بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض

عنوان

بررسی نگاشت های نزدیک هموتوپیکی و کاربرد آن ها در گروه های بنیادین

استاد راهنما

دکتر حمید ترابی اردکانی

نگارنده

رشا عباس اسود العیساوی

تابستان ۱۳۹۶

بسمه تعالی
مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: بررسی نگاشت های نزدیک هموتوپیکی و کاربرد آن ها در گروه های بنیادین

نام نویسنده: رشاعباس اسیود العیساوی
استاد راهنما: دکتر حمید ترابی اردکانی

دانشکده: علوم ریاضی	گروه: ریاضی محض	رشته تحصیلی: ریاضی محض
تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۰۴/۱۱	تاریخ دفاع: ۱۳۹۶/۶/	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۶۱	

چکیده پایان‌نامه : در این پایان‌نامه برای دو نگاشت پیوسته به توی فضای متریک X، مفهوم به طورهموتوپیک نزدیک تعریف و خواص آن بررسی می شود. همچنین به مقایسه ی برخی خواص رابطه ی هموتوپی و رابطه ی نزدیک بودن هموتوپیکی پرداخته می شود. در فضای متریک X، طوقه α را به طور هموتوپیک نزدیک به طوقه β گویند هرگاه α با β هموتوپیک نباشد و برای هر عدد مثبت ε، طوقه γ موجود باشد به طوریکه با α هموتوپیک باشد و فاصله آن با طوقه β، تحت نرم یکنواخت، از ε کمتر باشد. در این پایان‌نامه، نشان داده می شود که وجود دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، مقابل مفهوم هاسدورف هموتوپیکی مسیری است. به عبارت دیگر فضای متریک X، هاسدورف هموتوپیکی مسیری است اگر و فقط اگر در X، هیچ دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، موجود نباشند. در ادامه به معرفی زیر گروه های اسپنیر از گروه بنیادین و ارتباط آن مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی پرداخته می شود.

واژگان کلیدی: نزدیک بودن هموتوپیکی، فضای هاسدورف مسیری هموتوپیکی، گروه های بنیادین، زیرگروه های اسپنیر.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : بررسی نگاشت های نزدیک هموتوپیکی و کاربرد آن ها در گروه های بنیادین

اینجانب رشاعباس اسیود العیساوی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر حمید ترابی اردکانی متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ”دانشگاه فردوسی مشهد“ و یا ”Ferdowsi University of Mashhad“ به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.

تقدیم به

آن‌ها که بی‌دریغ کوشیدند

تا امروز سر بر اوج ساییدن را تجربه کنم.

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.
در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی[1]، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.
تو علم را روشنی قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.
من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.
اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"
و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشته‌ی قلبم بخوان...!

[1] ن و القلمِ و ما یَسطُرونَ

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، دکتر حمید ترابی اردکانی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر مشایخی فرد و سرکار خانم دکتر میرابراهیمی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر، مادر و همسر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

رشا عباس اسود العیساوی

تابستان ۱۳۹۶

فهرست مطالب

مقدمه

از ابزار های مهم در توپولوژی جبری، گروه بنیادین فضای توپولوژیک است. این گروه بر اساس رابطه هموتوپی نسبی بر روی مسیرهای بسته در X تعریف می شود. اخیرا نوعی رابطه روی مسیرهای در X، بر اساس هموتوپی در [۸] تعریف شده است که برخلاف رابطه‌ی هموتوپی نسبی دارای ویژگی انعکاسی و تقارنی و تعدی نیست. این رابطه را که با نام به طور هموتوپیکی نزدیک بودن، معرفی شده است، مستلزم وجود یک متر بر روی فضای توپولوژیک X است.

مفهوم هاسدورف هموتوپیکی مسیری از مفاهیمی است که در توپولوژی جبری، مطالعه می‌شود. این مفهوم که قوی‌تر از مفهوم هاسدورف هموتوپیکی است، برای اولین بار در [۱] مطرح و ضمن بیان گزاره‌ها و مثال‌هایی، ارتباط آن با برخی از مفاهیم دیگر در توپولوژی جبری مانند همبند ساده نیم‌موضعی و ... بیان شده است.

در این پایان‌نامه ابتدا برای دو نگاشت پیوسته به توی فضای متریک X، مفهوم به طورهموتوپیک نزدیک تعریف و خواص آن بررسی می شود. همچنین به مقایسه ی برخی خواص رابطه ی هموتوپی و رابطه ی نزدیک بودن هموتوپیکی پرداخته می شود. هم‌چنین، نشان داده می شود که وجود دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، مقابل مفهوم هاسدورف هموتوپیکی مسیری است. به عبارت دیگر فضای متریک X، هاسدورف هموتوپیکی مسیری است اگر و فقط اگر در X، هیچ دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، موجود نباشند. در انتها به معرفی زیر گروه های اسپنیر از گروه بنیادین و ارتباط آن مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی پرداخته می شود.

پایان نامه پیش رو در چهار فصل به شرح زیر تدوین شده است.

در فصل اول این پایان نامه، به معرفی مفاهیم و نمادهای مورد نیاز در فصل های بعد می‌پردازیم و برخی از قضایای پر کاربرد در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم پس از معرفی رابطه نزدیک بودن هموتوپیکی در نگاشت‌های روی یک فضای متریک، به بیان خواص و مقایسه آن با برخی از مفاهیم مشابه آن می‌پردازیم.

در فصل سوم به معرفی مفهوم هاسدورف هموتوپیکی مسیری می پردازیم و در ادامه نشان داده می شود که ویژگی هاسدورف هموتوپیکی مسیری، مفهومی مقابل نزدیکبودن هموتوپیکی در فضاهای متریک، است. به عبارت دقیق‌تر فضای متریک X، هاسدورف هموتوپیکی مسیری است اگر و فقط اگر در X، هیچ دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، موجود نباشند.

در فصل چهارم با مرور بر روی مفاهیمی چون گروه طوقه‌های کوچک و زیر گروه‌های اسپنیر و پوشش‌ها به مقایسه‌ی مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی با طوقه‌های کوچک و ارتباط آن با زیر گروه‌های اسپنیر و پوشش‌ها می‌پردازیم.

مطالب این پایان نامه بر اساس مقاله‌های زیر تدوین شده است.

Ž. Virk,“Homotopical smallness and closeness, Topology and Its Applications 158 (2011) 360–378.”

H. Fischer, D. Repovs, Ž. Virk, A. Zastrow,“On semilocally simply connected spaces, Topology and its Applications, 158 (2011) 397-408.”

B. Mashayekhy, A. Pakdaman, H. Torabi, “Spanier spaces and covering theory of non-homotopically path Hausdorff spaces.” *in Georgian Mathematical*

Journal, 20 (2013) 303-317

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این رساله، بازه ی $[0,1]$ را با I نمایش می دهیم. مجموعه ی اندیس گذار J مجموعه ای دلخواه است مگر این که خلاف آن گفته شود. تعریف ها و قضیه هایی که در این فصل آورده شده، از مرجع [۵] برگرفته شده است.

۱.۱ پیش‌نیازهای جبری

تعریف ۱.۱.۱. یک رسته[1] ، یک رده $\mathcal{C}$ از اشیا[2] است (که با $A, B, C, \cdots$ نمایش داده می‌شود) همراه با

۱. یک رده از مجموعه‌های مجزا، یکی برای هر جفت از اشیا در $\mathcal{C}$.(که با $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ نمایش داده می‌شود و به عناصر آن ریخت[3] از A به B می‌گویند)

---

[1]category

[2]object

[3]morphism

۲. برای هر سه‌تایی (A, B, C) از اشیا $\mathcal{C}$، یک تابع

$$o : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$
$$(g, f) \longmapsto gof$$

(که در آن به gof ترکیب دو ریخت f و g گفته می‌شود) موجود باشد که در دو اصل زیر صدق کند

آ. (شرکت‌پذیری) اگر $f : A \longrightarrow B$ ، $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ ریخت‌هایی در $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه $ho(gof) = (hog)of$.

ب. (ریخت همانی) برای هر شی B در $\mathcal{C}$، ریخت $1_B : B \longrightarrow B$ موجود باشد به قسمی که برای هر $f : A \longrightarrow B$ و هر $g : B \longrightarrow C$ داشته باشیم $go1_B = g$ و $1_Bof = f$.

در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $f : A \longrightarrow B$ هم‌ارزی[1] نامیده می‌شود هرگاه ریخت $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که $gof = 1_A$ و $fog = 1_B$. اگر $f : A \longrightarrow B$ هم‌ارزی باشد، A و B را هم‌ارز[2] گویند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. رسته $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ زیررسته[3] نامیده می‌شود هرگاه

۱. اشیای $\mathcal{C}'$، اشیای $\mathcal{C}$ باشد.

۲. برای اشیای X' و Y' از $\mathcal{C}'$ داشته باشیم، $Hom_{\mathcal{C}'}(X', Y') \subset Hom_{\mathcal{C}}(X', Y')$.

۳. اگر $f' : X' \longrightarrow Y'$ و $g' : Y' \longrightarrow Z'$ اشیایی در $\mathcal{C}'$ باشند، آنگاه ترکیب $g'of'$ در $\mathcal{C}'$ همان ترکیب $g'of'$ در $\mathcal{C}$ باشد.

[1] equivalence

[2] equivalent

[3] subcategory

همچنین $\mathcal{C}'$ یک زیررسته کامل[۱] از رسته $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود، هرگاه $\mathcal{C}'$ یک زیررسته از $\mathcal{C}$ باشد و برای اشیای X' و Y' در $\mathcal{C}'$ داشته باشیم، $Hom_{\mathcal{C}'}(X', Y') = Hom_{\mathcal{C}}(X', Y')$.

مثال ۳.۱.۱. رسته Top_* که اشیای آن، همه جفت مرتب‌های $(X, x_\circ)$ است که X یک فضای توپولوژیک است و $x_\circ \in X$. Top_* یک زیررسته از Top^{2}است(زیرفضاها در اینجا تک نقطه‌ای هستند). این رسته، رسته فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار نامیده می‌شود. $x_\circ$ نقطه پایه $(X, x_\circ)$ نامیده می‌شود و به ریخت‌های این رسته، نگاشت‌های نقطه‌دار گویند.

اکنون به ارائه یک تعریف می‌پردازیم که در ساختن رسته‌ای جدید از روی یک رسته دلخواه، به ما کمک می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱. یک همنهشتی[۲] روی رسته $\mathcal{C}$، رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی رده $\bigcup\limits_{(A,B)} Hom(A, B)$ از همه ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ است بطوریکه

آ. اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $f \sim f'$، آنگاه نتیجه شود $f' \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

ب. اگر $f \sim f'$ و $g \sim g'$ و ترکیب gof موجود باشد، آنگاه نتیجه شود که $gof \sim g'of'$.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته با همنهشتی $\sim$ باشد و $[f]$، رده هم‌ارزی ریخت f را نشان دهد. $\mathcal{C}'$ را بصورت زیر تعریف می‌کنند

$$Obj\ \mathcal{C}' = Obj\ \mathcal{C}$$

$$Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) = \{[f] : f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)\}$$

$$[g]o[f] = [gof]$$

در این صورت، $\mathcal{C}'$ یک رسته است.

این رسته را رسته خارج قسمتی[۳] از $\mathcal{C}$ می‌نامند.

[1] full subcategory

[2] congruence

[3] quotient category

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک تابعگون هموردا[۱] $\mathbf{T}$ از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، (که با $\mathbf{T}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ نمایش داده می‌شود)، یک جفت از توابع است (که هردو با $\mathbf{T}$ نشان داده می‌شوند) که یکی تابع شی است و به هر شی C از $\mathcal{C}$، یک شی $\mathbf{T}(C)$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند؛ و دیگری تابع ریخت است که به هر ریخت $f:C\longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$، یک ریخت $\mathbf{T}(f):\mathbf{T}(C)\longrightarrow\mathbf{T}(C')$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند به‌طوری‌که

۱. برای هر ریخت همانی ۱_C از $\mathcal{C}$، $\mathbf{T}(۱_C)=۱_{\mathbf{T}(C)}$.

۲. برای هر دو ریخت f و g که ترکیب gof تعریف شده باشد، $\mathbf{T}(gof)=\mathbf{T}(g)o\mathbf{T}(f)$.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنید $\mathbf{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ یک تابعگون باشد، در این صورت اگر اشیا A و B در رسته $\mathcal{C}$ هم‌ارز باشند، آنگاه اشیا $\mathbf{F}(A)$ و $\mathbf{F}(B)$ در رسته $\mathcal{D}$ هم‌ارز خواهند شد.

نکته ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته و $\sim$ یک همنهشتی روی $\mathcal{C}$ باشد. اگر $\mathbf{T}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ یک تابعگون باشد که $\mathbf{T}(f)=\mathbf{T}(g)$ وقتی که $f\sim g$، آنگاه $\mathbf{T}$، یک تابعگون $\mathbf{T}':\mathcal{C}'\longrightarrow\mathcal{D}$ (که $\mathcal{C}'$ رسته خارج قسمتی از $\mathcal{C}$ است) القا می‌کند که برای هر شی X داریم $\mathbf{T}'(X)=\mathbf{T}(X)$ و برای هر ریخت f، داریم $\mathbf{T}'([f])=\mathbf{T}(f)$.

۲.۱ پیش‌نیازهای توپولوژیکی

لم ۱.۲.۱. (لم چسب[۲]) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های بسته است؛ $X=\bigcup_{i=۱}^{n}X_i$. اگر برای یک فضای Y، نگاشت‌های پیوسته $f_i:X_i\longrightarrow Y$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر i,j، داشته باشیم $f_i\mid_{X_i\cap X_j}=f_j\mid_{X_i\cap X_j}$، در این صورت نگاشت پیوسته یکتای $f:X\longrightarrow Y$ موجود است بطوریکه برای هر i، $f\mid_{X_i}=f_i$.

[1] covariant functor

[2] gluing lemma

لم چسب برای فضایی که اجتماع دلخواه از زیرمجموعه های باز است، نیز درست است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $p : X \longrightarrow Y$ نگاشتی پوشا باشد. نگاشت p را یک نگاشت خارج قسمتی[1] خوانیم در صورتی که هر زیر مجموعه از Y مانند U، در Y باز باشد اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد.

تعریف ۳.۲.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک، A مجموعه‌ای دلخواه و $p : X \longrightarrow A$ نگاشتی پوشا باشد، آنگاه تنها یک توپولوژی τ در A وجود دارد که p نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی است. این توپولوژی به توپولوژی خارج قسمتی[2] القا شده بوسیله p، موسوم است که آن متشکل از زیرمجموعه‌هایی مانند U از A است که $p^{-1}(U)$ در X باز باشند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی آن باشد. مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با نماد $\frac{X}{\sim}$ نمایش می‌دهیم. حال با استفاده از توپولوژی فضای X، یک توپولوژی روی $\frac{X}{\sim}$ به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$V \subseteq \frac{X}{\sim} \quad \text{باز است} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(V) \subseteq X \quad \text{باز است}$$

که در آن $q : X \longrightarrow \frac{X}{\sim}$ نگاشت خارج قسمتی است.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید x و y دو نقطه از فضای توپولوژیک X باشند. منظور از یک مسیر در X از x به y، نگاشتی پیوسته است مانند $f : [0, 1] \longrightarrow X$ به‌طوری‌که $f(0) = x$ و $f(1) = y$. فضای X را همبند مسیری[3] خوانیم اگر هر زوج از نقاط X را بتوان به وسیله مسیری در آن به هم پیوند داد.

تعریف ۶.۲.۱. اگر فضای توپولوژیکی X همبند مسیری باشد، آنگاه همبند است.

[1] quotient map

[2] quotient topology

[3] path connected

تعریف ۷.۲.۱. در فضای توپولوژیک مفروض X، رابطه هم‌ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم، $x \sim y$ اگر وفقط اگر زیرمجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل x و y باشد. رده‌های هم‌ارزی حاصل از آن را، مولفه[1] های X می‌گوییم. رابطه هم‌ارزی دیگری بر فضای X چنین تعریف می‌کنیم، $x \sim y$ اگر و فقط اگر مسیری در X از x به y وجود داشته باشد. رده‌های هم‌ارزی این رابطه را مولفه‌های مسیری[2] X می‌خوانیم. مولفه‌های (مسیری) X، زیرمجموعه‌های جدا از هم و همبند (مسیری) X هستند که اجتماع آنها مساوی X است. و هر زیرمجموعه همبند (مسیری) X، فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.

اکنون به معرفی ساختار یک تابعگون می‌پردازیم.

تعریف ۸.۲.۱. تعریف می‌کنیم $\pi_\circ(X)$ را مجموعه همه مولفه‌های مسیری فضای توپولوژیکی X. اگر $f: X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، آنگاه $\pi_\circ(f): \pi_\circ(X) \longrightarrow \pi_\circ(Y)$ را تابعی معرفی می‌کنیم که به هر مولفه مسیری C از X، مولفه مسیری یکتایی از Y شامل $f(C)$ را نظیر کند.

قضیه ۹.۲.۱. $\pi_\circ : Top \longrightarrow Sets$ یک تابعگون است. علاوه بر این، اگر $f \simeq g$، آنگاه $\pi_\circ(f) = \pi_\circ(g)$.

نتیجه ۱۰.۲.۱. اگر دو فضای توپولوژیک X و Y از یک نوع هموتوپی باشند، آنگاه دارای تعداد مولفه‌های مسیری یکسانی هستند.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک فضای توپولوژیک X همبند مسیری موضعی[3] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، یک همسایگی باز V از x وجود دارد به‌طوری‌که $V \subset U$ و هر دو نقطه در V، توسط مسیری در U به هم متصل شوند.

[1] component

[2] path component

[3] locally path connected

در نتیجه ۱۳.۲.۱، نشان داده خواهد شد که برای V انتخاب شده، هر دو نقطه در V، را می‌توان به وسیله مسیری در خود V، به هم متصل کرد؛ به عبارتی، V همبند مسیری است.

قضیه ۱۲.۲.۱. یک فضای توپولوژیکی X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر مولفه‌های مسیری زیرمجموعه‌های باز X، در X باز باشند. در حالت خاص، اگر X همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های مسیری‌اش باز هستند.

نتیجه ۱۳.۲.۱. فضای توپولوژیک X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، یک همسایگی باز همبند مسیری V از x موجود باشد بطوریکه $x \in V \subseteq U$.

قضیه ۱۴.۲.۱. اگر X یک فضای همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های هر زیرمجموعه باز X، با مولفه‌های مسیری‌اش، منطبق است. در حالت خاص، مولفه‌های X بر مولفه‌های مسیری X منطبق است.

نتیجه ۱۵.۲.۱. اگر X یک فضای همبند و همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه X همبند مسیری است.

برای مطالعه‌ی بیشتر به [۳] مراجعه شود.

۳.۱ پیش نیازهای توپولوژی جبری

در ابتدا فرض کنید $\mathbb{R}^{n+1}$ فضای اقلیدسی $n+1$-بعدی باشد. اگر $x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$، آنگاه نرم x به صورت $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}$ تعریف می‌شود(در حالتی که $n = 1$، داریم $\|x\| = |x|$). حال تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

و به آن n-کره[۱] (به شعاع ۱ و به مرکز مبدا) می‌گوییم. توجه داریم که ۰-کره $\mathbf{S}^{۰}$، شامل دو نقطه $\{-۱,۱\}$ است. همچنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq ۱\}$$

و به آن n-دیسک[۲] می‌گوییم. مشاهده می‌شود که $\mathbf{S}^{n-۱} \subset \mathbf{D}^n \subset \mathbb{R}^n$. در واقع $\mathbf{S}^{n-۱}$ مرز $\mathbf{D}^n$ در $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید f و f' دو نگاشت پیوسته از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y باشند. گوییم f با f' هموتوپ[۳] است هرگاه تابعی پیوسته مانند $F : X \times I \longrightarrow Y$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in X$،

$$\begin{cases} F(x,۰) = f(x) \\ F(x,۱) = f'(x) \end{cases}$$

F را یک هموتوپی[۴] بین f و f' نامیده و در صورت وجود چنین هموتوپی می‌نویسیم $F : f \simeq f'$.

قضیه ۲.۳.۱. هموتوپی یک رابطه هم‌ارزی بین تمام نگاشت‌های پیوسته از X به Y است.

تعریف ۳.۳.۱. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد، رده هموتوپی f بصورت

$$[f] = \{g : X \longrightarrow Y \mid g \text{ پیوسته است}, \ g \simeq f\}$$

[1] n-sphere

[2] n-disk

[3] homotopic

[4] homotopy

است. خانواده همه این رده‌های هموتوپی را با $[X,Y]$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید $f_i : X \longrightarrow Y$ و $g_i : Y \longrightarrow Z$ برای $i = ۰, ۱$ پیوسته باشند. اگر $f_۰ \simeq f_۱$ و $g_۰ \simeq g_۱$، آنگاه $g_۰of_۰ \simeq g_۱of_۱$؛ یعنی $[g_۱of_۱] = [g_۰of_۰]$.

نتیجه ۵.۳.۱. هموتوپی، یک همنهشتی روی رسته Top است.

حال با استفاده از این نتیجه، به تعریف مهم زیر می‌رسیم.

تعریف ۶.۳.۱. رسته خارج قسمتی بدست آمده از رسته Top با همنهشتی هموتوپی را رسته هموتوپی نامیده و با $hTop$ نمایش می‌دهند.

با استفاده از ۹.۲.۱ و نکته ۸.۱.۱، می‌توانیم تابعگون $\pi_۰$ را از رسته $hTop$ به رسته $Sets$ تعریف کنیم. بدین ترتیب، اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک هم‌ارزی هموتوپی باشد یا به عبارتی $[f]$، یک هم‌ارزی در $hTop$ باشد، آنگاه $\pi_۰([f])$ یک هم‌ارزی در رسته $Sets$ می‌باشد.

تعریف ۷.۳.۱. نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$، یک هم‌ارزی هموتوپی[1] نامیده می‌شود هرگاه یک نگاشت پیوسته $g : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که $gof \simeq ۱_X$ و $fog \simeq ۱_Y$. دو فضای X و Y، از یک نوع هموتوپی[2] نامیده می‌شوند هرگاه یک هم‌ارزی هموتوپی $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $y_۰ \in Y$. نگاشت ثابت در $y_۰$، یک تابع $c : X \longrightarrow Y$ است که برای هر $x \in X$، داریم $c(x) = y_۰$. یک نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$، پوچ هموتوپ[3] نامیده می‌شود هرگاه نگاشت ثابت $c : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که $f \simeq c$. فضای توپولوژیک X را انقباض‌پذیر[4] گویند هرگاه ۱_X پوچ هموتوپ باشد.

[1]homotopy equivalence

[2]same homotopy type

[3]null homotopic

[4]contracrible

نتیجه بعد نشان می‌دهد که فضاهای انقباض پذیر، ساده‌ترین اشیا در رسته $hTop$ هستند.

قضیه ۹.۳.۱. یک فضای توپولوژیک X، از یک نوع هموتوپی با فضای تک نقطه‌ای است اگر و فقط اگر X انقباض‌پذیر باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید $f, g : I \longrightarrow X$ دو مسیر باشند که $f(۱) = g(۰)$. مسیر $f * g : I \longrightarrow X$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲}\,, \\ g(۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱\,. \end{cases}$$

با استفاده از لم چسب، دیده می‌شود که $f * g$، پیوسته است.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید $A \subset X$ و $f_۰, f_۱ : X \longrightarrow Y$ دو نگاشت پیوسته باشند که $f_۰ |_A = f_۱ |_A$. می‌نویسیم $f_۰ \simeq f_۱ \; rel \; A$ ، هرگاه یک نگاشت پیوسته $F : X \times I \longrightarrow Y$ موجود باشد که $F : f_۰ \simeq f_۱$ و برای هر $t \in I$ و هر $a \in A$، داشته باشیم $F(a, t) = f_۰(a) = f_۱(a)$.

هموتوپی F، هموتوپی نسبی (یا دقیقتر، هموتوپی نسبت به A) نامیده می‌شود و در حالت $A = \emptyset$، همان تعریف هموتوپی را خواهیم داشت و به آن هموتوپی آزاد گوییم.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید $\dot{I} = \{۰, ۱\}$ مرز I در $\mathbb{R}$ باشد. رده هم‌ارزی یک مسیر $f : I \longrightarrow X$، کلاس مسیری f نامیده شده و آن را با $[f]$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱۳.۳.۱. فرض کنید $f_۰, f_۱, g_۰, g_۱$، مسیرهایی در X باشند که

$$f_۰ \simeq f_۱ \; rel \; \dot{I} \quad , \quad g_۰ \simeq g_۱ \; rel \; \dot{I}$$

اگر $f_۰(۱) = f_۱(۱) = g_۰(۰) = g_۱(۰)$، آنگاه $f_۰ * g_۰ \simeq f_۱ * g_۱ \; rel \; \dot{I}$. یا به عبارتی اگر $[f_۰] = [f_۱]$ و $[g_۰] = [g_۱]$، آنگاه $[f_۰ * g_۰] = [f_۱ * g_۱]$.

تعریف ۱.۳.۱۴. اگر $f : I \longrightarrow X$ یک مسیر از $x_۰$ به $x_۱$ باشد. $x_۰$ را ابتدای مسیر f و $x_۱$ را انتهای مسیر f گوییم. مسیر f در X در نقطه $x_۰$ بسته است هرگاه ابتدا و انتهایش بر هم منطبق باشد. در این حالت f را یک طوقه[1] گویند.

تعریف ۱.۳.۱۵. اگر $p \in X$، آنگاه نگاشت ثابت $C_p : I \longrightarrow X$ با ضابطه $C_p(t) = p$، مسیر ثابت در نقطه p نامیده می‌شود. همچنین اگر $f : I \longrightarrow X$ یک مسیر باشد، مسیر معکوس آن به صورت $f^{-۱} : I \longrightarrow X$ با ضابطه $f^{-۱}(t) = f(۱ - t)$ تعریف می‌شود.

در اینجا، به دنبال آن هستیم که با استفاده از مسیرهای بسته در یک نقطه مشخص از فضای توپولوژیک X، گروهی بسازیم. فرض کنیم $x_۰ \in X$. اگر مجموعه همه مسیرهای بسته در نقطه $x_۰$ را در نظر بگیریم و عمل چسباندن مسیرها را نیز مدنظر داشته باشیم، براحتی می‌توان ثابت کرد که این عمل شرکت‌پذیر نیست. همچنین اگر $f : I \longrightarrow X$ یک مسیر بسته در نقطه $x_۰$ باشد، آنگاه $C_p * f \neq f$ و $f * f^{-۱} \neq f^{-۱} * f$. یعنی با این شرایط نمی‌توان گروهی تشکیل داد. اما اگر به جای کار کردن با مسیرها، با رده‌های مسیری کار کنیم، وضع فرق می‌کند. قضیه زیر را در این رابطه داریم.

قضیه ۱.۳.۱۶. اگر X، یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه مجموعه همه رده‌های مسیری در X تحت عمل دوتایی $[f][g] = [f * g]$ در شرایط زیر صدق می‌کند

۱. شرکت‌پذیری برقرار است.

۲. برای هر کلاس مسیری $[f]$ با نقطه ابتدایی p و نقطه انتهایی q، داریم

$$[C_p][f] = [f] = [f][C_q]$$

[1] Loop

۳. اگر $[f]$ دارای نقطه ابتدایی p و نقطه انتهایی q باشد، داریم

$$[f][f^{-1}] = [C_p] \quad , \quad [f^{-1}][f] = [C_q].$$

تعریف ۱.۳.۱۷. نقطه $x_\circ \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم. این نقطه را نقطه پایه‌ای می‌نامیم. گروه بنیادین فضای توپولوژیکی X در نقطه پایه‌ای $x_\circ$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\pi_1(X, x_\circ) = \{[f] : \text{یک کلاس مسیری در } X \text{ با نقطه ابتدایی و انتهایی } x_\circ \text{ است } [f]\}$$

که عمل دوتایی آن $[f][g] = [f * g]$ می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۱۸. $\pi_1(X, x_\circ)$ برای هر $x_\circ \in X$، یک گروه است.

قضیه ۱.۳.۱۹. $\pi_1 : Top_* \longrightarrow Groups$ یک تابعگون هموردا است. علاوه براین، اگر $h, k : (X, x_\circ) \longrightarrow (Y, y_\circ)$ دو نگاشت نقطه‌دار باشند و $h \simeq k \; rel \; \{x_\circ\}$، آنگاه $\pi_1(h) = \pi_1(k)$.

با استفاده از قضیه فوق و نکته ۱.۱.۸، به این نتیجه می‌رسیم که می‌توانیم تابعگون π_1 را از رسته $hTop_*$ به رسته $Groups$ تعریف کنیم که در آن رسته $hTop_*$، رسته خارج قسمتی از رسته Top_* می‌باشد.

نتیجه ۱.۳.۲۰. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی همبند مسیری از یک نوع هموتوپی باشند. در این صورت، برای هر $x_\circ \in X$ و هر $y_\circ \in Y$، داریم $\pi_1(X, x_\circ) \cong \pi_1(Y, y_\circ)$.

نتیجه ۱.۳.۲۱. اگر X، یک فضای توپولوژیکی انقباض‌پذیر باشد و $x_\circ \in X$. آنگاه $\pi_1(X, x_\circ) = \{1\}$.

قضیه ۱.۳.۲۲. فرض کنید $x_\circ \in X$ و فرض کنید $X_\circ$ یک مولفه مسیری از فضای توپولوژیکی X باشد، در این صورت $\pi_1(X_\circ, x_\circ) \cong \pi_1(X, x_\circ)$.

حال شاید این سوال پیش بیاید که آیا گروه بنیادین به نقطه انتخابی بستگی دارد یا خیر. قضیه بعد جوابی منفی به این سوال می‌دهد.

قضیه ۲۳.۳.۱. اگر X همبند مسیری باشد و $x_0, x_1 \in X$، آنگاه $\pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(X, x_0)$.

قضیه ۲۴.۳.۱. اگر (X, x_0) و (Y, y_0) دو فضای توپولوژیکی نقطه‌دار باشند، آنگاه

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

تعریف ۲۵.۳.۱. یک فضای توپولوژیکی X، همبند ساده[1] نامیده می‌شود هرگاه همبند مسیری بوده و برای هر $x_0 \in X$، داشته باشیم $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

طبق تعریف بالا، همه فضاهای همبند ساده، همبند مسیری هستند؛ یعنی هم π_0 و هم π_1 آنها بدیهی هستند. فضاهای انقباض‌پذیر، مثالی از فضاهای همبند ساده هستند.

[1] simply connected

فصل ۲

به طور هموتوپیکی نزدیک

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا تعریف رابطه نزدیک بودن هموتوپیکی در نگاشت‌های روی یک فضای متریک را بیان می‌کنیم و سپس به بیان خواص و مثال‌ها و مقایسه آن با برخی از مفاهیم مشابه آن می‌پردازیم. در بیان مطالب این فصل بیشتر از منبع [۸] استفاده شده است.

۲.۲ به طور هموتوپیکی نزدیک

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم A یک زیر فضای بسته از Y باشد و (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $f:Y\to X$ را به طور هموتوپیکی نزدیک[1] به نگاشت $g:Y\to X$ نسبت به زیرفضای A گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

[1] Homotopically closed

۱. f با g هموتوپ نسبی، نسبت به زیرفضای A نباشد.

۲. برای هر $\varepsilon > \circ$، یک هموتوپی $H_\varepsilon : Y \times [\circ, ۱] \to X$ موجود باشد به طوری که

(آ) $H_\varepsilon|_{Y\times\{\circ\}} = f$،

(ب) $H_\varepsilon(a,t) = g(a) = f(a),\ \forall a \in A,\ t \in I$،

(ج) $d(H_\varepsilon(y,۱), g(y)) < \varepsilon,\ \forall y \in Y$.

مثال ۲.۲.۲. طوقه α به طور هموتوپیکی نزدیک به طوقه β است هرگاه α با β هموتوپیک نباشد و برای هر عدد مثبت ε، طوقه α_ε موجود باشد به طوریکه با α هموتپیک باشد و برای هر $t \in I$، داشته باشیم $d(\alpha_\varepsilon(t), \beta(t)) < \varepsilon$.

تعریف ۳.۲.۲. f را به طور هموتوپیکی نزدیک به g گوییم هرگاه f به طور هموتوپیکی نزدیک به g نسبت به زیر فضای تهی (ϕ) باشد.

ملاحظه ۴.۲.۲. می‌دانیم که اگر $f,g : Y \to X$ دو تابع پیوسته باشد که $f \simeq g$ و $h : X \to Z$ یک نگاشت پیوسته باشد، آن‌گاه $h\circ f \simeq h \circ g$. اما با استفاده از مثال زیر مشاهده می‌شود که اگر f به طور هموتوپیکی نزدیک به g باشد، آن‌گاه همیشه $h \circ f$ به طور هموتوپیکی نزدیک به $h \circ g$ نیست، حتی اگر h یک همسان‌ریختی باشد.

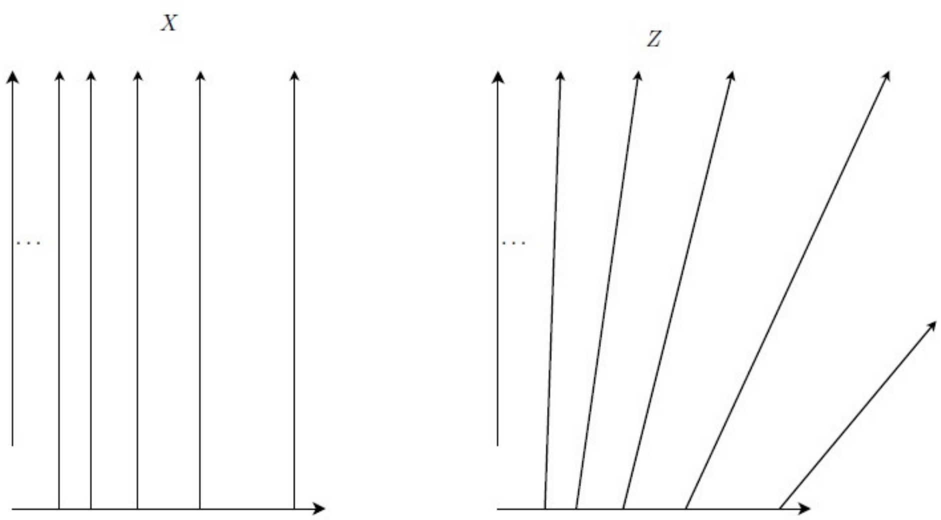
مثال ۵.۲.۲. فرض کنیم X و Z دو زیر فضای $\mathbb{R}^۲$ باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | x > \circ, y = \circ\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | x = \circ, y > ۱\}$$

$$\cup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | x = \frac{۱}{n}, y > \circ\}$$

و نیز

$$Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | x > \circ, y = \circ\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | x = \circ, y > ۱\}$$



شکل ۱.۲: فضای X و Z

$$\cup_{n\in\mathbb{Z}^+}\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|x>\frac{۱}{n}, y=nx-۱\}$$

و توپولوژی این فضاها را، توپولوژی زیرفضایی از $\mathbb{R}^۲$ در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۲).

و نگاشت $h: X\to Z$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم. $h(x,y)=(x(y+۱),y)$. ابتدا نشان می دهیم h همسان‌ریختی است.

۱. h یک به یک است. زیرا اگر فرض کنیم $h(x_۱,y_۱)=h(x_۲,y_۲)$، لذا $(x_۱(y_۱+۱),y_۱)=(x_۲(y_۲+۱),y_۲)$. پس $y_۱=y_۲$ و نیز $x_۱(y_۱+۱)=x_۲(y_۲+۱)$. و چون $y_۱=y_۲$ پس $x_۱(y_۱+۱)=x_۲(y_۱+۱)$ و لذا داریم $(x_۱-x_۲)+(x_۱-x_۲)y_۱=۰$. پس $(x_۱-x_۲).(y_۱+۱)=۰$ از طرفی چون $y_۱>-۱$ پس $(y_۱+۱)\neq ۰$ و لذا $(x_۱-x_۲)=۰$ و این یعنی $x_۱=x_۲$ که در نتیجه ثابت می‌شود، h یک به یک است.

۲. hبرو است. برای این منظور یک عضو دلخواه از Z را چون (a,b) در نظر بگیرید، باید داشته باشیم $(a,b)=(x(y+۱),y)$. پس باید $y=b$ و $a=x(y+۱)$.و چون $y=b$، پس $a=x(b+۱)$ و لذا $x=\frac{a}{b+۱}$. اکنون کافی است نشان دهیم $(\frac{a}{b+۱},b)\in X$ که در این صورت ۳ حالت موجود است:

(آ) اگر $a=۰$، لذا $\frac{a}{b+۱}=۰$ و چون $(a,b)\in Z$ $=(۰,b)$، پس $b>۱$. بنابراین $(\frac{a}{b+۱},b)=(۰,b)\in X$.

(ب) اگر $b=۰$ در این حالت $\frac{a}{b+۱}=a$. از طرفی چون $(a,b)\in Z$ $=(a,۰)$ و نیز $a>۰$ پس $(\frac{a}{b+۱},b)=(a,۰)\in X$.

(ج) عدد طبیعی n موجود است به طوری که $b=na-۱$ و $b>۰$، در این صورت $(\frac{a}{b+۱},b)=(\frac{a}{na},b)=(\frac{۱}{n},b)\in X$.

خواهیم داشت $h(\frac{a}{b+۱},b)=(a,b)$.

۳. h پیوسته است. زیرا توابع مولفه‌ای آن چند جمله‌ای و بنابراین پیوسته هستند.

۴. $h^{-۱}$ پیوسته است. با توجه به استدلال پوشا بودن h، داریم $h^{-۱}(x,y)=(\frac{x}{y+۱},y)$. زیرا توابع مولفه‌ای$h^{-۱}$ پیوسته است و بنابراین $h^{-۱}$ پیوسته است.

با توجه به گزاره‌های فوق، h همسان‌ریختی است. اکنون فرض کنیم $f:\mathbb{R}^+\to X$ با ضابطه $f(t)=(۱,۱+t)$ تعریف شده باشد و $g:\mathbb{R}^+\to X$ با ضابطه $g(t)=(۰,۱+t)$ تعریف شده باشد، نشان خواهیم داد f به طور هموتوپیکی نزدیک به g است. فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. $n\in\mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\frac{۱}{n}<\varepsilon$ پس می‌توان نگاشت $f_n:\mathbb{R}^+\to X$ با ضابطه $f_n(t)=(\frac{۱}{n},۱+t)$ تعریف کرد. از طرفی چون $\mathbb{R}^+$، انقباض پذیر است داریم $۱_{\mathbb{R}^+}\simeq C_۰$ و لذا

$$\begin{cases} f=f\circ ۱_{\mathbb{R}^+}\simeq C_{f(۰)}=C_{(۱,۱)} \\ f_n=f_n\circ ۱_{\mathbb{R}^+}\simeq C_{f_n(۰)}=C_{(\frac{۱}{n},۱)} \end{cases} (\bigstar.)$$

که می‌دانیم $C_{f(0)}:\mathbb{R}^+\to X$. از طرفی می‌دانیم یک مسیر مانند $\lambda:I\to X$، از $f(0)$ به $f_n(0)$ در X موجود است. لذا نگاشت $F:\mathbb{R}^+\times I\to X$ را با ضابطه $F(s,t)=\lambda(t)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوسته بودن λ ، نگاشت F نیز پیوسته است و برای هر $s\in\mathbb{R}^+$ داریم

$$\begin{cases} F(s,0)=\lambda(0)=f(0) \\ F(s,1)=\lambda(1)=f_n(0) \end{cases}.$$

پس $C_{f(0)}\simeq C_{f_n(0)}$ و چون هموتوپی رابطه‌ای هم‌هرزی است و هم‌ارزی رابطه ایست که شرط تعدی بودن را حفظ می‌کند، لذا با توجه به ★ و $C_{f(0)}\simeq C_{f_n(0)}$، $f\simeq f_n$ می‌باشد. پس نگاشتی پیوسته چون $H_\varepsilon:\mathbb{R}^+\times I\to X$ موجود است به طوری که

$$\begin{cases} H_\varepsilon(t,0)=f(t) \\ H_\varepsilon(t,1)=f_n(t) \end{cases}.$$

از طرفی چون $H_\varepsilon(t,0)=f(t)$ و نیز

$$d(H_\varepsilon(t,1),g(t))=d(f_n(t),(0,1+t))=d((\frac{1}{n},1+t),(0,1+t))=$$

$$=\sqrt{((1+t)-(1+t))^2+(0-\frac{1}{n})^2}=\sqrt{(\frac{1}{n})^2}=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

بنابراین f به g به طور هموتوپیکی نزدیک است. حال اگر مجددا $h:X\to Z$ را با ضابطه زیر تعریف کنیم $h(x,y)=(x(y+1),y)$. نشان خواهیم داد $h\circ f$ به $h\circ g$ به طور هموتوپیکی نزدیک نیست و این مطلب را با برهان خلف ثابت می‌کنیم، فرض کنیم $h\circ f$ به $h\circ g$ به طور هموتوپیکی نزدیک است و اگر $\varepsilon=1$ باشد، پس نگاشت $H_1:\mathbb{R}^+\times I\to Z$ موجود است به طوری که برای هر $t\in\mathbb{R}^+$، $H_1(t,0)=h\circ f(t)$ و نیز (♦) $d(H_1(t,1),h\circ g(t))<1$.

بنابراین چون $g(t) = (0, 1+t)$ داریم

$$H_1(\mathbb{R}^+ \times \{1\}) \subseteq N_1\{(0, 1+t) | t \geq 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} \cap Z \subseteq \dot\cup_{n\in\mathbb{N}}\{(\frac{1}{n}(y+1), y) | y > 0\}$$

از طرفی چون $\{(\frac{1}{n}(y+1), y) | y > 0\}$ باز است چون H_1 پیوسته و $\mathbb{R}^+ \times \{1\}$ همبند است، پس $H_1(\mathbb{R}^+ \times \{1\})$ همبند است و بنابراین عدد طبیعی n_0 موجود است که $H_1(\mathbb{R}^+ \times \{1\}) \subseteq \{(\frac{1}{n_0}(y+1), y) | y > 0\}$ و اگر قرار دهیم $A_0 = \{(\frac{1}{n_0}(y+1), y) | y > 0\}$ و نیز $A_1 = h \circ g(1 + n_0^2) = (0, 1 + n_0^2)$، با توجه به این‌که فاصله‌ی نقطه (x_0, y_0) از خط $y = ax + b$، مقدار $\frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ می‌باشد، لذا فاصله نقطه A_1 از خط A_0 با معادله $y = n_0 x - 1$ برابر است با

$$d(A_1, A_0) = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-1 - n_0^2 - 1|}{\sqrt{n_0^2+1}} = \frac{n_0^2 + 2}{\sqrt{n_0^2+1}} > \sqrt{n_0^2 + 1} > 1$$

بنابراین $d(h \circ g(n_0^2 + 1), A_0) > 1$ پس $d(H_1(n_0^2 + 1, 1), h \circ g(n_0^2 + 1)) > 1$ که با در تناقض است و لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است یعنی $h \circ f$ به $h \circ g$ به طور هموتوپیکی نزدیک نیست. ♦

توجه داریم که اگر f به طور هموتوپیکی نزدیک به g باشد، لزوما g به طور هموتوپیکی نزدیک به f نخواهد بود. مثال زیر این مطلب را به وضوح نشان می‌دهد.

مثال ۶.۲.۲. فضاهای زیر را که در مثال ۵.۲.۲ معرفی شده اند با توپولوژی زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید.

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, y > 1\}$$

$$\cup_{n\in\mathbb{Z}^+}\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ | x=\frac{۱}{n}, y>۰\}.$$

و نیز فرض کنیم $f:\mathbb{R}^+\to X$ با ضابطه $f(t)=(۱,۱+t)$ تعریف شده باشد و $g:\mathbb{R}^+\to X$ با ضابطه $g(t)=(۰,۱+t)$ تعریف شده باشد که در مثال ۵.۲.۲ نشان دادیم، f به طور هموتوپیکی به g نزدیک است. اکنون نشان خواهیم داد g به طور هموتوپیکی به f نزدیک نیست. به برهان خلف فرض کنیم g به طور هموتوپیکی به f نزدیک است و اگر فرض کنیم $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$، در این صورت g_n موجود است به طوری که $g\simeq g_n$ و $d(g_n(t),f(t))\leq\frac{۱}{۲}$ و همچنین $F:I\times I\to X$ موجود است به طوری که

$$\begin{cases} F(t,۰)=g(t) \\ F(t,۱)=g_n(t) \end{cases}.$$

از طرفی I همبند مسیری است و لذا $I\times I$ همبند مسیری است و چون F پیوسته است پس $F(I\times I)$ زیرمجموعه همبند مسیری از X است و نیز اگر فرض کنیم $A=\{(۰,y)|۱<y\}$، در این صورت A یک مولفه همبند مسیری از X است از طرفی چون

$F(I\times\{۰\}=g(I)\subseteq A$ پس $g_n(I)\subseteq F(I\times I)\subseteq A$. بنابراین $g_n(I)\subseteq\{(۰,y)|y>۱\}$ و از طرفی $f(I)\subseteq\{(۱,y)|y>۰\}$، بنابراین برای هر $t>۰$، $d(g_n(t),f(t)\geq ۱$ که تناقض است و لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است یعنی g به طور هموتوپیکی به f نزدیک نیست.

حال این سوال به ذهن می رسد که چه شرایطی روی نگاشت h بگذاریم تا $h\circ f$ به طور هموتوپیکی نزدیک به $h\circ g$ شود، در گزاره زیر به این سوال پاسخ خواهیم داد.

گزاره ۷.۲.۲. فرض کنیم Y یک فضای توپولوژیک و Xیک فضای متریک باشد و نگاشت $f:Y\to X$ به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت $g:Y\to X$ باشد و نگاشت $h:X\to Z$ به طور یکنواخت پیوسته باشد، در این صورت $h\circ f$ یا به طور هموتوپیکی نزدیک به $h\circ g$

است و یا با آن هموتوپیک است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، چون h به طور یکنواخت پیوسته است، $\delta > ۰$ موجود است به طوری که برای هر $x, y \in X$، اگر $d_X(x,y) < \delta$، آنگاه $d_Z(h(x), h(y)) < \varepsilon$. از طرفی چون f به طور هموتوپیکی نزدیک به g است، لذا برای هر $\varepsilon > ۰$ یک نگاشت هموتوپی$H_\delta : Y \times I \to X$، موجود است به طوری که برای هر $y \in Y$ داریم $H_\delta(y, ۰) = f(y)$ و نیز $d_X(H_\delta(y, ۱), g(y)) < \delta$. تعریف می‌کنیم نگاشت $K_\varepsilon : Y \times I \to Z$، را با ضابطه $K_\varepsilon = h \circ H_\delta$، پس برای هر $y \in Y$، $K_\varepsilon(y, ۰) = h \circ H_\delta(y, ۰) = h \circ f(y)$ و نیز

$$d_Z(K_\varepsilon(y, ۱), h \circ g(y)) = d_Z(h \circ H_\delta(y, ۱), h(g(y))) < \varepsilon$$

چون $d_X(H_\delta(y, ۱), g(y)) < \delta$. حال دو حالت خواهیم داشت یا $h \circ f$ هموتوپ با $h \circ g$ است و یا هموتوپ نمی‌باشند که با توجه به توضیحات فوق $h \circ f$ به طور هموتوپیکی نزدیک به $h \circ g$ است.

□

نتیجه ۸.۲.۲. فرض کنیم Y یک فضای توپولوژیک و X یک فضای متریک باشد و نگاشت $f : Y \to X$ به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت $g : Y \to X$ باشد و نگاشت $h : X \to Z$ نیز موجود باشد. اگر X فشرده باشد و یا h در شرط لیپشیتز صدق کند، در این صورت $h \circ f$ یا به طور هموتوپیکی نزدیک به $h \circ g$ است و یا با آن هموتوپیک است.

برهان. ابتدا با شرط لیپشیتز مساله را حل می نماییم، در ابتدا یاد آوری می‌کنیم اگر h در این شرط صدق کند آنگاه $k \in \mathbb{R}^+$ موجود است به طوری که برای هر $x, y \in X$ داریم $d_Y(h(x), h(y)) < kd_X(x, y)$. حال ثابت می‌کنیم h به طور یکنواخت پیوسته است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$، برای هر $x, y \in X$، اگر $d_X(x, y) < \delta$ آنگاه

$$d_Y(h(x), h(y)) < kd_X(x, y) < k.\delta = k.\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

لذا h به طور یکنواخت پیوسته است. حال با توجه به گزاره ۷.۲.۲ ثابت می‌شود، $h \circ f$ یا به طور هموتوپیکی نزدیک به $h \circ g$ است و یا با آن هموتوپیک است. اکنون سعی می کنیم مساله را با شرط فشردگی X حل نماییم، در این حالت نیز ثابت خواهیم کرد h به طور یکنواخت پیوسته است. به برهان خلف فرض کنیم h به طور یکنواخت پیوسته نیست پس $\varepsilon > ۰$ وجود دارد که برای هر $\delta = \frac{۱}{n}$، عناصر $x_n, y_n \in X$ موجود است به طوری که و $d_X(x_n, y_n) < \delta = \frac{۱}{n}$، در این صورت $d_Z(h(x_n), h(y_n)) \geq \varepsilon$. از طرفی می‌دانیم در یک فضای متریک فشرده مانندX، هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از X دارای یک زیردنباله همگراست. حال مجموعه‌های نامتناهی زیر را در نظر می گیریم. $A = \{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$.

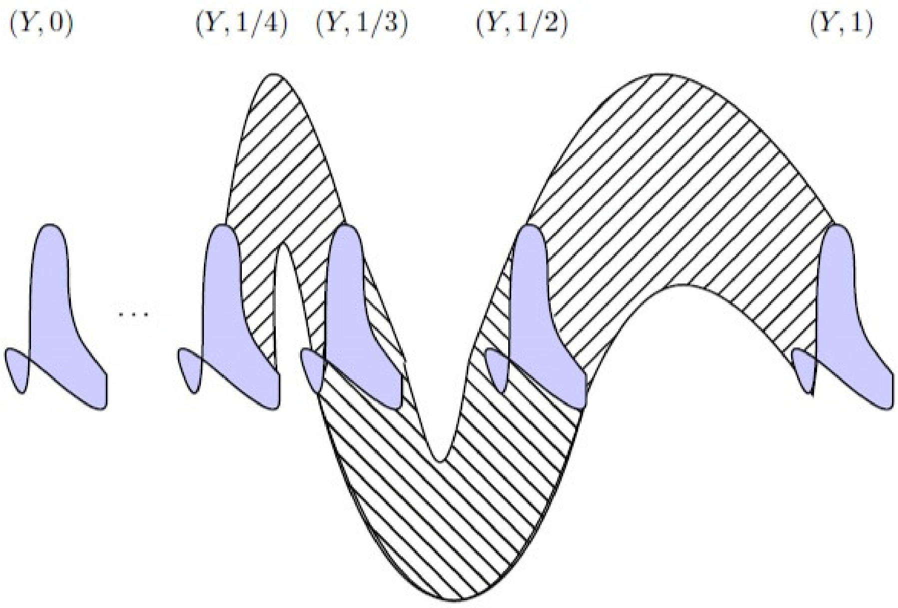
لذا زیر دنباله همگرا $\{x_{n_k}\}$ از A و همگرا به x موجود است، اکنون مجموعه‌ی نامتناهی $B = \{y_{n_k}\}$ را در نظر می‌گیریم لذا زیر دنباله همگرا $\{y_{n_{k_s}}\}$ از B و همگرا به y موجود است. ادعا می کنیم $x = y$ برای این منظور کافی است نشان دهیم $\{x_{n_{k_s}}\}$ به y همگراست. برای این منظور چون $\{y_{n_{k_s}}\}$ همگرا به y است بنابراین عدد طبیعی $s_۰$ موجود است که برای هر $s \geq s_۰$ داریم $|y_{n_{k_s}} - y| \leq \frac{۱}{n}$ و لذا برای هر $s \geq \ max\{s_۰, n\}$

$$|x_{n_{k_s}} - y| = |x_{n_{k_s}} - y_{n_{k_s}} + y_{n_{k_s}} - y| \leq |x_{n_{k_s}} - y_{n_{k_s}}| + |y_{n_{k_s}} - y| \leq \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n} \leq \frac{۲}{n}.$$

بنابراین $\{x_{n_{k_s}}\}$ به y همگراست. از طرفی چون $\{x_{n_k}\}$ به x همگراست، پس $\{x_{n_{k_s}}\}$ به x همگراست. چون حد در فضای هاسدورف یکتاست، داریم $x = y$. از طرفی چون h پیوسته است و $\{x_{n_{k_s}}\}$ به x همگراست و $\{y_{n_{k_s}}\}$ به x همگراست. پس $h(\{x_{n_{k_s}}\})$ به $h(x)$ همگراست و $h(\{y_{n_{k_s}}\})$ به $h(x)$ همگراست. بنابراین $s_۱$ ای چنان موجود است که برای هر $s \geq s_۱$ داریم $d_Z(h(x_{n_{k_s}}), h(x)) \leq \frac{\varepsilon}{۲}$ و نیز $d_Z(h(x), h(y_{n_{k_s}})) \leq \frac{\varepsilon}{۲}$. بنابراین

$$d_Z(h(x_{n_{k_s}}), h(y_{n_{k_s}})) \leq d_Z(h(x_{n_{k_s}}), h(x)) + d_Z(h(x), h(y_{n_{k_s}})) \leq \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

و این تناقض است. پس فرض خلف باطل و h به طور یکنواخت پیوسته است و لذا با توجه



شکل ۲.۲: فضای Z

به گزاره ۷.۲.۲ ثابت می‌شود، $h \circ f$ یا به طور هموتوپیکی نزدیک به $h \circ g$ است و یا با آن هموتوپیک است. □

تعریف ۹.۲.۲. فرض کنیم Y فضای متریک باشد، فضای متریک $C(Y)$ را که زیر فضایی از $Y \times [۰, ۱] \times [-۱, ۱]$ می‌باشد (شکل ۲.۲) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(Y) = \{(y, t, \sin(\frac{\pi}{t})) | (y, t) \in Y \times (۰, ۱]\} \cup Y \times \{۰\} \times \{۰\}.$$

گزاره ۱۰.۲.۲. نگاشت $f : Y \to C(Y)$ با ضابطه $f(y) = (y, ۱, ۰)$، به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت $g : Y \to C(Y)$ با ضابطه $g(y) = (y, ۰, ۰)$ است یا با آن هموتوپ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم نگاشت $f : Y \to C(Y)$ با ضابطه $f(y) = (y, ۱, ۰)$ و نگاشت

$g : Y \to C(Y)$ با ضابطه $g(y) = (y, ۰, ۰)$ تعریف شده باشد، کافی است ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > ۰$، نگاشت هموتوپی $H_\varepsilon : Y \times I \to C(y)$ موجود است به طوری که $H_\varepsilon(y, ۰) = f(y)$ و نیز $d_{C(Y)}(H_\varepsilon(y, ۱), g(y)) < \varepsilon$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، پس $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\frac{۱}{k} < \varepsilon$. حال $H_\varepsilon : Y \times I \to C(y)$ را با ضابطه

$$H_\varepsilon(y, t) = (y, \frac{t}{k} + ۱ - t, \sin(\frac{\pi}{\frac{t}{k} + ۱ - t}))$$

تعریف می‌کنیم . توجه شود که برای هر $t \in I$،

$$\frac{۱}{k} \leq t \times \frac{۱}{k} + (۱ - t) \times ۱ \leq ۱$$

بنابراین $\frac{t}{k} + ۱ - t \in (۰, ۱]$. پس برای هر $t \in I$، داریم $H_\varepsilon(y, t) \in C(y)$ و توابع مولفه‌ای H_ε پیوسته هستند که ثابت می‌شود H_ε پیوسته است. برای هر $y \in Y$ $H_\varepsilon(y, ۰) = (y, ۱, ۰) = f(y)$ و نیز $H_\varepsilon(y, ۱) = (y, \frac{۱}{k}, ۰)$. پس

$$d_{C(Y)}(H_\varepsilon(y, ۱), g(y)) = d_{C(Y)}((y, \frac{۱}{k}, ۰), (y, ۰, ۰)) = \frac{۱}{k} < \varepsilon.$$

بنابراین f به طور هموتوپیکی نزدیک به g است. □

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنیم Y یک فضای متریک فشرده باشد و نگاشت $f : Y \to X$ هموتوپ با نگاشت $g : Y \to X$ نباشد و نگاشت $F : C(Y) \to X$ موجود باشد به طوری که $F|_{(Y,۱,۰)} = f$ و $F|_{(Y,۰,۰)} = g$. در این صورت f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g است.

برهان. نشان خواهیم داد f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم

$$M = Y \times (\{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}) \times \{۰\}.$$

چون Y و $\{\frac{۱}{n}|n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ فضاهایی هاسدورف و فشرده‌اند لذا M نیز هاسدورف و فشرده است. از طرفی نگاشت $F : C(Y) \to X$ پیوسته است پس $F|_M : M \to X$ نیز پیوسته است و چون M هاسدورف و فشرده است، لذا $F|_M$ به طور یکنواخت پیوسته است.بنابراین $\delta > ۰$ هست که برای هر $x, y \in M$ اگر $d(x, y) < \delta$، آن‌گاه $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$. لذا $K \in \mathbb{N}$ هست که $\frac{۱}{K} < \delta$. نگاشت $H : Y \times I \to X$ را با ضابطه

$$H(y, t) = F(y, \frac{t}{K} + ۱ - t, \sin(\frac{\pi}{\frac{t}{K} + ۱ - t}))$$

در نظر می گیریم و برای هر $t \in I$، $\frac{t}{K} + ۱ - t \in (۰, ۱]$، پس

$$(y, \frac{t}{K} + ۱ - t, \sin(\frac{\pi}{\frac{t}{K} + ۱ - t})) \in C(Y)$$

و چون F پیوسته و خوشتعریف است، H نیز پیوسته و خوشتعریف است. از طرفی برای هر $y \in Y$ داریم

$$\begin{cases} H(y, ۰) = F(y, ۱, ۰) = f(y) \\ H(y, ۱) = F(y, \frac{۱}{K}, ۰) \end{cases}$$

و نیز $(y, \frac{۱}{K}, ۰), (y, ۰, ۰) \in M$ و هم‌چنین $d((y, \frac{۱}{K}, ۰), (y, ۰, ۰)) < \delta$ لذا خواهیم داشت $d(F(y, \frac{۱}{K}, ۰), F(y, ۰, ۰)) < \varepsilon$. بنابراین برای هر $\varepsilon > ۰$، نگاشت $f_\varepsilon : Y \to X$ با ضابطه‌ی $f_\varepsilon(y) = F(y, \frac{۱}{K}, ۰)$ بدست آوردیم که $f \simeq f_\varepsilon$ و نیز برای هر $y \in Y$، $d(f_\varepsilon(y), g(y)) < \varepsilon$. بنابراین چون بنا بر فرض قضیه، f با g هموتوپ نیست، لذا f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g است.

□

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنیم Y یک فضای متریک باشد و $A \subseteq Y$ یک زیر فضای بسته

باشد، فرض کنیم نگاشت $\varphi : Y \to [0,1]$ به گونه ای باشد که $A = \varphi^{-1}(0)$. فضای متریک $C(Y,A)$ یک زیر فضای از $Y \times [0,1] \times [-1,1]$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(y, \varphi(y)t, \varphi(y)\sin(\frac{\pi}{t}))|(y,t) \in Y \times (0,1]\} \cup Y \times \{0\} \times \{0\}.$$

گزاره ۱۳.۲.۲. فرض کنیم $A \subseteq Y$ یک زیر فضای بسته از فضای متریک Y باشد. نگاشت شمولی $i_1 : Y \to C(Y,A)$ با ضابطه $i_1(y) = (y, \varphi(y), 0)$ یا هموتوپ با نگاشت $i_2 : Y \to C(Y,A)$ با ضابطه $i_2(y) = (y, 0, 0)$ است و یا به طور هموتوپیکی نزدیک به این نگاشت نسبت به A است.

برهان. فرض کنیم نگاشت شمولی $i_1 : Y \to C(Y,A)$ با ضابطه $i_1(y) = (y, \varphi(y), 0)$ و نگاشت $i_2 : Y \to C(Y,A)$ با ضابطه $i_2(y) = (y, 0, 0)$ تعریف شده باشد، نشان خواهیم داد i_1 به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت i_2 است. برای این منظور کافی است برای هر $\varepsilon > 0$ نگاشت هموتوپی $H_\varepsilon : Y \times I \to C(Y,A)$ را تعریف کنیم به طوری که $H_\varepsilon(y,0) = i_1(y)$ و $d(H_\varepsilon(y,1), i_2(y)) < \varepsilon$. توجه شود $K \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که $\frac{1}{K} < \varepsilon$، لذا $H_\varepsilon : Y \times I \to C(Y,A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_\varepsilon(y,t) = (y, \varphi(y)(\frac{1}{K} + 1 - t), \varphi(y)\sin(\frac{\pi}{\frac{1}{K} + 1 - t})).$$

توجه شود که برای هر $t \in I$، $\frac{1}{K} \leq \frac{1}{K} + 1 - t \leq 1$ بنابراین $\frac{1}{K} + 1 - t \in I$، پس برای هر $t \in I$، $y \in Y$ و $H_\varepsilon(y,t) \in C(Y,A)$ و چون توابع مولفه ای H_ε پیوسته هستند لذا H_ε نیز پیوسته است. $H_\varepsilon(y,0) = (y, \varphi(y), 0) = i_1(y)$ و $H_\varepsilon(y,1) = (y, \frac{\varphi(y)}{K}, 0)$ و نیز

$$d(H_\varepsilon(y,1), i_2(y)) = d((y, \frac{\varphi(y)}{K}, 0), (y, 0, 0)) = \frac{|\varphi(y)|}{K} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

بنابراین i_1 به طور هموتوپیکی نزدیک به i_2 است.

$\square$

قضیه ۱۴.۲.۲. شرایط زیر را در نظر بگیرید

۱. Y یک فضای متریک فشرده است که همبند مسیری موضعی نیز می‌باشد.

۲. $A \subseteq Y$ یک زیر فضای بسته از فضای Y است.

۳. نگاشت $f : Y \to X$ هموتوپ با نگاشت $g : Y \to X$ نسبت به A نیست.

۴. نگاشت های شمولی $i_۱, i_۲ : Y \to C(Y, A)$ تعریف شده با ضابطه های $i_۱(y) = (y, \varphi(y), ۰)$ و $i_۲(y) = (y, ۰, ۰)$ باشند.

در این صورت نگاشت f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g نسبت به A است هرگاه نگاشت $F : C(Y, A) \to X$ موجود باشد به طوری که $F \circ i_۱ = f$ و $F \circ i_۲ = g$.

برهان. نشان خواهیم داد f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم

$$M = Y \times (\{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}) \times \{۰\}.$$

چون Y و $\{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ فضاهایی هاسدورف و فشرده‌اند لذا M نیز هاسدورف و فشرده است. از طرفی نگاشت $F : C(Y, A) \to X$ پیوسته است پس $F|_M : M \to X$ نیز پیوسته است و چون M هاسدورف و فشرده است، لذا $F|_M$ به طور یکنواخت پیوسته است.بنابراین $\delta > ۰$ هست که برای هر $x, y \in M$ اگر $d(x, y) < \delta$، آن‌گاه $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$. لذا $K \in \mathbb{N}$ هست که $\frac{۱}{K} < \delta$. نگاشت $H : Y \times I \to X$ را با ضابطه

$$H(y, t) = F(y, \varphi(y)(\frac{t}{K} + ۱ - t), \varphi(y) \sin(\frac{\pi}{\frac{t}{K} + ۱ - t}))$$

در نظر می‌گیریم و برای هر $t \in I$، $\frac{t}{K} + ۱ - t \in (۰, ۱]$، پس

$$(y, \varphi(y)(\frac{t}{K} + ۱ - t), \varphi(y)\sin(\frac{\pi}{\frac{t}{K} + ۱ - t})) \in C(Y, A)$$

و چون F پیوسته و خوشتعریف است، H نیز پیوسته و خوشتعریف است. از طرفی برای هر $y \in Y$ داریم

$$\begin{cases} H(y, ۰) = F(y, \varphi(y), ۰) = f(y) \\ H(y, ۱) = F(y, \frac{\varphi(y)}{K}, ۰) \end{cases}$$

برای هر $t \in I$، چون $a \in A = \varphi^{-۱}(۰)$، داریم

$$H(a, t) = F(a, \varphi(a)(\frac{t}{K} + ۱ - t), \varphi(a)\sin(\frac{\pi}{\frac{t}{K} + ۱ - t})) = F(a, a, ۰) = g(a) = f(a)$$

و نیز برای هر $y \in Y$ $(y, \frac{\varphi(y)}{K}, ۰), (y, ۰, ۰) \in M$ و همچنین $d((y, \frac{\varphi(y)}{K}, ۰), (y, ۰, ۰)) < \delta$ لذا خواهیم داشت $d(F(y, \frac{\varphi(y)}{K}, ۰), F(y, ۰, ۰)) < \varepsilon$. بنابراین برای هر $\varepsilon > ۰$، نگاشت $f_\varepsilon : Y \to X$ با ضابطه‌ی $f_\varepsilon(y) = F(y, \frac{\varphi(y)}{K}, ۰)$ بدست آوردیم که $f \simeq f_\varepsilon(rel\ A)$ و نیز برای هر $y \in Y$، $d(f_\varepsilon(y), g(y)) < \varepsilon$. بنابراین چون بنا بر فرض قضیه، f با g هموتوپ نیست، لذا f به طور هموتوپیکی نزدیک به نگاشت g نسبت به A است.

□

فصل ۳

ارتباط هاسدورف هموتوپیکی مسیری و به طور هموتوپیکی نزدیک

۱.۳ مقدمه

در این فصل به معرفی مفهوم هاسدورف هموتوپیکی مسیری و مقایسه‌ی آن با خاصیت هاسدورف هموتوپیکی می پردازیم و در ادامه نشان داده می شود که ویژگی هاسدورف هموتوپیکی مسیری، مفهومی مقابل نزدیکبودن هموتوپیکی در فضاهای متریک، است. به عبارت دقیق‌تر فضای متریک X، هاسدورف هموتوپیکی مسیری است اگر و فقط اگر در X، هیچ دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$، موجود نباشند. در بیان مطالب این فصل بیشتر از [۸] و [۱] استفاده شده است.

۲.۳ هاسدورف هموتوپیکی مسیری

تعریف ۱.۲.۳. فضای توپولوژیک X را هاسدورف هموتوپیکی مسیری[1] گوییم، هرگاه برای هر جفت از مسیرهای در X مانند α, β که $\alpha(۱) = \beta(۱)$ و $\alpha(\circ) = \beta(\circ)$ و $[\alpha] \neq [\beta]$، یک افراز مانند

$$\circ = t_\circ < t_۱ < t_۲ < ... < t_n = ۱$$

و یک دنباله از مجموعه‌های باز مانند

$$U_۱, U_۲, ..., U_n$$

موجود باشد به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\alpha([t_{i-۱}, t_i]) \subseteq U_i$ و اگر $\gamma : [\circ, ۱] \to X$ یک مسیر دیگر باشد که در شرط $\gamma([t_{i-۱}, t_i]) \subseteq U_i$ برای هر $۱ \leq i \leq n$، صدق می‌کند و نیز $\alpha(t_i) = \gamma(t_i)$ برای هر $\circ \leq i \leq n$، در این صورت $[\gamma] \neq [\beta]$.

تعریف ۲.۲.۳. فضای X را همبند ساده نیم‌موضعی[2] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، همسایگی U_x از x موجود است به طوری که هر طوقه درU_x، در X، پوچ هموتوپیک باشد. به عبارت دیگر برای هر $a \in U_x$، $i_* \pi_۱(U_x, a) = ۱$ که $i : U_x \to X$، نگاشت شمولی باشد.

گزاره ۳.۲.۳. اگر X همبند ساده نیم‌موضعی باشد، آن‌گاه هاسدورف مسیری هموتوپیکی است.

برهان. فرض کنیم $\alpha, \beta : I \to X$ دو مسیر باشند به طوری که $[\alpha] \neq [\beta]$.

از طرفی چون X همبند ساده نیم‌موضعی است، لذا برای هر $x \in X$، همسایگی U_x از x موجود است به طوری که برای هر $a \in U_x$، $i_* \pi_۱(U_x, a) = ۱$. چون $I \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha^{-۱}(U_x)$ و نیز

[1] Homotopically Path Hausdorff

[2] Semilocaly Simply Connected

I یک فضای متریک فشرده است، بنابراین بنا به لم عدد لبگ، $\delta > ۰$ موجود است به طوری که با فرض $N \in \mathbb{N}$ که $\frac{۱}{N} < \delta$ و $K_i = [\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]$، در این صورت برای یک x_i که $x_i \in X$، داریم $\alpha(K_i) \subseteq U_{x_i}$. فرض کنیم $\gamma : I \to X$ موجود باشد به طوری که $\gamma(K_i) \subseteq U_{x_i}$ و برای هر i، $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$. چون $\alpha([\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]) \subseteq U_{x_i}$ و $\gamma([\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]) \subseteq U_{x_i}$ و $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$ و $\gamma(\frac{i+۱}{N}) = \alpha(\frac{i+۱}{N})$. همچنین برای هر $a \in U_x$، $i_*\pi_۱(U_x, a) = ۱$. بنابراین

$$\alpha|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]} \circ \lambda * (\gamma|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]} \circ \lambda)^{-۱} \in i_*\pi_۱(U_x, \alpha(\frac{i}{N})) = ۱$$

که در آن $\lambda : I \to [\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]$ با ضابطه $\lambda(t) = t(\frac{i+۱}{N}) + (۱-t)\frac{i}{N}$. بنابراین

$$\alpha|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]} \circ \lambda \simeq \gamma|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+۱}{N}]} \circ \lambda(rel\dot{I}).$$

لذا $\alpha \simeq \gamma(rel\dot{I})$ پس $[\alpha] = [\gamma]$ و لذا $[\gamma] \neq [\beta]$ چون $[\alpha] \neq [\beta]$.

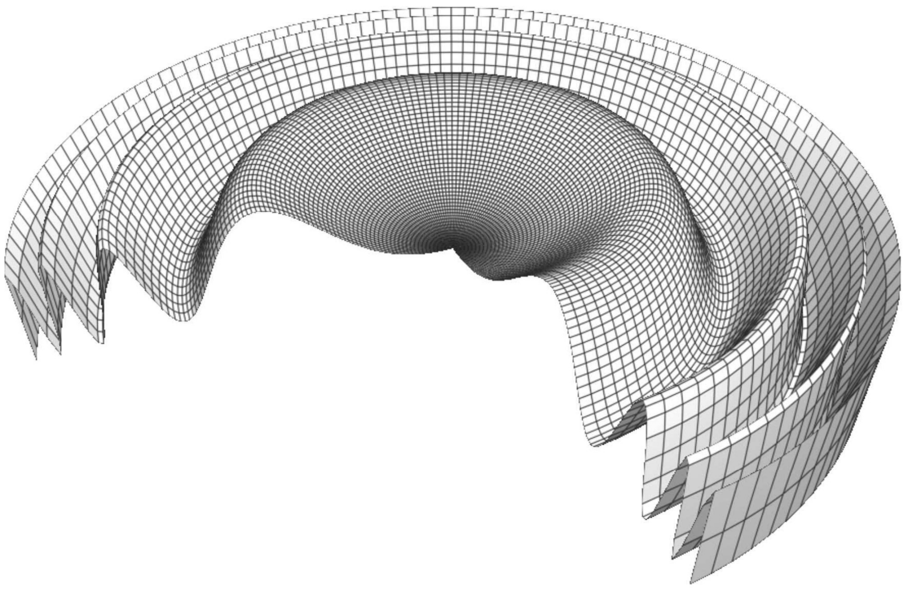
□

مثال ۴.۲.۳. فرض کنیم فضای $Z \subseteq \mathbb{R}^۳$، متشکل از دوران خم سینوسی توپولوژی دان ها حول خط $x = \frac{۱}{۲\pi}$ باشد.(شکل ۱.۳). در واقع فضای Z همبند ساده نیم‌موضعی است و بنا بر گزاره ۳.۲.۳ Zیک فضای هاسدورف هموتوپیکی مسیری است.

ملاحظه ۵.۲.۳. بنا بر گزاره قبل هر فضای همبند ساده نیم‌موضعی، هاسدورف مسیری هموتوپیکی است. در مثال بعد نشان خواهیم داد اگر X هاسدورف هموتوپیکی مسیری باشد لزوما همبند ساده نیم‌موضعی نیست. به عبارت دیگر فضایی وجود دارد که هاسدورف هموتوپیکی مسیری است اما همبند ساده نیم‌موضعی نیست.

مثال ۶.۲.۳. فرض کنیم است که از دوران خم سینوسی توپولوژی دان ها حول پاره خط حدی اش در فضای $\mathbb{R}^۳$ و اجتماع آن با پاره خط حدی

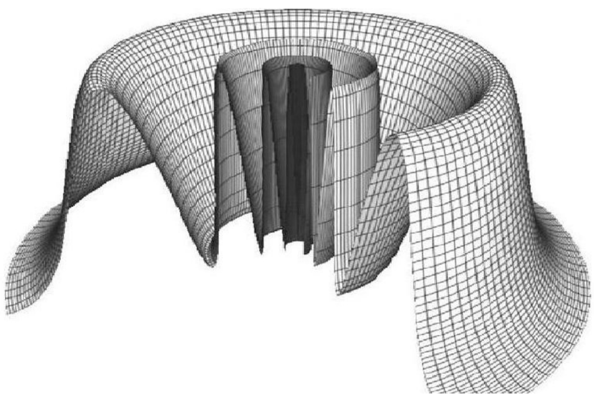
$$A = \{(۰, ۰, s) \in \mathbb{R}^۳ | -۱ \leq s \leq ۱\}$$



شکل ۱.۳: فضای Z

بدست آمده باشد (شکل ۲.۳). فضای X همبند ساده نیم‌موضعی نیست چون اگر U یک همسایگی از یک نقطه در A باشد، در این صورت برای هر $b \in U \setminus A$، داریم $i_*\pi_۱(U_x, b) \neq ۱$. در این صورت فضای $Y = X\backslash A$ فضایی همبند، همبند مسیری موضعی و همبند ساده ی نیم موضعی است.

اما نشان می دهیم فضای X هاسدورف هموتوپیکی مسیری است. برای این منظور فرض



شکل ۲.۳: فضای X

کنیم $\alpha, \beta : I \to X$ موجود باشند به طوری که $[\alpha] \neq [\beta]$. چون α پیوسته است و I همبند مسیری است، پس $Im(\alpha)$ همبند مسیری است. و از آن‌جایی که A و $X \setminus A$ مولفه‌های همبند مسیری از X هستند، لذا دو حالت خواهیم داشت:

۱. فرض کنیم $Im(\alpha) \subseteq X \setminus A$. چون α پیوسته است و I فشرده است، پس $Im(\alpha)$ فشرده است. از طرفی چون $X \setminus A$ همبند مسیری نیم‌موضعی است، لذا برای هر $x \in X \setminus A$، مجموعه‌ی باز U_x در $X \setminus A$ موجود است که هر طوقه در آن پوچ است و لذا $I \subseteq \cup_{x \in X \setminus A} \alpha^{-1}(U_x)$. و چون I یک فضای فشرده متریک است، عدد لبگ δ موجود است که با فرض δ، $N \in \mathbb{N}$ که $\frac{1}{N} < \delta$. برای هر $0 \leq i \leq N$، داریم $\alpha(K_i) \subseteq U_{x_i}$ که در آن $K_i = [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$. از طرفی U_{x_i} زیر مجموعه‌ی باز $X \setminus A$ است و چون A زیرمجموعه‌ی فشرده X است، پس $X \setminus A$ زیر مجموعه‌ی باز X است و بنابراین U_{x_i} زیرمجموعه‌ی باز X است. فرض کنیم $\gamma : I \to X$ مسیری باشد به طوری که برای $0 \leq i \leq N$، $\gamma(K_i) \subseteq U_{x_i}$ و $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$. از طرفی چون $\alpha([\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]) \subseteq U_{x_i}$ پس $\gamma([\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]) \subseteq U_{x_i}$. $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$ و $\gamma(\frac{i+1}{N}) = \alpha(\frac{i+1}{N})$ و نیز U_{x_i} یک همسایگی است که هر طوقه در آن پوچ است. بنابراین خواهیم داشت

$$\alpha|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]} \circ \lambda * (\gamma|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]} \circ \lambda)^{-1} \in i_* \pi_1(U_{x_i}, x) = 1$$

و لذا

$$\alpha|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]} \circ \lambda \simeq \gamma|_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]} \circ \lambda (rel \dot{I})$$

لذا $\alpha \simeq \gamma (rel \dot{I})$ پس $[\alpha] = [\gamma]$. در نتیجه $[\gamma] \neq [\beta]$ و چون $[\alpha] \neq [\beta]$.

۲. فرض کنیم $Im(\alpha) \subseteq A$. از طرفی چون A همبند مسیری نیم‌موضعی است، لذا برای هر $x \in A$، همسایگی انقباض‌پذیر V_x موجود است و لذا $I \subseteq \cup_{x \in A} \alpha^{-1}(V_x)$. و چون I یک

فضای فشرده متریک است، عدد لبگ δ موجود است که با فرض $N \in \mathbb{N}$ که $\delta < \frac{1}{N}$. برای $0 \leq i \leq N$، داریم $\alpha(K_i) \subseteq V_{x_i}$ که در آن $K_i = [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$. از طرفی V_{x_i} زیر مجموعه‌ی باز A است پس $V_{x_i} \subseteq X$. و با توجه به تعریف توپولوژی زیرفضایی، U_{x_i} زیرمجموعه‌ی باز X موجود است به طوری که $V_{x_i} = U_{x_i} \cap A$. فرض کنیم $\gamma : I \to X$ مسیری باشد به طوری که برای $0 \leq i \leq N$، $\gamma(K_i) \subseteq U_{x_i}$ و $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$. چون γ پیوسته است و K_i همبند مسیری است، لذا $\gamma(K_i)$ همبند مسیری است و در یک مولفه همبند مسیری از X که شامل $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$ می‌باشد، واقع است. از طرفی $\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N}) \in A$ و A مولفه‌ی همبند مسیری X است، لذا $\gamma(K_i) \subseteq A$. بنابراین $\gamma(K_i) \subseteq U_{x_i} \cap A = V_{x_i}$. لذا داریم $\gamma(K_i) \subseteq V_{x_i}$ و $\alpha(K_i) \subseteq V_{x_i}$ و نیز V_{x_i} یک همسایگی انقباض‌پذیر است و

$\gamma(\frac{i}{N}) = \alpha(\frac{i}{N})$ و $\gamma(\frac{i+1}{N}) = \alpha(\frac{i+1}{N})$. لذا $\alpha \simeq \gamma(rel\dot{I})$ پس $[\alpha] = [\gamma]$. در نتیجه $[\beta] \neq [\gamma]$ چون $[\beta] \neq [\alpha]$.

لم ۷.۲.۳. اگر X یک فضای متریک و K یک زیر فضای فشرده از X و U یک زیر مجموعه‌ی باز از X و $K \subseteq U \subseteq X$ باشد، در این صورت $\varepsilon > 0$ هست که $N_\varepsilon(K) \subseteq U$.

برهان. برای هر $x \in K \subseteq U$، یک $\varepsilon_x > 0$ موجود است به طوری که $N_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$، در این صورت چون K یک زیر فضای فشرده است، پس $K \subseteq \cup_{i=1}^m N_{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}}(x_i)$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = min\ \{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, ..., \varepsilon_{x_k}\}$، در این صورت $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(K) \subseteq U$. چون اگر $x \in N_{\frac{\varepsilon}{2}}(K)$ لذا $y \in K$ موجود است به طوری که $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $y \in K \subseteq \cup_{i=1}^m N_{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}}(x_i)$، لذا $1 \leq i_0 \leq m$ موجود است به طوری که $y \in N_{\frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2}}(x_{i_0})$ پس $d(x_{i_0}, y) < \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2}$. بنابراین

$$d(x, x_{i_0}) \leq d(x,y) + d(y, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} \leq \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} = \varepsilon_{x_{i_0}}$$

در نتیجه $x \in N_{\varepsilon_{x_{i_0}}}(x_{i_0}) \subseteq U$ و لذا $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(K) \subseteq V$.

□

در قضیه زیر ارتباط بین مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی و هاسدورف مسیری هموتوپیکی بیان می شود.

قضیه ۸.۲.۳. فضای همبند مسیری موضعی X، خاصیت هاسدورف هموتوپیکی مسیری دارد اگر و تنها اگر در X هیچ دو مسیر به طور هموتوپیک نزدیک نسبت به $\dot{I}$ موجود نباشد یا به عبارت دیگر برای هر دو مسیر $v, w : I \to X$، v، به طور هموتوپیکی نزدیک به w نسبت به نقطه انتهایی بازه نباشد.

برهان. فرض کنیم X هاسدورف هموتوپیکی مسیری نباشد، در این صورت دو حالت خواهیم داشت:

۱. اگر مسیرهای $v, w : I \to X$ با شروع و پایان یکسان موجود نباشند که $v \nsim w(rel\dot{I})$. پس برای هر مسیر $v, w : I \to X$، داریم $[v] \neq [w]$ و لذا X هاسدورف هموتوپیکی مسیری است. که تناقض با فرض است.

۲. فرض کنیم مسیرهای $v, w : I \to X$ با شروع و پایان یکسان موجود باشند به طوری که $[v] \neq [w]$ و در شرایط هاسدورف هموتوپیکی مسیری صدق نکنند. یادآوری می‌کنیم X در شرط هاسدورف هموتوپیکی مسیری صدق می‌کند، هرگاه برای هر جفت از مسیرهای $\alpha, \beta \in p(X, x_0)$ که $\alpha(1) = \beta(1)$ و $[\alpha] \neq [\beta]$، یک افراز مانند $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ و یک دنباله از مجموعه‌های باز مانند $U_1, U_2, ..., U_n$ موجود باشد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ و اگر $\gamma : [0, 1] \to X$ یک مسیر دیگر باشد که در شرط $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$، صدق می‌کند و نیز $\alpha(t_i) = \gamma(t_i)$ برای هر $0 \leq i \leq n$، در این صورت $[\gamma] \neq [\beta]$. ما نشان خواهیم داد v به طور هموتوپیکی نزدیک به w است

(آ) $[v] \neq [w]$

(ب) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. پوشش باز $\{N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) | x \in X\}$ برای X، موجود

است. چون I فشرده است و $I \subseteq \cup_{x\in X} v^{-1}(N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$، لذا با توجه به لم عدد لبگ، $\varepsilon_1 > 0$ موجود است به طوری که برای هر $A \subseteq I$، $d(A) < \varepsilon_1$ و $x \in X$ موجود است به طوری که $A \subseteq v^{-1}(N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$. از طرفی $M \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\frac{1}{M} < \varepsilon_1$ و اگر $1 \leq j \leq M$، $d([\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}]) = \frac{1}{M} < \varepsilon_1$ بنابراین $x_j \in X$ موجود است به طوری که $[\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}] \subseteq v^{-1}(N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j))$ یا به طور معادل $v(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}]) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$ چون X هاسدورف هموتوپیکی مسیری نیست و $[v] \neq [w]$، لذا افراز

$$0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{M} < t_2 = \frac{2}{M} < ... < t_J = \frac{j}{M} < ... < t_M = 1$$

و دنباله باز

$$U_1 = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1), U_2 = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2), ..., U_M = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_M)$$

را در نظر می‌گیریم. هم‌چنین توجه شود $v_\varepsilon([\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}]) \subseteq U_j$ پس بنابر تعریف هاسدورف هموتوپیکی مسیری $v_\varepsilon : I \to X$ موجود است به طوری که برای هر $1 \leq j \leq M$، $v_\varepsilon([\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}]) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j))$ و $v_\varepsilon(\frac{j}{M}) = v(\frac{j}{M})$ و $[v_\varepsilon] = [w]$ لذا $w \simeq v_\varepsilon(rel\dot{I})$. بنابراین برای هر $t \in I$، $d(v_\varepsilon, v(t)) < \varepsilon$ زیرا اگر $t \in I$، چون $I \subseteq \cup_{j=1}^{m}([\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}])$، در این صورت $1 \leq j_0 \leq M$ موجود است به طوری که $t \in ([\frac{j_0-1}{M}, \frac{j_0}{M}])$. چون $v_\varepsilon([\frac{j_0-1}{M}, \frac{j_0}{M}]) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{j_0}))$ و $v([\frac{j_0-1}{M}, \frac{j_0}{M}]) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{j_0}))$، در این صورت

$$d(v_\varepsilon(t), v(t)) \leq d(v_\varepsilon(t), x_{j_0}) + d(x_{j_0}, v(t)) < \varepsilon$$

. لذا $[v] \neq [w]$ و برای هر $\varepsilon > 0$، یک $v_\varepsilon : I \to X$ موجود است به طوری که $[w] = [v\varepsilon]$ و برای هر $t \in I$ $d(v_\varepsilon(t), v(t)) \leq \varepsilon$

حال برای اثبات طرف عکس فرض کنیم w به v نسبت به $\dot{I}$ به طور هموتوپیکی نزدیک باشد، ثابت خواهیم کرد X، هاسدورف هموتوپیکی مسیری نیست. چون w به v نسبت به $\dot{I}$ به طور هموتوپیکی نزدیک است، لذا $[w] \neq [v]$ و برای هر افراز $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ و هر دنباله از مجموعه‌های باز مانند $U_1, U_2, ..., U_n$ به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $v([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$. با توجه به لم ۷.۲.۳ چون $[t_{j-1}, t_j]$ فشرده است و v پیوسته است، در این صورت $v([t_{j-1}, t_j])$ فشرده است و $v([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$. پس $\varepsilon_i > 0$ موجود است به طوری که $N_{\varepsilon_i}(v([t_{j-1}, t_j])) \subseteq U_j$. فرض کنیم $\varepsilon = min\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$، لذا $N_\varepsilon(v([t_{j-1}, t_j])) \subseteq U_j$. چون w به طور هموتوپیکی نزدیک به v است. لذا v_ε موجود است به طوری که $w \simeq v_\varepsilon(rel\dot{I})$ و $d(v_\varepsilon(t), v(t)) \leq \varepsilon$ لذا $V_\varepsilon([t_{j-1}, t_j]) \subseteq N_\varepsilon(v([t_{j-1}, t_j])) \subseteq U_j$. چون X همبند مسیری موضعی است، می‌توانیم فرض کنیم U_i همبند مسیری است. پس برای هر $1 \leq i \leq n-1$، مسیر $\lambda_i : I \to X$ در U_i با ابتدای $v_\varepsilon(t_i)$ و انتهای $v(t_i)$ موجود است و λ_0را مسیر ثابت در $v(0)$ و λ_n را مسیر ثابت در $v(1)$ در نظر بگیریم. حال مسیر $v'_\varepsilon : I \to X$ را چنان در نظر می‌گیریم که برای هر j

$$v'_\varepsilon|_{[t_{j-1}, t_j]} = \lambda_{i-1}^{-1} * v_\varepsilon|_{[t_{j-1}, t_j]} * \lambda_i.$$

بنابراین برای هر i، $v'_\varepsilon|_{[t_{j-1}, t_j]} \subseteq U_i$ و $v'_\varepsilon(t_i) = v(t_i)$. از طرفی

$$[\lambda_1^{-1} * v_\varepsilon|_{[t_0, t_1]} * \lambda_1][\lambda_1^{-1} * v_\varepsilon|_{[t_1, t_2]} * \lambda_2]...[\lambda_{n-1}^{-1} * v_\varepsilon|_{[t_{n-1}, t_n]} * \lambda_n] = [v_\varepsilon]$$

پس $[w] = [v_\varepsilon] = [v'_\varepsilon]$، لذا X هاسدورف هموتوپیکی مسیری نیست. □

تعریف ۹.۲.۳. فضای Xرا هاسدورف هموتوپیکی[1] گوییم هرگاه برای هر طوقه غیر بدیهی $\alpha \in \pi(X, x)$، یک همسایگی از x موجود باشد به طوری که هر طوقه در U، با α هموتوپ نسبت به $\dot{I}$ باشد.

[1] Homotopically Hausdorff

گزاره ۱۰.۲.۳. اگر X هاسدورف هموتوپیکی مسیری باشد، در این صورت هاسدورف هموتوپیکی است.

برهان. فرض کنیم X هاسدورف هموتوپیکی مسیری باشد در این صورت نشان خواهیم داد X، هاسدورف هموتوپیکی است. برای این منظور فرض کنیم $x \in X$ و α یک طوقه غیر بدیهی در نقطه x باشد. قرار می‌دهیم $w = C_x$ و $v = \alpha$ چون α غیر بدیهی است بنابراین w و vهموتوپ نسبت به نقاط انتهایی نیستند. چون X هاسدورف هموتوپیکی مسیری است یک افراز مانند $\circ = t_\circ < t_۱ < t_۲ < ... < t_n = ۱$ و یک دنباله از مجموعه‌های باز مانند $U_۱, U_۲, ..., U_n$ موجود است به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\{x\} \in w([t_{i-۱}, t_i]) \subseteq U_i$ و اگر $\gamma : [\circ, ۱] \to X$ یک مسیر دیگر باشد که در شرط $\gamma([t_{i-۱}, t_i]) \subseteq U_i$ برای هر $۱ \leq i \leq n$، صدق می‌کند و نیز $w(t_i) = \gamma(t_i) = x$ برای هر $\circ \leq i \leq n$، در این صورت $[\gamma] \neq [v]$. فرض کنیم $\beta : I \to U_۱$ یک طوقه دلخواه در $U_۱$ حول نقطه x باشد و γ یک مسیر با ضابطه زیر باشد.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \beta \circ \lambda(t) & \circ = t_\circ \leq t \leq t_۱ \\ x & t \in I \setminus [\circ, t_۱] \end{cases}.$$

که در آن $\lambda : I\ to[\circ, t_۱]$ با ضابطه $\lambda(t) = t_۱ t$ است بنابراین $\gamma([t_\circ, t_۱]) \subseteq U_۱$ و برای هر $i \geq ۲$ داریم $\gamma([t_{i-۱}, t_i]) = x \in U_i$ و $\gamma(t_i) = x$، لذا $[\gamma] \neq [v]$ و با توجه به نحوه تعریفγ، $[\gamma] = [\beta]$ و بنابراین $[\beta] \neq [\alpha]$.

□

فصل ۴

ارتباط زیرگروه‌های اسپنیر و مفهوم به طور هموتوپیکی نزدیک

۱.۴ مقدمه

در این فصل با مرور بر روی مفاهیمی چون طوقه‌های کوچک، زیرگروه طوقه‌های کوچک تولید شده، زیرگروه‌های اسپنیر و پوشش‌ها به مقایسه‌ی مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی با طوقه‌های کوچک و ارتباط آن با زیر گروه‌های اسپنیر و پوشش‌ها می‌پردازیم. هم‌چنین نشان داده می‌شود که مفهوم به طور هموتوپیکی نزدیک بودن در مسیرهای بسته، تعمیمی از مفهوم طوقه‌های کوچک است. در بیان مطالب این فصل بیشتر از منابع [۹]، [۸] و [۲] استفاده شده است.

۲.۴ زیرگروه‌های اسپنیر

تعریف ۱.۲.۴ ([۹]). (۱) طوقه $\alpha : I \longrightarrow X$ را یک طوقه کوچک نامند هرگاه برای هر همسایگی باز U از نقطه پایه ای x، طوقه $\alpha_U : I \longrightarrow U$ با پایه ی x موجود باشد که $[\alpha] = [\alpha_U]$.

(۲) فرض کنیم فضای توپولوژیک X همبند ساده نباشد. در این صورت X را یک فضای طوقه ای کوچک گویند هر گاه برای هر $x \in X$، هر طوقه در X با پایه ی x کوچک باشد.

گزاره ۲.۲.۴ ([۹]). مجموعه ی همه ی رده های هموتوپی طوقه های کوچک تشکیل یک زیرگروه از گروه بنیادی می دهد که آن را گروه طوقه های کوچک نامیده و با $\pi_۱^s(X,x)$ نمایش می دهند.

تعریف ۳.۲.۴ ([۷]). زیرگروه کوچک تولید شده که با $\pi_۱^{sg}(X,x)$ نمایش داده می شود زیر گروهی از گروه بنیادین $\pi_۱(X,x)$ است که تولید شده توسط همه ی رده های هموتوپی طوقه هایی به شکل

$$\prod_{j=۱}^{n} \alpha_j * \beta_j * \alpha_j^{-۱},$$

است که در آن β_j یک طوقه کوچک با پایه ای $\alpha_j(۱)$ و α_j مسیری با آغاز x است.

اسپنیر در کتاب مشهور خود [۶] به هر پوشش باز $\mathcal{U}$ از فضای X زیرگروهی از گروه بنیادی $\pi_۱(X,x)$ نسبت داد و از آن برای رده بندی و بررسی شرایط وجود فضاهای پوششی X استفاده نمود. این گروه که اسپنیر آن را با نماد $\pi(\mathcal{U},x)$ نمایش می دهد، زیرگروه متشکل از همه ی رده های هموتوپی طوقه هایی به شکل

$$\prod_{j=۱}^{n} \alpha_j * \beta_j * \alpha_j^{-۱}$$

است که α_jها مسیرهایی با آغاز x و β_j طوقه هایی با پایه ی $\alpha_j(۱)$ می باشند و $U \in \mathcal{U}$ وجود دارد که $Im\beta_j \subseteq U$.

ملاحظه ۴.۲.۴. گروه $\pi(\mathcal{U}, x)$ بعد از تعریف آن توسط اسپنیر، به نام گروه اسپنیر متناظر با پوشش $\mathcal{U}$ معروف شد.

تعریف ۵.۲.۴. ([۱]) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت اشتراک همه ی زیرگروه های اسپنیر متناظر با پوشش های باز در X را زیرگروه اسپنیر متناظر با فضای X می نامند و با نماد $\pi_۱^{sp}(X, x)$ نشان می دهند. به عبارت دیگر

$$\pi_۱^{sp}(X, x) = \bigcap_{open\ covers\ \mathcal{U}} \pi(\mathcal{U}, x),$$

چون برای هر پوشش باز از فضای X مانند $\mathcal{U}$، گروه اسپنیر متناظر با پوشش $\mathcal{U}$، $\pi(\mathcal{U}, x)$ زیرگروهی نرمال از $\pi_۱(X, x)$ است، پس زیرگروه اسپنیر فضای X، $\pi_۱^{sp}(X, x)$ زیرگروهی نرمال از $\pi_۱(X, x)$ است.

در لم زیر ارتباط بین مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی و مفهوم طوقه کوچک بیان می شود.

لم ۶.۲.۴. فرض کنیم X، یک فضای متریک باشد، طوقه غیر بدیهی α در x، کوچک است، اگر و تنها اگر α به طور هموتوپیکی نزدیک به C_x نسبت به $\dot{I}$ باشد.

برهان. فرض کنیم طوقه α کوچک و غیر بدیهی باشد، نشان خواهیم داد α به طور هموتوپیکی نزدیک به C_x نسبت به $\dot{I}$ است. چون طوقه α کوچک و غیر بدیهی است لذا با C_x هموتوپ نیست. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد همسایگی باز $N_\varepsilon(x)$ از نقطه x در X را در نظر می‌گیریم. چون α یک طوقه کوچک در x است لذا یک نمایش هموتوپیک از α به صورت $\alpha_\varepsilon : I \to N_\varepsilon(x)$ خواهیم داشت به طوری که $\alpha_\varepsilon \simeq \alpha(rel\ \dot{I})$ به عبارت دیگر نگاشت هموتوپی $H_\varepsilon : I \times I \to X$ موجود است به طوری که $H_\varepsilon(t, ۰) = \alpha(t)$ و $H_\varepsilon(t, ۱) = \alpha_\varepsilon(t)$ و

$H_\varepsilon(۰, s) = H_\varepsilon(۱, s) = ۱$ و لذا داریم

$$d(H_\varepsilon(t, ۱), C_x(t)) = d(\alpha_\varepsilon(t), x) < \varepsilon$$

برای اثبات طرف دیگر، فرض کنیم α به طور هموتوپیکی نزدیک به C_x نسبت به $\dot{I}$ باشد، نشان خواهیم داد α یک طوقه کوچک است. فرض کنیم U یک مجموعه‌ی باز باشد که $x \in U$، بنابراین $\varepsilon > ۰$ موجود است که $N_\varepsilon(x) \subseteq U$. چون α به طور هموتوپیکی نزدیک به C_x نسبت به $\dot{I}$ است. مسیر $\alpha_\varepsilon : I \to X$ هست که $[\alpha] = [\alpha_\varepsilon]$ و $d(\alpha_\varepsilon(t), C_x(t)) < \varepsilon$.
لذا $\alpha_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(x) \subseteq U$.

□

گزاره فوق در واقع به بیان این مطلب می‌پردازد که تعریف به طور هموتوپیکی نزدیک بودن، تعمیمی از تعریف طوقه‌های کوچک است.

گزاره ۷.۲.۴. فرض کنیم (X, x) یک فضای همبند مسیری و همبند مسیری موضعی باشد

۱. $\pi_۱^{sg}(X, x) \subseteq \pi_۱^{sp}(X, x)$

۲. اگر مسیر $f \in P(X, x)$ به طور هموتوپیکی نزدیک به g نسبت به $\dot{I}$ در فضای متریک X باشد، در این صورت $[f * g^{-۱}] \in \pi_۱^{sp}(X, x)$.

برهان. ۱. فرض کنیم $\mathcal{U}$ پوششی برای X باشد و مولد دلخواه $[\alpha * \beta * \alpha^{-۱}] \in \pi_۱^{sg}(X, x)$ را با شرایط $\alpha(۰) = x$، $\alpha(۱) = x_۱$ و $\beta \in \pi_۱^{s}(X, x_۱)$ در نظر می‌گیریم. توجه داریم که با توجه به تعریف طوقه کوچک، طوقه $\beta : I \longrightarrow X$، یک طوقه کوچک است، هرگاه برای هر همسایگی باز U از نقطه پایه ای $x_۱$، طوقه $\beta_U : I \longrightarrow U$ با پایه ی $x_۱$ موجود باشد که $[\beta] = [\beta_U]$. پس طوقه β یک نمایش هموتوپ در عضو پوشش $\mathcal{U}$ که شامل $\alpha(۱) = x_۱$، است، مانند β' دارد. لذا با توجه به ساختار $\pi(\mathcal{U}, x)$ خواهیم

داشت $[\alpha * \beta * \alpha^{-۱}] = [\alpha * \beta' * \alpha^{-۱}] \in \pi(\mathcal{U}, x)$ و توجه داریم β' یک طوقه در یکی از اعضای پوشش $\mathcal{U}$ است.

۲. فرض کنیم $\mathcal{U}$ پوششی برای X باشد، نشان خواهیم داد

$[f * g^{-۱}] \in \pi_۱^{sp}(X, x)$. فرض کنیم ε' عدد لبگ پوشش $\{g^{-۱}(U)|U \in \mathcal{U}\}$ برای فضای فشرده I باشد. اولا $N \in \mathbb{N}$ هست که $\frac{۱}{N} < \varepsilon'$ و فرض کنیم برای هر $۱ \leq j \leq N$، $[\frac{j-۱}{N}, \frac{j}{N}] \subseteq g^{-۱}(U_j)$. می‌دانیم $g(\frac{j}{N}) \subseteq U_j \cap (U_{j+۱})$. چون X همبند مسیری موضعی است لذا مجموعه باز G_j موجود است به طوری که همبند مسیری است و $g(\frac{j}{N}) \subseteq G_j \subseteq U_j \cap (U_{j+۱}$. از طرفی چون G_j باز است لذا ε_j موجود است به طوری که $N_{\varepsilon_j}(g(\frac{j}{N})) \subseteq G_j$. قرار دهیم $\varepsilon'' = min\ \{\varepsilon_j | j = ۱, ۲, ..., N\}$. از طرف دیگر برای هر $۱ \leq j \leq N$، یک ε_j موجود است به طوری که $N_{\varepsilon_j}(g([\frac{j-۱}{N}, \frac{j}{N}])) \subseteq U_j$ و اگر قرار دهیم $\varepsilon''' = min\ \{\varepsilon_j | j = ۱, ۲, ..., N\}$. پس برای هر $۱ \leq j \leq N$، $N_{\varepsilon'''}(g([\frac{j-۱}{N}, \frac{j}{N}])) \subseteq U_j$ حال قرار می‌دهیم $\varepsilon = min\ \{\varepsilon''', \varepsilon''\}$. چون مسیر f به طور هموتوپیکی نزدیک به g نسبت به $\dot{I}$ است، لذا $f_\varepsilon : I \to X$ موجود است به طوری که $[f_\varepsilon] = [f]$ و $d(f_\varepsilon(x), g(x)) < \varepsilon$ بنابر این اگر $t_j = \frac{j}{n}$

(آ) هر ε-همسایگی از $g([t_{j-۱}, t_j])$ مشمول در U_j است.

(ب) هر نقطه در ε-همسایگی از $g(t_j)$ یعنی $N_\varepsilon(g(t_j))$ به $g(t_j)$ با یک مسیر در $G_j \subseteq U_j \cap U_{j+۱}$ متصل می‌شود. لذا فرض کنیم $\alpha_j : I \to G_j$ یک مسیر از $g(t_j)$ به $f_\varepsilon(t_j) \in N_\varepsilon(g(t_j))$ باشد و $\alpha_۰$ مسیر ثابت در $g(۰)$ و $\alpha - N$ مسیر ثابت در $g(۱)$ باشد. حال طوقه Qj را **nv** U_j به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_{j-۱} * f_\varepsilon|_{[t_{j-۱}, t_j]} * \alpha_j^{-۱} * (g|_{[t_{j-۱}, t_j]})^{-۱}.$$

که این طوقه حول نقطه $g(t_j)$ است و در U_j مشمول است.

رده $[f_\varepsilon * g^{-1}]$ مشمول در $\pi(\mathcal{U},x)$ است چون آن‌را می‌توان به عنوان

$$\sqcap_{j=1}^{N}[g|_{[0,t_{j-1}]}) * Qj * (g|_{[0,t_{j-1}]})^{-1}]$$

در نظر گرفت. پس $[g^{-1} * f_\varepsilon] \in \pi(X,x)$. بنابراین $[f_\varepsilon * g^{-1}] \in \pi(X,x)$ و لذا $[f_\varepsilon][g^{-1}] \in \pi(X,x)$ و با توجه به $[f_\varepsilon] = [f]$، خواهیم داشت $[f][g^{-1}] \in \pi(X,x)$. پس $[f * g^{-1}] \in \pi(\mathcal{U},x)$ و لذا $[f * g^{-1}] \in \pi_1^{sp}(X,x)$.

□

نتیجه ۸.۲.۴. اگر $\pi_1^{sp}(X,x) = \{1\}$ آن‌گاه هر دو طوقه f,g، به طور هموتوپیکی نسبت به $\dot{I}$، نزدیک نیستند.

برهان. فرض کنیم $[f],[g] \in \pi_1(X,x)$ و f به طور هموتوپیکی نزدیک به g نسبت به $\dot{I}$ باشد. در این صورت $[fg^{-1}] \in \pi_1^{sp}(X,x) = \{1\}$ لذا $[f]=[g]$ و در نتیجه $f \simeq g\ (rel\ \dot{I})$ که این مطلب با فرض f به طور هموتوپیکی نزدیک به g است، در تناقض است و لذا حکم صحیح است. □

با توجه به نتیجه فوق، در فضاهایی که $\pi_1^{sp}(X,x) = \{1\}$ است مانند گوشواره هاوایی، هیچ دو مسیر بسته، به طور هموتوپیکی نسبت به $\dot{I}$، نزدیک نیستند.
یادآوری می‌کنیم گوشواره هاوایی $\mathbb{HE}$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ است که به صورت اجتماع خانواده شمارای بی پایان از دایره‌های C_i، به شعاع $1/i$ و مرکز $(1/i,0)$ که همگی در مبدأ مختصات بر هم مماس‌اند، با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۲.۴. فضای توپولوژیک X را فضای اسپنیر[1] گوییم هرگاه $\pi_1(X,x) = \pi_1^{sp}(X,x)$

فضای X در مثال ۲.۳، یک فضای اسپنیر است که می تواند به عنوان مثال برای تعریف فوق بیان شود.

[1] Spanier Space

نتیجه ۱۰.۲.۴. اگر برای هر دو عضو متمایز $[f],[g] \in \pi_1(X,x)$، f به طور هموتوپیکی نزدیک به g نسبت به $\dot{I}$ باشد، در این صورت X یک فضای اسپنیر است.

برهان. فرض کنیم $[f] \in \pi_1(X,x)$ دلخواه باشد و $[g] = [C_{x_0}]$ لذا $[f] = [fC_{x_0}^{-1}] \in \pi_1^{sp}(X,x)$. پس $\pi_1(X,x) \subseteq \pi_1^{sp}(X,x)$ و بنا براین $\pi_1(X,x) = \pi_1^{sp}(X,x)$. □

تعریف ۱۱.۲.۴. نگاشت $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ بین دو فضای توپولوژیک را در نظر می‌گیریم. گوییم زیر مجموعه‌ی باز U از فضای توپولوژیک Xتوسط نگاشت p به طور هموار پوشیده شده است هرگاه $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{j\in J} V_j$، V_jها باز و مجزا و $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ یک همسان‌ریختی باشد. پوشش $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ را بدیهی گویند هرگاه p یک همسان‌ریختی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۴. فضاهای توپولوژیک X و $\tilde{X}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ را یک پوشش و $\tilde{X}$ را یک فضای پوششی برای X گویند هرگاه برای هر $x \in X$، همسایگی باز $U \subseteq X$ از x وجود داشته باشد به طوری که توسط p به طور هموار پوشیده شده باشد.

زیر مجموعه‌ی $p^{-1}(\{x\})$ را تار[1] x نامند.

به عنوان مثال، نگاشت $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطه $p(t) = e^{2\pi it}$ یک نگاشت پوششی است. لذا $(\mathbb{R},p)$ یک فضای پوششی برای $\mathbb{S}^1$است. همچنین برای هر $0 \neq n \in \mathbb{Z}$، نگاشت $p_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطه $p_n(\exp(2\pi it)) = \exp(2\pi int)$ یک نگاشت پوششی و بنابراین، $(\mathbb{S}^1,p_n)$ یک فضای پوششی برای $\mathbb{S}^1$ است.

لم ۱۳.۲.۴. (قضیه هموتوپی برای پوشش‌ها) فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش باشد. نمودار توابع پیوسته زیر را در نظر می‌گیریم

[1] Fiber

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "j"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & (X, x_0), \end{tikzcd}$$

در نمودار فوق $j(t) = (t, 0)$ برای $t \in I$ می‌باشد. در این صورت یک نگاشت یکتای پیوسته $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \tilde{X}$ وجود دارد به طوری که نمودار فوق را جابجا می‌کند.

نتیجه ۱۴.۲.۴. فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش باشد، $x_0, x_1 \in X$ و $f, g : I \longrightarrow X$ دو مسیر در X باشند به طوری که $f(0) = g(0) = x_0$، $f(1) = g(1) = x_1$ و $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. اگر $F : f \simeq g \quad (rel \quad \dot{I})$ و $\tilde{f}, \tilde{g}$ به ترتیب بالابرهای f و g با نقطه شروع $\tilde{x}_0$ باشند، آن‌گاه $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g} \quad (rel \quad \dot{I})$ و بنابراین $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

لم ۱۵.۲.۴. (خاصیت بالابر مسیری) فرض کنید $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش و $\alpha : I \longrightarrow X$ مسیری با آغاز x باشد. آنگاه برای هر $y \in p^{-1}(\{x\})$ مسیری مانند $\widetilde{\alpha} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ وجود دارد که $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ و $\widetilde{\alpha}(0) = y$.

مسیر $\widetilde{\alpha}$ را یک بالابر از α در $\widetilde{X}$ با آغاز y گویند.

لم ۱۶.۲.۴. فرض کنید $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش و $f : I \longrightarrow X$ مسیری با آغاز x باشد به طوری که $[f] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ و $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ در این صورت مسیری مانند $\tilde{f} : I \longrightarrow \tilde{X}$ وجود دارد به طوری که $p \circ \tilde{f} = f$ و $\tilde{f}(0) = \tilde{x} = \tilde{f}(1)$.

برهان. فرض کنیم $[f] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ پس $[g] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ موجود است به طوری که $[f] = p_*([g]) = [p \circ g]$ حال بالابر f را با شروع از نقطه $\tilde{x}$، مانند $\tilde{f}$ در نظر می‌گیریم. داریم $p \circ \tilde{f} = f \simeq p \circ g (rel \dot{I}$ لذا $p \circ \tilde{f} \simeq p \circ g (rel \dot{I}$ و با توجه به نتیجه ۱۴.۲.۴ داریم $\tilde{f}(1) = g(1) = \tilde{x}$. لذا $\tilde{f}$ یک طوقه است. □

نتیجه ۱۷.۲.۴. فرض کنیم $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ یک پوشش باشد و $[f]\in\pi_1(X,x)$ بدیهی یا f پوچ هموتوپیک باشد، در این صورت $\tilde{f}$ طوقه است.

برهان. فرض کنیم $[f]=e_{\pi_1(X,x)}\in p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$ لذا با توجه به لم ۱۶.۲.۴، بالابر f یک طوقه است. □

قضیه ۱۸.۲.۴. اگر $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ یک پوشش و $x\in X$ در این صورت

$$\pi_1^{sp}(X,x)\leq p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})).$$

برهان. فرض کنیم $\mathcal{U}$ یک پوشش برای X باشد و اعضای آن همسایگی های به طور هموار پوشیده شده، بدست آمده از پوشش $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ باشند. نشان خواهیم داد $\pi(\mathcal{U},x)\leq p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$. برای این منظور فرض کنیم $[\alpha]\in\pi(\mathcal{U},x)$. پس برای $1\leq i\leq n$، زیر مجموعه های باز $U_i\in\mathcal{U}$ و مسیر های α_i از x به $x_i\in U_i$ و طوقه‌های $\beta_i:I\to X$ حول x_i موجود اند به طوری که

$$\alpha\simeq(\alpha_1*\beta_1*\alpha_1^{-1})*(\alpha_2*\beta_2*\alpha_2^{-1})*...*(\alpha_n*\beta_n*\alpha_n^{-1})$$

حال فرض کنیم $\tilde{\alpha}_i$ بالابر α_i با نقطه شروع $\tilde{x}$ باشد و $\tilde{\alpha}_i^{-1}$ بالابر α_i^{-1} با نقطه شروع $\tilde{\alpha}_i(1)$ باشد و نیز $\tilde{\beta}_i=(p|_{V_i})^{-1}\circ\beta_i$ که V_i تصویر همسان‌ریخت U_i شامل $\tilde{x}_i=\tilde{\alpha}_i(1)$ است. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\alpha}\simeq(\tilde{\alpha}_1*\tilde{\beta}_1*\tilde{\alpha}_1^{-1})*(\tilde{\alpha}_2*\tilde{\beta}_2*\tilde{\alpha}_2^{-1})*...*(\tilde{\alpha}_n*\tilde{\beta}_n*\tilde{\alpha}_n^{-1})$$

که طوقه ای در $\tilde{X}$ است و $p\circ\tilde{\alpha}\simeq\alpha$ بنابراین $[\alpha]\in p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$.

□

در ادامه نشان می دهیم که نتیجه ۱۴.۲.۴، برای دو مسیر که به طور هموتوپیکی نزدیک

هستند، برقرار است.

گزاره ۱۹.۲.۴. فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش باشد و $f, g : (I, \circ) \to (X.x)$ مسیرهایی باشند که f به g به طور هموتوپیکی نزدیک نسبت به $\dot{I}$ در فضای متریک X است و نیز $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. در این صورت fg^{-1} بالابری به صورت طوقه حول $\tilde{x}$ دارد یعنی $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

برهان. چون f به g به طور هموتوپیکی نزدیک نسبت به $\dot{I}$ خواهیم داشت $[fg^{-1}] \in \pi_1^{sp}(X, x)$ فرض کنیم $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ لذا با توجه به قضیه ۱۸.۲.۴، داریم $\pi_1^{sp}(X, x) \leq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ پس $[fg^{-1}] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ و با توجه به لم ۱۶.۲.۴، fg^{-1} بالابری به صورت طوقه حول هر نقطه از $p^{-1}(x)$ دارد.

□

با استفاده از گزاره قبل، نتیجه می‌شود که هر بالابر یک طوقه نزدیک به C_x، نیز طوقه می‌باشد.

نتیجه ۲۰.۲.۴. فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک پوشش و Xیک فضای متریک و f یک طوقه در X باشد به طوری که f به طور هموتوپیکی نزدیک به C_x باشد و $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. در این صورت هر بالابر از f، طوقه است.

مراجع

مراجع

[1] H. Fischer, D. Repovs, Ž. Virk, A. Zastrow, On semilocally simply connected spaces, *Topology and its Applications, 158 (2011) 397-408.*

[2] B. Mashayekhy, A. Pakdaman, H. Torabi, Spanier spaces and covering theory of non-homotopically path Hausdorff spaces *Georgian Mathematical Journal, 20 (2013) 303-317*

[3] J. R. Munkres, *Topology a first course*, Prentice-Hall, 2000.

[4] A. Pakdaman, H. Torabi, B. Mashayekhy, Small loop spaces and covering theory of non-homotopically Hausdorff spaces, *Topology and its Application, 158 (2011) 803–809.*

[5] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, New york, Springer-Verlag, 1988.

[6] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[7] H. Torabi, A. Pakdaman, B. Mashayekhy, Topological fundamental groups and small generated coverings, *to appear in Mathematica Slovaca.*

[8] Ž. Virk, Homotopical smallness and closeness, *Topology and Its Applications 158 (2011) 360–378.*

[9] Ž. Virk, Small loop spaces, *Topology and its Applications, 157 (2010) 451–455.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

از یک نوع هموتوپی .... same homotopy type

اشیا .... object

انقباض‌پذیر .... contracrible

ب

به طور هموتوپیکی نزدیک .... Homotopically closed

پ

پوچ هموتوپ .... null homotopic

ت

تابعگون همورد .... covariant functor

تار .... Fiber

توپولوژی خارج قسمتی .... quotient topology

خ

خارج قسمتی .... quotient map

ر

رسته .... category

رسته خارج قسمتی .... quotient category

ریخت .... morphism

ز

زیررسته .... subcategory

زیررسته کامل .... full subcategory

ط

طوقه .... Loop

ف

فضای اسپنیر .... Spanier Space

ل

لم چسب .... gluing lemma

م

مولفه .... component

مولفه‌های مسیری .... path component

ه

هاسدورف هموتوپیکی .... Homotopically Hausdorff

هاسدورف هموتوپیکی مسیری .... Homotopically Path Hausdorff

هم‌ارز .... equivalent

هم‌ارزی .... equivalence

هم‌ارزی هموتوپی .... homotopy equivalence

همبند ساده .... simply connected

همبند ساده نیم‌موضعی .... Semilocaly Simply Connected

همبند مسیری .... path connected

همبند مسیری موضعی .... locally path connected

همنهشتی .... congruence

هموتوپ .... homotopic

هموتوپی .... homotopy

N

n–دیسک .... n-disk

n–کره .... n-sphere

نمایه

In the name of God
Graduate StudiesThesis Information
Ferdowsi University of Mashhad

On Homotopically Close maps and Their Application in Fundamental Groupss

---

Author: Rasha Abbas Isewid Alisawi
Supervisor: Dr Hamid Torabi

Faculty: Faculty of Mathematical Sciences Department: Pure Mathematics Specialization: Geometry

---

Approval Date: 2/July/2017 Defence Date: /Sep/2017

M.Sc. Number of Pages: 61

Abstract Thesis :

Key Words: homotopical closeness, homotopically path Hausdorff space, fundamental groups, spanier subgroups.

Signature of Supervisor: Date:

Ferdowsi University of Mashhad

Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial

Fulfillment of the Requirements for the

Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

On Homotopically Close maps and Their Application in Fundamental Groupss

Supervisor

Dr Hamid Torabi

by

Rasha Abbas Isewid Alisawi

September 2017