Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Удмуртский государственный университет

На правах рукописи

Хаммади Алаа Хуссейн

СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИК МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ РАЗЛИЧНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
доцент Родина Людмила Ивановна

Ижевск — 2016

Оглавление

Список основных обозначений

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово простанство размерности n;

$\mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$;

$O_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

$\varrho(A, B) \doteq \inf\limits_{a \in A, b \in B} |a - b|$ — расстояние между замкнутыми множествами A и B в $\mathbb{R}^n$;

$d(A, B) \doteq \sup\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$ — полуотклонение множества A от множества B;

$\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ — расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$;

$\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых *компактных* подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метиркой Хаусдорфа;

$D(t, X)$ — множество достижимости управляемой системы в момент времени t из начального множества X;

$V^o(t, x; p) \doteq \limsup\limits_{(\varepsilon, y) \to (0+0, x)} \dfrac{V(t + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(t, y)}{\varepsilon}$ — обобщенная производная (производная Ф. Кларка) локально липшицевой функции $V(t, x)$ в точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$;

$V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$ — нижняя и верхняя производные функции V в силу дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$;

mes — мера Лебега на числовой прямой.

Введение

Задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений является одной из важнейших задач математической теории управления и теории дифференциальных игр. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [13], А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой [15, 64, 65], Ж. П. Обена [60, 61], Е. Л. Тонкова и Е. А. Панасенко [21, 22], В. Н. Ушакова [5], [40]–[42], Ф. Хартмана [63] и многих других авторов.

Первый результат в этой области опубликован М. Нагумо в 1942 году [68], которым было изучено свойство слабой инвариантности заданного множества относительно дифференциального уравнения. Эти исследования продолжил Ф. Хартман [63], сформулировав необходимые и достаточные условия слабой инвариантности для системы дифференциальных уравнений. Большое внимание изучению вопросов инвариантности и «выживаемости» (как называют в иностранной литературе слабую инвариантность) уделял Ж. П. Обен [60, 61], который получил условия выживаемости множества $K \subset \mathbb{R}^n$ относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U(x)$$

в предположении, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $f(x, U(x))$ выпукло и компактно. Ж. П. Обен называет множество K *выживающим* относительно данной системы, если для любой начальной точки $x_0 \in K$ существует хотя бы одно решение $x(t)$ этой системы, начинающееся в x_0 и выживаемое в том смысле, что $x(t) \in K$ для всех $t \geqslant 0$.

Е. Л. Тонков и Е. А. Панасенко [21, 22] сформулировали условия, при которых заданное множество обладает свойствами положительной инвариантности, инвариантности, устойчивой или асимптотически устойчивой инвариантности относительно нестационарного дифференциального включения. Наличие инвариантного множества позволяет им рассматривать сужение включения на это множество и исследовать в нем различные экстремальные движения. А. Б. Куржанским получено аналитическое описание множества, которое является замыканием множества выживающих траекторий дифференциального включения [15]; также он исследовал структуру слабо инвариантных множеств гибридных систем, движение которых осуществляется путем мгновенного переключения с одной из «стандартных систем» на другую [16].

Отметим, что свойство слабой инвариантности находится в тесной связи с задачами о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством, исследуемыми Н. Н. Красовским, А. И. Субботиным [13], В. Н. Ушаковым [41], [43] и многими другими авторами. При решении этих задач возникает вопрос о том, в какой степени заданное множество не является инвариантным относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой (см. работы В. Н. Ушакова и его учеников [40]–[44]). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в применении инфинитезимального представления свойства инвариантности и вычисления дефекта инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности.

В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова [28]–[30], [32]–[34] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t, X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{0.1}$$

в момент времени t из начального множества X. Множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

называется *статистически инвариантным* относительно системы (0.1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице. Свойство статистической инвариантности связано с исследованием введенных в этих работах статистических характеристик, таких как *верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ системы (0.1) множеством $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(D,M) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(D,M) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если $\operatorname{freq}_*(D,M) = \operatorname{freq}^*(D,M)$, то общий предел

$$\operatorname{freq}(D,M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta} \tag{0.3}$$

называется *относительной частотой поглощения множества достижимости* системы (0.1) множеством $\mathfrak{M}$.

В данной работе исследуются свойства характеристик, введенных в [26, с. 228]. Первая характеристика — *относительная частота поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ *множеством* $\mathfrak{M}$ *на отрезке* $[\tau,\tau+\vartheta]$ равна отношению меры Лебега тех t из отрезка $[\tau,\tau+\vartheta]$, при которых $D(t,X) \subseteq M(t)$, к длине данного отрезка:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}. \tag{0.4}$$

Вторая характеристика —

$$\operatorname{freq}_\vartheta(D,M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta} \tag{0.5}$$

отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы (0.1) в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины $\vartheta > 0$. Доказаны утверждения, позволяющие оценивать и вычислять данные характеристики; получены теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка.

Другой задачей, которая изучается в моей работе, является задача исследования свойства статистической инвариантности, статистических характеристик (0.2), (0.3) и характеристик (0.4), (0.5) для управляемых систем со случайными параметрами. Отметим, что для этих систем различные задачи управления рассматривались в работах [3], [17], [18], [27], [39], [62]. В отличие от детерминированных систем, для систем со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда множество достижимости системы находится в заданном множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех σ из некоторого множества $\Sigma_* \subset \Sigma$, вероятностная мера которого $\nu(\Sigma_*) = \mu$, $\mu \in (0, 1]$. Поэтому для таких систем рассматривается свойство статистической инвариантности, выполненное с заданной вероятностью.

* * *

Работа состоит из введения, трех глав, включающих девять параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка литературы.

В первой главе исследуются характеристики (0.4), (0.5) для управляемой системы (0.1). Предполагаем, что функция $f(t, x, u)$ непрерывна, управление u содержится в компактном множестве $U(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Пусть $D(t, X)$ — множество достижимости данной системы, множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ задано функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа и для каждого $t \in [0, +\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно.

В первом параграфе приведены основные определения и свойства характеристик (0.4), (0.5). Доказано следующее основное утверждение.

Теорема 0.1. (см. [35], [55]). *Имеют место следующие свойства:*

1) *для любого* $\vartheta > 0$ *выполнено неравенство* $\mathrm{freq}_\vartheta(D, M) \leqslant \mathrm{freq}_*(D, M)$;

2) *если функции* $t \mapsto D(t, X)$ *и* $t \mapsto M(t)$ *периодические с периодом* $T > 0$, *то предел* $\mathrm{freq}(D, M)$ *существует и*

$$\mathrm{freq}_T(D, M) = \mathrm{freq}(D, M) = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, T] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{T};$$

3) *если функция* $t \mapsto M(t)$ *периодическая с периодом* $T > 0$ *и для всех* $t \geqslant 0$ *имеет место включение* $D(t + T, X) \subseteq D(t, X)$, *то*

$$\mathrm{freq}_T(D, M) = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, T] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{T}.$$

Во втором параграфе доказаны теоремы сравнения для введенных ранее характеристик. Приведем необходимые определения.

Обозначим через $M^r(t)$ замкнутую r-окрестность множества $M(t)$, через $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ обозначим внешнюю r-окрестность границы множества $M(t)$. Построим множество

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t, x) и условиям:

1) $V(t, x) \leqslant 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Управляемой системе (0.1) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{0.6}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$. Предполагаем, что множество $F(t,x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло.

Обозначим через $V^o_{\min}(t,x)$ и $V^o_{\max}(t,x)$ нижнюю и верхнюю производные функции V в силу дифференциального включения (0.6) (см. определение 2.2). Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot{z} = w(t,z), \quad z(0) = z_0, \tag{0.7}$$

где $z_0 \geqslant 0$, функция $w(t,z)$ непрерывна и для каждого $t \in [0,+\infty)$ выполнено неравенство

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{|w(t,z)|}{|z|} < \infty.$$

Пусть $z^*(t)$ — верхнее решение задачи (0.7). Определим характеристики

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty, 0]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 0.2. (см. [35]). *Пусть для каждой точки $x \in M(0)$ все решения $\varphi(t,x)$ включения (0.6), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(t,x)$ и $w(t,z)$ такие, что $V(t,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $V^o_{\max}(t,x) \leqslant w\big(t, V(t,x)\big)$. Тогда для любого множества*

$X \subseteq M(0)$ *имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]),$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty, 0]).$$

Аналогично характеристикам (0.4), (0.5), определим *относительную частоту нахождения графика непрерывной функции* $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *в множестве* $\mathfrak{M}$ *на отрезке* $[\tau, \tau + \vartheta]$:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

и для любого заданного $\vartheta > 0$ характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения графика функции $\varphi(t)$ в множестве $\mathfrak{M}$.

Теорема 0.3. (см. [55]). *Пусть для каждой точки $x \in M(0)$ все решения $\varphi(t, x)$ включения* (0.6), *удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0, x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(t, x)$ и $w(t, z)$ такие, что $V(t, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и при всех $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(t, x) \leqslant w\big(t, V(t, x)\big).$$

Тогда для любого $x \in M(0)$ существует решение $\varphi(t, x)$ включения (0.6), *удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, такое, что*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]),$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty, 0]).$$

В третьем параграфе рассматривается множество $\mathfrak{M}$, заданное непрерывной многозначной функцией $t \mapsto M(t)$ и многозначные функции $t \mapsto D(t)$, $t \mapsto \widetilde{D}(t)$, которые также непрерывны в метрике Хаусдорфа. Предполагаем, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ множества $M(t)$, $D(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ непустые, компактные и функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T > 0$. В следующей теореме получена оценка характеристики $\operatorname{freq}_T(D, M)$ и приведены условия, при которых можно найти ее значение.

Теорема 0.4. (см. [35], [55]). *Пусть функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T > 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) = 0$. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(D, M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\}}{T}$;

2) *если $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$ для всех $t \geqslant 0$, то*

$$\operatorname{freq}_T(D, M) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M)\,.$$

В четвертом параграфе приведены примеры вычисления и оценки характеристик

$$\operatorname{freq}_\vartheta(z^*, (-\infty, c]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] :\ z^*(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}(z^*, (-\infty, c]) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta},$$

возникающих в различных прикладных задачах. Здесь $z^*(t)$ — верхнее решение задачи Коши (0.7), которое в зависимости от характера процесса может являться энергией частицы, концентрацией реагирующих веществ, размером популяции, величиной производства или ценой на продукцию.

В частности, пусть $z(t)$ — решение линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(t)z + b(t), \quad z(0) = z_0, \tag{0.8}$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывные и периодические с периодом $T > 0$. Через $\widetilde{z}(t)$ обозначим T-периодическое решение линейного уравнения

$$\dot{z} = a(t)z + b(t),$$

в предположении, что оно существует, то есть, что $\int_0^T a(t)dt \neq 0$. Пусть

$$c_0 = \left(\exp\Bigl(-\int_0^T a(\tau)d\tau\Bigr) - 1\right)^{-1} \int_0^T b(s)\exp\Bigl(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Bigr)ds.$$

Лемма 0.1. (см. [35]). *Если* $\int_0^T a(\tau)d\tau < 0$, *то выполнены следующие свойства:*

1) *если* $z_0 \leqslant c_0$, *то* $\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c]) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}}{T}$;

2) *если* $z_0 > c_0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c]) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z(t) \leqslant c\}}{T}.$$

Равенства для вычисления характеристики $\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c])$ получены также в случае, когда $\int_0^T a(\tau)d\tau > 0$.

Во второй главе представлено продолжение работ [28, 29, 32, 34], в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Здесь исследуются статистически инвариантные множества и статистические характеристики семейства управляемых систем

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t,\sigma,x) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n, \qquad (0.9)$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$. В частности, изучается управляемая система, порожденная метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U.

В пятом параграфе приведены определения и доказана теорема сравнения для статистических характеристик управляемой системы (0.9).

Пусть $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $D(t,\sigma,X)$ — множество достижимости управляемой системы (0.9). Рассмотрим отображение $t \mapsto M(h^t\sigma)$ со значениями в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(h^t\sigma)\},$$

где функция $t \mapsto M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа. *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t,\sigma,X)$ системы (0.9) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется характеристика

$$\operatorname{freq}(\sigma, D_X, M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}. \tag{0.10}$$

Если предел (0.10) не существует, то характеристики

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(\sigma, D_X, M) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(\sigma, D_X, M) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} \end{aligned} \tag{0.11}$$

называются соответственно, *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $D(t,\sigma,X)$ системы (0.9) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$. Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (0.9), если выполнено равенство

$$\operatorname{freq}\bigl(\sigma, D_{M(\sigma)}, M\bigr) = 1.$$

В теореме 5.1 получены оценки характеристик (0.11) и условия статистической инвариантности множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ относительно управляемой системы (0.9).

Основной результат второй главы получен в шестом параграфе — это оценки статистических характеристик управляемой линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U, \tag{0.12}$$

где U — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^m$. Рассматриваемую систему можно отождествить со стационарным в узком смысле случайным процессом

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big).$$

Для этого процесса длины промежутков $\theta_1, \theta_2, \ldots$ между моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots$ с одного состояния на другое являются независимыми случайными величинами с заданной функцией распределения $F(t)$. Множество состояний $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ процесса конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности перехода с одного состояния на другое, то есть определена цепь Маркова ζ, относительно которой будем предполагать, что она неприводима и положительно возвратна. В работе подробно описана *метрическая динамическая система* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая параметризует систему (0.12) и таким образом эта система превращается в систему со случайными параметрами. Предполагаем, что функция распределения $F(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $m_\theta = \int_0^\infty t dF(t) < +\infty$;

2) существуют такие постоянные $a > 0$, $C \geqslant 0$ и $\delta > 0$, что

$$F(t) \leqslant C\, t^a \quad \text{при} \quad t \in (0, \delta).$$

Если выполнены данные условия, то найдется множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots$ случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и число этих моментов бесконечно (см. [28, с. 106]).

Пусть задано подмножество M пространства $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $D_i(t, X)$ множество достижимости стационарной линейной системы $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$ в момент времени t из начального множества X, также введем обозначения

$$\alpha_i = \alpha_i(X, M) = \min\bigl\{\tau \in [0, \infty) \colon D_i(t, X) \subseteq M \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\bigr\},$$
$$\beta_i = \beta_i(X, M) = \inf\bigl\{\tau \in [0, \infty) \colon D_i(t, X) \cap M = \varnothing \text{ при } t \geqslant \tau\bigr\}, \ i = 1, \ldots, \ell.$$

Если какого-либо из этих моментов времени не существует, положим $\alpha_i = \infty$ или $\beta_i = \infty$. Обозначим через $(\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$ стационарное распределение цепи Маркова ζ.

Теорема 0.5. (см. [36]). *Пусть цепь Маркова ζ неприводима и положительно возвратна; $M \subseteq X$ и множество $\{(t, x) : t \geqslant 0, \, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы* (0.12)*. Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливы следующие оценки:*

$$\mathrm{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i \colon \alpha_i < \infty\}} \pi_i \Bigl(\int_{\alpha_i}^{\infty} t dF(t) - \alpha_i\bigl(1 - F(\alpha_i)\bigr)\Bigr),$$

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, D_M, M) \leqslant 1 - \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i \colon \beta_i < \infty\}} \pi_i \Bigl(\int_{\beta_i}^{\infty} t dF(t) - \beta_i\bigl(1 - F(\beta_i)\bigr)\Bigr).$$

В третьей главе получены оценки характеристик, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы со случайными параметрами (0.9) в множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ на отрезке заданной длины. Это характеристики $\mathrm{freq}_{[\tau, \tau+\vartheta]}(\sigma, D, M)$ и $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$, которые отличаются от характеристик (0.4), (0.5), введенных в первой главе тем, что каждая из них зависит также от случайного параметра $\sigma \in \Sigma$. Получены оценки данных характеристик, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной в силу дифференциального включения и динамической системы сдвигов.

В девятом параграфе получены оценки характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$ для управляемой системы (0.9).

Теорема 0.6. (см. [50]). *Пусть* $\theta_k = d$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots,$

$$\alpha_{max} \doteq \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) < d.$$

Если $M \subseteq X$ *и множество* $\{(t, x) : t \geqslant 0, \ x \in X\}$ *положительно инвариантно относительно системы* (0.9), *то для любого* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *с вероятностью единица справедливы следующие оценки:*

1) *если* $\vartheta \in [md, md + \alpha_{max})$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{m(d - \alpha_{max})}{\vartheta};$$

2) *если* $\vartheta \in [md + \alpha_{max}, (m+1)d)$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{\vartheta - (m+1)\alpha_{max}}{\vartheta}.$$

Получены также оценки сверху для характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$, выполненные с вероятностью единица.

Приведены примеры применения большинства из полученных результатов. Утверждения первой главы доказываются методами теории дифференциальных уравнений и математического анализа. Во второй и третьей главах используются методы теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Результаты диссертации опубликованы в работах [35]–[37], [48]–[56].

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Л. И. Родиной за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Оценка и вычисление характеристик множества достижимости управляемой системы

Данная глава является продолжением работ [28]–[30], [32]–[34], в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в изучении статистических характеристик управляемых систем и исследовании множеств, которые не являются инвариантными в «классическом» смысле, но обладают свойством статистической инвариантности.

Здесь изучаются характеристики, которые отображают свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

в множестве

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

на отрезке заданной длины $\vartheta > 0$. Пусть $D(t, X)$ — множество достижимости данной системы в момент времени t из начального множества X. Определим относительную частоту поглощения множества $D(t, X)$ множеством $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, которая равна отношению меры Лебега тех t из отрезка $[\tau, \tau + \vartheta]$, при которых $D(t, X) \subseteq M(t)$, к длине данного отрезка:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Будем исследовать также характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) = \\ = \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}.$$

В первой главе получены основные свойства указанных характеристик; доказаны теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка; доказана теорема об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций; приведены различные примеры вычисления данных характеристик. Также рассмотрен пример, в котором вычисляется характеристика

$$\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] :\, z(t) \leqslant c\bigr\}}{T},$$

где $z(t)$ — численность популяции, динамика которой задана задачей Коши

$$\dot z = \bigl(\varepsilon(t) - \alpha(t)z\bigr)z, \quad z(0) = z_0$$

в предположении, что функции $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ положительные, непрерывные и периодические с периодом $T > 0$.

§ 1. Определения и основные свойства характеристик инвариантности множества достижимости

Основным объектом исследования в первой главе является управляемая система

$$\dot x = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Допустимым процессом управляемой системы* (1.1) назовем функцию $t \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ определено для всех $t \geqslant 0$;

3) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$.

Рассмотрим отвечающее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Предполагаем, что множество $F(t, x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло. Тогда функция $F(t, x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.2) существует (см. [47, с. 60]).

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [36, 49]). *Множеством достижимости $D(t, X)$ системы* (1.1) в момент времени t из начального множества X называется множество, состоящее из всех значений в момент t решений $t \mapsto \varphi(t, x)$ включения (1.2), когда начальное условие $\varphi(0, x) = x$ пробегает все множество X. Множество $D(t, X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ интегральной воронки включения (1.2).

Предполагаем, что для каждого X множество достижимости $D(t, X)$ существует для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$

существует решение $\varphi(t,x)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x)=x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$.

Пусть множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x\in M(t)\big\}$ задано функцией $t\mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа и для каждого $t\in[0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Для определения характеристик множества достижимости для любых $\tau\geqslant 0$, $\vartheta>0$ и любого компактного множества $X\subset\mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\tau,\vartheta,X)\doteq\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\big\},$$

которое измеримо по Лебегу (см. [33]).

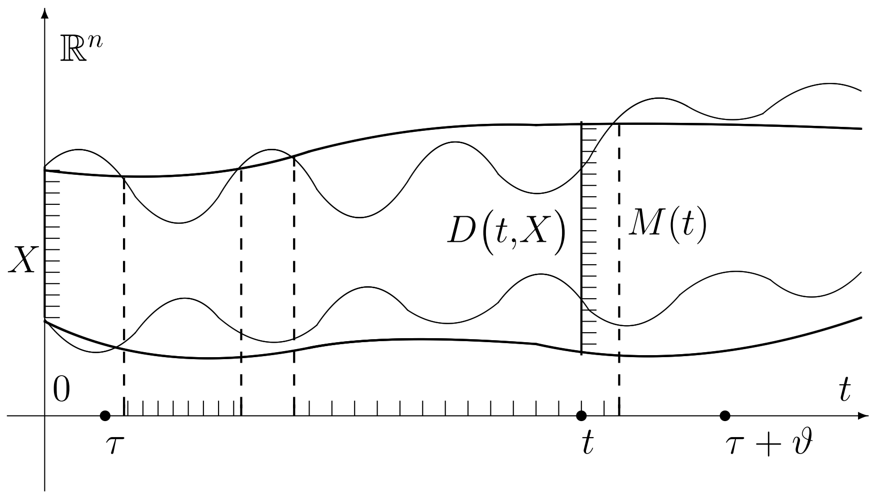

Рис. 1. Множества $M(t)$ и $D(t,X)$, на оси Ot заштриховано множество $\alpha(\tau,\vartheta,X)$; штриховкой в момент t обозначено множество $M(t)$.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [31, 33]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ системы (1.1) множеством

$\mathfrak{M}$ называется следующий предел

$$\operatorname{freq}(D, M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} = \\ = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \quad (1.3)$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой.

Если предел (1.3) не существует, то характеристики

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(D, M) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(D, M) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} \end{aligned} \quad (1.4)$$

называются соответственно *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $D(t,X)$ системы (1.1) множеством $\mathfrak{M}$.

О п р е д е л е н и е 1.4 (см. [34]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t,X)$ системы* (1.1) *множеством* $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ называется характеристика

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \\ = \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M)$ для любого момента времени $\tau \geqslant 0$, поэтому естественно для заданного $\vartheta > 0$ определить характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) = \\ = \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от пределов (1.3), (1.4) тем, что она отражает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины.

Приведенное ниже утверждение является обобщением леммы 2 работы [35] и теоремы 3.1 работы [55].

Теорема 1.1. *Имеют место следующие свойства:*

1) *для любого* $\vartheta > 0$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \leqslant \operatorname{freq}_{*}(D,M); \tag{1.5}$$

2) *если функции* $t \mapsto D(t,X)$ *и* $t \mapsto M(t)$ *периодические с периодом* $T > 0$, *то предел* $\operatorname{freq}(D,M)$ *существует и*

$$\operatorname{freq}_{T}(D,M) = \operatorname{freq}(D,M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{T};$$

3) *если функция* $t \mapsto M(t)$ *периодическая с периодом* $T > 0$ *и для всех* $t \geqslant 0$ *имеет место включение* $D(t+T,X) \subseteq D(t,X)$, *то*

$$\operatorname{freq}_{T}(D,M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{T}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения отметим, что неравенство (1.5) следует из равенства

$$\operatorname{freq}_{*}(D,M) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \operatorname{mes}\{t \in [i\vartheta,(i+1)\vartheta] :\ D(t,X) \subseteq M(t)\}}{k\vartheta}$$

и неравенства

$$\frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [i\vartheta,(i+1)\vartheta] :\ D(t,X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta} \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M),$$

которое верно для любых $i = 0,1,\ldots$ и $\vartheta > 0$.

Докажем второе утверждение. Поскольку функции $t \mapsto D(t,X)$ и $t \mapsto M(t)$ периодичны с общим периодом $T>0$ и $\vartheta = T$, то выполнены следующие равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{freq}_T(D,M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T} = \\ = \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{T} = \operatorname{freq}(D,M).\end{aligned}$$

Последнее равенство получено в [28, с. 53–54].

Докажем третье утверждение. Пусть функция $t\mapsto M(t)$ периодическая с периодом T и $D(t+T,X)\subseteq D(t,X)$ для всех $t\geqslant 0$. Тогда, если для некоторого $t^*\geqslant 0$ имеет место включение $D(t^*,X)\subseteq M(t^*)$, то

$$D(t^*+T,X)\subseteq D(t^*,X)\subseteq M(t^*) = M(t^*+T).$$

Поэтому для любого $\tau\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\big\{t\in[0,\tau]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{mes}\big\{t\in[T,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}. \quad (1.7)\end{aligned}$$

Пусть $\tau\geqslant T$, тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}\big\{t\in[0,\tau]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} = \\ = \operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} + \operatorname{mes}\big\{t\in[T,\tau]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}, \\ \operatorname{mes}\big\{t\in[T,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} = \\ = \operatorname{mes}\big\{t\in[T,\tau]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} + \operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}.\end{gathered}$$

Следовательно, из (1.7) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}. \quad (1.8)\end{aligned}$$

Далее, если $\tau < T$, то отрезки $[0,T]$ и $[\tau,\tau+T]$ имеют непустое пересечение — отрезок $[\tau,T]$. В этом случае неравенство (1.8) получаем из неравенств

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\} = \\
&= \operatorname{mes}\{t\in[0,\tau]: D(t,X)\subseteq M(t)\} + \operatorname{mes}\{t\in[\tau,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \operatorname{mes}\{t\in[T,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\} + \\
&\qquad\qquad\quad + \operatorname{mes}\{t\in[\tau,T]: D(t,X)\subseteq M(t)\} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+T]: D(t,X)\subseteq M(t)\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, (1.8) верно для всех $\tau\geqslant 0$ и поэтому

$$\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]\colon D(t,X)\subseteq M(t)\big\}=\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]\colon D(t,X)\subseteq M(t)\big\}.$$

Это равенство равносильно (1.6). □

Следствие 1.1. *Если* $M(t)=M$ *для всех* $t\geqslant 0$ *и* $D(t+\vartheta,X)\subseteq D(t,X)$ *для некоторого* $\vartheta>0$ *и всех* $t\geqslant 0$, *то*

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M\}}{\vartheta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $M(t+\vartheta)=M(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то данное утверждение получается из утверждения 3) теоремы 1.1. □

§ 2. Теоремы сравнения для характеристик множества достижимости

В работах [28]–[30], [32], [33] получены теоремы сравнения для статистических характеристик множества достижимости управляемой системы (1.1).

Используя результаты этих работ, докажем теоремы сравнения для введенных в первом параграфе характеристик, связанных с инвариантностью заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы (1.1) на конечном промежутке времени.

Пусть $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $M^r(t)$ замкнутую r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, через $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ обозначим внешнюю r-окрестность границы множества $M(t)$. Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\},$$

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

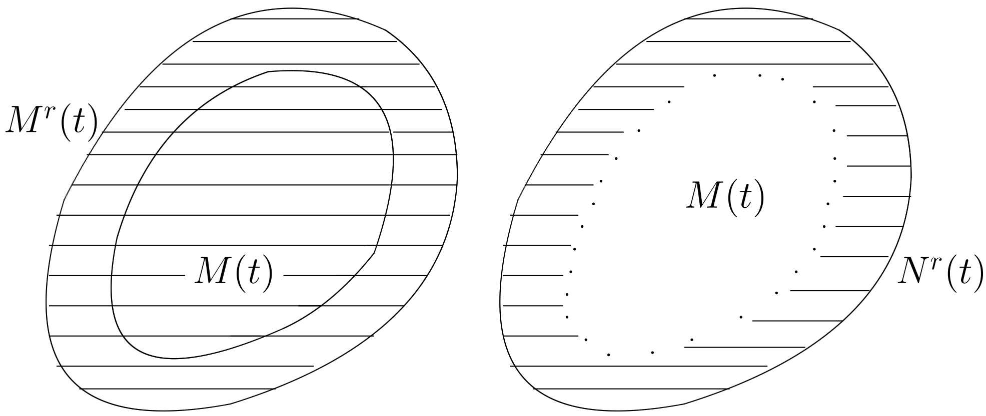

Рис. 2. Множества $M(t)$, $M^r(t)$ и $N^r(t)$. Слева заштриховано множество $M^r(t)$, справа — $N^r(t)$.

О п р е д е л е н и е 2.1 (см. [21]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t,x) \leqslant 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t,x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Для локально липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка [9, с. 17]) называется следующий верхний предел:

$$V^o(t,x;p) \doteq \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)} \frac{V(t+\varepsilon, y+\varepsilon p) - V(t,y)}{\varepsilon}.$$

Выражения

$$V^o_{\min}(t,x) \doteq \inf_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p), \quad V^o_{\max}(t,x) \doteq \sup_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$$

называются соответственно *нижней и верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

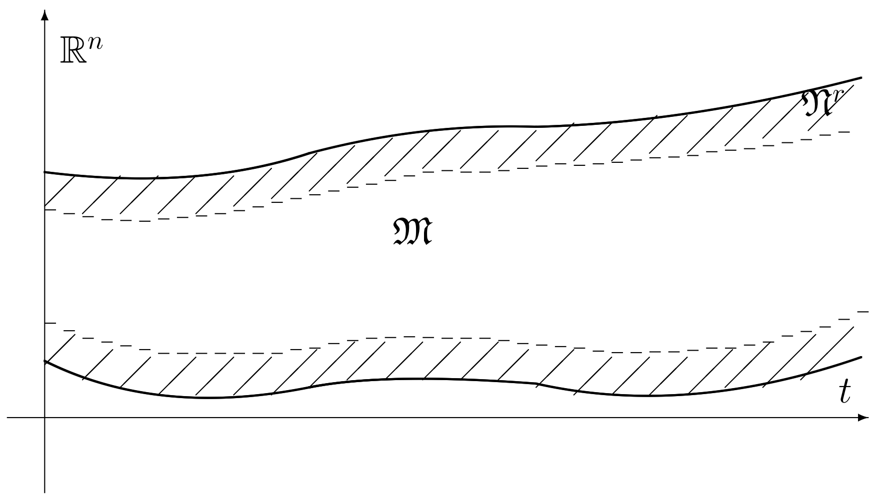

Рис. 3. Множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^r$

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z = w(t,z), \quad z(0) = z_0. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что $z_0 \geqslant 0$ и выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.1. Функция $w(t,z)$ непрерывна при всех $(t,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ и для каждого $t\in[0,+\infty)$ имеет место неравенство

$$\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{|w(t,z)|}{|z|}<\infty.$$

Напомним, что *верхним решением* $z^*(t)$ *задачи Коши* (2.1) называется такое решение, что для любого другого решения $z(t)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t)\geqslant z(t)$. В работе [57, с. 38] показано, что если выполнено условие 2.1, то верхнее решение $z^*(t)$ задачи Коши (2.1) существует для всех $t\geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 2.3. *Относительной частотой нахождения графика непрерывной функции* $\varphi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^n$ *в множестве*

$$\mathfrak{M}=\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n: x\in M(t)\big\}$$

на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ будем называть характеристику

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M)\doteq\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ \varphi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}.$$

Также для любого заданного $\vartheta>0$ определим характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi,M)\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M)=\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ \varphi(t)\in M(t)\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения графика функции $\varphi(t)$ в множестве $\mathfrak{M}$.

В этих обозначениях для верхнего решения $z^*(t)$ задачи Коши характеристики из определения 2.3 равны

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*,(-\infty,0])\doteq\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ z^*(t)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}_\vartheta(z^*,(-\infty,0]) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*,(-\infty,0]) = \\ = \inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ z^*(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 2.1. (см. [35]). *Пусть выполнено условие* 2.1 *и для каждой точки* $x \in M(0)$ *все решения включения* (1.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют функции* $V(t,x)$ *и* $w(t,z)$ *такие, что функция* $V(t,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и при всех* $(t,x) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant w\big(t, V(t,x)\big). \tag{2.2}$$

Тогда для любого множества $X \subseteq M(0)$ *имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*,(-\infty,0]),$$
$$\operatorname{freq}_\vartheta(D,M) \geqslant \operatorname{freq}_\vartheta(z^*,(-\infty,0]).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t,x)$ — решение включения (1.2), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x \in M(0)$. Рассмотрим функцию

$$v(t) = V\big(t,\varphi(t,x)\big).$$

В силу теоремы Радемахера (см. [45, с. 234]) функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t, и поскольку $\varphi(0,x) = x \in M(0)$, то $v(0) \leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнены неравенства (см. лемму 6 работы [33]):

$$V^o_{\min}\big(t,\varphi(t,x)\big) \leqslant \dot v(t) \leqslant V^o_{\max}\big(t,\varphi(t,x)\big),$$

поэтому, с учетом неравенства (2.2), имеем при всех $t \geqslant 0$ неравенство

$$\dot v(t) \leqslant w\big(t, v(t)\big). \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.3) и $v(0) \leqslant 0 \leqslant z_0 = z(0)$ в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [58, с. 15] получаем, что для всех $t \geqslant 0$ верхнее решение $z^*(t)$ задачи (2.1) удовлетворяет неравенству $v(t) \leqslant z^*(t)$.

Обозначим через $\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M)$ относительную частоту попадания решения $\varphi(t,x)$ в множество M на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$, тогда

$$\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \varphi(t,x) \in M(t)\}}{\vartheta} = \\ = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] :\ v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Отметим, что из неравенства $v(t) \leqslant z^*(t)$ следует неравенство

$$\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \geqslant \mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0])$$

и, так как $\varphi(t,x)$ является произвольным решением включения (1.2) с начальным условием $\varphi(0,x) = x \in M(0)$, то имеет место неравенство

$$\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \geqslant \mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]).$$

Отсюда в силу определения характеристик $\mathrm{freq}_\vartheta(D, M)$ и $\mathrm{freq}_\vartheta(z^*, (-\infty, 0])$ получаем

$$\mathrm{freq}_\vartheta(D, M) \geqslant \mathrm{freq}_\vartheta(z^*, (-\infty, 0]).$$

$\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Условия продолжаемости на полуось $\mathbb{R}_+$ всех решений включения (1.2), которые удовлетворяют начальному условию $\varphi(0,x) = x$, получены в работе [28, с. 63].

Теорема 2.2. (см. [55]). *Пусть выполнено условие* 2.1 *и для каждой точки $x \in M(0)$ все решения включения* (1.2)*, удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим,* *что существуют функции $V(t,x)$ и $w(t,z)$ такие, что функция $V(t,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(t,x) \leqslant w\bigl(t, V(t,x)\bigr). \tag{2.4}$$

Тогда для любого $x \in M(0)$ существует решение $\varphi(t,x)$ включения (1.2), *удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$ такое, что*

$$\begin{gathered} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]), \\ \operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty, 0]). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что доказательство данного утверждения подобно доказательству теоремы о статистически слабой инвариантности множества $\mathfrak{M}$ (см. [33]). Определим множество

$$U_0(t,x) \doteq \bigl\{u \in U(t,x) : V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant w(t, V(t,x))\bigr\},$$

которое непусто в силу неравенства (2.4). Поскольку $U_0(t,x) \subseteq U(t,x)$ для каждого $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, то множество $U_0(t,x)$ ограничено. Замкнутость данного множества доказывается так же, как в [32, с. 60].

Рассмотрим дифференциальное включение, отвечающее множеству $U_0(t,x)$:

$$\dot{x} \in F_0(t,x), \quad F_0(t,x) = \overline{\operatorname{co}}\, G_0(t,x), \tag{2.6}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $G_0(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$, $\overline{\operatorname{co}}\, G_0(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $G_0(t,x)$ (наименьшее выпуклое множество, содержащее множество $G_0(t,x)$). Функция $(t,x) \mapsto F_0(t,x)$ полунепрерывна сверху в силу леммы 10.1 работы [32]. Следовательно, через каждую точку $x \in M(0)$ проходит решение $\varphi(t,x)$ дифференциального включения (2.6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$ (см. [47, с. 60]). Так как $U_0(t,x) \subseteq U(t,x)$, то

$$F_0(t,x) \subseteq F(t,x)$$

для каждого $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, поэтому $\varphi(t,x)$ также является решением исходного дифференциального включения (1.2), которое продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим функцию $v(t) = V\big(t, \varphi(t,x)\big)$, которая дифференцируема при почти всех t в силу теоремы Радемахера. Отметим, что

$$\varphi(0,x) = x \in M(0),$$

поэтому $v(0) \leqslant 0$. Из (2.4) получаем, что неравенство

$$\dot{v}(t) \leqslant w(t, v(t)) \tag{2.7}$$

выполнено при почти всех $t \geqslant 0$ (см. лемму 9 работы [33]). Далее, из неравенств (2.7) и

$$v(0) \leqslant 0 \leqslant z_0 = z(0)$$

в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [58, с. 15] следует, что для всех $t \geqslant 0$ функция $v(t)$ и верхнее решение $z^*(t)$ задачи (2.1) удовлетворяют неравенству $v(t) \leqslant z^*(t)$. Следовательно, для любых $\tau \geqslant 0$ и $\vartheta > 0$ имеет место

$$\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, z^*(t) \leqslant 0\}. \tag{2.8}$$

Заметим, что

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta} = \\ = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

поэтому неравенства (2.5) следуют из (2.8). $\square$

§ 3. Об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное непрерывной многозначной функцией $t \mapsto M(t)$ и многозначные функции $t \mapsto D(t)$, $t \mapsto \widetilde{D}(t)$, также непрерывные в метрике Хаусдорфа. В частности, множество $D(t) = D(t,X)$ может является множеством достижимости управляемой системы (1.1), а множество $\widetilde{D}(t) = \widetilde{D}(t,\widetilde{X})$ — множеством достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

в момент времени t из некоторого начального множества $\widetilde{X}$.

Обозначим через $d(A,B) \doteq \sup\limits_{a \in A} \varrho(a,B)$ полуотклонение множества A от множества B, через

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$$

— расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $M^{\varepsilon}(t)$ — замкнутую ε-окрестность множества $M(t)$, то есть множество следующего вида

$$M^{\varepsilon}(t) \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x, M(t)) \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Напомним, что

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M^{\varepsilon}) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, D(t) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M^{\varepsilon}) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M^{\varepsilon}).$$

Предложение 3.1 (см. [55]). *Выполнены следующие утверждения:*

1) *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $\operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) \leqslant \varepsilon$ *для всех* $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, *то выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) &\leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D}, M^{\varepsilon}), \\ \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D}, M) &\leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M^{\varepsilon}); \end{aligned} \tag{3.1}$$

2) *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $\operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) \leqslant \varepsilon$ *для всех* $t \in [0, +\infty)$, *то*

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) &\leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D}, M^{\varepsilon}), \\ \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D}, M) &\leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M^{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение. Поскольку

$$\operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) \leqslant \varepsilon \ \text{ для всех } \ t \in [\tau, \tau+\vartheta],$$

то $\widetilde{D}(t) \subseteq D^{\varepsilon}(t)$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Поэтому, если $D(t^*) \subseteq M(t^*)$ при некотором $t^* \in [\tau, \tau+\vartheta]$, то $D^{\varepsilon}(t^*) \subseteq M^{\varepsilon}(t^*)$ и $\widetilde{D}(t^*) \subseteq D^{\varepsilon}(t^*) \subseteq M^{\varepsilon}(t^*)$. Таким образом, имеет место включение

$$\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, D(t) \subseteq M(t)\} \subseteq \{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\},$$

из которого получаем неравенство

$$\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, D(t) \subseteq M(t)\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] :\, \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\}. \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ D(t)\subseteq M(t)\}}{\vartheta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ \widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta} \doteq \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D},M^{\varepsilon}),$$

то есть получили первое из неравенств (3.1). Учитывая, что $D(t)\subseteq \widetilde{D}^{\varepsilon}(t)$ для всех $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, аналогично получаем доказательство второго неравенства.

Докажем второе утверждение. Отметим, что в данном случае неравенство (3.3) верно для всех $\tau\geqslant 0$, тогда

$$\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ D(t)\subseteq M(t)\}}{\vartheta} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ \widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)\leqslant\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D},M^{\varepsilon})\doteq\operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D},M^{\varepsilon}).$$

Аналогично доказывается второе неравенство (3.2). □

Следствие 3.1. *Пусть функции* $\varphi:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n$ *и* $\psi:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n$ *непрерывны для любого* $t\in\mathbb{R}_+$. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если существует такое* $\varepsilon>0$, *что* $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\varepsilon$ *для всех* $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, *то*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M)\leqslant\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\psi,M^{\varepsilon}),$$
$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\psi,M)\leqslant\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M^{\varepsilon});$$

2) *если существует такое* $\varepsilon>0$, *что* $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\varepsilon$ *для всех* $t\in[0,+\infty)$, *то*

$$\begin{aligned}\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi,M)&\leqslant\operatorname{freq}_{\vartheta}(\psi,M^{\varepsilon}),\\ \operatorname{freq}_{\vartheta}(\psi,M)&\leqslant\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi,M^{\varepsilon}).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следствия следует из предложения 3.1, так как $\operatorname{dist}(\varphi(t), \psi(t)) = |\varphi(t) - \psi(t)|$. Доказательство также можно получить непосредственно, как показано на рисунке 4.

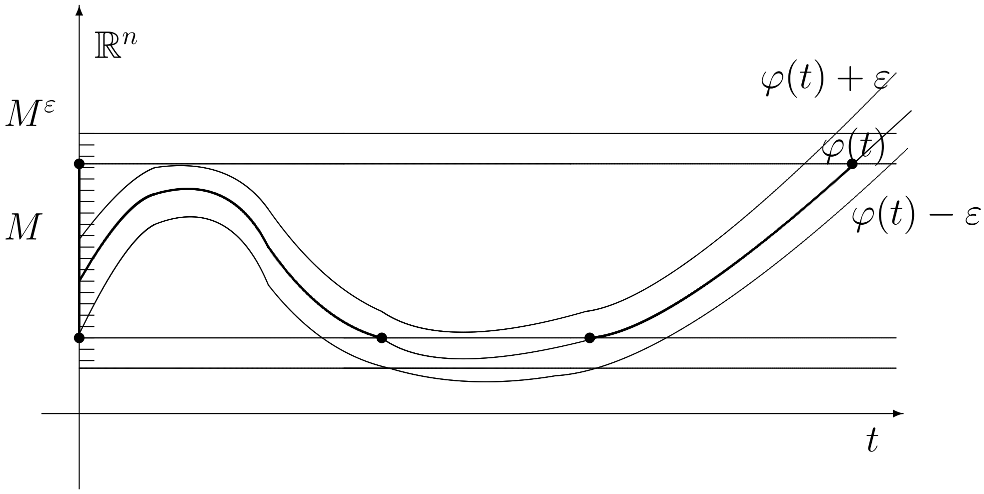

Рис. 4. Если $\varphi(t) \in M$, то $\psi(t) \in M^\varepsilon$, поэтому выполнено первое из неравенств (3.4).

П р и м е р 3.1. Найдем оценки характеристики $\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi, [0, 1])$, где

$$\varphi(t) = \sin t + 1 + \frac{1}{8(t+1)}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(t) = \sin t + 1$. Функция $\psi(t)$ периодическая с периодом 2π, поэтому

$$\operatorname{freq}_{[\tau, \tau+2\pi]}(\psi, [0, 1]) = \frac{1}{2} \quad \text{для любого} \quad \tau \geqslant 0$$

и, следовательно, $\operatorname{freq}_{2\pi}(\psi, [0, 1]) = \dfrac{1}{2}$. В силу теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi, [0, 1]) \leqslant \operatorname{freq}_*(\varphi, [0, 1]).$$

Поскольку функция $\psi(t)$ периодическая и $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, то предел $\operatorname{freq}(\varphi, [0, 1])$ существует и

$$\operatorname{freq}_*(\varphi, [0, 1]) = \operatorname{freq}(\varphi, [0, 1]) = \operatorname{freq}(\psi, [0, 1]) = \frac{1}{2}$$

(см. лемму 1 работы [30]), поэтому $\mathrm{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1]) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Отметим, что для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $|\varphi(t)-\psi(t)| \leqslant \dfrac{1}{8}$ и рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_0 \doteq \Big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \Big[0,\frac{7}{8}\Big]\Big\}.$$

Так как множество $\mathfrak{M}_0^{\frac{1}{8}} = \Big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \big[-\frac{1}{8},1\big]\Big\}$, то из (3.4) получаем

$$\mathrm{freq}_{2\pi}\Big(\psi,\Big[0,\frac{7}{8}\Big]\Big) \leqslant \mathrm{freq}_{2\pi}\Big(\varphi,\Big[-\frac{1}{8},1\Big]\Big) = \mathrm{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1]).$$

В силу периодичности функции $\psi(t)$ имеем

$$\mathrm{freq}_{2\pi}\Big(\psi,\Big[0,\frac{7}{8}\Big]\Big) = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,2\pi] : \psi \in [0,\frac{7}{8}]\}}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot \arcsin\frac{1}{8}\,,$$

следовательно

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{8} \leqslant \mathrm{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1]) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Оценка характеристики $\mathrm{freq}_T(D,M)$ **в случае, когда функции** $M(t), \widetilde{D}(t)$ **периодические с периодом** $T>0$ **и** $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big) = 0.$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$, заданное непрерывной функцией $M(t)$ и многозначные функции $D(t)$, $\widetilde{D}(t)$, также непрерывные в метрике Хаусдорфа. Предполагаем, что для каждого $t \geqslant 0$ множества $M(t)$, $D(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ непустые, компактные и функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T>0$ (под T-периодической функцией будем понимать функцию $d(t)$, удовлетворяющую при всех $t \geqslant 0$ равенству $d(t+T)=d(t)$).

В следующей теореме получена оценка характеристики $\mathrm{freq}_T(D,M)$ и приведены условия, при которых можно найти ее значение.

Теорема 3.1. (см. [35], [55]). *Пусть функции* $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ *периодические с периодом* $T>0$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big)=0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(D, M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\}}{T}$;
2) *если* $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(D, M) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M)\,.$$

Доказательство. Для каждого $\tau \geqslant 0$ определим функцию

$$R(\tau) \doteq \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau, \tau + T] : D(t) \subseteq M(t)\bigr\} - \operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\bigr\}.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы нужно показать, что

$$\inf_{\tau \geqslant 0} R(\tau) \leqslant 0.$$

По свойствам меры Лебега (так как из σ-аддитивности меры следует ее непрерывность [10, с. 274]) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t) \setminus M(t)\bigr\} \leqslant \varepsilon.$$

Далее, поскольку $h(t) \doteq \operatorname{dist}\bigl(D(t), \widetilde{D}(t)\bigr) \to 0$ при $t \to +\infty$, то для ε_0 существует момент времени t_0 такой, что $h(t) \leqslant \varepsilon_0$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, для всех $\tau \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau, \tau + T] : D(t) \subseteq M(t)\bigr\} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau, \tau + T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{h(t)}(t)\bigr\} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau, \tau + T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\bigr\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из (3.5) в силу периодичности функций $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ получаем, что для всех $\tau \geqslant t_0$

$$\begin{aligned} R(\tau) &\leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\} - \operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\} = \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\} - \operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\} = \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M^{\varepsilon_0}(t) \setminus M(t)\} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\leqslant 0$, из которого в силу определения функции $R(\tau)$ и относительных частот следует неравенство

$$\mathrm{freq}_T(D,M)\leqslant \mathrm{freq}_T(\widetilde{D},M).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Если $D(t)\subseteq \widetilde{D}(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то при всех $\tau\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t)\subseteq M(t)\big\}\geqslant \mathrm{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\big\}=\\=\mathrm{mes}\big\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\big\},\end{aligned}$$

поэтому $R(\tau)\geqslant 0$ для всех $\tau\geqslant 0$ и $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\geqslant 0$. Учитывая доказанное выше неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\leqslant 0$, получаем, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)=0$, следовательно

$$\mathrm{freq}_T(D,M)=\mathrm{freq}_T(\widetilde{D},M).$$

$\square$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}\in\mathbb{R}^2$ вида

$$\mathfrak{M}\doteq\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times(-\infty,c]\big\},\quad c\in\mathbb{R}.$$

Ниже приведено следствие теорем 1.1 и 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть функции $\varphi:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ и $\widetilde{\varphi}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ непрерывны, $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическая с периодом $T>0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\big(\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)\big)=0$. Тогда для любого $c\in\mathbb{R}$ выполнены следующие свойства:*

1) $\mathrm{freq}_T(\varphi,(-\infty,c])\leqslant \mathrm{freq}_T(\widetilde{\varphi},(-\infty,c])=\dfrac{\mathrm{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{\varphi}(t)\leqslant c\}}{T}$;

2) *если $\varphi(t)\leqslant\widetilde{\varphi}(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то*

$$\mathrm{freq}_T(\varphi,(-\infty,c])=\mathrm{freq}_T(\widetilde{\varphi},(-\infty,c])\,;$$

3) *если $\varphi(t)>\widetilde{\varphi}(t)$ и $\varphi(t+T)<\varphi(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то*

$$\mathrm{freq}_T(\varphi,(-\infty,c])=\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,T]:\varphi(t)\leqslant c\}}{T}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что функции $\varphi(t)$ и $\widetilde{\varphi}(t)$, удовлетворяющие условию следствия, ограничены, поэтому существует постоянная $E > 0$ такая, что $|\varphi(t)| \leqslant E$ и $|\widetilde{\varphi}(t)| \leqslant E$ для всех $t \geqslant 0$. Для каждого $t \geqslant 0$ рассмотрим множества $D(t) \doteq [-E, \varphi(t)]$ и $\widetilde{D}(t) \doteq [-E, \widetilde{\varphi}(t)]$. Тогда

$$\operatorname{dist}\bigl(D(t), \widetilde{D}(t)\bigr) = |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)|,$$
$$\operatorname{freq}_T(\varphi, (-\infty, c]) = \operatorname{freq}_T(\varphi, [-E, c]) = \operatorname{freq}_T(D, [-E, c])$$

и неравенство $\varphi(t) \leqslant \widetilde{\varphi}(t)$ равносильно неравенству $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$. Поэтому данное утверждение является следствием теорем 1.1 и 3.1.

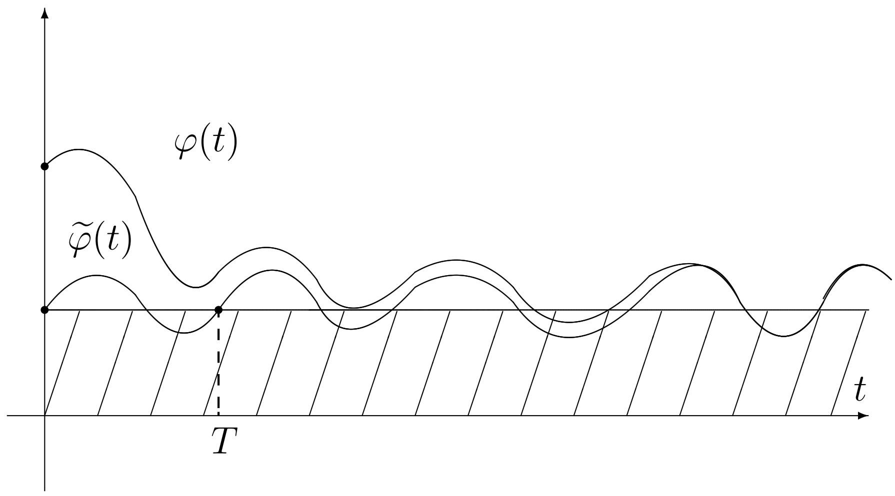

Рис. 5. Функция $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическая с периодом T, $\varphi(t) > \widetilde{\varphi}(t)$ и $\varphi(t+T) < \varphi(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

З а м е ч а н и е 3.2. Если функция $\varrho(t) = \varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)$ — убывающая на $[0, +\infty)$, то для любого $T > 0$ неравенство $\varrho(t+T) < \varrho(t)$ (равносильное неравенству $\varphi(t+T) < \varphi(t)$) выполнено для всех $t \geqslant 0$. Обратное утверждение неверно. Например, функция $\varrho(t) = \sin t + e^{-t}$ не является убывающей, но $\varrho(t + 2\pi) < \varrho(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$ (для всех $t \in \mathbb{R}$).

П р и м е р 3.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = -x + (\cos t + 1)u, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

где $u \in U = [-1, 1]$ и найдем множество достижимости данной системы из начального множества X :

$$D(t, X) = e^{-t}X + \Big\{ \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\big(t + \frac{\pi}{4}\big) + 1 \Big) u - \frac{3e^{-t}}{2} u, u \in U \Big\}, \quad t \geqslant 0.$$

Если $X = \widetilde{X} = \big[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\big]$, то многозначная функция

$$t \mapsto D(t, \widetilde{X}) = \Big\{ \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\big(t + \frac{\pi}{4}\big) + 1 \Big) u, u \in U \Big\}$$

периодическая с периодом 2π.

Пусть $\mathfrak{M} = \Big\{ (t, x) \in [0, +\infty) \times \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big] \Big\}$, тогда в силу теоремы 1.1

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{D}, M) = \frac{1}{4}.$$

Если $\widetilde{X} \subseteq X$, то $D(t + 2\pi, X) \subseteq D(t, X)$, поэтому (см. следствие 1.1)

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(D, M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : D(t, X) \subseteq M\}}{2\pi}.$$

Если $X \subseteq \widetilde{X}$, то $D(t, X) \subseteq D(t, \widetilde{X})$ для всех $t \geqslant 0$. Далее,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}\big(D(t, X), D(t, \widetilde{X})\big) = 0,$$

поэтому в силу теоремы 3.1 выполнено равенство

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(D, M) = \operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{D}, M) = \frac{1}{4}.$$

§ 4. Примеры вычисления характеристик, возникающие в задачах естествознания

Пусть $z(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{z} = w(t, z), \quad z(0) = z_0. \tag{2.1}$$

Во многих прикладных задачах величина $z(t)$ не может принимать отрицательные значения, например, в физических процессах неотрицательными являются энергии частиц, в химических — концентрации реагирующих веществ, в биологических — размер популяции, в экономических — величины производств и цены на продукцию (соответствующие примеры приведены, в частности, в работах [4, 6, 14, 25, 38]). Поэтому для исследования этих задач введем следующие характеристики, определенные для любого $c > 0$:

$$\begin{gathered}
\operatorname{freq}_\vartheta(z, (-\infty, c]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] :\ z(t) \leqslant c\bigr\}}{\vartheta}, \\
\operatorname{freq}(z, (-\infty, c]) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant c\bigr\}}{\vartheta}
\end{gathered} \tag{4.1}$$

(если последний предел существует). Отметим, что если по содержанию задачи величина $z(t)$ может быть отрицательной, то можно определить характеристики (4.1) для любого $c \in \mathbb{R}$. Для управляемых процессов, которые имеют периодический характер, будем рассматривать характеристику $\operatorname{freq}_\vartheta(z, (-\infty, c])$ при $\vartheta = T$, где $T > 0$ — период данного процесса.

Найдем значение характеристики

$$\operatorname{freq}_T(z, (-\infty, c]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + T] : z(t) \leqslant c\}}{T},$$

где $z(t)$ — решение линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(t)z + b(t), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Предполагаем, что функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывные и периодические с периодом $T > 0$ и $\int_0^T a(t)dt \neq 0$. Через $\widetilde{z}(t)$ обозначим T-периодическое решение линейного уравнения

$$\dot{z} = a(t)z + b(t),$$

тогда

$$\widetilde{z}(t) = \exp\Big(\int_0^t a(\tau)d\tau\Big)\Big(c_0 + \int_0^t b(s)\exp\Big(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Big)ds\Big),$$

где

$$c_0 = \Big(\exp\Big(-\int_0^T a(\tau)d\tau\Big) - 1\Big)^{-1}\int_0^T b(s)\exp\Big(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Big)ds.$$

Лемма 4.1. (см. [35]). *Если* $\int_0^T a(\tau)d\tau < 0$, *то выполнены следующие свойства:*

1) *если* $z_0 \leqslant c_0$, *то* $\operatorname{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}}{T}$;

2) *если* $z_0 > c_0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z(t) \leqslant c\}}{T}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем решение задачи Коши (4.2):

$$z(t) = \exp\Big(\int_0^t a(\tau)d\tau\Big)\Big(z_0 + \int_0^t b(s)\exp\Big(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Big)ds\Big).$$

Найдем

$$\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) = (z_0 - c_0)\exp\Big(\int_0^t a(\tau)d\tau\Big). \tag{4.3}$$

Учитывая периодичность функции $a(t)$ и неравенство $\int_0^T a(\tau)d\tau < 0$, найдем

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(\tau)d\tau = \lim_{k\to\infty} k \cdot \int_0^T a(\tau)d\tau = -\infty,$$

тогда $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Если $z_0 \leqslant c_0$, то $\varphi(t) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$, поэтому первое утверждение леммы получаем из утверждения 2) следствия 3.2. Далее, если $z_0 > c_0$, то $\varphi(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Кроме того, в этом случае для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\varphi(t+T) < \varphi(t)$ (это следует из неравенства $\int_0^T a(\tau)d\tau < 0$). Таким образом, второе утверждение леммы получается из утверждения 3) следствия 3.2. $\square$

Равенство (4.3) применяется также для доказательства следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть* $\int_0^T a(\tau)d\tau > 0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) *если* $z_0 < c_0$, *то* $\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c]) \leqslant \mathrm{freq}(z, (-\infty, c]) = 1$;

2) *если* $z_0 > c_0$, *то* $\mathrm{freq}_T(z, (\infty, c]) = \mathrm{freq}(z, (-\infty, c]) = 0$;

3) *если* $z_0 = c_0$, *то*

$$\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \mathrm{freq}(z, (-\infty, c]) = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, T] : z(t) \leqslant c\}}{T}. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $z_0 < c_0$, из равенства (4.3) получаем

$$\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

поэтому $z(t) \to -\infty \quad$ при $\quad t \to +\infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon \leqslant c$ найдется такое $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство

$z(t) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\operatorname{freq}(z,(-\infty,c]) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]: z(t)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} =$$
$$= \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,t_0): z(t)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} + \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[t_0,\vartheta]: z(t)<\varepsilon\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} =$$
$$= 0 + \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\vartheta-t_0}{\vartheta} = 1.$$

2) Если $z_0 > c_0$, из равенства (4.3) получаем

$$\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

поэтому $z(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon > c$ найдется такое $t_0 > 0$, что для всех $t > t_0$ выполенено неравенство $z(t) > \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c]) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\ z(t)\leqslant c\bigr\}}{T} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\tau\geqslant t_0}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\ z(t)\leqslant c\bigr\}}{T} =$$
$$= \inf_{\tau\geqslant t_0}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\ z(t)>\varepsilon, z(t)\leqslant c\bigr\}}{T}.$$

Поскольку для любого $\tau\geqslant t_0$ множество тех t из отрезка $[\tau,\tau+T]$, для которых $z(t)>\varepsilon$ и $z(t)\leqslant c$ — пустое множество, то мера этого множества равно нулю. Следовательно,

$$\operatorname{freq}_T(z,(-\infty,c]) = 0.$$

Дальше докажем, что $\operatorname{freq}(z(-\infty,c]) = 0:$

$$\operatorname{freq}(z,(-\infty,c]) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]: z(t)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} =$$
$$= \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,t_0): z(t)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} + \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[t_0,\vartheta]: z(t)>\varepsilon, z(t)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta} =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

3) Если $z_0 = c_0$, то $z(t) = \widetilde{z}(t)$ — периодическое решение, поэтому равенство (4.4) выполнено в силу следствия 3.2.

П р и м е р 4.1. Получим равенства для вычисления характеристики $\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c])$, где $z(t)$ — численность популяции, динамика которой задана задачей Коши

$$\dot{z} = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t)z\big)z, \quad z(0) = z_0. \tag{4.5}$$

Здесь $z_0 \geqslant 0$, $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ — непрерывные периодические функции с периодом $T > 0$. Предполагаем, что существуют постоянные α_1, α_2 и ε_1, ε_2 такие, что

$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_2, \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2. \tag{4.6}$$

Покажем сначала, что для любого начального размера популяции $z_0 > 0$ с течением времени кривая численности популяции $z(t)$ стремится к периодической кривой, которая задается следующей функцией:

$$\widetilde{z}(t) = \frac{\widetilde{z}_0 \exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{\widetilde{z}_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}, \qquad \text{где}$$

$$\widetilde{z}_0 = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_0^T \varepsilon(\tau)d\tau\Big) - 1}{\displaystyle\int_0^T \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds}.$$

Действительно, решение задачи Коши (4.5) имеет вид:

$$z(t) = \frac{z_0 \exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{z_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}.$$

Тогда $z(t) - \widetilde{z}(t) = h(t) \cdot g(t)$, где

$$h(t) = \frac{z_0 - \widetilde{z}_0}{z_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau\Big) ds + 1},$$

$$g(t) = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau\Big)}{\widetilde{z}_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau\Big) ds + 1}.$$

Из неравенств (4.6) следует, что

$$\int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau\Big) ds \geqslant \alpha_1 \int_0^t e^{\varepsilon_1 s} ds = \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}\big(e^{\varepsilon_1 t} - 1\big). \qquad (4.7)$$

Поэтому, если $z_0 > 0$, то

$$z_0 \int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau\Big) ds + 1 \to \infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, функция $h(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Далее, функция $g(t)$ периодическая с периодом $T > 0$, поскольку функция $\widetilde{z}(t)$ периодическая с тем те периодом. Поэтому, чтобы доказать ограниченность $g(t)$, достаточно показать, что она ограничена на отрезке $[0, T]$. Из (4.6) и (4.7) следует, что $\widetilde{z}_0 > 0$, тогда

$$\widetilde{z}_0 \int_0^t \alpha(s) \exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau\Big) ds + 1 > 1.$$

Следовательно, для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$g(t) < \exp\Big(\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau\Big)$$

и если $t \in [0, T]$, то

$$g(t) < \exp\Big(\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau\Big) < e^{\varepsilon_2 t} \leqslant e^{\varepsilon_2 T}.$$

Таким образом, если $z_0 > 0$, то выполнено равенство

$$\lim_{t\to\infty}(z(t) - \widetilde{z}(t)) = 0. \tag{4.8}$$

Пусть $z_0 \in (0, \widetilde{z}_0]$, тогда $\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Из (4.8) в силу следствия 3.2 получаем, что

$$\operatorname{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \operatorname{freq}(\widetilde{z}, (-\infty, c]) = \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\bigr\}}{T}.$$

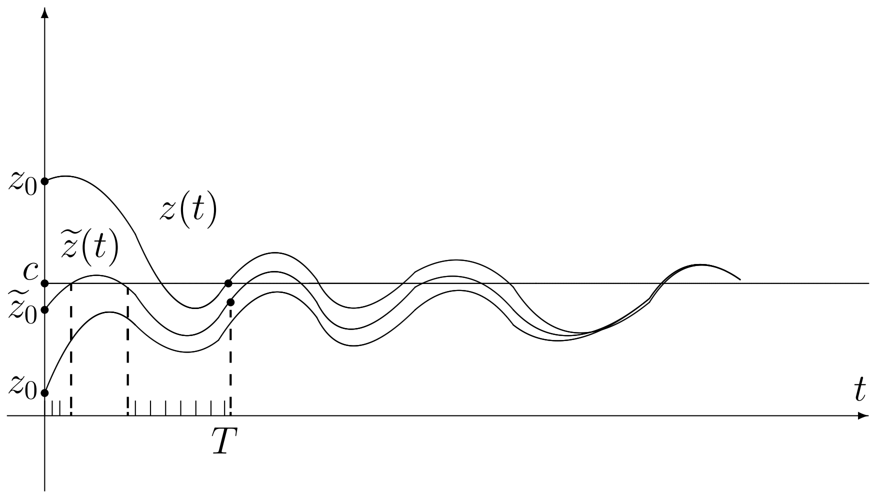

Рис. 6. Функции $z(t)$ и $\widetilde{z}(t)$ в случаях, когда $z_0 \leqslant \widetilde{z}_0$ и $z_0 > \widetilde{z}_0$; на оси Ot заштриховано множество $\{t \in [0, T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}$.

Пусть $z_0 > \widetilde{z}_0$. Несложно проверить, что неравенство $h(t+T) \leqslant h(t)$ выполнено для всех $t \geqslant 0$. Учитывая периодичность и положительность функции $g(t)$, получаем

$$\varphi(t+T) = h(t+T)g(t+T) = h(t+T)g(t) \leqslant h(t)g(t) = \varphi(t)$$

для всех $t \geqslant 0$. Тогда в силу следствия 3.2

$$\operatorname{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, T] : z(t) \leqslant c\bigr\}}{T}.$$

Глава 2
Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными параметрами

В данной главе представлено продолжение работ [28, 29, 32, 34], в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в исследовании множеств, которые не являются инвариантными в «классическом» смысле, но обладают свойством статистической инвариантности.

Здесь исследуются статистически инвариантные множества и статистические характеристики управляемых систем со случайными параметрами. В отличие от детерминированных систем, для систем со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда множество достижимости системы $D\big(t,\sigma,M(\sigma)\big)$ находится в множестве $M(h^t\sigma)$ с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех σ из некоторого множества $\Sigma_* \subset \Sigma$, вероятностная мера которого $\nu(\Sigma_*)=\mu$, $\mu\in(0,1]$. Поэтому для таких систем необходимо рассматривать свойства статистической инвариантности, выполненные с заданной вероятностью. В данной работе исследуются условия инвариантности (в указанном выше смысле) множества $\mathfrak{M}(\sigma)$, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной Кларка, динамической системы сдвигов и характеристики $\operatorname{freq}(\sigma,z^*,(-\infty,0])$, которая является относительной частотой попадания траектории верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(\sigma,0)=z_0(\sigma)$$

в множество $(-\infty, 0]$. Здесь также получены оценки различных статистических характеристик для управляемых систем со случайными параметрами.

Результаты работы могут найти применение в задачах, возникающих в биологии, экономике и технике, которые описываются следующей вероятностной моделью. Рассматривается управляемая система, которую можно отождествить со стационарным случайным процессом. Для этого процесса длины промежутков между моментами переключения с одного состояния на другое являются случайными величинами с заданной функцией распределения. Множество состояний процесса конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности перехода с одного состояния на другое. Представляет интерес оценить относительную частоту поглощения множества достижимости управляемой системы заданным множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ и получить условия инвариантности и статистической инвариантности множества $\mathfrak{M}(\sigma)$, выполненные с заданной вероятностью.

§ 5. Теорема сравнения для статистических характеристик управляемой системы со случайными параметрами

В данном параграфе исследуются статистические характеристики множества достижимости семейства управляемых систем

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$. В частности, будем изучать управляемую систему, порожденную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U. Предполагаем, что множество Σ содержит бесконечное число элементов.

О п р е д е л е н и е 5.1 (см. [1, с. 156], [11, с. 12]). *Метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — *однопараметрическая группа измеримых преобразований* фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^t A \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, ν — вероятностная мера с носителем на пространстве Σ, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^t A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

У с л о в и е 5.1. Существует $\sigma \in \Sigma$, для которого выполнены перечисленные ниже свойства:

1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $(x, u) \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(t, x) \mapsto U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $\sigma \in \Sigma$ фиксировано и удовлетворяет условию 5.1. Поставим в соответствие системе (5.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(h^t\sigma, x) = \operatorname{co} H(h^t\sigma, x), \tag{5.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(h^t\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f\big(h^{t_i}\sigma, x_i, U(h^{t_i}\sigma, x_i)\big)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Далее, запись $\operatorname{co} H(h^t\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $H(h^t\sigma, x)$.

Каждому множеству $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $D(t,\sigma,X)$, состоящее из всех значений в момент t решений $t \mapsto \varphi(t,\sigma,x)$ включения (5.2), когда начальное условие $\varphi(0,\sigma,x) = x$ пробегает все множество X. Множество $D(t,\sigma,X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ интегральной воронки включения (5.2) и называется *множеством достижимости* управляемой системы (5.1). Полагаем, что для заданного множества $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество достижимости $D\big(t,\sigma,X\big)$ существует при всех $t \geqslant 0$; это означает, что для каждого $x \in X$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (5.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$.

Введем в рассмотрение отображение $t \mapsto M(h^t\sigma)$ со значениями в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(h^t\sigma)\}.$$

Предполагаем, что функция $t \mapsto M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа. Для определения статистических характеристик множества достижимости рассмотрим подмножество числовой прямой

$$\alpha(\vartheta,\sigma,X) \doteq \big\{t \in [0,\vartheta] :\ D\big(t,\sigma,X\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Определение 5.2 (см. [29, 34]). *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t,\sigma,X)$ системы (5.1) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется характеристика

$$\begin{aligned}\operatorname{freq}(\sigma,D_X,M) &\doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\sigma,X)}{\vartheta} = \\ &= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \quad (5.3)\end{aligned}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (5.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\sigma, D_X, M) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\sigma,X)}{\vartheta},$$
$$\operatorname{freq}_*(\sigma, D_X, M) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\sigma,X)}{\vartheta}$$

называются соответственно, *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $D(t,\sigma,X)$ системы (5.1) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$.

Определение 5.3 (см. [29, 34]). Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (5.1), если выполнено равенство $\operatorname{freq}\big(\sigma, D_{M(\sigma)}, M\big) = 1$.

Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *положительно инвариантным* относительно системы (5.1), если для любого $t \geqslant 0$ выполнено вложение

$$D\big(t,\sigma,M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma).$$

Пусть задано положительное число r. Обозначим через

$$M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$$

замкнутую r-окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через

$$N^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$$

внешнюю r-окрестность границы $M(\sigma)$, также построим множество

$$\mathfrak{N}^r(\sigma) = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(h^t\sigma)\}.$$

Определение 5.4 (см. [22]). Скалярная функция $x \mapsto V(\sigma,x)$ называется *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $\mathfrak{M}(\sigma)$), если функция $(t,x)\mapsto V(h^t\sigma,x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(h^t\sigma,x)\leqslant 0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{M}(\sigma)$;

2) $V(h^t\sigma,x)>0$ для некоторого $r>0$ и всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r(\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 5.5 (см. [57]). Функция $(t,x)\mapsto V(h^t\sigma,x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого $\vartheta>0$ найдется такая константа $\ell=\ell(\vartheta,\sigma)$, что для любой пары точек

$$(t_i,x_i)\in Q\doteq\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:|t|\leqslant\vartheta, x\in M^r(h^t\sigma)\},\quad i=1,2$$

выполнено неравенство

$$\big|V(h^{t_1}\sigma,x_1)-V(h^{t_2}\sigma,x_2)\big|\leqslant\ell(|t_1-t_2|+|x_1-x_2|).$$

О п р е д е л е н и е 5.6. Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q\in\mathbb{R}^n$ называется следующий предел (см. [9, с. 17])

$$V^o(\sigma,x;q)\doteq\limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)}\frac{V(h^\varepsilon\vartheta,y+\varepsilon q)-V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\doteq\inf_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q);\;\; V^o_{\max}(\sigma,x)\doteq\sup_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q),$$

называются *нижней и верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (5.2).

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z=w(h^t\sigma,z),\quad z(0,\sigma)=z_0(\sigma).\tag{5.4}$$

У с л о в и е 5.2. Существует $\sigma \in \Sigma$ такое, что имеют место следующие свойства:

1) для каждого $t \geqslant 0$ функция $z \mapsto w(h^t\sigma, z)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,;$$

2) для каждого $z \in \mathbb{R}$ функция $t \mapsto w(h^t\sigma, z)$ кусочно-непрерывна.

Если условие 5.2 выполнено для заданного $\sigma \in \Sigma$, то существует верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи Коши (5.4), определенное для всех $t \in [0, \infty)$ (см. [28], [66], [67]).

Рассмотрим характеристику

$$\operatorname{freq}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] :\ z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}. \tag{5.5}$$

Если предел (5.5) существует, то $\operatorname{freq}(\sigma, z^*, (-\infty, 0])$ является относительной частотой попадания траектории решения $z^*(t, \sigma)$ в множество $(-\infty, 0]$. Если данный предел не существует, исследуем характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) \doteq \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] :\ z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) \doteq \underline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] :\ z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 5.1. (см. [36]). *Пусть для $\sigma \in \Sigma$ выполнены условия* 5.1 *и* 5.2 *и для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения включения* (5.2) *с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x$ продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{5.6}$$

Тогда, если $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\max\limits_{x \in X} V(\sigma, x) \leqslant z_0(\sigma)$, *то выполнены неравенства*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{freq}^*(\sigma, D_X, M) \geqslant \operatorname{freq}^*(\sigma, z^*, (-\infty, 0]),\\
&\operatorname{freq}_*(\sigma, D_X, M) \geqslant \operatorname{freq}_*(\sigma, z^*, (-\infty, 0]).
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Следовательно, если $z_0(\sigma) = 0$ *и* $\operatorname{freq}(\sigma, z^*, (-\infty, 0] = 1$, *то множество* $\mathfrak{M}(\sigma)$ *статистически инвариантно относительно управляемой системы* (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ и для каждого $x \in X$ обозначим через $\varphi(t, \sigma, x)$ некоторое решение включения (5.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x \in X$. Рассмотрим функцию

$$
v(t, \sigma) = V\bigl(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\bigr).
$$

Функция $t \mapsto v(t, \sigma)$ удовлетворяет локальному условию Липшица (см. [22]), поэтому в силу теоремы Радемахера она дифференцируема при почти всех $t \geqslant 0$. Поскольку $\varphi(0, \sigma, x) \in X$, то

$$
v(0, \sigma) = V(\sigma, x) \leqslant \max_{x \in X} V(\sigma, x) \leqslant z_0(\sigma).
$$

В работе [22] показано, что в точках дифференцируемости функции $v(t, \sigma)$ выполнено неравенство

$$
\dot{v}(t, \sigma) \leqslant V^o_{\max}\bigl(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\bigr),
$$

поэтому, учитывая (5.6), имеем при всех $t \geqslant 0:$

$$
\dot{v}(t, \sigma) \leqslant w(h^t\sigma, v(t, \sigma)).
$$

Из последнего неравенства и неравенства $v(0, \sigma) \leqslant z_0(\sigma)$, в силу теоремы 18.1 работы [28] верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи (5.4) определено и удовлетворяет неравенству $v(t, \sigma) \leqslant z^*(t, \sigma)$ при всех $t \geqslant 0$. Обозначим через $\operatorname{freq}_*(\sigma,\varphi,M)$ нижнюю относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество $\mathfrak{M}(\sigma)$, тогда

$$\operatorname{freq}_*(\sigma,\varphi,M) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:\ \varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\bigr\}}{\vartheta} = \\ = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:\ v(t,\sigma)\leqslant 0\bigr\}}{\vartheta}.$$

Далее, из неравенства $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует, что

$$\operatorname{freq}_*(\sigma,\varphi,M)\geqslant \operatorname{freq}_*(\sigma,z^*,(-\infty,0])$$

и, так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (5.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x)=x\in X$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_*(\sigma,D_X,M)\geqslant \operatorname{freq}_*(\sigma,z^*,(-\infty,0]).$$

Аналогично получаем неравенство

$$\operatorname{freq}^*(\sigma,D_X,M)\geqslant \operatorname{freq}^*(\sigma,z^*,(-\infty,0]).$$

Пусть $z_0(\sigma)=0$ и $\operatorname{freq}(\sigma,z^*,(-\infty,0])=1$. Рассмотрим множество $X=M(\sigma)$, тогда для данного $\sigma\in\Sigma$ выполнено неравенство

$$\operatorname{freq}_*\bigl(\sigma,D_{M(\sigma)},M\bigr)\geqslant \operatorname{freq}_*(\sigma,z^*,(-\infty,0])=\operatorname{freq}(\sigma,z^*,(-\infty,0])=1,$$

следовательно

$$\operatorname{freq}\bigl(\sigma,D_{M(\sigma)},M\bigr)=\operatorname{freq}_*\bigl(\sigma,D_{M(\sigma)},M\bigr)=1,$$

то есть множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ статистически инвариантно относительно управляемой системы (5.1). $\square$

Будем говорить, что $\sigma\in\Sigma$ обладает свойством 1, если для него выполнены условия теоремы 5.1, то есть условия 5.1 и 5.2 и условие продолжаемости на полуось $\mathbb{R}_+$ всех решений включения (5.2) с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x$, $x \in M(\sigma)$. Также предполагаем, что для заданного σ существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство (5.6).

Следствие 5.1. *Пусть существует множество $\Sigma_* \subseteq \Sigma$ с мерой $\nu(\Sigma_*) = \mu$, где $\mu \in (0, 1]$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma_*$ выполнено свойство* 1. *Тогда, если $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\max\limits_{x \in X} V(\sigma, x) \leqslant z_0(\sigma)$ для почти всех $\sigma \in \Sigma_*$, то неравенства* (5.7) *выполнены с вероятностью $\nu \geqslant \mu$.*

Следовательно, если $z_0(\sigma) = 0$ и $\operatorname{freq}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) = 1$ для почти всех $\sigma \in \Sigma_*$, то множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ статистически инвариантно относительно управляемой системы (5.1) *с вероятностью $\nu \geqslant \mu$ (если $\mu = 1$, то множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ статистически инвариантно с вероятностью единица).*

§ 6. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемой линейной системы

В данном параграфе получены оценки статистических характеристик управляемой линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U, \tag{6.1}$$

где U — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^m$.

Покажем, что данную систему можно отождествить со *стационарным в узком смысле* случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$. Для этого опишем *метрическую динамическую систему* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая параметризует систему (6.1) и таким образом эта система превращается в систему со случайными коэффициентами (см. [18], [28]). В дальнейшем систему (6.1) будем называть системой ξ.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, которое является прямым произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей

$$\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_k, \ldots), \text{ где } \theta_k \in (0, \infty), \ \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = +\infty,$$

$\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_0 \in I_0, \ldots, \theta_k \in I_k\},$$

где $I_i \doteq (t_i, s_i]$, $t_i < s_i$, а вероятностная мера ν_1 определена следующим образом. Для каждого полуинтервала I_i определим вероятностную меру

$$\widetilde{\nu}_1(I_i) = F_i(s_i) - F_i(t_i)$$

с помощью функций распределения $F_i(t)$, $t \in (0, \infty)$ (последняя запись означает, что $F_i(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 0]$).

На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\nu}_1(E_k) = \widetilde{\nu}_1(I_0)\widetilde{\nu}_1(I_1) \ldots \widetilde{\nu}_1(I_k).$$

Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [59, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера ν_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\nu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$.

Далее, пусть $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ — конечное множество матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно. Каждой матричной паре $\psi_i = (A_i, B_i)$ поставим в соответствие линейную стационарную систему с матрицами A_i и B_i :

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

Обозначим через Σ_2 множество последовательностей

$$\Sigma_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots),\, \varphi_k \in \Psi\}.$$

Систему множеств $\mathfrak{A}_2$ определим как наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$G_k = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k),$$

где G_k — совокупность всех последовательностей из Σ_2, у которых фиксированы $k+1$ первых членов.

Пусть заданы неотрицательные функции

$$\pi_i = p_0(\psi_i), \;\; p_{ij} = p\left(\psi_i, \psi_j\right)$$

такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{\ell} p_{ij} = 1$ для всех $i = 1, \dots, \ell$ и числа $\pi_1, \dots, \pi_\ell$ удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, \dots, \ell. \tag{6.2}$$

Всякое неотрицательное решение данной системы, удовлетворяющее условию $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$, принято называть *стационарным или инвариантным* распределением вероятностей цепи Маркова. Меру цилиндрического множества G_k определим равенством

$$\widetilde{\nu}_2(G_k) = p_0(\varphi_0) p\left(\varphi_0, \varphi_1\right) \dots p\left(\varphi_{k-1}, \varphi_k\right)$$

и обозначим через ν_2 продолжение меры $\widetilde{\nu}_2$ с алгебры цилиндрических множеств на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$.

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_0 = 0, \ \ \tau_k(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i, \ \ \text{где} \ \ \theta \in \Sigma_1.$$

Предполагаем, что $\theta_i \in (0, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, причем $\theta_1, \theta_2, \ldots$ имеют одинаковое распределение с функцией распределения $F(t)$ и математическим ожиданием $m_\theta < \infty$. Обозначим через $z = z(t, \theta)$ число точек последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных левее t, тогда

$$z = z(t, \theta) = \max \big\{ k : \tau_k \leqslant t \big\}, \ \ \text{где} \ \ t \geqslant 0.$$

Величина $z(t, \theta)$ называется *процессом восстановления.* Зададим функцию распределения случайной величины θ_0 равенством

$$F_0(t) = \frac{1}{m_\theta} \int_0^t \big(1 - F(s)\big) ds, \quad t \in (0, \infty), \tag{6.3}$$

тогда $z(t, \theta)$ является *стационарным процессом восстановления* (см. [12, с. 145–147]). Это означает, что данный процесс имеет постоянную скорость восстановления, то есть функция восстановления

$$N(t) \doteq \mathrm{M} z(t, \theta) + 1$$

линейна по $t : N(t) = at + 1$. Здесь и далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины или функции.

На вероятностном пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ определим преобразование сдвига

$$h_1^t \theta = \big(\tau_{z+1} - t, \theta_{z+1}, \theta_{z+2}, \ldots \big), \quad t > 0.$$

Поскольку $z(t, \theta)$ — стационарный процесс восстановления, преобразование h_1^t сохраняет меру ν_1, то есть для любого множества $G \in \mathfrak{A}_1$ и всех $t \geqslant 0$

выполнено равенство $\nu_1(h_1^t G) = \nu_1(G)$. На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ при каждом $\theta \in \Sigma_1$ зададим преобразование сдвига

$$h_2^t(\theta)\varphi = (\varphi_z, \varphi_{z+1}, \dots).$$

Из стационарности цепи Маркова следует, что преобразование h_2^t сохраняет меру ν_2. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ также определим преобразование сдвига равенством

$$h^t\sigma = h^t(\theta, \varphi) = \big(h_1^t\theta, h_2^t(\theta)\varphi\big). \tag{6.4}$$

Построенная динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ называется косым произведением динамических систем $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1, h_1^t)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2, h_2^t(\theta))$, а *преобразование* $h^t\sigma$ *сохраняет меру* $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ (см. [11, с. 190]), которая является прямым произведением вероятностных мер ν_1 и ν_2.

На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ введем последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)$, где $\zeta_k(\varphi) = \varphi_k$, $\varphi_k \in \Psi$. Если выполнены равенства (6.2), то последовательность ζ образует однородную цепь Маркова, которая является *стационарной в узком смысле.* В данной работе предполагаем, что цепь Маркова ζ *неприводима* (неразложима) и *положительно возвратна.* Это означает, что все состояния цепи Маркова образуют один класс сообщающихся возвратных состояний и среднее время возвращения в каждое из этих состояний конечно (см., например, [59, с. 598–603]).

Пусть $\xi(\sigma) = \varphi_0$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$. Определим случайный процесс

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big),$$

тогда для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ функция $t \mapsto \xi(h^t\sigma)$ кусочно-постоянная и принимает значения в множестве Ψ. Функция $\xi(t,\sigma) = \xi(h^t\sigma)$ является *стационарным в узком смысле* случайным процессом. Это означает, что все конечномерные распределения данного процесса инвариантны относительно сдвига по параметру t, то есть равенство

$$\nu\{\xi(t_1+t)\in B_1,...,\xi(t_k+t)\in B_k\}=\nu\{\xi(t_1)\in B_1,...,\xi(t_k)\in B_k\}$$

выполнено для любого $k\in\mathbb{N}$, произвольных моментов времени $t,t_1,...,t_k$ и любых борелевских множеств $B_1,...,B_k$ (см. [11, с. 167], [59, с. 433]).

Предполагаем, что случайные величины $\theta_1,\theta_2,\ldots$ имеют функцию распределения $F(t)$, которая удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е 6.1. 1) $F(t)=0$ при $t\leqslant 0$, $m_\theta\doteq\displaystyle\int_0^\infty t\,dF(t)<+\infty$;
2) существуют такие постоянные $a>0$, $C\geqslant 0$ и $\delta>0$, что

$$F(t)\leqslant C\,t^a \quad\text{при}\quad t\in(0,\delta).$$

Если выполнено условие 6.1, то найдется множество $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0)=1$ и для любого $\sigma\in\Sigma_0$ моменты переключения $\tau_1,\tau_2,\ldots$ случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и число этих моментов бесконечно (см. [28, с. 106]).

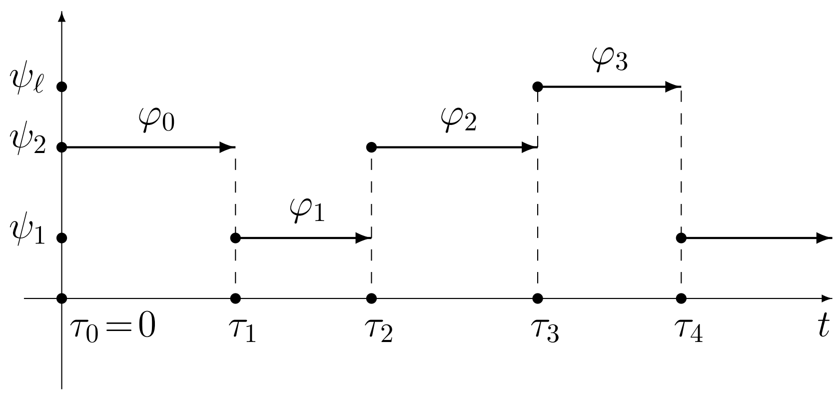

Рис. 7. Функция $t\mapsto\xi(h^t\sigma)$ — одна из возможных реализаций случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$.

Рассмотрим промежутки $[\tau_1,\tau_2),[\tau_2,\tau_3),\ldots$, длины которых $\theta_1,\theta_2,\ldots$ имеют функцию распределения $F(t)$. Распределение θ_0 длины промежутка $[0,\tau_1)$ определяется равенством (6.3) и в общем случае отлично от $F(t)$, но поскольку значения пределов $\mathrm{freq}_*(\sigma,D_M,M)$ и $\mathrm{freq}^*(\sigma,D_M,M)$ не зависят от поведения системы на $[0,\tau_1)$, данный промежуток в дальнейшем рассматривать не будем. Из промежутков $[\tau_1,\tau_2),[\tau_2,\tau_3),\ldots$ выберем те, на которых система ξ находится в состоянии ψ_i, обозначим их $J_{1i},J_{2i},\ldots$. Пусть $a_i\geqslant 0$ — фиксированное число. Введем случайные величины θ_{ki}, где θ_{ki} равна длине промежутка J_{ki} и случайные величины s_{ki}, $k=1,2,\ldots$, где

$$s_{ki}=\begin{cases}\theta_{ki}-a_i, & \text{если}\ \ \theta_{ki}>a_i,\\ 0, & \text{если}\ \ \theta_{ki}\leqslant a_i.\end{cases}$$

Пусть $n_i=n_i(n)$ — количество тех промежутков из $[\tau_1,\tau_2),\ldots,[\tau_n,\tau_{n+1})$, для которых система находится в состоянии ψ_i (здесь $n_1+\ldots+n_\ell=n$).

Лемма 6.1. *Пусть выполнено условие* 6.1 *и цепь Маркова ζ неприводима и положительно возвратна. Тогда для почти всех $\sigma\in\Sigma$ справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_i}s_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}=\frac{\pi_i}{m_\theta}\Big(\int_{a_i}^{\infty}tdF(t)-a_i\big(1-F(a_i)\big)\Big),\quad i=1,\ldots,\ell. \tag{6.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу *эргодической теоремы* для неприводимой положительно возвратной цепи Маркова ζ для почти всех σ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_i}{n}=\pi_i$ (см. [12, с. 202]). Из усиленного закона больших чисел следует, что для почти всех σ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k=m_\theta. \tag{6.6}$$

Далее, для каждого фиксированного $i = 1, \ldots, \ell$ случайные величины $\theta_{ki}, \theta_{k+1,i}$ независимы, это следует из независимости θ_k, θ_{k+1}; также независимы случайные величины $s_{ki}, s_{k+1,i}$, $k = 1, 2, \ldots$ Найдем математическое ожидание случайной величины s_{ki}, представив ее в виде разности $s_{ki} = s_{ki}^1 - s_{ki}^2$, где

$$s_{ki}^1 = \begin{cases} \theta_{ki}, & \text{если } \ \theta_{ki} > a_i, \\ 0, & \text{если } \ \theta_{ki} \leqslant a_i, \end{cases} \qquad s_{ki}^2 = \begin{cases} a_i, & \text{если } \ \theta_{ki} > a_i, \\ 0, & \text{если } \ \theta_{ki} \leqslant a_i. \end{cases}$$

Так как величины θ_{ki} имеют функцию распределения $F(t)$, то

$$\mathrm{M}s_{ki}^1 = \int_{a_i}^{\infty} t dF(t),$$

$$\mathrm{M}s_{ki}^2 = a_i \cdot \nu(\theta_{ki} > a_i) + 0 \cdot \nu(\theta_{ki} \leqslant a_i) = a_i\bigl(1 - F(a_i)\bigr).$$

Следовательно,

$$\mathrm{M}s_{ki} = \mathrm{M}s_{ki}^1 - \mathrm{M}s_{ki}^2 = \int_{a_i}^{\infty} t dF(t) - a_i\bigl(1 - F(a_i)\bigr).$$

Таким образом, для почти всех σ (в силу усиленного закона больших чисел)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_i} s_{ki} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n} \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} s_{ki} = \pi_i \Bigl(\int_{a_i}^{\infty} t dF(t) - a_i\bigl(1 - F(a_i)\bigr)\Bigr). \quad (6.7)$$

Равенства (6.5) следуют из (6.6) и (6.7). $\square$

Пусть задано подмножество M пространства $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $D_i(t, X)$ множество достижимости стационарной линейной системы $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$ в момент времени t из начального множества X, также введем обозначения

$$\alpha_i = \alpha_i(X, M) = \min\bigl\{\tau \in [0, \infty) : D_i(t, X) \subseteq M \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\bigr\},$$

$$\beta_i = \beta_i(X, M) = \inf\bigl\{\tau \in [0, \infty) : D_i(t, X) \cap M = \varnothing \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\bigr\},$$

$$i = 1, \ldots, \ell.$$

Если какого-либо из этих моментов времени не существует, положим $\alpha_i = \infty$ или $\beta_i = \infty$.

Множество $\{(t, x) : t \geqslant 0,\, x \in X\}$ называется положительно инвариантным относительно системы ξ, если $D(t, \sigma, X) \subseteq X$ для всех $t \geqslant 0$ и $\sigma \in \Sigma$.

Теорема 6.1. (см. [36]). *Пусть выполнено условие* 6.1 *и цепь Маркова ζ неприводима и положительно возвратна; $M \subseteq X$ и множество*

$$\{(t, x) : t \geqslant 0,\, x \in X\}$$

положительно инвариантно относительно системы ξ. Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливы следующие оценки:

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i:\, \alpha_i < \infty\}} \pi_i \Big(\int_{\alpha_i}^{\infty} t dF(t) - \alpha_i \big(1 - F(\alpha_i)\big) \Big), \tag{6.8}$$

$$\operatorname{freq}^*(\sigma, D_M, M) \leqslant 1 - \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i:\, \beta_i < \infty\}} \pi_i \Big(\int_{\beta_i}^{\infty} t dF(t) - \beta_i \big(1 - F(\beta_i)\big) \Big). \tag{6.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ построим множество $\widetilde{D}(t, \sigma, X)$, которое при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$ совпадает с множеством

$$D_i(t - \tau_k, X) = D(t - \tau_k, \sigma, X),$$

если система ξ находится в состоянии ψ_i при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Множество $\{(t, x) : t \geqslant 0,\, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы ξ, поэтому для множества $M \subseteq X$ имеют место включения

$$D(t, \sigma, M) \subseteq X \quad \text{и} \quad D(t, \sigma, M) \subseteq \widetilde{D}(t, \sigma, X).$$

Из последнего включения следует неравенство

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, D_M, M) \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, M) \subseteq M\}}{\vartheta} \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M\}}{\vartheta},$$

из которого получаем оценку

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq M\}}{\vartheta} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\ell}\sum\limits_{k=1}^{n_i} s_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}. \quad (6.10)$$

Здесь случайные величины $s_{ki} = \theta_{ki} - \alpha_i$, если $\theta_{ki} > \alpha_i$ и $s_{ki} = 0$, если $\theta_{ki} \leqslant \alpha_i$, $k = 1, 2, \ldots$. Оценка снизу (6.8) следует из (6.5) и (6.10).

Для нахождения оценки сверху для $\operatorname{freq}^*(\sigma, D_M, M)$ воспользуемся неравенством

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,M) \subseteq X\setminus M\}}{\vartheta} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M\}}{\vartheta}.$$

Рассмотрим случайные величины

$$\vartheta_{ki} \doteq \begin{cases} \theta_{ki} - \beta_i, & \text{если } \theta_{ki} > \beta_i, \\ 0, & \text{если } \theta_{ki} \leqslant \beta_i, \end{cases} \qquad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M\}}{\vartheta} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\ell}\sum\limits_{k=1}^{n_i} \vartheta_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}. \quad (6.11)$$

В силу (6.5), для случайных величин ϑ_{ki}, $k = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_i} \vartheta_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k} = \frac{\pi_i}{m_\theta}\Big(\int_{\beta_i}^{\infty} t\,dF(t) - \beta_i\big(1 - F(\beta_i)\big)\Big), \quad i = 1, \ldots, \ell. \quad (6.12)$$

Учитывая (6.11), (6.12) и неравенство

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, D_M, M) + \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,M) \subseteq X \setminus M\}}{\vartheta} \leqslant 1,$$

получим оценку (6.9):

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, D_M, M) \leqslant 1 - \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,\sigma,M) \subseteq X \setminus M\}}{\vartheta} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\ell}\sum\limits_{k=1}^{n_i} \vartheta_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \leqslant 1 - \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i:\,\beta_i<\infty\}} \pi_i \Big(\int_{\beta_i}^{\infty} t dF(t) - \beta_i \big(1 - F(\beta_i)\big)\Big).$$

□

Следствие 6.1. *Пусть* $\theta_k = d$, $d > 0$, $k = 1, 2\ldots$ *и для заданного* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены равенства* (6.5)*;* $M \subseteq X$ *и множество*

$$\big\{(t, x) : t \geqslant 0,\, x \in X\big\}$$

положительно инвариантно относительно системы ξ*. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \mathrm{freq}_*(\sigma, D_M, M) &\geqslant \frac{1}{d} \sum_{\{i:\,\alpha_i<d\}} \pi_i (d - \alpha_i), \\ \mathrm{freq}^*(\sigma, D_M, M) &\leqslant 1 - \frac{1}{d} \sum_{\{i:\,\beta_i<d\}} \pi_i (d - \beta_i). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\theta_k = d > 0$, $k = 1, 2\ldots$, то $m_\theta = d$ и

$$\int_{\alpha_i}^{\infty} t dF(t) = \begin{cases} d, & \alpha_i < d, \\ 0, & \alpha_i \geqslant d, \end{cases} \qquad F(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \alpha_i < d, \\ 1, & \alpha_i \geqslant d. \end{cases}$$

Подставляя данные равенства (и аналогичные равенства для β_i) в (6.8), (6.9), получаем (6.13). □

Функцию $V(x)$ будем называть *функцией Ляпунова* относительно множества M, если она удовлетворяет локальному условию Липшица, $V(x) \leqslant 0$ для всех $x \in M$ и $V(x) > 0$ для всех $x \in M^r \setminus M$.

Лемма 6.2. *Пусть* $M \subseteq X$, $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $v_0 = \max\limits_{x \in X} V(x)$. *Предположим, что существуют функция Ляпунова* $V(x)$ *относительно множества* M *и постоянные* a_i, b_i, *такие что* $a_i \neq 0$, $b_i < 0$, $b_i + a_i v_0 < 0$. *Если для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(x) \doteq \sup_{q \in A_i x + B_i \operatorname{co} U} V^o(x; q) \leqslant a_i V(x) + b_i, \tag{6.14}$$

то $\alpha_i(X, M) \doteq \min\bigl\{\tau \in [0, \infty) : D_i(t, X) \subseteq M \ \ \textit{при} \ \ t \geqslant \tau\bigr\} = \\ = \dfrac{1}{a_i} \ln \dfrac{b_i}{b_i + a_i v_0}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого x из множества X обозначим через $\varphi(t, x)$ некоторое решение управляемой системы $\psi_i = (A_i, B_i)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x \in X$. Рассмотрим функцию $v(t) = V\bigl(\varphi(t, x)\bigr)$, которая дифференцируема при почти всех $t \geqslant 0$. Поскольку $\varphi(0, x) \in X$, то имеет место неравенство $v(0) = V(x) \leqslant v_0$. Из неравенств (6.14) и $\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}\bigl(\varphi(t, x)\bigr)$ получаем при всех $t \geqslant 0$ неравенство $\dot{v}(t) \leqslant a_i v(t) + b_i$. Обозначим через $z(t)$ решение задачи Коши

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad z(0) = v_0,$$

тогда

$$z(t) = \frac{b_i}{a_i}\bigl(e^{a_i t} - 1\bigr) + v_0 e^{a_i t}, \quad t \geqslant 0$$

и в силу теоремы о дифференциальных неравенствах $v(t) \leqslant z(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Если $a_i \neq 0$, $b_i < 0$ и $b_i + a_i v_0 < 0$, то $z(t) \leqslant 0$ при всех

$$t \geqslant t_i = \frac{1}{a_i} \ln \frac{b_i}{b_i + a_i v_0}.$$

Поскольку $M \subseteq X$ и $V(x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, то $v_0 = \max_{x \in X} V(x) \geqslant 0$; отсюда несложно получить, что $t_i \geqslant 0$. Таким образом, при $t \geqslant t_i$ выполнено неравенство $v(t) \leqslant z(t) \leqslant 0$, из которого следует, что

$$D_i(t, X) \subseteq M$$

при $t \geqslant t_i$. Из определения α_i получаем равенство $\alpha_i = t_i$. $\square$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 6.2.

Лемма 6.3. *Пусть $M \subseteq X$, $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $s_0 = \min_{x \in X} V(x) < 0$. Предположим, что существуют функция Ляпунова $V(x)$ относительно множества M и постоянные a_i, b_i, такие что $a_i \neq 0$, $b_i > 0$, $b_i + a_i s_0 > 0$. Если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(x) \doteq \inf_{q \in A_i x + B_i \mathrm{co} U} V^o(x; q) \geqslant a_i V(x) + b_i,$$

то $$\beta_i(X, M) \doteq \inf\bigl\{\tau \in [0, \infty) : D_i(t, X) \cap M = \varnothing \ \textit{при} \ t \geqslant \tau\bigr\} = \frac{1}{a_i} \ln \frac{b_i}{b_i + a_i s_0}.$$

§ 7. Примеры оценивания статистических характеристик

Отметим, что для оценки статистических характеристик системы (6.1) с помощью теорем 5.1 и 6.1 удобно рассматривать функцию вида

$$w(\sigma, z) = a(\sigma) z + b(\sigma)$$

и предполагать, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $t \mapsto a(h^t\sigma)$ и $t \mapsto b(h^t\sigma)$ кусочно-постоянные и имеют точки разрыва, совпадающие с точками разрыва реализаций случайного процесса

$$\xi(h^t\sigma) = \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big).$$

Таким образом, нужно исследовать поведение решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = z_0(\sigma) \tag{7.1}$$

и найти оценки для почти всех $\sigma \in \Sigma$ характеристик $\operatorname{freq}(\sigma, z, (-\infty, 0])$, $\operatorname{freq}_*(\sigma, z, (-\infty, 0])$ и $\operatorname{freq}_*(\sigma, z, (-\infty, 0])$, введенных в шестом параграфе.

Для параметризации задачи (7.1) выбираем метрическую динамическую систему $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая отличается от рассмотренной ранее динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ только тем, что для пространства Σ_2 множество Ψ содержит пары чисел $\widehat{\psi}_i \doteq (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$. Каждому состоянию $\widehat{\psi}_i$ поставим в соответствие линейное уравнение

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Определим случайный процесс $\eta(h^t\sigma) \doteq \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$, порождаемый потоком $h^t\sigma$ (см. (6.4)) и отметим, что при каждом $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ функция $t \mapsto \eta(h^t\sigma)$ кусочно-постоянная и $\eta(h^t\sigma) = \varphi_k$ при всех $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, где $\varphi_k = (a_k, b_k) \in \Psi$. Точки $\tau_1, \tau_2, \ldots$ разрыва реализаций случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$ будем называть моментами переключения данного процесса, а задачу Коши (7.1) назовем задачей η.

П р и м е р 7.1. Найдем оценки (с вероятностью единица) пределов

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, z, (-\infty, 0]) \quad \text{и} \quad \operatorname{freq}_*(\sigma, z, (-\infty, 0])$$

для задачи Коши (7.1). Рассмотрим случай, когда $a_i < 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$ и обозначим $C_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$. Предположим, что $C_1 < C_2 < \ldots < C_\ell$, $C_1 < 0$,

$C_\ell > 0$ и случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ имеют функцию распределения $F(t)$, которая удовлетворяет условию 6.1. Отметим, что числа C_i являются пределами решений уравнений $\dot{z} = a_i z + b_i$ при фиксированном i, то есть в случае, когда задача η соответствует паре $\widehat{\psi}_i = (a_i, b_i)$ при всех $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что множество $\widehat{\Sigma} \times X$, где $X = [C_1, C_\ell]$ является положительно инвариантным относительно η.

Пусть $z_i^1(t)$, $i = 1, \ldots, \ell$ — решение задачи Коши

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad z(0) = z_0 \tag{7.2}$$

с начальным условием $z_0 = C_1$; $z_i^\ell(t)$, $i = 1, \ldots, \ell$ — решение задачи Коши (7.2) с начальным условием $z_0 = C_\ell$. Тогда $D_i(t, X)$ — множество достижимости уравнения $\widehat{\psi}_i$ в момент времени t из начального множества $X = [C_1, C_\ell]$ является отрезком $[z_i^1(t), z_i^\ell(t)]$, $i = 1, \ldots, \ell$. Пусть $M = [C_1, 0]$, найдем

$$\alpha_i = \alpha_i(X, M) = \min\bigl\{\tau \in [0, \infty) : z_i^\ell(t) \leqslant 0 \text{ при } t \geqslant \tau\bigr\},$$
$$\beta_i = \beta_i(X, M) = \inf\bigl\{\tau \in [0, \infty) : z_i^1(t) > 0 \text{ при } t \geqslant \tau\bigr\}, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Решая неравенства $z_i^\ell(t) \leqslant 0$ и $z_i^1(t) > 0$, находим, что

$$\alpha_i = \frac{1}{a_i} \ln \frac{b_i}{b_i + a_i C_\ell}, \text{ если } C_i < 0 \text{ и } \alpha_i = \infty, \text{ если } C_i \geqslant 0;$$

$\beta_i = \dfrac{1}{a_i} \ln \dfrac{b_i}{b_i + a_i C_1}$, если $C_i < 0$ и $\beta_i = \infty$, если $C_i \geqslant 0$.

Таким образом, в силу теоремы 6.1 справедливы оценки

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, z, (-\infty, 0]) \geqslant \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i\colon C_i < 0\}} \pi_i \Bigl(\int_{\alpha_i}^{\infty} t dF(t) - \alpha_i \bigl(1 - F(\alpha_i)\bigr)\Bigr),$$

$$\operatorname{freq}^*(\sigma, z, (-\infty, 0]) \leqslant 1 - \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i\colon C_i > 0\}} \pi_i \Bigl(\int_{\beta_i}^{\infty} t dF(t) - \beta_i \bigl(1 - F(\beta_i)\bigr)\Bigr).$$

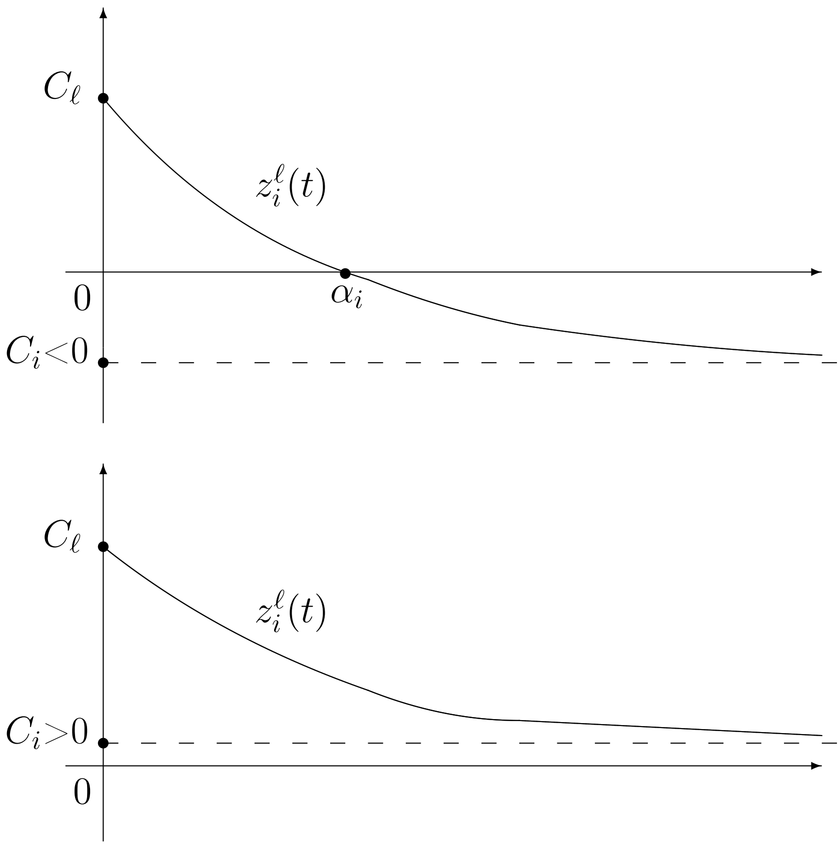

Рис. 8. Если $C_i < 0$, то $\alpha_i < \infty$; если $C_i \geqslant 0$, то $\alpha_i = \infty$.

Если $a_i < 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$ и $C_1 < C_2 < \ldots < C_\ell < 0$, то $\operatorname{freq}(\sigma, z, (-\infty, 0]) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$; если $a_i < 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$ и $0 < C_1 < C_2 < \ldots < C_\ell$, то $\operatorname{freq}(\sigma, z, (-\infty, 0]) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$.

П р и м е р 7.2. Рассмотрим управляемую линейную систему

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

которую мы отождествляем со случайным процессом

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big).$$

Предполагаем, что система (7.3) параметризована метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая описана в предыдущем параграфе. Здесь множество $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, Σ_1 является множеством числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где θ_k, $k = 1, 2 \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$; множество Ψ содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Задано множество $U = [0,5; 1]$ и матрица переходных вероятностей

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

для цепи Маркова ζ. Найдем оценку (с вероятностью единица) характеристики $\operatorname{freq}_*(\sigma, D_M, M)$ для множества $\mathfrak{M} = \Sigma \times M$, где $M = O_{\frac{2}{3}}(0)$ — замкнутый шар с центром в начале координат радиуса $\dfrac{2}{3}$.

Системе (7.3) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \tag{7.4}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $F(h^t \sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции

$$f\big(h^{t_i} \sigma, x_i, U\big) = A(h^{t_i} \sigma) x_i + B(h^{t_i} \sigma) U$$

при $(t_i, x_i) \to (t, x)$.

Обозначим через Σ_{2i}, $i = 1, 2$ подмножество Σ_2, которое является множеством последовательностей с фиксированой первой координатой: $\varphi_0 = \psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$. Поскольку множество Ψ содержит два состояния ψ_1, ψ_2, то $\Sigma_2 = \Sigma_{21} \cup \Sigma_{22}$ и пространство Σ можно представить в виде суммы непересекающихся множеств $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, где $\Sigma^1 = \Sigma_1 \times \Sigma_{21}$, $\Sigma^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_{22}$. Такое представление Σ связано с тем, что для множеств Σ^1 и Σ^2 по разному находятся производные в силу дифференциального включения. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{4}{9}$$

относительно множества $\Sigma \times O_{\frac{2}{3}}(0)$ и найдем верхнюю производную данной функции в силу включения (7.4). Если $\sigma \in \Sigma^1$, то

$$V^o_{\max}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 \quad \text{при} \quad x_2 \geqslant 0, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 + \dfrac{1}{2}\, x_2 \quad \text{при} \quad x_2 < 0; \end{cases} \tag{7.5}$$

если $\sigma \in \Sigma^2$, то

$$V^o_{\max}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 - x_2 \quad \text{при} \quad x_1 \geqslant x_2, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 + \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \quad \text{при} \quad x_1 < x_2. \end{cases}$$

Отметим, что множество $\mathfrak{M} = \Sigma \times O_{\frac{2}{3}}(0)$ содержится в множестве $\Sigma \times O_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$, положительно инвариантном относительно управляемой системы (7.3). Это следует из неравенства $V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant 0$, которое верно для функции Ляпунова

$$V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}$$

относительно данного множества для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^2 \setminus O_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$ (условия положительной инвариантности получены в работах [22], [23]).

Для функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{4}{9}$ линейной системы ψ_1 относительно множества $M = O_{\frac{2}{3}}(0)$ существуют постоянные a_1, b_1 (например, $a_1 = -1$, $b_1 = -\dfrac{7}{36}$) такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство (6.14). Действительно, для функции $V(x)$ производная $V^o_{\max}(x)$ задается равенством (7.5) и неравенство (6.14) при указанных a_1, b_1 имеет вид

$$V^o_{\max}(x) \leqslant -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{4}.$$

Найдем $v_0 = \max\limits_{x\in X} V(x) = \dfrac{1}{18}$, где $X = O_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$, поэтому в силу леммы 6.2 имеет место $\alpha_1 = \ln\dfrac{9}{7}$.

Найдем вектор стационарного распределения для цепи Маркова ζ : $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (3/4; 1/4)$. Чтобы применить теорему 6.1, нужно доказать, что эта цепь Маркова неприводима и положительно возвратна. Согласно [59, с. 610], для этого достаточно показать, что ζ является эргодической цепью Маркова (что очевидно в силу неравенства $\min\limits_{i,j} p_{ij} > 0$).

Можно показать, что для функции $V(x)$ и системы ψ_2 не существует постоянных a_2, b_2, удовлетворяющих условиям леммы 6.2, поэтому положим $\alpha_2 = +\infty$. Таким образом, если $a \geqslant \ln\dfrac{9}{7} = \alpha_1$, то

$$\int_{\alpha_1}^{\infty} t dF(t) = \int_{\alpha_1}^{\infty} t f(t) dt = \int_a^b \frac{tdt}{b-a} = m_\theta = \frac{a+b}{2},$$

поэтому из (6.8) следует, что с вероятностью единица справедлива оценка

$$\mathrm{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant \frac{2}{a+b}\cdot\frac{3}{4}\Big(\frac{a+b}{2} - \ln\frac{9}{7}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2(a+b)}\ln\frac{9}{7}.$$

Если $a < \ln\dfrac{9}{7} = \alpha_1 < b$, то

$$\int_{\alpha_1}^{\infty} t dF(t) = \int_{\alpha_1}^{b} \frac{tdt}{b-a} = \frac{b^2 - \alpha_1^2}{2(b-a)},$$

поэтому из (6.8) получаем, что с вероятностью единица

$$\mathrm{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant \frac{2}{a+b}\cdot\frac{3}{4}\Big(\frac{b^2-\alpha_1^2}{2(b-a)} - \alpha_1\Big(1 - \frac{\alpha_1 - a}{b-a}\Big)\Big) =$$
$$= \frac{3}{4(b^2-a^2)}\Big(b - \ln\frac{9}{7}\Big)^2.$$

Глава 3

Характеристики инвариантности множества достижимости управляемых систем со случайными параметрами

Получены оценки характеристик, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы со случайными параметрами

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n$$

в множестве $\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) : t \in [0, +\infty), x \in M(h^t\sigma)\}$ на отрезке заданной длины. Это характеристики $\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M)$ и $\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, D, M)$, которые отличаются от характеристик, введенных в первой главе тем, что каждая из них зависит также от случайного параметра $\sigma \in \Sigma$. Получены оценки данных характеристик, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной в силу дифференциального включения и динамической системы сдвигов. В частности, получены оценки, выполненные с вероятностью единица, для характеристик управляемой системы, которую будем называть системой с переключениями. Данную систему можно отождествить со стационарным случайным процессом, множество состояний которого конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности нахождения в каждом состоянии; длины промежутков между моментами переключения системы с одного состояния на другое являются случайными величинами с заданной функцией распределения. В последнем параграфе рассматривается пример оценки исследуемых характеристик для линейной управляемой системы с переключениями.

§ 8. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемой системы на конечном промежутке времени

В этом параграфе рассматривается семейство управляемых систем

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{8.1}$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$. Так же, как в главе 2, предполагаем, что выполнено условие 5.1, то есть существует $\sigma \in \Sigma$, для которого имеют место следующие свойства:

1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $(x, u) \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(t, x) \mapsto U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $\sigma \in \Sigma$ фиксировано и удовлетворяет условию 5.1. Рассмотрим соответствующее системе (8.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(h^t\sigma, x) = \mathrm{co}H(h^t\sigma, x), \tag{8.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(h^t\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f\big(h^{t_i}\sigma, x_i, U(h^{t_i}\sigma, x_i)\big)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$.

Каждому множеству $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma \in \Sigma$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $D(t, \sigma, X)$ — множество достижимости системы (8.1) в момент времени t при фиксированном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение отображение $t \mapsto M(h^t\sigma)$ со значениями в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) : t \in [0, +\infty),\, x \in M(h^t\sigma)\}.$$

Предполагаем, что функция $t \mapsto M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа.

Аналогично рассмотренному в первой главе множеству $\alpha(\tau, \vartheta, X)$, введем в рассмотрение измеримое по Лебегу множество

$$\alpha(\tau, \vartheta, \sigma, X) \doteq \big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Так же, как в главе 1, определим характеристики, связанные с инвариантностью множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ на конечном промежутке времени.

Определение 8.1. *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (8.1) заданным множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ будем называть характеристику

$$\begin{aligned}\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M) \doteq \frac{\mathrm{mes}\,\alpha(\tau, \vartheta, \sigma, X)}{\vartheta} = \\ = \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta}.\end{aligned} \quad (8.3)$$

Важно рассматривать относительную частоту $\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M)$ для любого момента времени $\tau \geqslant 0$, поэтому естественно для заданного $\vartheta > 0$ определить характеристику

$$\begin{aligned}\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, D, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M) = \\ = \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta}.\end{aligned} \quad (8.4)$$

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0, \sigma) = z_0(\sigma) \quad (8.5)$$

в предположении, что выполнено условие 5.2.

Введем характеристику

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которую назовем *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (8.5) в множестве $(-\infty, 0]$ на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$. Будем также рассматривать характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]) = \\ = \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ в множестве $(-\infty, 0]$.

Теорема 8.1. (см. [50]). *Пусть для $\sigma \in \Sigma$ выполнены условия* 5.1, 5.2 *и для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения включения* (8.2)*, удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{8.6}$$

Тогда если $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\max\limits_{x \in X} V(\sigma, x) \leqslant z_0(\sigma)$, то имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]), \\ \operatorname{freq}_{\vartheta}(\sigma, D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(\sigma, z^*, (-\infty, 0]). \end{gathered} \tag{8.7}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1.

§ 9. Оценка характеристик множества достижимости управляемых систем с переключениями

В этом параграфе динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которой параметризована управляемая система (8.1), немного отличается от динамической системы, рассмотренной в главе 2, поэтому опишем построение этой системы. Пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ также является прямым произведением двух вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ и пространство $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ устроено так же, как в предыдущей главе.

Опишем построение вероятностного пространства $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$. Пусть заданы конечное множество $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ и сигма-алгебра его подмножеств $\mathfrak{A}_0$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\nu}_2$. Обозначим через Σ_2 множество последовательностей

$$\Sigma_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots),\ \psi_k \in \Psi\},$$

через $\mathfrak{A}_2$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\varphi \in \Sigma_2 : \psi_0 \in \Psi_0, \psi_1 \in \Psi_1, \ldots, \psi_k \in \Psi_k\}, \quad \text{где} \quad \Psi_i \in \mathfrak{A}_0,$$

определим меру $\widetilde{\nu}_2(D_k) = \widetilde{\nu}_2(\Psi_0)\widetilde{\nu}_2(\Psi_1)\ldots\widetilde{\nu}_2(\Psi_k)$ и меру ν_2 как продолжение меры $\widetilde{\nu}_2$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$. Будем предполагать, что $\nu_2(\psi_i) > 0$ для любого $i = 1, \ldots, \ell$. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ определено преобразование сдвига $h^t\sigma$, сохраняющее меру $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ (см. [11, с. 190], [31]). Мера ν является прямым произведением вероятностных мер ν_1 и ν_2; это означает, что $\nu_1 \times \nu_2(A \times B) = \nu_1(A)\nu_2(B)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$.

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_0 = 0$, $\tau_k(\theta) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \theta_i$, где $\theta \in \Sigma_1$. Из построения динамической системы следует, что на интервалах (τ_k, τ_{k+1}) между моментами переключения τ_k,

$k = 1, 2, \ldots$, система (8.1) находится в одном из состояний множества Ψ, а длины интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $F(t)$.

З а м е ч а н и е 9.3. Поскольку распределение случайной величины θ_0 в общем случае отличается от распределений $\theta_1, \theta_2, \ldots$, то, согласно В. Феллеру (см. [46, с. 219]), статистическое наблюдение над системой целесообразно начинать не с нулевого момента времени, а с момента $\tau_1 > 0$, что мы и будем делать в данном параграфе.

В силу структуры динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ управляемую систему (8.1), порожденную этой динамической системой, будем называть *системой с переключениями.* В работах [3], [18], [26]–[28], а также во второй главе диссертации исследовалась линейная управляемая система с переключениями (6.1).

Пусть задано подмножество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) : t \geqslant 0, x \in M\big\}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, где M — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Обозначим через ψ_i систему, которая получается из системы (8.1), когда она при всех t находится в состоянии ψ_i множества Ψ; через $D_i(t, X)$ — множество достижимости системы ψ_i в момент времени t из начального множества X, $i = 1, \ldots, \ell$. Напомним, что:

$$\alpha_i = \alpha_i(X, M) = \min\big\{t \in [0, \infty) : D_i(t, X) \subseteq M \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\big\},$$
$$\beta_i = \beta_i(X, M) = \inf\big\{t \in [0, \infty) : D_i(t, X) \cap M = \varnothing \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\big\},$$
$$i = 1, \ldots, \ell;$$

если какого-либо из этих моментов времени не существует, считаем $\alpha_i = \infty$ или $\beta_i = \infty$.

Множество $\{(t,x): t \geqslant 0,\ x \in X\}$ называется *положительно инвариантным* относительно системы (8.1), если для любых $t \geqslant 0$ и $\sigma \in \Sigma$ выполнено включение $D\big(t,\sigma,X\big) \subseteq X$.

Теорема 9.1. (см. [50]). *Пусть* $\theta_k = d$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots,$

$$\alpha_{max} \doteq \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) < d.$$

Если $M \subseteq X$ *и множество* $\{(t,x): t \geqslant 0,\ x \in X\}$ *положительно инвариантно относительно системы* (8.1), *то для любого* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *с вероятностью единица справедливы следующие оценки:*

1) *если* $\vartheta \in [md, md + \alpha_{max})$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{m(d - \alpha_{max})}{\vartheta};$$

2) *если* $\vartheta \in [md + \alpha_{max}, (m+1)d)$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{\vartheta - (m+1)\alpha_{max}}{\vartheta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ построим множество $\widetilde{D}(t,\sigma,X)$, которое при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$ совпадает с множеством

$$D_i(t - \tau_k, X) = D(t - \tau_k, \sigma, X),$$

если система (8.1) находится в состоянии ψ_i при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Множество $\{(t,x): t \geqslant 0,\ x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы (8.1), поэтому для множества $M \subseteq X$ имеют место включения

$$D(t,\sigma,M) \subseteq X \quad \text{и} \quad D(t,\sigma,M) \subseteq \widetilde{D}(t,\sigma,X).$$

Из последнего включения получаем неравенство

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant \tau_1} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : D(t,\sigma,M) \subseteq M\}}{\vartheta} \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\tau \geqslant \tau_1} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq M\}}{\vartheta} \doteq \mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, M).$$

Следовательно, для оценки снизу $\operatorname{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$ нужно найти или оценить характеристику $\operatorname{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, M)$ для различных значений $\vartheta > 0$.

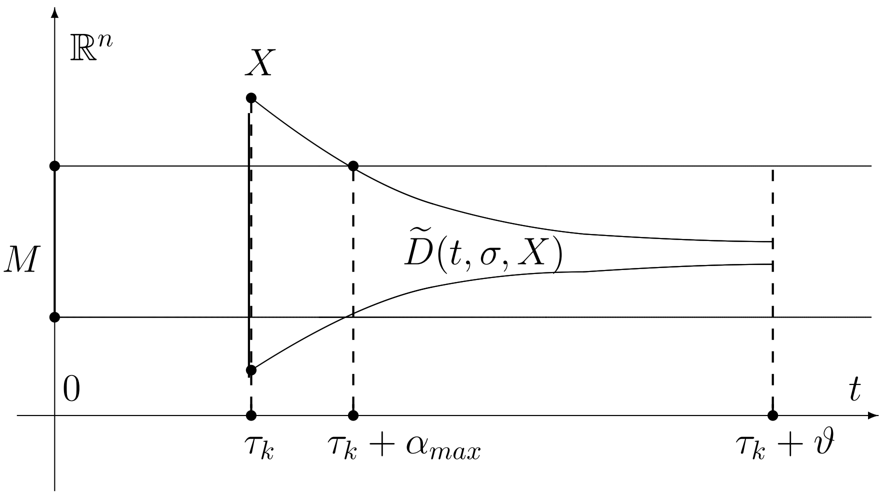

Рис. 9. Вычисление $\operatorname{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, M)$ в случае, когда $\vartheta \in [\alpha_{max}, d)$.

Выберем такое $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, что $\alpha_i = \alpha_{max} = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$. Пусть $\vartheta < \alpha_{max} = \alpha_i$, тогда если при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ система находится в состоянии ψ_i, то $\widetilde{D}(t - \tau_k, \sigma, X) \nsubseteq M$, поэтому $\operatorname{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, M) = 0$.

Отметим, что для $\vartheta \geqslant \alpha_{max}$ величина

$$\frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : \widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M\}}{\vartheta}$$

достигает наименьшего значения в том случае, когда $\tau = \tau_k$ и состояние ψ_i появится на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$, а также на следующих за ним промежутках, содержащих в себе отрезок $[\tau, \tau + \vartheta]$. Покажем, что это произойдет с вероятностью единица, то есть для любого натурального m с вероятностью единица произойдет событие B_k, состоящее в том, что состояния ψ_i появятся m раз подряд на соседних промежутках $[\tau_k, \tau_{k+1})$, $\ldots$, $[\tau_{k+m-1}, \tau_{k+m})$ (другими словами, в испытаниях Бернулли появится серия успехов длиной m). В силу определения динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$

мера ν инвариантна относительно сдвига h^t, поэтому события B_k независимы и имеют одинаковые положительные вероятности для всех $k = 1, 2, \ldots$, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)$ расходится; поэтому с вероятностью единица произойдет бесконечно много событий B_k (см. [12, с. 216]).

Поэтому, если $\vartheta \in [\alpha_{max}, d)$, то $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \nsubseteq M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k + \alpha_{max})$ и $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k + \alpha_{max}, \tau_k + \vartheta)$. Следовательно,

$$\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, \widetilde{D}, M) = \frac{\mathrm{mes}\,[\tau_k + \alpha_{max}, \tau_k + \vartheta)}{\mathrm{mes}\,[\tau_k, \tau_k + \vartheta)} = \frac{\vartheta - \alpha_{max}}{\vartheta}.$$

Если $\vartheta \in [d, d+\alpha_{max})$, то $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \nsubseteq M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+\alpha_{max}) \cup [\tau_k+d, \tau_k+\vartheta)$ и $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k + \alpha_{max}, \tau_k + d)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, \widetilde{D}, M) = \frac{\mathrm{mes}\,[\tau_k + \alpha_{max}, \tau_k + d)}{\mathrm{mes}\,[\tau_k, \tau_k + \vartheta)} = \frac{d - \alpha_{max}}{\vartheta}.$$

Если $\vartheta \in [d + \alpha_{max}, 2d)$, то

$$\widetilde{D}(t, \sigma, X) \nsubseteq M \quad \text{при} \quad t \in [\tau_k, \tau_k + 2\alpha_{max}) \cup [\tau_k + 2d, \tau_k + \vartheta)$$

и $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k + 2\alpha_{max}, \tau_k + \vartheta)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, \widetilde{D}, M) = \frac{\mathrm{mes}\,[\tau_k + 2\alpha_{max}, \tau_k + \vartheta)}{\mathrm{mes}\,[\tau_k, \tau_k + \vartheta)} = \frac{\vartheta - 2\alpha_{max}}{\vartheta}.$$

Аналогично получаем оценки характеристики $\mathrm{freq}_{\vartheta}(\sigma, D, M)$ для остальных значений ϑ. □

Теорема 9.2. (см. [50]). *Пусть $\theta_k = d$ для всех $k = 1, 2, \ldots$,*

$$\beta_{max} \doteq \max(\beta_1, \ldots, \beta_\ell) < d.$$

Если $M \subseteq X$ и множество $\{(t, x) : t \geqslant 0,\ x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы (8.1), то для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностью единица справедливы следующие оценки:

1) *если* $\vartheta \in [md, md+\beta_{max})$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \frac{m(d-\beta_{max})}{\vartheta};$$

2) *если* $\vartheta \in [md+\beta_{max}, (m+1)d)$, *то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \frac{\vartheta-(m+1)\beta_{max}}{\vartheta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что мы определили множество $\widetilde{D}(t,\sigma,X)$ как множество, которое при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$ совпадает с множеством $D_i(t-\tau_k, X) = D(t-\tau_k, \sigma, X)$, если система (8.1) находится в состоянии ψ_i при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Найдем оценки сверху для характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$. Поскольку $D(t,\sigma,M) \subseteq \widetilde{D}(t,\sigma,X)$, то

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, X\setminus M) \doteq \inf_{\tau\geqslant\tau_1} \frac{\mathrm{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : D(t,\sigma,M) \subseteq X\setminus M\}}{\vartheta} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\tau\geqslant\tau_1} \frac{\mathrm{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M\}}{\vartheta} \doteq \mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X\setminus M).$$

Из последнего неравенства и неравенства

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) + \mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, X\setminus M) \leqslant 1$$

получаем

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, X\setminus M) \leqslant 1 - \mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X\setminus M).$$

Найдем значение характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X\setminus M)$ для различных $\vartheta > 0$. Выберем такое $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, что $\beta_i = \beta_{max} = \max(\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$. Пусть $\vartheta < \beta_i$, тогда, если при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ система находится в состоянии ψ_i, то $\widetilde{D}(t-\tau_k, \sigma, X) \nsubseteq X\setminus M$, поэтому $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X\setminus M) = 0$. В этом случае получаем только оценку $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1$.

Пусть $\vartheta \in [\beta_{max}, d)$, тогда $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+\beta_{max})$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k+\beta_{max}, \tau_k+\vartheta)$; поэтому

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X\setminus M) = \frac{\vartheta-\beta_{max}}{\vartheta},$$

следовательно, $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \dfrac{\vartheta - \beta_{max}}{\vartheta}$.

Если $\vartheta \in [d, d + \beta_{max})$, то $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \nsubseteq X \setminus M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k + \beta_{max}) \cup [\vartheta_k + d, \vartheta_k + \vartheta)$ и $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq X \setminus M$ при $t \in [\tau_k + \beta_{max}, \tau_k + d)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \frac{d - \beta_{max}}{\vartheta}.$$

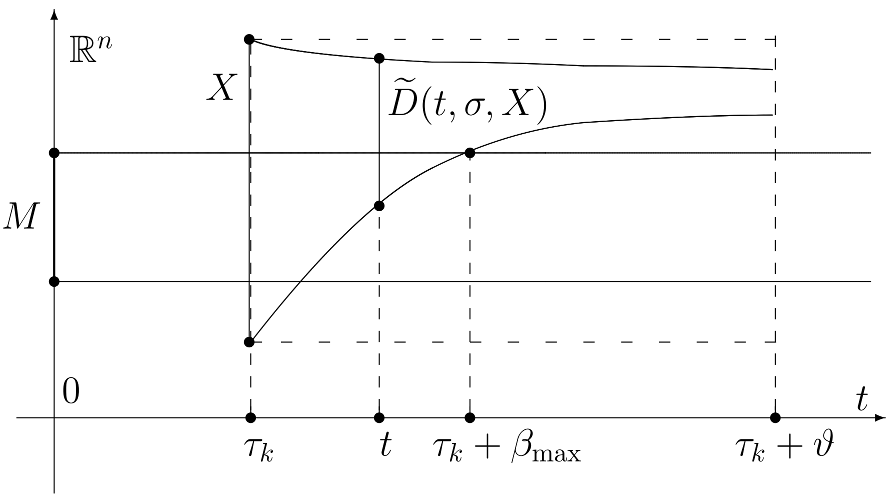

Рис. 10. Вычисление $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, \widetilde{D}, X \setminus M)$ в случае, когда $\vartheta \in [\beta_{max}, d)$.

Если $\vartheta \in [\alpha + \beta_{max}, 2d)$, то $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \nsubseteq X \setminus M$ при $t \in [\vartheta_k, \vartheta_k + 2\beta_{max}) \cup [\vartheta_k + 2d, \vartheta_k + \vartheta)$ и $\widetilde{D}(t, \sigma, X) \subseteq M$ при $t \in [\vartheta_k + 2\beta_{max}, \vartheta_k + \vartheta)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \leqslant 1 - \frac{\vartheta - 2\beta_{max}}{\vartheta}.$$

Для остальных значений ϑ доказательство аналогично. $\square$

П р и м е р 9.1. Рассмотрим управляемую линейную систему

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

параметризованную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая описана в начале параграфа. Здесь $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, множество Σ_1

является множеством числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_k, \dots)$, где $\theta_k = d = 80$, $k = 1, 2 \dots$. Задано множество $U = [1; 2]$ и множество Ψ, которое содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем оценку снизу характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$ для множества

$$\mathfrak{M} = \{(t, x) : t \in [0, +\infty),\ x \in M\},$$

где $M = O_{\frac{4}{3}}(0)$ — замкнутый шар с центром в начале координат радиуса $\dfrac{4}{3}$.

Системе (9.1) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{9.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $F(h^t\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции

$$f\big(h^{t_i}\sigma, x_i, U\big) = A(h^{t_i}\sigma)x + B(h^{t_i}\sigma)U \quad \text{при} \quad (t_i, x_i) \to (t, x).$$

Обозначим через Σ_{2i}, $i = 1, 2$ подмножество Σ_2, для которого $\varphi_1 = \psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$. Поскольку множество Ψ содержит два состояния ψ_1, ψ_2, то $\Sigma_2 = \Sigma_{21} \cup \Sigma_{22}$ и пространство Σ можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, где

$$\Sigma^1 = \Sigma_1 \times \Sigma_{21}, \quad \Sigma^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_{22}.$$

Такое представление Σ связано с тем, что для множеств Σ^1 и Σ^2 по-разному находятся производные в силу дифференциального включения. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{16}{9}$ относительно множества $O_{\frac{4}{3}}(0)$ и найдем верхнюю производную данной функции в силу включения (9.2). Если $\sigma \in \Sigma^1$, то

$$V^o_{\max}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2 & \text{при} \quad x_2 \geqslant 0, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_2 & \text{при} \quad x_2 < 0; \end{cases}$$

если $\sigma \in \Sigma^2$, то

$$V^o_{\max}(\sigma, x) = \begin{cases} -4x_1^2 - 4x_2^2 + 4(x_1 - x_2) & \text{при} \quad x_1 \geqslant x_2, \\ -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2(x_1 - x_2) & \text{при} \quad x_1 < x_2. \end{cases}$$

Отметим, что множество $M = O_{\frac{4}{3}}(0)$ содержится в множестве $X = O_2(0)$, а множество $\{(t, x) : t \geqslant 0, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно управляемой системы (9.1). Для доказательства положительной инвариантности необходимо рассмотреть функцию $V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$, которая является функцией Ляпунова относительно данного множества, и показать, что неравенство $V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant 0$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$ и всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus O_2(0)$ (данное условие положительной инвариантности приведено в работе [22]).

Для функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{16}{9}$ линейной системы ψ_1 относительно множества M существуют постоянные a_1, b_1 (например, $a_1 = \dfrac{1}{40}$, $b_1 = -\dfrac{1}{9}$) такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство (6.14). Найдем $v_0 = \max\limits_{x \in X} V(x) = \dfrac{20}{9}$, где $X = O_{\frac{4}{3}}(0)$, поэтому в силу леммы 6.2 имеет место равенство $\alpha_1 = 40 \ln 2$. Из леммы 6.2 также получаем, что $\alpha_2 = 80 \ln 2$, поэтому $\alpha_{max} = 80 \ln 2$.

Таким образом, если $\tau \in [80m, 80m + 80 \ln 2)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то с вероятностью единица справедлива оценка

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{m(1 - \ln 2)}{m + \ln 2};$$

если $\tau \in [80m + 80 \ln 2, 80(m + 1))$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то с вероятностью единица

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{m(1 - \ln 2)}{m + 1}.$$

Заключение

В работе исследовались такие характеристики управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{10.1}$$

как относительная частота поглощения множества достижимости $D(t, X)$ данной системы множеством

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta} \tag{10.2}$$

и характеристика

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \tag{10.3}$$

которая отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости системы (10.1) в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины $\vartheta > 0$.

Другими задачами, которые рассматриваются в работе, являются задачи исследования свойства статистической инвариантности, оценки статистических характеристик (0.10), (0.11) и характеристик (8.3), (8.4) для управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{10.4}$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U.

Получены следующие основные результаты:

1) для характеристик (10.2), (10.3) исследованы основные свойства и доказаны теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка;

2) получены оценки характеристик (10.2), (10.3) для различных многозначных функций $t \mapsto D(t, X)$, $t \mapsto M(t)$ и приведены условия, при которых можно найти их значения;

3) для системы со случайными параметрами (10.4) получены оценки характеристик (0.10), (0.11) и (8.3), (8.4), выполненные с вероятностью единица;

4) исследовано свойство статистической инвариантности множества

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(h^t\sigma)\}$$

относительно управляемой системы (10.4), выполненное с заданной вероятностью;

5) построены примеры, иллюстрирующие основные утверждения диссертации.

Результаты работы могут быть полезными при анализе моделей различных детерминированных систем и систем со случайными параметрами, возникающих в экономике, технике, популяционной динамике, а также при чтении специальных курсов для студентов и магистров математических и естественно-научных специальностей университетов.

Список литературы

1. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Динамические системы–1. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. 244 с.

2. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 284 с.

3. Баранова О.В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 11. С. 1843–1850.

4. Гурман В.И., Дружинина И.П. Модели природных систем. Новосибирск: Наука, 1978. 222 с.

5. Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1888–1894.

6. Давыдов А.А., Пастрес Р., Петренко И.А. Оптимальное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 30–35.

7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

8. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.

9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

11. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.

12. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

13. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.

14. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 324 с.

15. Куржанский А.Б. Об аналитическом описании множества выживающих траекторий дифференциальной системы // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 4(244). С. 183–184.

16. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523-1533.

17. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Управляемость линейной динамической системы со случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 4. С. 457–464.

18. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. Т. 3 (550). С. 38–49.

19. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.

20. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.

21. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 859–860.

22. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

23. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

24. Перов А.И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Известия высших учебных заведений. Математика. 1965. № 4. С. 104–112.

25. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.

26. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем / Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / УдГУ. Ижевск, 2011. 246 с.

27. Родина Л.И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 68–87.

28. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

29. Родина Л.И. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.

30. Родина Л.И. Статистические характеристики множества достижимости и периодические процессы управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 34–43.

31. Родина Л.И. О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.

32. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.

33. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

34. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

35. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35–48.

36. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2014. Вып. 11. С. 50–63.

37. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Об оценках статистических характеристик управляемых систем со случайными коэффициентами // Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Тезисы докладов. Ижевск, УдГУ. 2015. С. 197–199.

38. Свирежев Ю.М. Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. Москва: Наука, 1978. 352 с.

39. Сиротин А.Н. О задаче ограниченной нуль-управляемости с вероятностью 1 для линейных автономных систем с дискретным временем и случайной переходной матрицей с конечным множеством спектров // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 39–51.

40. Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.

41. Ушаков В.Н., Малёв А.Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199–222.

42. Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.

43. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. Инвариантность множеств при конструировании решений задачи о сближении в фиксированный момент времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 264–283.

44. Ушаков В.Н., Котельникова А.Н., Малёв А.Г. Об оценке дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 250–266.

45. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.

46. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

47. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.

48. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества относительно управляемой системы на конечном промежутке времени // XL Итоговая студенческая научная конференция. Тезисы докладов. Ижевск, УдГУ. 2012. С. 24–26.

49. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемой системы на конечном промежутке времени // XVI Международная конференция «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем». Тезисы докладов. Киев, Киевский национальный университет. 2013. С. 136.

50. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 100–110.

51. Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ–2014». Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ. 2014. С. 385–388.

52. Хаммади А.Х. Оценка статистических характеристик управляемых систем со случайными коэффициентами // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2014». Тезисы докладов. Минск, институт математики НАН Беларуси. 2014. С. 102–103.

53. Хаммади А.Х. Статистические характеристики линейной управляемой системы со случайными коэффициентами // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. М.: МИАН. Суздаль, 2014. С. 172–174.

54. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций–2014». Тезисы докладов. Казань, КФУ. 2014. С. 323–325.

55. Хаммади А.Х. О свойствах характеристик множества достижимости управляемой системы // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2015. Вып. 2 (46). С. 216–227.

56. Хаммади А.Х. Об оценке характеристик, связанных с инвариантностью управляемых систем со случайными коэффициентами // Международная школа молодых ученых «Моделирование и управление сложными системами» (MCCS 2015). Тезисы докладов. М.: МИАН. Суздаль, 2015. С. 83–85.

57. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

58. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.

59. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 581 с.

60. Aubin J.P. Viability Theory. Boston, Birkhäuser. 1991. 543 p.

61. Aubin J.P., Cellina A. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag. 1984. 342 p.

62. De Farias D.P., Geromel J.C., Do Val J.B.R., Costa O.L.V. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. Vol. 45. № 5. P. 944–949.

63. Hartman P. On invariant sets and on a theorem of Wazewski // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 32. P. 511–520.

64. Kurshanski A.B., Filippova T.F. Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation // Probl. Contr. Inform. Theory. 1988. Vol. 17. № 3. P. 137–144.

65. Kurshanski A.B., Filippova T.F. Pertubation technicues for viability and control // Lect. Notes in Control, Inform. Sci. 1992. Vol. 180. P. 394–403.

66. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications // Mathematics in Science and Engineering. New York, Academic Press. 1969. Vol. 55. P. 202–221.

67. Lakshmikantham V., Leela S. and Martinyuk A.A. Stability Analysis of Nonlinear Systems. Marcel Dekker, New York. 1991. Vol. 33. P. 152–154.

68. Nagumo M. Über die Laga der integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen // Proc. Phys. Math. Japan. 1942. Vol. 24. P. 399–414.