots + c_n e^{k_n x}$$

3-اذا كانت الجذور عقدية مختلفة فان الحل العام هو:

$$y = (c_1 cos(k_1 x) + c_2 \sin(k_1 x)) + \cdots + (c_{2n-1} cos(k_n x) + c_{2n} \sin(k_n x))$$

1.3.5 **المعادلات التفاضلية الخطية غيرالمتجانسة ذات المعاملات الثابتة *[6]*:**

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة هي:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

حيث $a_1, a_2, \ldots a_n$ ثوابت اختيارية.

يمكن ايجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات من خلال العلاقة الاتية:

$$y_p = \int_0^x Y(x-t)f(t)dt$$

حيث Y هو حل مطابق لحل المعادلة المتجانسة ويحقق الشروط:

$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0\ , \dots , Y^{(n-2)}(0) = 0, Y^{(n-1)}(0) = 1$$

ويسمى y_p الحل الخاص للمعادلة التفاضلية.

ثم ايجاد الحل العام للمعادلة بالجزء المتجانسة منها ونرمز له بالرمز y_c ثم الحل العام هو حاصل جمع الحليين الخاص و العام للجزء المتجانس.

$y=y_p+y_c$

1.4 المعادلات التفاضلية الجزئية:

1.4.1 المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى [8]:

_الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى هي:

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = R$$

حيث $a_1(x_1, x_2, \dots, x_n), a_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دوال اختيارية .

يمكن حل هذا النوع من المعادلات عن طريق استخدام **طريقة لاكرانج**.

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dz}{R}$$

من هذه المعادلات يمكن الحصول على الحلول المطلوبة و لتكن:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i \ , \qquad i = 1,2, \dots, n$$

فان الحل العام هو:

$$z = \emptyset(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

1.4.2 بعض مسائل الفيزياء الرياضية [16], [9]:

المعادلات التفاضلية المستخدمة و الاكثر شيوعاَ في المسائل الفيزيائية هي معادلات تفاضلية من الرتية الثانية الخطية.

١-معادلة الموجة التي تصف اهتزازات وسط معين:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

٢-معادلة التلغراف:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

٣-معادلة انتشار الحرارة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \Delta u$$

٤-معادلة لابلاس:

$$\Delta u = 0$$

٥-معادلة بواسون:

$$\Delta u = 4\pi\rho(x, y, z)$$

عند حل معادلات الرتبة الثانية، عادة ما نبحث عن حل معين يحقق الشروط الابتدائية والحدودية.

الفصل الثاني:

2 .حل مسائل العلوم الطبيعية بأستخدام المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية هي واحدة من الأدوات الأكثر شيوعاً والقوية لحل المسائل العلمية الرياضية. على وجه الخصوص أنها تستخدم لحل مسائل العلوم الطبيعية: الميكانيكا النظرية والفيزياء والكيمياء والبيولوجي. في العديد من مشاكل البصريات الهندسية ورسم الخرائط، وغيرها من مجالات العلوم الطبيعية، يصبح من الضروري العثور على منحنيات وتحديد خصائصها وعادة ما يتم حل مثل هذه المسائل (هندسياً) مع مساعدة المعادلات التفاضلية.

2.1 النمذجة الرياضية [7], [5] , [1]:

في دراسة رياضية لاي مسألة من مسائل العالم الحقيقي يمكن تحديد ثلاث مراحل وهي:

- ❖ بناء نموذج رياضي للمسألة.
- ❖ دراسة هذا النموذج الرياضي والحصول على حل للمسألة الرياضية المقابلة.
- ❖ تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها لمسائل عملية.

عند بناء نموذج رياضي لظاهرة أو عملية، فمن الضروري ايجاد امثليتها وتشكيلها ، في حالة مثالية الظاهرة، يتم فصل الظروف التي تؤثر بشكل كبير عليها من الظروف التي ليس لها تأثير

كبير، فمثلاً مخطط لدراسة حركة البندول – في هذه الحالة، يتم تجاهل حجم وشكل الحمل، ومقاومة الهواء، والاحتكاك عند نقطة التعليق، ومرونة الخيط، وما إلى ذلك.

دراسة هذا المخطط المثالي يمكن أن تشكل من خلال تكوين معادلة التفاضلية. بعد ذلك، من الضروري التحقيق في مدى حدود وشروط هذا التشكيل، وكيفية تغير الحالة عند حساب العوامل المستبعدة، وما إلى ذلك.

2.2 حل المسائل الفيزياوية بأستخدام المعادلات التفاضلية [11], [4]:

ووفقا لما قيل في الفقرات، يجب أن يمر حل المسألة المادية في الحياة الحقيقية بثلاث مراحل:

– صياغة معادلة تفاضلية.

– حل هذه المعادلة.

– دراسة الحل الذي تم الحصول عليه.

ويوصى هنا بسلسلة من الإجراءات التالية:

١. تعيين القيم التي تتغير في هذه الظاهرة، وتحديد القوانين المادية التي تربطهم.

٢. تحديد المتغير المستقل ودالة المتغير المطلوب.

٣. استنادا إلى شروط المشكلة، يتم تحديد الشروط الأولية أو الحدودية.

٤. التعبير عن جميع الكميات في حالة المشكلة من خلال متغير مستقل، الدالة ، ومشتقات هذه الدالة.

٥. بناء على شروط المشكلة والقانون المادي الذي تلتزم به هذه الظاهرة، تشكل معادلة تفاضلية.

٦. إيجاد الحل العام أو التكامل العام للمعادلة التفاضلية.

٧. في ظل الشروط الأولية أو الحدودية، يتم العثور على حل خاص.

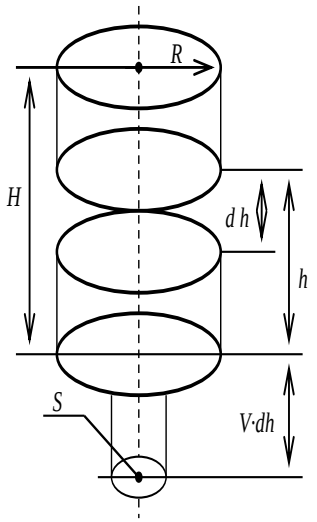
٨. التحقق من هذا الحل.

في كثير من الحالات، تستند صياغة المعادلة التفاضلية إلى ما يسمى "خطية العملية في الاصغرية"، أي على الاختلاف في الدوال التي تعبر عن اعتماد الكميات. وكقاعدة عامة، يمكننا أن نفترض أن جميع الكميات المشاركة في هذه العملية أو تلك تتغير في غضون فترة قصيرة من الزمن بمعدل ثابت. وهذا يسمح لنا بتطبيق القوانين المعروفة في الفيزياء، واصفا الظواهر التي تحدث بشكل موحد، لتكوين علاقة بين قيم t، $t + \Delta t$، أي بين الكميات المتضمنة في العملية وزياداتها. وليس للمساواة الناتجة سوى طابع تقريبي، لأن الكميات تختلف، حتى في فترة قصيرة من الزمن، بشكل عام،و بشكل غير متساو. ولكن، إذا قمنا بتقسيم كلا الجانبين من المساواة الناتجة عن Δt والذهاب إلى الحد الأقصى، عندما $\Delta t \to 0$، نحصل على المساواة بالضبط. أن هذا التشكيل يتضمن الوقت t، والكميات الفيزيائية ومشتقاتها التي تتغير مع مرور الوقت، وهذا هو معادلة التفاضلية التي تصف ظاهرة معينة. ويمكن الحصول على المعادلة نفسها في شكل تفاضلي باستبدال الزيادة Δt بواسطة dt التفاضلي، واستبدال الدوال بواسطة الفروق التفاضلية.

وهكذا، عندما نقوم بصياغة معادلة التفاضلية، فاننا نأخذ "لقطة موجزة" لعملية في وقت معين، وعند حل المعادلة للقطات لحظية، فان هذا يمكننا من استعادة استمرارية العملية. في اغلب الحالات يستخدم النموذج الخطي لوصف الظواهر ، وعلى الرغم من أن هناك عمليات يستحيل فيها النموذج الخطي (على سبيل المثال، حركة براونية)، فإن الطريقة الموصوفة في الغالبية الساحقة من الحالات يمكن ان تكون فعالة.

مسألة-١:

في الجزء السفلي من وعاء أسطواني مليئة بالماء ذات ارتفاع H ونصف قطر القاعدة R، يتم إجراء ثقب صغير من المنطقة S (الشكل ١). في أي فترة من الزمن سوف تتدفق كل المياه من الثقب إذا ثلث المياه تتدفق في t_1 ثانية؟



الشكل(1)

الحل: إذا كان تدفق المياه يحدث بالتساوي، فان حل المشكلة سيكون تافه: كل المياه سوف تتدفق في وقت $3t_1$.

ولكن، اذا كان تتدفق الماء بسرعة معينة، ومع انخفاض مستوى المياه في الاسطوانة، ينخفض معدل الانتهاء. وبالتالي، فمن الضروري أن تأخذ في الاعتبار العلاقة بين سرعة التدفق v وارتفاع عمود السائل h فوق الفتحة السفلى.

أظهرت تجارب "توريسيلي" [17] أن السرعة تعبر عنها تقريبا الصيغة

$$v = k\sqrt{2qh}$$

حيث q هو التعجيل بسبب الجاذبية و k هو ثابت العلاقة ويعتمد على لزوجة الوسط وشكل الثقب (للمياه في حالة ثقب دائري، k = ٦ ، [18]).

لنأخذ "لقطة لحظية" لعملية تدفق السائل لفترة زمنية [t، t + Δt]. لنفترض أنه في البداية كان ارتفاع السائل فوق الفتحة هو h، وفي النهاية انخفض وأصبح h + Δh، حيث Δh هو "زيادة الارتفاع" (التي من الواضح أنها سلبية). اذن حجم السائل الذي يتسرب من القنينة يساوي حجم الاسطوانة مع ارتفاع Δh − = |Δh| ومنطقة القاعدة πR^2 Δh.

جريان هذا السائل يتم بشكل جريان اسطواني له قاعدة S و ارتفاعه يساوي المسار الذي اجتازه السائل ليتسرب من القنينة خلال الفاصل الزمني [t، t + Δt].في بداية هذا الفاصل الزمني، كان معدل التدفق $v = k\sqrt{2qh}$ مساويا لقانون توريسيلي :

لكن في النهاية اصبح بالشكل الاتي:

$$v = k\sqrt{2q(h + \Delta h)}.$$

وإذا كانت Δt صغيرة جدا، فإن Δh هي أيضا صغيرة جدا، وبالتالي فإن التعبيرات التي تم الحصول عليها للسرعة تكون عمليا هي نفسها، ويعبر المسار الذي يتم اجتيازه خلال الفاصل الزمني t,t+ [Δt] بالصيغة:

حيث: $(k\sqrt{2qh} + \alpha)\Delta h$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0,$$
$$i.e$$
$$V = (k\sqrt{2qh} + \alpha) S \Delta t$$

وهوحجم السائل المسكوب من القنينة خلال الفاصل الزمني [t، t + Δt].

بمقارنة التعبيرين عن حجم السائل المسكوب من القنينة خلال الفاصل الزمني [t، t + Δt]، نحصل على المعادلة:

$$-\pi R^2 \Delta h = \left(k\sqrt{2qh} + \alpha\right) S \Delta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نقسم طرفي معادلة (١) على Δt ثم نأخذ الغاية لطرفي المعادلة مع الاخذ بنظر الاعتبار:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0, a \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = h',$$

لنحصل على الاتي:

$$-\pi R^2 h' = k\sqrt{2qh}\,.S \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

الان لنقم بحل هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى وقابلة للفصل .

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{2qh}\,.S$$

$$-\pi R^2 dh = k\sqrt{2qh}\,.S\ dt$$

$$\frac{-\pi R^2 dh}{k\sqrt{2q}\,.S\,\sqrt{h}} = \ dt$$

$$\frac{-Adh}{\sqrt{h}} = \ dt\,, \quad A = \frac{\pi R^2}{k\sqrt{2q}\,.S}$$

$$t = -A\left(2\sqrt{h} + C\right)\,, \qquad C \text{ ثابت} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

ويعتمد الثابت A على حجم وشكل الفتحة، ولزوجة السائل وغيرها من المعلمات الفيزيائية، والثابت C نشأ أثناء حل المسألة. إن قيمهم ليست معروفة لنا، ولكن يمكن العثور عليها من خلال مراعاة الظروف غير المستخدمة للمسألة.

لايجاد قيمة C، نستخدم الشروط الأولية: في بداية تدفق السائل، تم ملء القنينة، أي في t = 0، ارتفاع h = H.

وباستبدال t = 0، h = H في معادلة (٣)، نحصل على:

$$C = -2\sqrt{H}.$$

اي ان معادلة (٣) تصبح بالشكل الاتي:

$$t = 2A\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$$

لايجاد قيمة A، نأخذ في الاعتبار أنه في أول دقيقة t_1، ثلث السائل بأكمله تدفق خارجاً. وهذا يقابل انخفاضا في مستوى السائل بمقدار H / 3. وبعبارة أخرى، بالنسبة إلى t = t1 لدينا: h = 2H / 3 = H − H / 3. وبالتالي نجد أن:

$$t_1 = 2A(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{2}{3}H}) = 2A\sqrt{H}(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$$

لذلك فان قيمة A هي:

$$A = \frac{t_1}{2\sqrt{H}(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})} = \frac{3t_1(1 + \sqrt{\frac{2}{3}})}{2\sqrt{H}} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

الآن ليس من الصعب العثور على وقت تفريغ القنينة، أي. العثور على قيمة t التي تجعل h =

$$t = 2A(\sqrt{H} - \sqrt{0}) = \frac{3t_1(1 + \sqrt{\frac{2}{3}})}{\sqrt{H}}(\sqrt{H} - 0) = 3t_1(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

لاحظ أنه على الرغم من أن القيمة الأخيرة من t هي حوالي ١,٨٢ مرات أكبر من القيمة $3t_1$، التي تم الحصول عليها تحت افتراض أن السائل يتدفق بشكل موحد، فإنه ليس دقيقا ، لأننا أهملنا، على سبيل المثال، الدوامات من السائل، طبقة الحدود من السائل، والعديد من العوامل الأخرى.

ولتصحيح الحل الذي تم الحصول عليه. نقوم باستبدال القيمة الاتية في (٤):

$$A = \frac{\pi R^2}{k\sqrt{2q}\cdot S},$$

لايجاد t_1 ثم ايجاد الزمن الحقيقي:

$$t = 3t_1(1+\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2q}}.$$

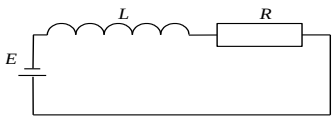
ومن الواضح أنه كلما زادت قيم R و H (أبعاد القنينة)، وكلما زاد تتدفق السائل ،. وكلما زادت مساحة الفتحة S، كلما زاد تدفق السائل من الوعاء. في نفس الوقت، هناك زيادة في التعجيل q، فضلا عن المعامل k (كلما زاد k، كلما زادت سرعة تدفق السائل).

الجواب. كل المياه سوف تتدفق من خلال ثقب في فترة من الزمن:

$$t = \frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2q}}.$$

مسألة– ٢ :

الشكل (2)



في دائرة كهربائية مغلقة (الشكل ٢) يتضمن مصدر للتيار مع قوة دافعة كهربائية E.M.f E(t)، الذي يتغير بتغير الوقت ، مع مقاومة فعالة، ولفات حث L ، كيف يمكن ان تتغير قوة التيار بتغير الوقت علماً ان قوة التيار عند الوقت t=0 تساوي صفر؟

من قوانين الفيزياء [2] ، نجد ان :

$$E(t) = LI' + RI \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{E(t)}{L} = I' + \frac{R}{L} I$$

لقد حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى للتيار مع الشرط الابتدائي I (0) = 0. والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$I = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \int \frac{E(t)}{L} \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} dt,$$

$$I = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \int E(t) \cdot e^{\frac{R}{L} t} dt \ldots\ldots\ldots (6)$$

هنا تظهر حالتين لنقوم بتحليلهن:

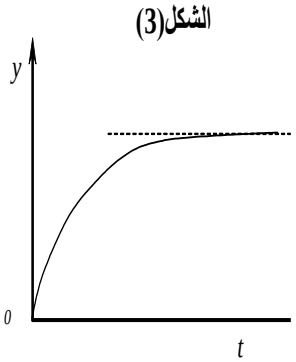
١- E.M.f هو قيمة ثابتة، E (t) = E0. في هذه الحالة، و من المعادلة (٦) نجد:

$$I = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \int e^{\frac{R}{L} t} dt,$$

$$I = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C\right),$$

$$I = \frac{E_0}{R} \left(1 + C e^{-\frac{R}{L} t}\right).$$

حسب الشرط الابتدائي $I(0)=0$ نجد ان :



$$0 = \frac{E_0(1+C)}{R} \rightarrow C = -1$$

وبالتعويض عن قيمة C في (٦) نجد:

$$I = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad .....(7)$$

نلاحظ أنه عندما $t \rightarrow +\infty$ نحصل على أن $I \rightarrow E0 / R$، أي ان بعد التشغيل المستمر E.M.f ، فإن قيمة التيار تزداد من صفر إلى القيمة $E0 / R$ التي ينص عليها قانون أوم (الشكل ٣).

٢- E.M.f تتغير بشكل دوري حسب قانون الجيب:

$$E = E_0 sin\omega t$$

وحسب المعادلة (٦) نجد:

$$I = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} sin\omega t \, dt,$$

$$I = \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} \left(\frac{R}{L} sin\omega t - \omega \cos \omega t\right) + Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

وبأستخدام الشرط الابتدائي $I(0)=0$ نجد:

$$C = \frac{E_0 \omega}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)}$$

$$I = \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} \left(\frac{R}{L} sin\omega t - \omega \cos \omega t\right) + \frac{E_0 \omega}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} e^{-\frac{R}{L}t}$$

عند تقدم الوقت اي $t \to +\infty$ فان الجزء الثاني من المعادلة اعلاه سوف يقترب من الصفر

أي ان :

$$I \approx \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} \left(\frac{R}{L} sin\omega t - \omega \cos \omega t\right)$$

الان بوضع : $A = \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}$, $\cos \alpha = \frac{R}{LA}$, $\sin \alpha = \frac{\omega}{A}$

يمكن كتابة معادلة التيار بالشكل الاتي:

$$\boldsymbol{I = \frac{E_0}{LA} \sin(\omega t - \alpha).}$$

من هنا يمكن استنتاج الاتي: تتناوب تغير قوة التيار جيبياً مع تغير القودة الدافعة E.M.f .

٢,٣. حل مسائل في علم الأحياء [12], [10].

الكائن الحي هو نظام معقد جدا، ولكي يكون ممكناً ان يشاهد هذا الكائن بكل تفاصيله فإن الباحث يختار دائما وجهة نظر مبسطة للعرض، ومناسبة لحل مهمة محددة. وهذا التبسيط للنظم البيولوجية الحقيقية هو أساس طريقة النمذجة. وعادة ما تنقسم النماذج المستخدمة في البيولوجيا إلى ثلاث فئات:

١- نماذج المواد البيولوجية: التي تدرس الأنماط العامة، العمليات المرضية، وتأثير الأدوية المختلفة، وما إلى ذلك وتشمل هذه الفئة من النماذج، على سبيل المثال، حيوانات المختبر، زراعة الخلايا، تعليق العضيات، الخ.

٢- النماذج الفيزيائية (التناظرية): أي النماذج المادية التي لها نفس سلوك الكائن الذي يتم نمذجته. على سبيل المثال، التشوهات التي تنشأ في العظام تحت الأحمال المختلفة يمكن دراستها على العظام التي أعدت خصيصا للمتابعة، تدفق الدم في الأوعية الكبرى.

٣- النماذج الرياضية: هي أنظمة للتعبير الرياضي– الصيغ، والدوال، والمعادلات، وما إلى ذلك، واصفا خصائص معينة من كائن الدراسة، او ظاهرة عملية. عند إنشاء نموذج رياضي، نستخدم القوانين الفيزياوية المتحققة خلال الدراسة التجريبية لكائن النمذجة. لذلك، على سبيل المثال، يعتمد النموذج الرياضي للدورة الدموية على قوانين الهيدروديناميكا.

النمذجة الرياضية، كطريقة البحث، لديها عدد من مزايا لا شك فيه. أولا، كطريقة تقديم للانظمة الكمية بلغة الرياضية الدقيقة والاقتصادية. ثانيا، يمكن اختبار الفرضيات التي وضعت على أساس البيانات التجريبية من خلال اختبار نموذج رياضي على أساس هذه الفرضية. وأخيرا، فإن النموذج الرياضي يسمح لنا بالحكم على سلوك هذه الأنظمة في ظل ظروف يصعب إنشاؤها في تجربة أو في عيادة، لدراسة النظام بأكمله أو عمل أي جزء منه.

مسألة- ١.

تحديد عدد مرات الزيادة في عدد البكتيريا لمدة ٩ ساعات، إذا تغير عددهم في غضون ٣ ساعات من ١٠٠ إلى ٢٠٠؟

ثبت بشكل تجريبي أن معدل تكاثر البكتيريا، إذا كان لديهم إمدادات كافية من المواد الغذائية وغيرها من الظروف الخارجية اللازمة (على سبيل المثال، غياب تثبيط البكتيريا من قبل الأنواع الأخرى) يتناسب مع عددها. ليكن x عدد البكتيريا الموجودة في وقت معين، و معدل التغير في عددهم هو: $\frac{dx}{dt}$

وبما أن معدل التكاثر للبكتيريا يتناسب مع عددها، فهناك ثابت تناسب ليكن k وهذا ينتج ان:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نفصل المتغيرات لنجد:

$$\frac{dx}{x} = kdt.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt,$$

$$\ln x = kt + \ln C,$$

$$x = Ce^{kt}.$$

لايجاد قيمة C، نستخدم الشرط الابتدائي: t = 0 عند ،فان x = 100. ومنها نجد ان : C=١٠٠،

وبالتالي فان:

$$x = 100e^{kt}$$

نجد المعامل e^k من الشرط: t = 3, x = 200.:

$$200 = 100e^{3k}, e^k = \sqrt[3]{2}.$$

$$x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

الان ، عندما t=9 فان x=800.

اذن الزيادة في عدد البكتيريا في ٩ ساعات سيزيد بمقدار ٨ مرات.

ويلاحظ أن هذا القانون الذي يتناسب فيه معدل زيادة المادة مع الكمية المتاحة من المادة هو ما يسمى بقانون "النمو الطبيعي" [12]. يتم الحصول من خلال هذا النموذج الرياضي لعملية تغيير

عدد الكائنات الحية الدقيقة في المستعمرة كدالة من الوقت في ظل افتراضات عالية جدا (مع موارد غير محدودة من الغذاء وغياب الصراع بين الأنواع). في الطبيعة، لا يمكن ملاحظة هذا النمو في أي من المستعمرات الموجودة بالفعل. والإجابة على السؤال عن مدى توافق قانون "النمو الطبيعي" مع العملية الحقيقية، يعطي خبرة اضافية. ومن الواضح أنه في بعض مجموعة فرعية سيتم تنسيق البيانات بشكل جيد مع النموذج، والنموذج نفسه يمكن استخدامه للتنبؤ.

في عام ١٨٤٥ حصل فيرهولست – بيرل [12] ، على المعادلة التي تأخذ في الاعتبار الصراع بين الكائنات الحية الدقيقة. ونتيجة للمنافسة داخل الأنواع بالنسبة للأغذية والتوزيع، ونتيجة للأمراض، ينخفض معدل النمو. بشكل عام، مما يؤدي الى تقليل الزيادة والحصول على دالة جديدة من x و Δx، والتي نشير إليها $b(x, \Delta x)$.

إن الانخفاض في عدد الأفراد نتيجة للمنافسة يكبر كلما زاد عدد الاجتماعات بين الأفراد، أي بالتناسب مع المنتج $x.x=x^2$ وبهذه الطريقة نحصل على:

$$b(x, \Delta x) = \delta x^2 \Delta t. \rightarrow \Delta x = \varepsilon x \Delta t - \delta x^2 \Delta t.$$

حيث ε يمثل معدل النمو السكاني و δ يمثل معامل المنافسة بين الانواع، نقسم طرفي المعادلة الاخيرة على Δt وناخذ الغاية للمتغير t لنحصل على :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \delta x^2 .$$

هذه هي معادلة فيرهولست–بيرل وهي ايضاً معادلة برنولي. تحل هذه المعادلة بعد التحويلات الرياضية وبفرض ان : $h = \frac{\varepsilon}{\delta}$, $x(0) = x_0$

لنحصل على الحل العام هو:

$$x(t) = \frac{x_0 h\, e^{\varepsilon.t}}{h - x_0 + x_0 e^{\varepsilon.t}}$$

مسألة -٢:

البحث عن العلاقة بين ارتفاع الشجرة ووقت نموها.

من المعروف أنه حتى في الظروف الأكثر ملاءمة، فان جميع الأشجار، بغض النظر عن تكاثرها، فانها تنمو بسرعة في البداية، ثم يتباطأ نموها، حتى النهاية، فان نموها لا يتوقف تماماً.

من نمو التاج، من جهة، وتدفق الطاقة يزيد بسبب التمثيل الضوئي، ومن ناحية أخرى، الصعوبات تتزايد، على سبيل المثال، نقل المغذيات، وبالتالي يزيد من استهلاك الطاقة لهذه الاحتياجات و في النهاية لم يعد تدفق الطاقة كافيا لتغطية النمو المطلوب وتتوقف الشجرة عن النمو. واستنادا إلى هذه الاعتبارات، يمكن صياغة الافتراضات الأساسية التي يستند إليها تكوين معادلة توازن الطاقة، أي بناء نموذج رياضي.

١- يحتفظ النبات الناضج بالتشابه الهندسي في عملية النمو، أي في النبات الناضج، لا تتغير نسبة الأبعاد الهندسية مع النمو، على سبيل المثال، نسبة الارتفاع إلى القطر، الخ.

٢- الشجرة تتلقى الطاقة الحرة (أو المادة النشطة) فقط من خلال التمثيل الضوئي.

٣- تنفق الطاقة الحرة من التمثيل الضوئي، لبناء الأنسجة الحية (النمو) و ارتفاع النبات عن التربة.

٤- في المتوسط، و على مدى فترات طويلة من الزمن، يتلقى النبات كمية ثابتة من الضوء .

الان لنكون معادلة توازن الطاقة. ليكن x يمثل البعد الخطي للنبات، اي ان ارتفاع النبات هو x، ومساحة السطح من الأوراق هو x^2، سيتم التعبير عن حجم النمو بـ x^3، و x يتغير مع الوقت $x(t)$ ، ليكن $x(0)= 0$. لنحاول التعبير عن جميع الكميات التي تدخل في معادلة توازن الطاقة بالمتغير x.

نجد، أولا، تعبير عن الطاقة الحرة المتولدة E. يتم تشكيل هذه الطاقة بسبب التمثيل الضوئي في الجزء الأخضر من النبات، بالاضافة الى ان اكبر قدر يتولد في أكبر سطح من الجزء الأخضر. وهكذا، يمكننا أن نفترض أن E يتناسب مع x^2:

$$E = \alpha x^2, [10]$$

حيث α هو معامل التناسب، اعتمادا على حجم وشكل الأوراق وعلى كثافة التمثيل الضوئي. لا توجد مصادر أخرى للطاقة بسبب افتراضاتنا.

لنتابع الآن حساب الطاقة. أولا وقبل كل شيء، تنفق الطاقة على احتياجات عملية التمثيل الضوئي. هذا الانفاق يتناسب أيضا مع x^2، ويمكننا كتابته في شكل βx^2، حيث $\beta < \alpha$ هو معامل تناسب معين.[10]

علاوة على ذلك، يتم إنفاق الطاقة لنقل محلول المغذيات إلى جميع أجزاء النبات. ومن الواضح أن هذا الاستهلاك سيكون أكبر، أي بقدرحجم النمو. وبالإضافة إلى ذلك، ترتبط هذه المصروفات مع التغلب على الجاذبية، وبالتالي، سيكون أكبر من على ارتفاع أكبر فمن الضروري رفع العناصر الغذائية. وبالتالي، فإن معدل التدفق هذا يتناسب مع كل من x^3 و x. اي انه يساوي x x^3 γ.

وأخيرا، يتم إنفاق الطاقة لزيادة كتلة النبات. ويتناسب معدل التدفق هذا مع معدل النمو $\frac{dm}{dt}$، حيث :

$$m = \rho x^3 \ , \qquad \rho\text{: متوسط كثافة النبات}, x^3\text{: الحجم})$$

ووفقا لقانون حفظ الطاقة، ينبغي أن يكون إنفاق الطاقة مساويا لتدفقها:

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$$

او

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2 \frac{dx}{dt}.$$

هذه هي نسبة التوازن المطلوبة. تقسيم كلا الجانبين من المعادلة على $3\delta\rho x^2$ ونرمز بالتعويضات الاتية:

$$\frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} = a, \frac{\gamma}{3\delta\rho} = b.$$

لنحصل على المعادلة:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, a > 0, b > 0.$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل ويكون حلها بالشكل الاتي:

$$-\frac{dx}{b(x^2 - \frac{a}{b})} = dt.$$

$$-\int \frac{dx}{b(x^2 - \frac{a}{b})} = \int dt,$$

نلاحظ أن المشتقة $\frac{dx}{dt} > 0$، لانه يمثل نمو شجرة.وبالتالي، $a - bx^2 > 0$، وبالتالي $x^2 < a/b$ ، أي أنه يمكننا استخدام طريقة التكامل المباشر (بالنسبة إلى $|x| < |c|$)، لنحصل على :

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{c} \ln \frac{c + x}{c - x} + C).$$

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t + C.$$

وبأستخدام الشرط الابتدائي : $x(t_0)=0$ *لنجد* $c=-t_0$ *اي ان :*

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x}=t-t_0.$$

اي ان الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1-e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}\ldots\ldots(5)$$

تعطي الصيغة الناتجة (٥) منحنى نمو الشجرة. إذا كانت a و b و t_0 معرفة (تعتمد هذه القيم على أنواع الأشجار)، فإن متوسط نمو شجرة يمكن حسابه كدالة للعمر.

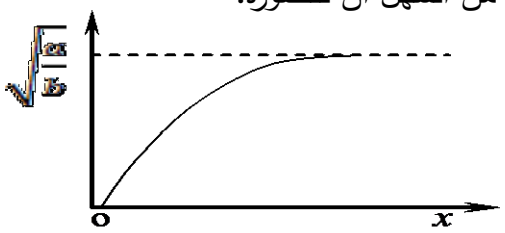
نوع المنحني (٥) ليس من الصعب استعماله. فلو وجدنا المشتقة الثانية لمعادلة النمو:

$$\frac{dx}{dt}=a-bx^2, a>0, b>0,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2bx<0.$$

المنحنى (٥) هو منحنى متزايد محدب،فضلا عن ان:

$$x(t) \to \sqrt{\frac{a}{b}}, \qquad x \to +\infty$$

فان الرسم البياني للمنحنى من السهل أن نتصوره.



2.4 مسائل في الكيمياء [14]:

يتم وصف العديد من عمليات التكنولوجيا الكيميائية بواسطة المعادلات التفاضلية –بدءا من الدراسات الحركية وتنتهي مع العمليات التكنولوجية الكيميائية ويرجع ذلك إلى ان جوهر التفاعلات الكيميائية هو كسر الروابط في المواد الأولية وظهور روابط جديدة في منتجات التفاعل. في هذه الحالة، لا يزال العدد الإجمالي للذرات من كل عنصر قبل وبعد رد فعل ثابت. ويسمى التغير في التركيز من أحد المواد المتفاعلة لكل وحدة زمنية t عند حجم ثابت معدل التفاعل الكيميائي: $v = \frac{\Delta c}{\Delta t}$.

وفي الوقت نفسه، لا يهم أي من المواد المشاركة في التفاعل : ترتبط جميعها بمعادلة التفاعل، وبتغيير تركيز أحد المواد، يمكن للمرء أن يتحكم بالتغييرات لكل المواد المتبقية. من ناحية أخرى، لتنفيذ تفاعل كيميائي بين المادتين A و B، وفقا للصيغة:

$$\sum_{i=1}^{n} Ai \rightarrow \sum_{i=1}^{n} Bi,$$

من الضروري أن تصطدم جزيئاتها (للجسيمات). كلما زاد التصادم، كلما كان التفاعل كان اسرع . وكلما زاد التصادم كلما ارتفع تركيز المواد المتفاعلة. وبالتالي، على أساس مادة تجريبية واسعة النطاق وضع قانون التأثير الكتلي:: يتناسب معدل التفاعلات الكيميائية مع ناتج تركيزات المواد المتفاعلة. ويعبر عن هذا القانون بالمعادلة التالية: $v = k\prod_{i=1}^{n} c_{Ai}$,

حيث C_{A_i} يمثل تركيز المواد A_i حيث $i=1,\ldots,n$ وان k معامل التناسب، ويدعى ثابت معدل التفاعل.

حصلنا على اعتماد معدل التفاعل على التركيز وعلى مشتقاته. هذه الاعتمادية ترتبط بالمعادلات التفاضلية.

في الكيمياء غالبا ما تميز التفاعلات من العدد الاجمالي للجزيئات التي تدخل الجانب الأيسر من المعادلة الكيميائية، وهو ما يسمى ترتيب التفاعل الكيميائي.

وهكذا، فان $A \rightarrow B$ هو تفاعل اولي، و $aA + B \rightarrow C + D$ هو تفاعل من الرتبة الثانية.

مسألة– ١:

تتحول المادة A الى المادة B. المطلوب تحديد الكمية الاولية للمادة A والوقت ليبقى نصف هذه المادة، إذا بعد ١ ساعة من بدء التفاعل بقي ٤٤,٨ غرام من المادة A ، وبعد ٣ ساعات ١١,٢ غرام.

هنا لدينا تفاعل من الرتبة الأولى. نرمز إلى الكمية الأولية من المادة A بالرمز a، , والى كمية المادة التي تفاعلت في الوقت t من بداية التفاعل بالرمز x، فتكون المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى وقابلة للفصل وحلها العام هو:

$$\frac{dx}{(a-x)} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)} = \int kdt \ \rightarrow -\ln(a-x) + \ln C = kt$$

$$\ln \frac{C}{a-x} = kt$$

من الشروط الابتدائية الواضحة هنا : $x(0)=0$ نجد $C=a$ وهذا يعني:

$$\begin{aligned} &\ln \frac{a}{a-x} = kt, \\ &\frac{a}{a-x} = e^{kt}, \\ &a-x = ae^{-kt}, \\ &x = a(1-e^{-kt}). \end{aligned} \qquad \text{.....(1)}$$

بأستخدام الشروط الاضافية:

$$t = 1 \rightarrow x = a - 44.8 \rightarrow \mathrm{a} - 44{,}8 = \mathrm{a}(1 - \mathrm{e}^{-k})$$

$$t = 3 \rightarrow x = a - 11.2 \rightarrow \mathrm{a} - 11.2 = \mathrm{a}(1 - \mathrm{e}^{-k})$$

وبتبسيط هذه المعادلات وحلها نجد:

$$\begin{cases} 44{,}8 = ae^{-k}, \\ 11{,}2 = ae^{-3k}. \end{cases}$$

$$4 = \frac{ae^{-k}}{ae^{-3k}},$$

$$4 = e^{2k},$$

$$e^{-k} = \frac{1}{2},$$

$$a = 89{,}6.$$

لنجد الوقت اللازم لاستهلاك نصف هذه المادة:

$$\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t}),$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-t},$$

$$t = 1.$$

من هذا نجد ان الكمية الاولية للمادة A هو ٨٦,٩ غرام، والوقت اللازم لصرف نصف هذه المادة هو ١ ساعة.

ان النتيجة التي تم الحصول عليها ترتبط ارتباطا وثيقا بنظرية الاضمحلال الإشعاعي *[14]* ، على سبيل المثال، غالبا ما يكون الاضمحلال لايعتمد على الثابت k ، ولكن من خلال وقت الاضمحلال من نصف الذرات المتاحة في فترة نصف الوقت. المعادلة (١) لا تتناقض مع قانون الاضمحلال الإشعاعي، الذي اكتشف في عام ١٩٠٥ من قبل رذرفورد ، وفقا لعدد من الذرات غير الذائبة تنخفض أضعافا مضاعفة مع مرور الوقت في سياق الاضمحلال الإشعاعي بشكل طبيعي.

مسألة-٢:

في تفاعل الصابون من إستر أسيتيك إيثيل مع هيدروكسيد الصوديوم، التركيزات الاولية لهذه المواد هي $a=0.01$, $b=0.002$ على التوالي. بعد ٢٣ دقيقة، انخفض تركيز خلات الإثيل بنسبة ١٠٪. كم من الوقت لتنخفض بنسبة ١٥٪؟

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \rightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

لدينا معادلة من الرتبة الثانية. ليكن a يرمز الى الكمية الاولية من أسيتات الإيثيل، و b يرمز للكمية الاولية من هيدروكسيد الصوديوم، و x كمية لواحد وللمواد الأخرى المتفاعلة في الوقت t من بداية التفاعل ($x<a$, $x<b$) [19]، لذلك سوف تكون المعادلة التفاضلية لها بالشكل التالي:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى قابلة للفصل و الحل العام لها هو:

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt,$$
$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k dt,$$
$$\frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{x-b} - \int \frac{dx}{x-a}\right) = \int k dt,$$
$$\frac{1}{b-a}\left(\ln|x-b| - \ln|x-a|\right) = kt + C,$$
$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} = kt + C.$$

من الشرط الابتدائي: $x(0)=0$ نجد:

$$C = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a},$$

وبهذا بعد التعويض عن C نجد:

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} = kt + \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a},$$
$$kt = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

يمكن تحديد قيمة الثابت k من خلال الشروط الاضافية:

$$t = 23\ , a = 0.01\ , b = 0.002\ , x = 0.01 * 0.1 = 0.001$$

لذلك يمكن ان نجد:

$$23k = \frac{1}{0{,}002-0{,}01}\ln\frac{0{,}01(0{,}002-0{,}001)}{0{,}002(0{,}01-0{,}001)},$$
$$k = \frac{125}{23}\ln 1{,}8.$$

الان يمكن ان نجد الوقت المطلوب:

$$\frac{125\ln 1{,}8}{23}t = \frac{1}{0{,}002-0{,}01}\ln\frac{0{,}01(0{,}002-0{,}0015)}{0{,}002(0{,}01-0{,}0015)},$$
$$t = 23\frac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}8} \approx 47{,}9(\text{min}).$$

اي يمكن ان نستنتج ان تركيز خلات الاثيل سوف تنخفض بنسبة ١٥٪ في ٤٧، ٩ دقائق.

المصادر

[1] Andrew, F., Modeling the environment, island press, united states, 2009.

[2] Benjamin C., Electricity and magnetism, Fullerton, California , 2008.

[3] Chasnov, J.R., introduction to differential equations , Hong Kong, 2017.

[4] David T. , Statistical Physics, Centre for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 2012.

[5] Edward, A., Introduction to mathematical modeling , Dover publications, New York, 2000.

[6] Jeffrey R. , Introduction to Differential Equations, The Hong Kong University of Science and Technology , Hong Kong ,2016.

[7] Michael, A., An introduction to mathematical modeling, Heaven Books, New York, 2001.

[8] Miersemenn, E., Partial differential equations , New York, 2012.

[9] Mikhailov, V.P., Partial differential equations , Moscow, Mir publishers, 1978.

[10] Murray, J.D., Mathematical Biology,springer, New York,2002.

[11] Robert G. , Introductory Physics, Duke University Physics Department, Durham,

2013.

[12] Sarah, P., A Biologist's Guide to mathematical modeling in Ecology and evolution, Princeton university press, New Jersey, 2007.

[13] Teschi, G., Ordinary differential equations and dynamical systems, Austria, 2012.

[14] Tracy Poulsen, Introduction to Chemistry, Creatspace comp., USA, 2010.

[15] Vouhkonen, M., Mathematical modeling, springer, New York, 2016.

[16] Wen S. , Introduction to Ordinary and Partial Differential Equations,New-York ,

Univ. California, 2015.

[17] Wiley, J., Fundamentals of fluid mechanies, 4th edition, 2001.

[18] د. محمد هاشم صديق، ميكانيكا الموائع، جامعة الخرطوم، ٢٠١٠.

[19] موريسون، الكيمياء العضوية، ترجمة أ.د. صالح القادري، المركز العربي للتعريب، دمشق، المجلد السادس، ٢٠٠٠.

[20] د. وائل غالب محمد، أسس الكيمياء العضوية، دار الكتب الليبية، ليبيا، ٢٠٠٨.