جامعة القادسية

كليــة التربيـــة

قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الشبكة العددية

بحث مقدم من قبل الطالب

سجاد عبد الحر كريم

الى مجلس قسم الرياضيات/كلية التربية/جامعة القادسية كجزء من متطلبات نيل شهادة البكلوريوس في علوم الرياضيات.

بأشراف

د. ميثاق حمزة كعيم

٢٠١٧-٢٠١٨

المحتويات

الملخص

في هذا البحث درسنا حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام الطرق العددية . تناول البحث دراسة حل المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع الماكفئ و الناقصي و الزائدي ، وتم استخدام طريقة الشبكة للعقد العددية و التي تمثل حالة من حالات الفروق المحددة . حيث ميزنا في البحث نوعين من الحل وهما الحل الداخلي و الحل الحدودي حيث الحل الداخلي يعتمد على العقد الداخلية للشبكة اما الحل الحدودي فيعتمد على العقد الحدودية للشبكة بالاضافة الى ايجاد الحل التحليلي للمعادلات لمقارنة النتائج ، كما تطرقنا الى ايجاد حل مسألة لابلاس و مسألة بواسون ومسألة ديريشيلي الحدودية لاهمية هذه المعادلات في الجانب التطبيقي تم استخدام برنامج ماتلاب لايجاد قيم الجداول لقيم الفروقات الحدودية. قمنا باشتقاق صيغة جديدة تعالج مسألة حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحتوي على ثلاث متغيرات مستقلة.

الاية

بسم الله الرحمن الرحيم

((أَمَّنْ هو قانتٌ آناءَ اللَّيلِ ساجداً وقائماً يَحذَرُ الآخرةَ ويَرجو

رحمةَ ربِّهِ قلْ هل يستوي الَّذين يعلمونَ والَّذين لا يعلمونَ

إنَّما يَتَذكَّرُ أولوا الألباب)) المزمر-اية ٩

صدق الله العلي العظيم

الاهداء

الفصل الاول

الفصل الثاني

المصادر

University of AL-Qadisiyah

Education College

Department of Mathematics

Solve partial differential equations by using numerical Net method

A paper

Submitted to the council of mathematic dept.-College of education University of Al- Qadisiyah As a Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Of Bachelor of Science in Mathematics

By

Sajad Abdul Haar Kareem

Supervised By

Dr. Methaq Hamza Geem

Abstract:

In this paper we studied the solution of partial differential equations using numerical methods. The paper includes study of the solving partial differential equations of the type of parabolic, elliptic and hyperbolic, and the method of the net was used for the numerical nods, which represents a case of finite differences. We have two types of solution which are the internal solution and boundary solution. The internal solution is based on the internal nodes of the net. The boundary solution depends on the boundary nodes of the net, in addition to finding the analytical solution of the equations to compare the results. We also discussed solving the problem of Laplace, Poisson, For the importance of these equations in the applied side, Matlab was used to find the values of tables for the values of border differences. We have derived a new formula for the solution of partial differential equations containing three independent variables.

المقدمة

هناك عدد كبير من المسائل في الفيزياء والتكنولوجيا يمكن ان توصف باستخدام المعادلات التفاضلية الجزئية (معادلات الفيزياء الرياضية). وتوصف عمليات الحالة الثابتة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة بمعادلات من نوع ناقصي. ومن الممكن الحصول على حلول دقيقة لمسائل القيم الحدودية للمعادلات الناقصية فقط في حالات خاصة. لذلك، يتم حل هذه المسائل في الغالب عددياً. واحدة من الطرق الأكثر عالمية وفعالة، والآن تستخدم على نطاق واسع للحل العددي لمعادلات الفيزياء الرياضية، هو طريقة الفروقات المحددة أو طريقة الشبكة.

جوهر هذه الطريقة هو كما يلي. التغيير المستمر للمناطق ،حيث يتم استبدال مجموعة منفصلة من النقاط (العقد)، وهو ما يسمى شبكة. باستبدال دوال مستمرة بدل دوال معرفة بالشبكة وتسمى بدوال الشبكة وكذلك استبدال المشتقات الموجودة في المعادلة التفاضلية بدل مشتقات الفروق حيث يستعاض عن مسألة القيم الحدودية للمعادلة التفاضلية بنظام معادلات جبرية خطية أو غير خطية (معادلات الشبكة أو الفرق). وغالبا ما تسمى هذه النظم باسم نظم الفروق.

1. تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

الحالة العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية بمتغيرين مستقلين لها الشكل:

$$F\left(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

بحيث x,y متغيرات مستقلة ، U متغير معتمد ، $U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}$ المشتقات الجزئية.

يعرف حل المعادلة التفاضلية بانه دالة U(x,y) اي تحويل المعادلة الى دالة، ان الرسم البياني للحل يمثل السطح لهذه الدالة. ويقال إن المعادلة تكون خطية إذا كانت الدالة وجميع مشتقاتها من الدرجة الاولى، وغير مضروبة ببعضها البعض. يمكن كتابة المعادلة الخطية بالشكل التالي:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = R(x,y) \dots\dots\dots (2)$$

ويطلق على المقدار $D = B^2(,y) - 4A(x,y)C(x,y)$ مميز المعادلة (2). اعتمادا على علامة D نميز اصناف المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (2) وتوجد هناك ثلاثة أنواع:

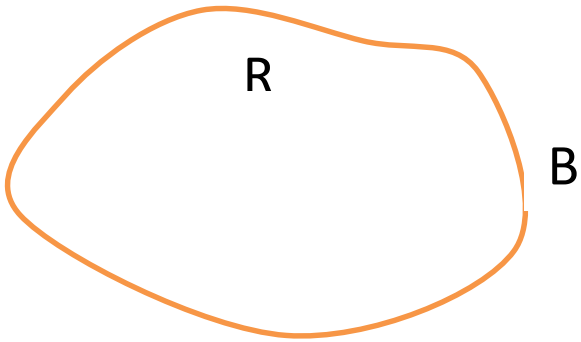
- معادلة تفاضلية من النوع الزائدي(Hyperbolic) اذا كان $D > 0$
- معادلة تفاضلية من النوع المكافئ (Parabolic) اذا كان $D = 0$
- معادلة تفاضلية من النوع الناقصي (Elliptic) اذا كان $D < 0$

2. الشروط الابتدائية والحدودية ، مسألة كوشي:

2.1 تعريف: مسألة إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية التي تحقق شروط ابتدائية معينة، تسمى مسألة كوشي.

المعادلات التفاضلية هي واحدة من أهم فروع الرياضيات في تطبيقاتها، ولحل المعادلة التفاضلية، يجب العثور على دالة معينة ، بحيث يمكن ان نضع قانون الذي من خلاله نوصف ظاهرة أو عملية معينة.

2.2 تعريف: حل مسألة كوشي من النوع y'=f(x,y) هو ايجاد حل للمعادلة المعطاة على شكل دالة y(x) ، تحقق الشروط الابتدائية. اختيار حل من مجموعة لانهائية يتطلب تحديد الشروط الأولية والحدود. في هذا العمل نأخذ مجال مستمر و مغلق R و حدود B .



شكل-1- منطقة R

وبالتالي، فإنه لا بد من إيجاد حل للمعادلة التفاضلية إذا تم إعطاء الشروط الابتدائية والحدودية.

3. المعادلات التفاضلية من النوع الناقصي:

عند دراسة العمليات التصادفية ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة ((الذبذبات، نقل الحرارة، إنتشار) عادة ما تأتي معادلات من نوع ناقصي. لنأخذ معادلة لابلاس :

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = div\ grad\ u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

تدعى الدالة توافقية في المنطقة T إذا كانت مستمرة في هذه المنطقة مع مشتقاتها حتى الرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس.

4.استقرار الحقل الحراري:

دالة الحرارة في الحقل الحراري غير المستقر تحقق معادلة الحرارة التفاضلية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad ,$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

اذا كان الحقل مستقر فان المعادلة تكون بالشكل:

$$\Delta u = 0$$

بحيث u=u(x,y,z) ، اذا كان لدينا مصدر للحرارة f فان معادلة (3) تصبح بالشكل الاتي:

$$\Delta u = -f \ldots\ldots\ldots (4)$$

بحيث $f = \frac{F}{k}$ ، F- هو كثافة المصدر الحراري. المعادلة (4) غالبا ما تسمى معادلة بواسون.

لنأخذ المنطقة R، والحدود B ، مسألة استقرار التوزيع الحراري u(x,y,z) داخل المنطقة R تكون بالطريقة الاتية:

نجد دالة u(x,y,z) داخل المنطقة R وتحقق المعادلة (4) وتحقق الشروط الحدودية التي يمكن ان تأخذ من الانواع الاتية:

- $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ على الحدود B ، وهي تعبر عن مسألة جريان الحرارة على السطح وتسمى بمسألة نيومان.
- $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ على الحدود B ، التي تعبر عن جريان الحرارة و واسطة نقل الحرارة.

بحيث f_1, f_2, f_3, h دوال معطاة، و ان $\frac{\partial u}{\partial n}$ المشتقة على طول السطح . نلاحظ ان الدالة الثانية يجب ان تحقق الشرط الاتي:

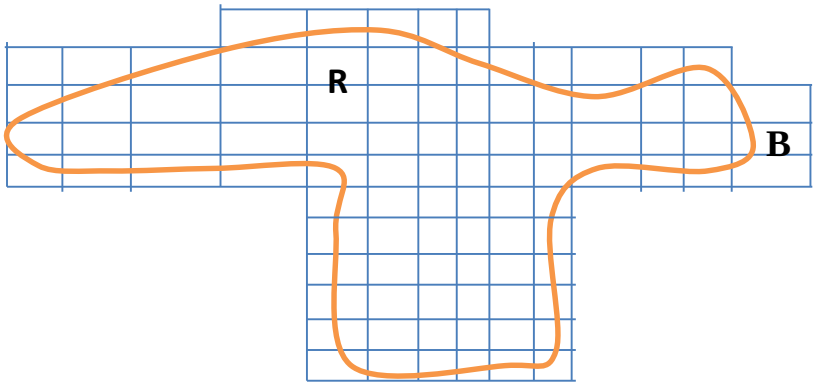
$$\oiint_G f_2 d\sigma = 0$$

أي انه اذا كان إجمالي الجريان خلال حدود المنطقة يساوي صفر ، عندها فقط تكون العملية مستقرة. إذا كنا نبحث عن حل داخل المنطقة R، فان المسألة تسمى مسألة حدود داخلية، إذا كان الحل خارج المنطقة، فانها مسألة حدود خارجية. إذا لم يكن هناك شروط ابتدائية ، فان استقرار العملية لا يعتمد على الوقت.

5. طريقة الفروق المحددة لتقريب المشتقات:

فكرة طريقة الفروق المحددة، أو طريقة الشبكات، هي:

1) في منطقة مصطحة R (ثنائية الأبعاد)، يتم إنشاء مجال الشبكة الذي يكون مقيد بالحدود B_h لتقريب الحد B للمنطقة R (الشكل 2).



شكل-2- مجال الشبكة للحدود B و المنطقة R

2) المعادلة التفاضلية المعرفة في عقد مجال الشبكة تستبدل بمعادلة الفروق (لتقريب المشتقات باستخدام الفروقات المحددة).

3) يتم ربط مخطط العقد الداخلية و الحدودية للمناطق G_h والحدود B_h بواسطة نظام معادلات خطية (أو غير خطية) $u(x,y) \to u(x_i,y_i)$. وهكذا يتم تقريب الحل المستمر من خلال مجموعة مختارة من القيم المنفصلة من عقد مجال الشبكة.

لنأخذ الشبكة المبنية على سطح (x,y) وعقد مجال الشبكة الاتية:

$$x_i = x_0 + ih\,,$$

$$y_i = y_0 + jk\,,$$

بحيث $0 \le i \le N\,, 0 \le j \le M$

لتقريب المشتقة الاولى و الثانية بالنسبة للمتغير x نستخدم مفكوك تايلر لمتغيرين وكالاتي:

$$u(x_{i\pm1}, y_i) = u(x_i \pm h, y_i) = u(x_i, y_j) \pm h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \pm$$
$$\pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{x}_i, y_j)$$

بحيث $\bar{x} \in x_i + \theta h , 0 < \theta < 1$

وبأخذ الحدين الاول و الثاني من المتسلسلة اعلاه ثم ايجاد الحل للمشتقة الاولى للمتغير x نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_i) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} + O(h) =$$
$$= \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} + O(h) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} + O(h^2)$$

نستخدم نفس الطريقة لايجاد المشتقة الثانية مع ملاحظة انها سوف تظهر بدلالة المشتقة الاولى ثم يتم التعويض عن المشتقة الاولى بما يساويها من الفروق لنحصل على:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + O(h^2)$$

وبنفس الطريقة نستطيع ايجاد المشتقات الاولى و الثانية $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ للمتغير y.

ان اساس اختيار حجم الشبكة يعتمد على حجم الخطأ في تقريب المعادلة التفاضلية بواسطة طريقة الفروق المحددة. ومع ذلك، فإن هذا النهج في العملية شاق أو غير قابل للتحقيق . لذلك، لحساب الإجراءات، يتم استخدام مخطط تحويل مزدوج: يتم بناء الحل على مجموعة من الخطوات من h و $\frac{h}{2}$ و $\frac{h}{4}$. حل المعادلات التفاضلية الجزئية بواسطة طريقة الفروقات المحدودة يؤدي إلى حسابات جماعية من الإجراءات الموحدة، وبالتالي يتم بسهولة برمجة مثل هذه الأساليب.

6 - معادلات لابلاس و بواسون في الفروقات المحدودة:

نتذكر ان معادلة بواسون (4):

$$\Delta u = -f \dots\dots\dots (4)$$

وهي نفسها المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \dots\dots\dots\dots (4)$$

في الجانب العملي، يتم استخدام العديد من القوالب لبناء مخططات للفروقات.

. مخطط الفروقات "الصليب" يعطى بالشكل لاتي:

لنكتب الان تقريب الفروق لمعادلة نيومن:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = -f(x,y) \dots\dots\dots (5)$$

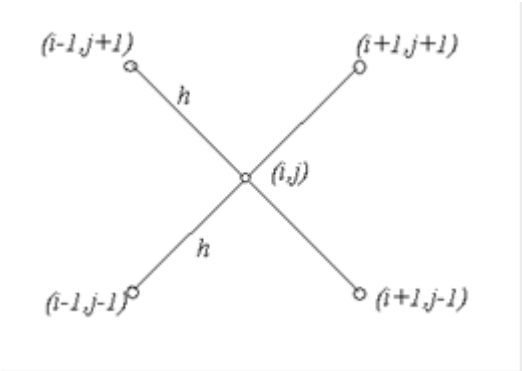
بالنسبة لمعادلة لابلاس سوف تكون الصيغة مشابها لكن h=k وبالشكل التالي:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right] \dots\dots.. (6)$$

ويمكن ملاحظة أن الدالة $u(x_i, y_i)$ هي الحل لمعادلة لابلاس في العقدة (i,j) و هي متوسط العقد المجاورة. يمكن تمثيل الفروق المحددة بالمخطط الاتي:



شكل -4- مخطط الفروق المحددة

بالنسبة لمعادلة لابلاس في شبكة منتظمة للتقريب وحسب المخطط المعطى اعلاه سوف يكون حسب المعادلة الاتية:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1}\right] \dots\dots..(7)$$

لناخذ حل مشكلة ديريشليت لمعادلة لابلاس:

$$\Delta u = 0 \ , \qquad P(x,y) \in G, u(P) = \varphi(P) \ , \qquad P \in B \dots\dots\dots\dots(8)$$

بحيث $\varphi(P)$ دالة مستمرة.

في حالة الشبكة المربعة، تسمى العقدتين الموجودتين على مسافة واحدة بالعقد المتجاورة، وتسمى العقد التابعة للجزء الداخلي بالعقد الداخلية. وتسمى العقد التي لها عقدة مجاورة داخلية واحدة على الأقل، بالعقد الحدودية من النوع الأول. حل المعادلة (8) بواسطة طريقة الفروق المحدودة، وحسب معادلة (6)، نحصل على نظام تجميع لكل عقدة داخلية من مجال توزيع العقد $(x_i, y_j) \in S_h$.

من الشرط الحدودي في (8) نجد :

$$u(A) = \varphi(A) \dots\dots\dots(9)$$

حيث A اقرب نقطة من الحدود B.

7. حل المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة باستخدام طريقة الشبكة:

لنأخذ مسألة الحرارة : لايجاد دالة u(x,t) التي تحقق المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=f(x) \ , \ (0 < x < s)$

والشروط الحدودية : $u(0,t) = \varphi(t), u(s,t) = \psi(t) \ (t > 0)$

لإيجاد الحل التقريبي للمسألة السابقة بواسطة طريقة الشبكة ، نأخذ شبكة مستطيلة من العقد في الشريط $t \geq 0 \ , 0 \leq x \leq s$ ،نقاط تقاطع مجموعتين من الخطوط المتوازية:

$$x = ih \ , (i = 0,1, \dots)$$

$$t = jk\ , (j = 0,1, \dots)$$

الان لنضع:

$$x_i = ih\ , t_i = jk$$

$$u_{ij} = u(x_i, t_j)$$

الان لنجد الاستبدال التقريبي عند كل عقدة داخلية (x_i, t_j) للمشتقة الثانية $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

الاستبدال التقريبي عند كل عقدة داخلية (x_i, t_j) للمشتقة الاولى $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

وبالتعويض عن هذه التقريبات في معادلة الحرارة نجد:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

مخطط الفروق الأول هو مخطط واضح، والثاني هو ضمني. لذلك سوف نحصل على معادلات الفروقات يتضمن قيم الحل في أربع عقد والمعادلة التقريبية ذات دقة $O(k+h^2)$.

لنضع $\rho = \frac{a^2 k}{h^2}$ ، نحول المعادلة الاخيرة الى النموذج الاتي:

$$u_{i,j+1} = 1 - 2\rho u_{ij} + \rho u_{i+1,j} + u_{i-1,j}$$

عند اختيار عدد ρ في المعادلة اعلاه ينبغي أن يوضع في الاعتبار ما يلي:

- ❖ يجب أن تكون الدقة في استبدال المعادلة التفاضلية بمعادلة الفروق اصغر ما يمكن.
- ❖ يجب أن تكون معادلة الفروق مستقرة.

تكون الصيغة ( ) مستقرة اذا كان $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$. كصيغة مبسطة للمعادلة ( ) يأخذ $\rho = \frac{1}{2}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

و عند $\rho = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}$$

7.1مثال:

بأستخدام معادلة الفروقات (10) جد تقريب حل المعادلة الاتية:

$$u_t = 8u_{xx} \ ,$$

$$u(x,0) = 13\sin\frac{\pi}{2}x \quad ,0 \le x \le 2$$

$$u(0,t) = u(0,t) = 0 \ \ ,0 \le t$$

بالنسبة للمتغير x نختار h=0.25 وبأستخدام معادلة الفروقات (10) اي ان $\rho = \frac{1}{2}$ بالنسبة للمتغير t

فاننا نجد ان : $k = \frac{\rho h^2}{a^2} = 0.0039$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}$$

$$u_{i,1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2}$$

$$u_{1,1} = \frac{u_{2,0} + u_{0,0}}{2} = \frac{1}{2}(9.1924 + 0) = 4.5962$$

$$u_{2,1} = \frac{u_{3,0} + u_{1,0}}{2} = \frac{1}{2}(12.0104 + 4.9749) = 8.4927$$

وهكذا لنكون جدون بقيم الدالة عند بعض العقد i=1,2,3,4,5,6,7,8 ، j=1,2,3,4,5,6,7,8.

الحل التحليلي للمعادلة المعطاة يمكن ايجاده من اجل المقارنة:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi^2 nt} B_n \sin\frac{\pi n}{2}x\,,$$

بحيث:

$$B_n = \frac{2}{2}\int_0^2 13\sin\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi n}{2}x\ dx \neq 0\,,\ \text{عند}\ n = 1$$

$$B_1 = 13\int_0^2 \sin^2\frac{\pi}{2}x\ dx = \frac{13}{2}\int_0^2 (1-\cos\pi x)\ dx = \frac{13}{2}\left[x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^2 = 13$$

وبهذا نجد:

$$\tilde{u}(x,t) = 13e^{-2\pi^2 t}\sin\frac{\pi}{2}x$$

في السطرين الأخيرين من الجدول ادناه يتم إعطاء قيم الحل الدقيق للمسألة ومعامل الدقة $|\tilde{u}-u|$ عند t=0.0312.

وهنا يمكن ايجاد بقية القيم حسب الجدول الاتي:

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	t_j \ x_i	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
0	0,0	0	4,9749	9,1924	12,0104	13,0	12,0104	9,1924	4,9749	0
1	0,0039	0	4,5962	8,4927	11,0962	12,0104	11,0962	8,4927	4,5962	0
2	0,0078	0	4,2464	7,8462	10,2516	11,0962	10,2516	7,8462	4,2464	0
3	0,0117	0	3,9231	7,2490	9,4712	10,2516	9,4712	7,2490	3,9231	0
4	0,0156	0	3,6245	6,6972	8,7503	9,4712	8,7503	6,6972	3,6245	0
5	0,0195	0	3,3486	6,1874	8,0842	8,7503	8,0842	6,1874	3,3486	0
6	0,0234	0	3,0937	5,7164	7,4689	8,0842	7,4689	5,7164	3,0937	0
7	0,0273	0	2,8582	5,2813	6,9003	7,4689	6,9003	5,2813	2,8582	0
8	0,0312	0	2,6407	4,8793	6,3751	6,9003	6,3751	4,8793	2,6407	0
$\tilde{u}(x;0,0312)$		0	2,6873	4,9655	6,4877	7,0223	6,4877	4,9655	2,6873	0
$\lvert\tilde{u}-u\rvert$		0	0,0466	0,0862	0,1126	0,1220	0,1126	0,0862	0,0466	0

8.حل المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية بأستخدام طريقة الشبكة:

لنأخذ مسألة التذبذبات الحرة ثم محاولة العثور على دالة u(x,t) تحقق المعادلة الاتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مع الشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = f(x)\,, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)\ , \qquad 0 < x < s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 11\ )$$

والشروط الحدودية:

$$u(0,t) = \emptyset(x)\,, \qquad u(s,t) = \psi(t)\,, \qquad t > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.. (\ 12\ )$$

بطريقة مشابهه لطريقة ايجاد الحل للنوع المكافئ عند القطعة $0 \le x \le s$, $t \ge 0$ وعند العقد :

$$x_i = ih\,, i = 0,1,2,\ldots,n\ , \qquad t_j = jk\ \ , j = 0,1,\ldots$$

بأستبدال المشتقات في معادلة (11) بعلاقة الفروقات نجد:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

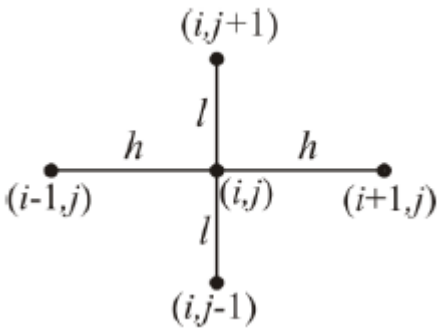
لنفرض ان : $\alpha = \frac{ak}{h}$ نجد معادلة الفروقات الاتية:

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \alpha^2 u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$u_{i,j+1} = \alpha^2 u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \ldots\ldots\ldots\ldots.. (14)$$

وبشكل خاص اذا كان $\alpha = 1$ تصبح المعادلة (14) بالشكل الاتي:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \ldots\ldots\ldots\ldots.. (15)$$



شكل (4)

واضح من معادلة (14) انه لايجاد قيم الدالة u(x,t) عند العقدة (j+1) نستخدم قيم الدالة عند العقد j و (j-1) حسب الشكل (4) .

للحسابات الابتدائية من الضروري معرفة قيم الدالة u(x,t) عند اول عقدتين j=1, j=0 ، التي يمكن ان تحدد باستخدام احدى الطرق الثلاث الاتية:

الطريقة الاولى:

بالشروط الابتدائية (17) نستبدل المشتقة $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ بالفروقات المحددة:

$$\frac{u_{i1} - u_{i0}}{k} = \varphi(x_i) = \varphi_i$$

$$u_{i1} = f_i + k\varphi_i \ , u_{i0} = f_i$$

الطريقة الثانية:

نستبدل المشتقة $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ بالفروقات $\frac{u_{i1}-u_{i,-1}}{2k}$ بحيث $u_{i,-1}$ قيمة الدالة u(x,t) عند العقدة j=-1 .
وبالتالي نحصل على:

$$\frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2k} = \varphi_i$$

$$u_{i0} = f_i$$

بالتعويض عن j=0 في معادلة (21) نحصل على:

$$u_{i,1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}$$

$$u_{i0} = f_i \ , u_{i1} = \frac{1}{2} f_{i+1} + f_{i-1} + k\varphi_i$$

8.1مثال:

بأستخدام طريقة الشبكة جد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{tt} = 16u_{xx}$$

$$u(x,0) = 2\sin\frac{\pi}{4}x \ , u_t(x,0) = \pi\sin\frac{\pi}{4}x \ , 0 \le x \le 4 \ ,$$

$$u(0,t) = 0 \ , u(4,t) = 0 \ , \qquad t \ge 0$$

لنأخذ h=0.5 وبأستخدام الطريقة الاولى و الثانية نجد القيم العددية u_{i1} ثم نقارن النتائج بالحل التحليلي للمعادلة. من خلال العلاقة $k = \frac{h}{a}$ يمكن ايجاد قيمة k والتي تساوي $k = \frac{1}{8} = 0.125$. النتائج العددية موجودة في الجدول ادناه.

الطريقة الاولى:

يمكن ايجاد قيم الدالة لاول مستويين من العقد يتم حسابه من خلال الصيغة:

$$u_{i1} = f_i + k\varphi_i = 2 + k\pi \sin\frac{\pi}{4}x_i \quad , u_{i0} = f_i = 2\sin\frac{\pi}{4}x_i$$

فتظهر القيم كما موضح في الجدول (5).

الطريقة الثانية:

يمكن ايجاد قيم الدالة لاول مستويين من العقد يتم حسابه من خلال الصيغة:

$$u_{i1} = \frac{1}{2}f_{i+1} + f_{i-1} + k\varphi_i = \left(\sin\frac{\pi}{4}x_{i+1} + \sin\frac{\pi}{4}x_{i-1}\right) + k\pi\sin\frac{\pi}{4}x_i$$

$$u_{i0} = f_i = 2\sin\frac{\pi}{4}x_i$$

فتظهر القيم كما موضح في الجدول (6).

لايجاد الحل التحليلي نستخدم الصيغة الاتية:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{4}at + B_n\sin\frac{\pi n}{4}at\right)\sin\frac{\pi n}{4}x$$

بحيث :

$$A_n = \frac{2}{4}\int_0^4 2\sin\frac{\pi x}{4}.\sin\frac{\pi n x}{4}dx \neq 0 \,, B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^4 \pi\sin\frac{\pi x}{4}.\sin\frac{\pi n x}{4}dx \neq 0$$

$$n = 1,\ \ A_1 = \int_0^4 \sin^2\frac{\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^4 = 2 \ ,$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\int_0^4 \sin^2\frac{\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^4 = 1\,.$$

ومن خلال ايجاد حدود الحل التحليلي نجد انه يساوي:

$$\tilde{u}(x,t) = 2\cos\pi t + \sin\pi t\ \sin\frac{\pi}{4}x$$

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	t_j \ x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,0	0	0,7654	1,4142	1,8478	2	1,8478	1,4142	0,7654	0
1	0,125	0	0,9157	1,6919	2,2106	2,3927	2,2106	1,6919	0,9157	0
2	0,250	0	0,9265	1,7121	2,2368	2,4212	2,2368	1,7121	0,9265	0
3	0,375	0	0,7964	1,4714	1,9227	2,0809	1,9227	1,4714	0,7964	0
4	0,500	0	0,5449	1,0070	1,3155	1,4242	1,3155	1,0070	0,5449	0
5	0,625	0	0,2106	0,3890	0,5085	0,5501	0,5085	0,3890	0,2106	0
6	0,750	0	-0,1559	-0,2879	-0,3764	-0,4072	-0,3764	-0,2879	-0,1559	0
7	0,875	0	-0,4985	-0,9213	-1,2036	-1,3029	-1,2036	-0,9213	-0,4985	0
8	1,000	0	-0,7654	-1,4142	-1,8478	-2	-1,8478	-1,4142	-0,7654	0
$\tilde{u}(x;0,875)$		0	-0,5607	-1,0360	-1,3536	-1,4651	-1,3536	-1,0360	-0,5607	0
$\lvert\tilde{u}-u\rvert$		0	0,0622	0,1147	0,1500	0,1622	0,1500	0,1147	0,0622	0

شكل -5- الطريقة الاولى

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	t_j \ x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,0	0	0,7654	1,4142	1,8478	2	1,8478	1,4142	0,7654	0
1	0,125	0	0,8574	1,5843	2,0699	2,2405	2,0699	1,5843	0,8574	0
2	0,250	0	0,8189	1,5131	1,9770	2,1398	1,9770	1,5131	0,8189	0
3	0,375	0	0,6557	1,2116	1,5829	1,7135	1,5829	1,2116	0,6557	0
4	0,500	0	0,3927	0,7255	0,9481	1,0260	0,9481	0,7255	0,3927	0
5	0,625	0	0,0698	0,1292	0,1686	0,1827	0,1686	0,1292	0,0698	0
6	0,750	0	-0,2635	-0,4871	-0,6362	-0,6888	-0,6362	-0,4871	-0,2635	0
7	0,875	0	-0,5569	-1,0289	-1,3445	-1,4551	-1,3445	-1,0289	-0,5569	0
8	1,000	0	-0,7654	-1,4143	-1,8478	-2,0020	-1,8478	-1,4143	-0,7654	0
$\tilde{u}(x;1,0)$		0	-0,5607	-1,0360	-1,3536	-1,4651	-1,3536	-1,0360	-0,5607	0
$\lvert\tilde{u}-u\rvert$		0	0,0038	0,0071	0,0091	0,0100	0,0091	0,0071	0,0038	0

شكل-6- الطريقة الثانية

وبمقارنة النتائج نجد ان الطريقة الثانية هي افضل في اعطاء حل اكثر دقة.

9.حل مسألة ديرشيلي بأستخدام طريقة الشبكة:

معادلة ديرشيلي هي معادلة بواسون ذات الشروط الحدودية . يمكن ان تكتب بالشكل الاتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(\ 16\ )$$

والشرط الحدودي:

$$u|_B=\varphi(x,y)$$

حيث $\varphi(,y)$ دالة مستمرة.

نقوم باختيار قيمة h,k ثم نقوم بحساب قيم الشبكة:

$$x_i=x_0+ih\ \ ,\qquad y_j=y_0+jk\ \ ,\qquad i,j=0,\pm1,\pm2,\dots\ \ ,$$

لايجاد الحل عند النقاط الداخلية نقوم بأستبدال قيم المشتقات و الدالة بقيم الفروقات عند كل العقد $(x_i\ \ ,\ y_j)$

.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f_{ij} \dots\dots\dots\dots\dots (17)$$

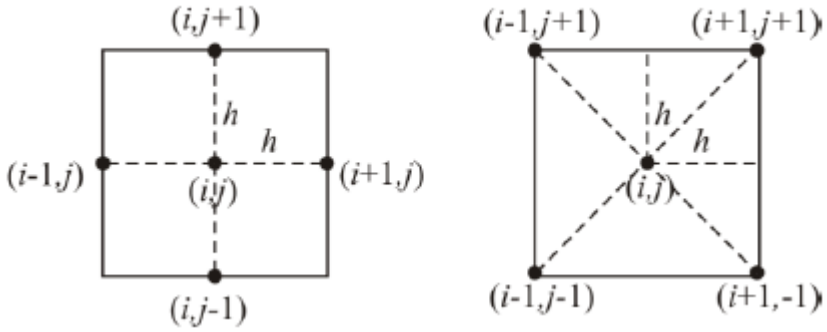
لتبسيط هذه المعادلة الجبرية فاننا نأخذ $h=k$ وبالتالي نحصل على المعادلة الاتية:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f_{ij} \dots\dots\dots (18)$$

اذا كانت f(x,y)=0 *فان المعادلة تصبح معادلة لابلاس والصيغة العامة لحلها هنا:*

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right] \dots\dots\dots\dots (19)$$

من الصيغتين السابقتين يمكن تكوين مخطط للشبكة ثم استنتاج الحل عند النقاط الحدودية بصيغة جديدة لمعادلة بواسون:



شكل- 7 - مخططات لابلاس و بواسون

صيغة لابلاس:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}\right] \dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

صيغة بواسون:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}\right] - \frac{1}{2}h^2 f_{ij} \dots\dots\dots (21)$$

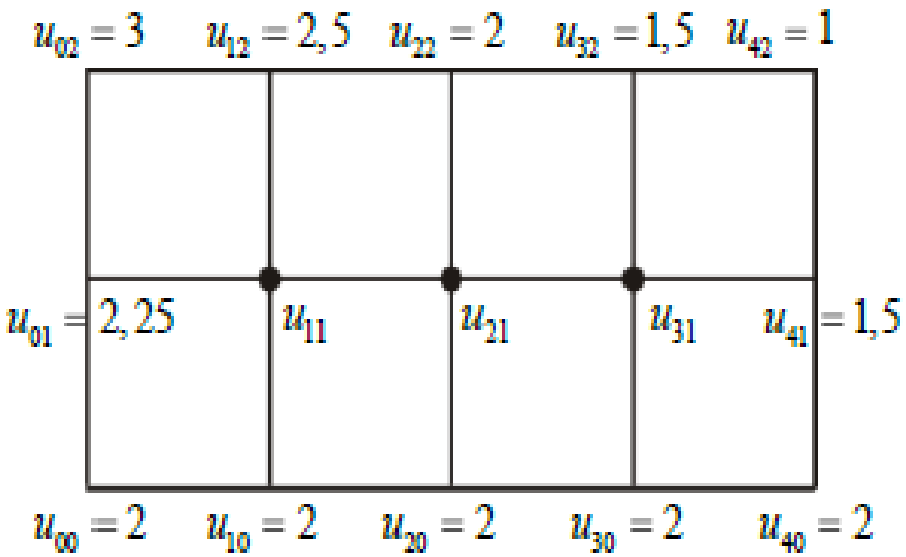
8.3مثال:

جد حل مسألة ديريشيلي لمعادلة بواسون عند المستطيل A(0,0), B(0,1),C(1,2),D(2,0).

$$u_{xx} + u_{yy} = xy$$

$$u|_{AB} = 2 + y^2 \ , \qquad u|_{BC} = 3 - x \ \ , u|_{CD} = 2 - y \ , u|_{AD} = 2.$$

بأخذ h=0.5 يمكن ايجاد الحل الداخلي للمعادلة عن طريق الصيغة (18) :



$$u_{11} = \frac{1}{4}[u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10}] - \frac{1}{16}x_1y_1 = \frac{1}{4}u_{21} + 2.25 + 2.5 + 2 - \frac{1}{16}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$u_{21} = \frac{1}{4}[u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20}] - \frac{1}{16}x_2y_1 = \frac{1}{4}u_{31} + u_{11} + 2 + 2 - \frac{1}{16}.1.\frac{1}{2}$$

$$u_{31} = \frac{1}{4}[u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{20}] - \frac{1}{16}x_3y_1 = \frac{1}{4}(1.5) + u_{21} + 1.5 + 2 - \frac{1}{16}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}$$

ثم نعمل على حل هذا النظام باستخدام طريقة كاوس-سيدل لنحصل على:

$$u_{11} = 2.1540 \quad , u_{21} = 1.9286 \quad , u_{31} = 1.6853$$

الان لنجد قيم الدالة عند العقد الحدودية باستخدام الصيغة (21):

$$u_{11} = \frac{1}{4}[u_{00} + u_{20} + u_{02} + u_{22}] - \frac{1}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}2 + 2 + 3 + 2 - \frac{1}{32} = \frac{71}{32} = 2.2188$$

$$u_{21} = \frac{1}{4}[u_{10} + u_{30} + u_{12} + u_{32}] - \frac{1}{8}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}2 + 2 + 2.5 + 1.5 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 1.937$$

$$u_{31} = \frac{1}{4}[u_{20} + u_{40} + u_{22} + u_{42}] - \frac{1}{8}.\frac{3}{4} = \frac{1}{4}2 + 2 + 2 + 1 - \frac{3}{32} = \frac{53}{32} = 1.6563$$

المصادر

[1] Hockney, R.W., East wood,J.E, **Computer simulation using particles**, Mc Graw-Hill, , 1987

[2] Mathews ,J.H, **Matlab Programming Guidebook for Numerical Methods**,2nd.ed. , Englewood cliffs, New Jersey , 1992.

[3] Mitchell,A.R, Griffiths,D.F, **The Finite Difference Method in Partial Differential Equations**, John Wiley and Sons, Chichester. New York .Brisbane.Toronto, , 1980.

[4] Morton,K.W,Mayers,D.F, **Numerical Solution of Partial Differential Equations,Computing Laboratory**, University of Oxford, , 2000.

[5] Smith, G.D., **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. Clarendon press.Oxford, 1987.

[6] W.H, Teukolsky, Vetterling,W.T., Flannery,B.P., **Numerical Recipes-the Art of Scientific computing**, 2nd edition Cambridge University Press, Indian reprint by Foundation Books,N.Delhi, 1993.