وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة القادسية

كلية التربية

قسم الرياضيات

حول معادلة الموجة في الأبعاد الثلاثية

بحث تقدمت به الطالبة

فرح علي جبوري

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات

بأشراف

م.د.ندى زهير

بسم الله الرحمن الرحيم

{مَا عِنْدَكُمْ يَنْفَدُ وَمَا عِنْدَ اللَّهِ بَاقٍ وَلَنَجْزِيَنَّ الَّذِينَ صَبَرُوا أَجْرَهُمْ بِأَحْسَنِ مَا كَانُوا يَعْمَلُونَ }

صدق الله العلي العظيم

النحل :آيه ٩٦

"كن عالماً... فأن لم تستطع فكن متعلماً

فأن لم تستطع فأحب العلماء

فأن لم تستطع فلا تبغضهم"

بعد رحلة عمل وجهد تكلل بإنجاز هذا البحث نحمد الله عز وجل على نعمته التي منَّ بها علينا فهو الولي القدير كما لا يسعنا الا ان نخص باسمي عبارات الشكر والتقدير لدكتوره ندى زهير.

الى الذين كانوا عوناً لنا في بحثنا هذا ونوراً يضيء الظلمة التي كانت تقف أحياناً في طريقنا الى من زرعوا التفاؤل في دربنا وقدموا لنا المساعدات والتسهيلات والمعلومات فلهم منا كل الشكر والعرفان.

الـمـلـخص

هدفنا في هذا البحث استخدام تحويلات لابلاس في حل معادلة الموجة في حالة وجود قوى خارجية وغير خاضعة لشروط ابتدائية وحدودية.

المقدمة

تحويل لابلاس عملية تجري على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال الى آخر. وعادة يكون التحويل من مجال الزمن الى مجال التردد وهو شبيه بتحويل فورير الا انه تم تطويرهما بشكل مستقل.

وتحويل لابلاس مفيد في تحليل النظم الخطية بخلاف تحويل فورير الذي يستخدم عادة في تحليل الاشارات. كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لانه يحولها الى معادلات جبرية وسمي التحويل بهذا الاسم نسبة الى العالم الفرنسي لابلاس. أنشأ معادلة لابلاس وابتكر تحويل لابلاس والذي يستخدم الان في كثير من مجالات الرياضيات والفيزياء والهندسة.

معامل لابلاس التفاضلي والذي يستخدم بشكل أوسع في الرياضيات التطبيقية سمي ايضاً كذلك نسبة اليه. يصنف لابلاس كأحد اعظم العلماء على الأطلاق يطلق عليه احياناً نيوتن فرنسا وذلك لتملكه لحس رياضي عظيم لم يجاريه فيه احد من معاصرية.

ومن أشهر العلماء العالم لابلاس بيار سيمون (١٧٤٩-١٨٢٧م) ولد لابلاس في بلدة بومون انوج ، درس الرياضيات في المدرسة الحربية في لدته ثم راح يدرس دخل بعد ذلك الأكاديمية للعلوم عام ١٧٨٥. وله اعمال عديده من اهمها:-

أكتشف معادلة لابلاس وقد جرى تحقيقها في عدد كبير من الكميات الفيزيائية حيث اكتشف قانون لابلاس في الكهرومغناطيسية (ان القوة التي تضغط على قطعة مستقيمة من دائرة خيطية موضوعة في حقل مغناطيسي)، وكذلك من اعماله ساهم خلال الثورة الفرنسية في تنظيم مدرسة البوليتكنيك ودار المعلمين والمعلمات.

تسلم وزارة الداخلية في عهد بونابرت لمدة اسابيع دخل مجلس الشيوخ عام ١٧٩٩م واصبح عضواً في الأكاديمية العلمية الفرنسية.

تحويل لابلاس (**Laplace Transform [L.T]**) يستخدم لحل المعادلات الجزئية الخطية مع ثابت حقيقي بمعاملات مع شروط ابتدائية وحدودية بواسطة اتخاذ (**L.T**) من على حد سواء من المعادلات الجزئية الخطية وبواسطة استبدال (**L.T**) الحصول على المشتقات الجزئية وكتابة الشروط الابتدائية والحدودية.

بعد هذا نحصل على معادلات اعتيادية خطية من رتبة اولى واخذ معكوس (**L.T**) من كلا الجانبين بعد كتابة (**L.T**) الحصول على الحل العام لذا نحن نحصل على الحل العام من المعادلات الجزئية الخطية . في هذه الورقة نحن نحل معادلة الموجة مع القوى الخارجية في واحد واثنان وثلاثة ابعاد بدون اي شروط ابتدائية وحدودية بواسطة استخدام عرض تقنية لابلاس.

الفصل الاول

تعاريف اساسية

مقدمة:

سأتناول في هذا الفصل مجموعة من التعاريف التي منها المعادلة الجزئية ومعادلة الموجة مع القوى الخارجية وتحويل لابلاس ومعكوس تحويل لابلاس والشروط الأبتدائية الحدودية كتابة تحويلات لابلاس لبعض الدوال.

2.1 تعريف المعادلة الجزئية :

المعادلة الجزئية هي المعادلة التي تحتوي مشتقات جزئية في لنقيض على المعادلة الأعتيادية حيث الدالة غير معرفة وتحتوي فقط على متغير واحد في المعادلة الجزئية على الدالة الغير معرفة تعتمد على عدة متغيرات.

2.2.1 معادلة الموجة:

معادلة الموجة مع القوى الخارجية هو معادلة غير متجانسة مع معاملات ثابتة والشكل العام هو

معادلة المستوى في البعد الواحد

$$u_t = c^2 u_{xx} + F(x,t) \qquad (1.1)$$

معادلة الأسطوانة في ثنائي الأبعاد

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + F(x,y,t) \qquad (1.2)$$

معادلة كروية في ثلاثي الابعاد

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + F(x,y,z,t) \qquad (1.3)$$

عندما $u(x,t), u(x,y,t), u(x,y,z,t)$ يمثل النزوح

و $F(x,y,z,t), F(x,y,t), F(x,t)$ يمثل قوى خارجية

و c^2 ثابت

حيث u يمثل المتغير المعتمد، x, y, z, t تمثل المتغيرات المستقلة.

3.2.1 تحويل لابلاس

يحصل الى (L.T) $L(u(x,t)), L(u(x,y,t)), L(u(x,y,z,t))$ من الدوال $u(x,t), u(x,y,t), u(x,y,z,t)$

بواسطة e^{-st} وندمج المنتج

$$u(x,t), e^{-st}u(x,y,t), e^{-st}u(x,y,z,t)e^{-st}$$

مع اختيار (t) بين $t = 0, t = \infty$ i.e

$$L\big(u(x,t)\big) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt \qquad (1.4)$$

$$L(u(x,y,t)) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,y,t)dt \qquad (1.5)$$

$$L(u(x,y,z,t)) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,y,z,t)dt \qquad (1.6)$$

$$e^{-st}u(x,t), e^{-st}u(x,y,t), e^{-st}u(x,y,z,t)$$

متقاربات الصفر عندما $t \to \infty$

$$L\big(u(x,t)\big) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt \ = v(x,s) \qquad (1.7)$$

$$L\big(u(x,y,z,t)\big) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,y,z,t)dt = v(x,y,s) \quad (1.8)$$

$$L\big(u(x,y,z,t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,y,z,t)dt = v(x,y,z,s) \quad (1.9)$$

4.2.1 معكوس تحويل لابلاس :

تعريف :- لتكن $v(x,s), v(x,y,s), v(x,y,z,s)$ تمثل تحويل لابلاس (L.T) من الدوال $u(x,y,z,t), u(x,t), u(x,y,z,t)$ على التوالي فأن $u(x,y,z,t), u(x,t), u(x,y,z,t)$ يدعى معكوس تحويل لابلاس (L.T) وتعرف بالشكل التالي :

$$u(x,t) = L^{-1}\big(v(x,s)\big)$$

$$u(x,y,z,t) = L^{-1}\big(v(x,y,s)\big)$$

$$u(x,y,z,t) = L^{-1}\big(v(x,y,z,s)\big)$$

عندما نعرف $(L.T)$ تحتوي دالة كسر من (s) فأن معكوس $(L.T)$ يمكن الحصول عليه مباشر او كتابة دورتها نزية الكسور .

5.2.1 الشروط الابتدائية والحدودية

عند دراستنا في المعادلات التفاضلية الاعتيادية تصادفنا في بعض الأحيان معادلات تفاضلية مصحوبة بشروط معينة والمطلوب هو ايجاد الحل للمعادلة التي تحقق تلك الشروط فاذا كانت هذه الشروط مقيدة بقيمة واحدة للمتغير المستقل فان تلك المعادلة مع الشروط تسمى بمسالة القيم الابتدائية فاذا كانت الشروط تسمى بمسالة القيم الابتدائية فاذا كانت الشروط مقيدة بأكثر من قيمة واحدة للمتغير المستقل فان تلك المعادلة مع الشروط تسمى قيمة حدودية .

مثال1:

$$1- \quad \acute{\acute{y}} - 3\acute{y} + 5y = 0 \qquad (1.10)$$
$$y(0) = 2 \quad , \quad \acute{y}(0) = 1$$

مسالة قيمة ابتدائية لان قيمة $x = 0$ لجميع الشروط.

مثال2:-

$$2- \quad \acute{\acute{y}} + 9\acute{y} + 10y = 0 \qquad (1.11)$$
$$y(0) = 1 \quad , \quad \acute{y}(1) = 5$$

مسألة قيم حدودية لان قيمة x مختلفة لجميع الشروط.

3.1 نظرية

لتكن $u(x,t)$ دالة مستمرة بشرط $t > 0$ فأن

$$1- \quad L(u_t) = sv(x,s) - u(x,0)$$
$$2- \quad L(u_{tt}) = s^2 v(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$
$$3- \quad L(u_t) = \frac{d}{dx} v(x,s)$$
$$4- \quad L(u_{xx}) = \frac{d^2 y}{dx^2} v(x,s)$$

1) $L(u_t) = \alpha v(x,\alpha) - u(x,0)$

Sol. $L(u_t) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_t \, dt$

$$u = e^{-\alpha t}, dv = u_t dt$$

$$du = -\alpha e^{-\alpha t} \quad , v = u(x,t)$$

$$L(u_t) = e^{-\alpha t} \, u(x,t) \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty u(x,t) e^{-\alpha t} dt$$

$$= -u(x,0) + \alpha v(x,\alpha)$$

$$L(u_t) = \alpha v - u(x,0)$$

2) $L[u_{tt}] = \alpha^2 v(x,\alpha) - \alpha u(x,0) - u_t(x,0)$

Sol. $L[u_{tt}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \, u_{tt} dt$

$$u = e^{-\alpha t} \ , dv = u_{tt} dt$$

$$du = -\alpha e^{-\alpha t} dt \ , v = u_t(x,t)$$

$$L[u_{tt}] = e^{-\alpha t} u_t(x,t) \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_t(x,t) dt$$

$$= e^{-\alpha t} u_t(x,t) \Big|_0^\infty + \alpha L[u_t]$$

$$= -u_t(x,0) + \alpha L[u_t]$$

$$= -u_t(x,0) + \alpha[\alpha v(x,0) - u(x,0)]$$

$$L[u_{tt}] = \alpha^2 v(x,0) - \alpha u(x,0) - u_t(x,0)$$

3) $L[u_x] = \frac{d}{dx} v(x,\alpha)$

Sol. $L[u_x] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \, u_x(x,t) dt$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dx} u(x,t)dt$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_x(x,t)dt$$

$$= \frac{d}{dx} v(x,\alpha) \ , \quad \alpha > 0$$

4) $L[u_{xx}] = \frac{d^2}{dx^2} v(x,\alpha)$

$$L[u_{xx}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_{xx}(x,t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d^2}{dx^2} u(x,t)dt$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(x,t)dt$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} v(x,\alpha), \qquad \alpha > 0$$

نتيجة4.1:

اذا كانت $u(x,y,z,t), u(x,y,t)$ دوال مستمرة بشرط $t > 0$ فأن

1−$L(u_t(x,y,t) = sv(x,y,s) - u(x,y,0)$

$$L(u_t(x,y,z,t) = sv(x,y,z,s) - u(x,y,z,0)$$

2−$L(u_{tt}(x,y,t) = s^2 v(x,y,s) - su(x,y,0) - u_t(x,y,0)$

$L(u_{tt}(x,y,z,t) = s^2 v(x,y,z,s) - su(x,y,z,0) - u_t(x,y,z,0)$

3−$L(u_x(x,y,t) = \frac{d}{dx} v(x,y,s)$

$$L(u_x(x,y,z,t) = \frac{d}{dx} v(x,y,z,s)$$

$$4-L(u_{xx}(x,y,t) = \frac{d^2}{dx^2} v(x,y,s)$$

$$L(u_{xx}(x,y,z,t) = \frac{d^2}{dx^2} v(x,y,z,s)$$

5.1 تحويلات لابلاس لبعض الدوال

1) L(0)=0

2) L(1)=1

3) $L(k) = \frac{k}{s}$

4) $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$

5) $L(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+a^2}$

6) $L(cos) = \frac{s}{s^2+a^2}$

7) $L(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2-a^2}$

8) $L(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2-a^2}$

9) $L(s^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

10) $L(\sqrt{s}) = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

11) $L\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

الفصل الثاني

حل معادلة الموجة بالأبعاد الثلاثية

1.1 مقدمة

تناولنا في هذا الفصل حل معادلة الموجة بوجود شروط ابتدائية وحدودية مع اعطاء مثال يوضح ذلك. وك١لك توضيح حل معادلة الموجة بدون شرط ابتدائية وحدودية مع عرض الامثلة توح ذلك.

2.2 حل معادلة الموجة بوجود شروط ابتدائية وحدودية يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:-

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + F(x,t)$$

وهذه المعادلة غير متجانسة فلا يمكن حلها بطريقة فهل المتغيرات بشكل مباشر وانما نفرض الحل بالشكل الاتي:-

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

حيث $w(x,t)$ *يمثل الجزء المتجانس*

$v(x,t)$ *يمثل حل الجزء الغير المتجانس.*

مثال:- *وتر متجانس طوله* L *مشدود بين نقطتين ثابتين* $(0,0),(L,0)$ *يتحرك الى الاعلى والاسفل بفعل قوة الشد فقط . نفرض ان الازاحة الابتدائية تساوي* $f(x)$ *والسرعة الابتدائية تساوي* $g(x)$ *المطلوب ايجاد الازاحة عند اي زمن*

Sol. $u(x,t) \quad , \ 0 < x < L \quad , \ t > 0$

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = 0 \quad , u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(x,t) = z(x)w(x)$$

$$u_{xx} = \grave{\grave{z}}w \qquad , u_{tt} = z\grave{\grave{w}}$$

$$\frac{\grave{\grave{w}}}{\alpha^2 w} = \frac{\grave{\grave{z}}}{z} = -p^2$$

$$z\grave{\grave{w}} = \alpha^2 z$$

$$\frac{\grave{\grave{w}}}{\alpha^2 w} = -p^2 \Longrightarrow \grave{\grave{w}} + p^2\alpha^2 w = 0$$

$$\frac{\grave{\grave{z}}}{z} = -p^2 \Longrightarrow \grave{\grave{z}} + p^2 z = 0$$

معادلتين تفاضليتين اعتياديتين بتحويلهما الى معادلة مميزة

$$w(t) = B_1 cos\alpha pt + B_2 sin\alpha pt$$

$$z(x) = A_1 cospx + A_2 sinpx$$

بحيث A_1, A_2, B_1, B_2 ثوابت اختيارية.

$$\mathrm{u(x,t) = z(x)w}(t)$$

$$= (B_1 cos\alpha pt + B_2 sin\alpha pt)(A_1 cospx + A_2 sinpx)$$

$$u(x,0) = 0$$

$$(B_1 cos\alpha pt + B_2 sin\alpha pt)(A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0))$$

$$u(0,t) = A_1(B_1 cos\alpha pt + B_2 sin\alpha pt) = 0, \quad A_1 = 0$$

$$u(x,t) = (B_1 cos\alpha pt + B_2 sin\alpha pt)B_2 sin\alpha pt$$

$$= (A\, cos\alpha pt + B sin\alpha pt) sinpx$$

$$u(L,t) = 0$$

$$u(L,t) = (Aos\alpha pt + B sin\alpha pt) sinpt = 0$$

$$sinpt = 0 \Longrightarrow sinpL = sinn\pi, n = 0,1,2, \ldots$$

$$p = \frac{n\pi}{L}$$

$$u(x,t) = (A\ cos\alpha pt + Bsin\alpha pt)sinpx$$

$$= \left(A\ cos\frac{n\pi}{L}\alpha t + Bsin\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u_n(x,t) = \left(A_n cos\frac{n\pi}{L}\alpha t + B_n sin\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{n\pi}{L}\alpha t + B_n sin\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,0) = f(x) = 0$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(0) + B_n\sin(0)t)sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n sin\frac{n\pi}{L}x$$

الازاحة وهذه متسلسلة فورير في صورة جيب الدالة $f(x)$ في الفترة $0 < x < L$

$$g(x) = u_t(x,0)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-n\pi\alpha}{L}A_n sin\frac{n\pi}{L}\alpha t + \frac{n\pi\alpha}{L}B_n cos\frac{n\pi}{L}\alpha t)sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi\alpha}{L}B_n sin\frac{n\pi}{L}x$$

وهذه متسلسلة فورير في صورة جيب الدالة $g(x)$ في الفترة $0 < x < L$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\alpha$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin\frac{n\pi}{L} x dx$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) sin\frac{n\pi}{L} x dx$$

3.2 حل معادلة الموجة بدون شروط ابتدائية وحدودية:

الان القاعدة الرئيسية لحل معادلة الموجة بوجود قوى خارجية في الابعاد الاحادية ولثنائية والثلاثية بدون استخدام اي الشروط الابتدائية والحدودية بواسطة (L.T).

معادلة الموجة مع وجود القوى الصيغة العامة هي :-

(4) في الابعاد الاحادية $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t)$

(5) في الابعاد الثنائية $u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + F(x,y,t)$

(6) في الابعاد الثلاثية $u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + F(x,y,z,t)$

$$v(x,s) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(s)}{s^2 K(s)} \quad (7)$$

$$v(x,s) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(x,y,s)}{s^2 K(s)} \quad (8)$$

$$v(x,y,z,s) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(x,y,z,s)}{s^2 K(s)} \quad (9)$$

$$s^2K(s) = F(s)$$

$$L\big(u(x,t)\big) = v(x,s)$$

$$L\big(u(x,y,t)\big) = v(x,y,s)$$

$$L\big(u(x,y,z,t)\big) = v(x,y,z,s)$$

فأن المعادلات ٧،٨،٩

$$L\big(u(x,t)\big) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(x,y,s)}{F(s)}$$

$$L\big(u(x,y,t)\big) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(x,y,s)}{F(s)}$$

$$L\big(u(x,y,z,t)\big) = \frac{D_1(s)}{s^2} + \frac{D_2(x,y,z,s)}{F(s)}$$

نأخذ L^{-1} للطرفين من حل المعادلات فأن نحصل على

$$u(x,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D_2(x,s)}{F(s)}\right) \qquad (10)$$

$$u(x,y,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D_2(x,y,s)}{F(s)}\right) \qquad (11)$$

$$u(x,y,z,t) = L^{-1}\left(\frac{D_1(s)}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D_2(x,y,z,s)}{F(s)}\right) \qquad (12)$$

بما إن D_1 في ١٠،١١،١٢ أصغر درجة من (s^2)

$$D_1 = A_1 + A_2 t \quad , \quad D_2 = H_1(x)H_2(s)$$

$$D_2 = H_1(x,y)H_2(s)$$

$$D_1 = H_1(x,y)H_2(s)$$

$$D_2 = H_1(x,y,z)H_2(s)$$

فأن المعادلة ١٠،١١،١٢

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x)L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F(s)}\right)$$

$$u(x,y,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x,y)L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F(s)}\right)$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x,y,z)L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F(s)}\right)$$

فأن $H_2(s)$ متعددة حدود من (s) ودرجة اصغر من درجة $F(s)$ فنكمل الحل ونحصل على

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x)[B_1 y_1(t) + B_2 y_2(t) + \cdots + B_n y_n(t)] \qquad (13)$$

$$u(x,y,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x,y)[B_1 y_1(t) + B_2 y_2(t) + \cdots + B_n y_n(t)] \qquad (14)$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x,y,z)[B_1 y_1(t) + B_2 y_2(t) + \cdots + B_n y_n(t)] \qquad (15)$$

عندما $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots B_n$ ثوابت $y_1, y_2, \dots, y_n$ دوال بدلالة t تحتوي $F(s)$ الاعداد من الثوابت $B_1, B_2 \dots, B_n$ والاعداد من الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ تساوي الدرجة $F(s)$ نفترض من (٤) .

4.2 أمثلة :-

١- جد حل معادلة الموجة

$$u_{tt} = u_{xx} + xtcos(t)$$

Sol.

$$L(xtcost) = xL(tcost) = \frac{xs}{(s^2+1)^2}$$

$$k(s) = (s^2+1)^2$$

$$F(s) = s^2(s^2+1)^2$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x) L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{F(s)}\right)$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + xL^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{s^2(s^2+1)^2}\right)$$

$$= A_1 + A_2 t + x[L^{-1}\left(\frac{B}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{C}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{Ds+t}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{Fs+G}{(s^2+1)^2}\right)]$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + Bx + Cxt + Dxcost + Exsint + Fxtcost + Gxtsint$$

$$u_{tt} = -Dxcost - Exsint - Fxtcost - 2Fxsint - Gxtsint + 2Gxcost$$

$$u_{xx} = 0$$

$$-Dxcost - Exsint - Fxtcost - 2Fxsint - Gxtsint + 2Gxcost = xtcost$$

$$-D + 2G = 0 \qquad , -E - 2F = 0, \qquad -F = 1, \quad -G = 0$$

$$E = 2 \qquad , D = 0, \quad G = 0\,, \quad F = -1$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + Bx + Cxt + 2xsint - xtcost$$

A_1, A_2, B, C ثوابت اختيارية

مثال 2:-

$$= -u_{xx} + e^{-x}$$

Sol. $L\left(\frac{e^{-x}}{s}\right)$ فأن $k(s) = s$

$$F(s) = s^2.s$$

$$u(x,y,t) = A_1 + A_2 t + H_1(x) L^{-1}(\frac{H_2(s)}{F(s)})$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + e^{-x} L^{-1}(\frac{H_2(s)}{s^2.s})$$

$$= A_1 + A_2 t + e^{-x}[L^{-1}\left(\frac{B}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{C}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D}{s^3}\right)]$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + Be^{-x} + Ce^{-x}t + \frac{D}{2}e^{-x}t^2$$

$$u_{tt} = De^{-x} \quad , u_{xx} = e^{-x} + Ce^{-x}t + \frac{D}{2}e^{-x}t^2$$

نعوض عن u_{tt} ,u_{xx} في معادلة

$$De^{-x} + 2Be^{-x} + 2\,Ce^{-x}t + De^{-x}t^2 = e^{-x}$$

$$D = 0 \quad , B = \frac{1}{2} \quad , C = 0 \quad , -\frac{1}{2}e^{-x} = 0$$

$$u(x,t) = A_1 + A_2 t + \frac{1}{2}e^{-x}$$

عندما A_2 ,A_1 ثوابت

مثال3:- جد حل معادلة الموجة

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + xy^2e^{-2t}$$

Sol. $L(xy^2e^{-2t}) = xy^2L(e^{-2t}) = \frac{xy^2}{s+2}$

$$k(s) = s + 2, \qquad F(s) = s^2(s + 2)$$

$$u(x, y, z, t) = A_1 + A_2t + H_1(x, y)L^{-1}(\frac{H_2(s)}{F(s)})$$

$$u(x, y, t) = A_1 + A_2t + xy^2L^{-1}\left(\frac{H_2(s)}{s^2(s + 2)}\right)$$

$$= A_1 + A_2t + xy^2[L^{-1}\left(\frac{B}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{C}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D}{s + 2}\right)]$$

$$u(x, t) = A_1 + A_2t + Bxy^2t + Cxty^2 + Dxy^2e^{-2t}$$

$$u_{xx} = 0 \quad , \qquad u_{tt} = 4Dxy^2e^{-2t} \ , u_{yy} = 2Bx + 2Cxt + 2Dxe^{-2t}$$

نعوض عن u_{yy} , u_{tt} , u_{xx} في المعادلة

$$4Dxy^2e^{-2t} - 2Bx - 2Cxt - 2Dxe^{-2t} = xy^2e^{-2t}$$

$$4D = 1 \ , -2B = 0 \ , \qquad -2C = 0 \ , -2Dxe^{-2t} = 0$$

$$D = \frac{1}{4} \quad , \qquad C = 0 \quad , B = 0, \quad -\frac{1}{2}x\, e^{-2t} = 0$$

$$u(x, t) = A_1 + A_2t + \frac{1}{4}xy^2e^{-2t}$$

عندما A_1, A_2 ثوابت اختيارية.

مثال *4*:- **جد حل معادلة الموجة**

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + xyz^2t$$

SOL.

$$L(xyz^2t) = xyz^2 \quad , \quad L(t) = \frac{xyz^2}{s^2} \quad , K(s) = s^2$$

$$F(s) = s^2.s^2 = s^4$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2t + H_1(x,y,z)L^{-1}(\frac{H_2(s)}{F(s)})$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2t + xyz^2L^{-1}(\frac{D_2(s)}{s^4})$$

$$= A_1 + A_2t + xyz^2[L^{-1}\left(\frac{B}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{C}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{D}{s^3}\right) + L^{-1}\left(\frac{E}{s^4}\right)]$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2t + B\,xyz^2 + Cxyz^2t + \frac{D}{2}\,xyz^2t^2 + \frac{E}{3}xyz^2t^3$$

$$u_{tt} = Dxyz^2 + 2Exyz^2t \quad , \quad u_{zz} = 2Bxy + 2Cxyt + Dxyt^2 + \frac{2}{3}Exyt^3$$

$$u_{yy} = 0 \quad , \quad u_{xx} = 0$$

نعوض عن $u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}$ في المعادلة

$$Dxyz^2 + 2Exyz^2t - 2\mathrm{Bxy} - 2\mathrm{Cxyt} - \mathrm{Dxyt}^2 - \frac{2}{3}\,Exyt^3 = xyz^2t$$

$$E = \frac{1}{2} \quad , \quad D = 0 \quad , -2B = 0 \quad , -2C = 0$$

$$u(x,y,z,t) = A_1 + A_2t + \frac{1}{6}\,xyz^2t^3$$

عندما A_1, A_2 ثوابت اختيارية .

المصادر :-

1- A.D.Polyanin, H and book of "Linear partial Differntial Equations for Engineers and scientits" chapman and Hall/CRC press , Boca Raton, 2002.

2- Georgef. Carrler. "Partial Differential Equations" theory and Techniqll" ,1976.

3- I.A.MALLOKI, "Thesis of the separation Technique for nonlinear partial Differential equation : General Results and it's connection with other methods", university of keel, Aprial, 1987.

4- Stanley J. Farlow, "Partial Differntial Equations for scientists and Engineers", New york, 1989.

٥-طالب ناهي الخفاجي، عبد السلام عبد الله، "الميكانيك لطلبة العلوم الهندسة"، طبع بمطابع دار الكتب للطباعة والنشر.