



جمهورية العراق / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية / كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

متسلسلة فوريير وتطبيقاته

بحث تخرج تقدم به الطالب

مريم ضياء هاشم

الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات / قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس علوم في الرياضيات

إشراف

م. فراس حسين مجهول

٢٠١٧ م

١٤٣٨ هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا
الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة - (١١)

شكر وتقدير

"كن عالما... فان لم تستطع فكن متعلما ،فان لم تستطع فأحب العلماء
،فان لم تستطع فلا تبغضهم"

بعد رحلة بحث وجهد واجتهاد تكالت بانجاز هذا البحث نحمد الله عز وجل
على نعمه التي منه بها علينا فهو العلي القدير كما لايسعنا الا ان نخص
بأسمى عبارات الشكر والتقدير الى " م. فراس حسين " لما قدمته لي
من جهد ونصح ومعرفة طيلة انجاز هذا البحث .

كما نتقدم بالشكر الجزيل لكل من ساهمه في تقديم يد العون لانجاز هذا
البحث وبالاخص الذكر اساتذتنا الكرام ...
لأننسى أن نتقدم بأرقى واثمن عبارات الشكر والعرفان الى القائمين على
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات وعلى رأسهم رئيس الجامعة
وكل العالمين بها ...

الى الذين كانوا عوناً لنا في بحثنا هذا والنور الذي يضيء الظلمة التي
كانت تقف احيانا في طريقنا

البحث بحثنا.فلولا وجودهم لما احسنا بمتعة العمل وحلاوة البحث ،
ولما وصلنا الى ما وصلنا اليه فلم منا كل الشكر ...

الاهداء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

صدق الله العظيم

الهي لا يطيب الليل الا بشورك ولا يطيب النهار الى طاعتك
ولا تطيب اللحظات الا بذكرك ولا تطيب الاخرة الا بعفوك *
***ولا تطيب الجنة الا برؤيتك

"الله جل جلاله"

الى من بلغ الرسالة وادى الامانة ***ونصح الامة***
الى نبي الرحمة ونور العالمين

"سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم"

الى من كلفه الله بالهيبة والوقار ***
من علمني العطاء بدون انتظار ***
الى من أحمل اسمه بكل افتخار ***
ارجو من الله ان يمد في عمرك لتري ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار
وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الابد ***

"والدي العزيز "

الى ملاكي في الحياة ***الى معنى الحب والى معنى الحنان
والتفاني ***الى بسمه الحياة وسر الوجود***الى من كان
دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي الى اغلى الحبايب ***

" امي الحبيبة "

الى من رافقني منذ ان حملنا حقائب صغيره ومعكن سرت الدرب
خطوة بخطوة وماترلن ترافقني حتى الان *** الى شمعت
متقدة تنير ظلمة حياتي ***

" اخواتي "

"الى اخي ورفيق دربي في هذه الحياة*** الى من ارى
التفاؤل بعينه والسعادة في ضحكته*** في نهاية مشواري
اريد ان اشكرك على مواقفك النبيلة لتطلعائك لنجاحي بنظرات
الأمل

" زوج اختي "

الى من تحلو بالاخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء ***
الى ينابيع الصدق الصافي *** الى من معهم سعدت
وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت ***
الى من كانوا معي على طريق النجاح والخير ***
الى من عرفت كيف اجدهم وعلموني أن لا أضيعهم

الخلاصة

ان المتسلسلات الفورية قد نشأت لحل بعض المسائل الفيزيائية الرياضية كالانتشار الحراري ، الا ان اثرها في التحليل الرياضي لا يقل اهمية .ففي القرن الثامن عشر كانت فكرة الدالة نفسها موقع جدل ،وكان الاتفاق ان يطلق اسم الدالة على كل ما يمكن التعبير عنه بعبارة تحليلية واحدة ،مثل كثيرات الحدود ومتسلسلات الصحيحة والمتسلسلات المثلثية.

ففي هذا البحث درسنا سلاسل وتكاملات فوريير وعرفنا الدوال الدورية وتكامل الدوال الدورية ثم درسنا انواع خاصة من الدوال الدورية مع بعض الامثلة المهمة. وكذلك عرفنا التقارب النقطي لسلاسل فوريير وبرهنا بعض المبرهنات الاساسية.

واخيرا قدمنا خواص مفيد متعددة لتحويا فورييه وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية ،بصورة خاصة سنبين كيفية ان تحويل فورييه يحول التفاضل الى ضرب وعليه تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية .

المحتويات

المقدمة	١
الفصل الاول (سلاسل وتكاملات فوريه)	١٥-٢
(١-١) الدوال الدورية وسلاسل فوريه	٧-٢
(٢-١) الدورة الاختيارية ونشر نصف- المدى	١٠-٨
(٣-١) انواع خاصة من الدوال الدورية	١٥-١٠
الفصل الثاني	٢٠-١٦
التقارب النقطي لسلاسل فوريير	
الفصل الثالث	٢٦-٢١
تحويل فوريه وتطبيقاته في المعادلات التفاضليه الجزئية	

المقدمة :

ان العالم الفرنسي جوزيف فورييه هو من وضع الاسس النظرية الرياضية للانتشار الحراري وذلك في كتابة الذي يحمل اسم (theorie analytique de la chaleur) ويُعدّ من أهم الكتب التي نُشِرت في القرن التاسع عشر. وضع فيه فورييه أسس نظرية المتسلسلات التي صوّارت تُعرَف منذ ذلك الحين باسمه، واستفاد من هذه النظرية في حلّ بعض المعادلات التفاضلية الجزئية بوجود شروط حدية، ثم أصبحت متسلسلات فورييه أداة مهمّة في تقريب الدوال وملاءمة المعطيات التجريبية وتحليلها، واحتلت موقعاً مهمّاً في مجالات عديدة في الرياضيات مثل المعادلات التفاضلية والتكاملية والدوال التحليلية.

حيث ان المتسلسلات الفورية قد نشأت لحل بعض المسائل الفيزيائية الرياضية كالانتشار الحراري مثلاً الا ان اثرها في التحليل الرياضي لا يقل اهمية. ففي القرن الثامن عشر كانت فكرة الدالة نفسها موقع جدل، وكان الاتفاق ان يطلق اسم الدالة على كل ما يمكن التعبير عنه بعبارة تحليلية واحدة، مثل كثيرات الحدود ومتسلسلات الصحيحة والمتسلسلات المثلثية.

في الفصل الاول درسنا سلاسل وتكاملات فوريير وعرفنا الدوال الدورية وتكامل الدوال الدورية ثم درسنا انواع خاصة من الدوال الدورية مع بعض الامثلة المهمة.

اما في الفصل الثاني عرفنا التقارب النقطي لسلاسل فوريير وبرهنا بعض المبرهنات الاساسية.

اما في الفصل الثالث قدمنا خواص مفيد متعددة لتحويل فورييه وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، بصورة خاصة سنبين كيفية ان تحويل فورييه يحول التفاضل الى ضرب وعليه تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية .

الفصل الاول

سلاسل وتكاملات فورييه:

(١-١) الدوال الدورية وسلاسل فورييه

يقال للدالة f بانها دوريه ذات دورة p اذا كانت

$$(1) f(x) \text{ معرفه لكل قيم } x$$

$$(2) f(x+p) = f(x) \text{ لكل } x$$

الدالتين $\sin x, \cos x$ تعتبر من الأمثلة البسيطة للدوال الدورية ذات دورة 2π . والدالتين $\sin(\frac{2\pi X}{p}), \cos(\frac{2\pi X}{p})$ تكون دورية ذات دورة P .

والدالة الدورية يمكن ان تكون لها عدة دورات فمثلا اذا كان

$$f(x) = f(x + p) \text{ فان}$$

حيث ان n تمثل اي عدد صحيح لذلك

$$f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + np) \dots$$

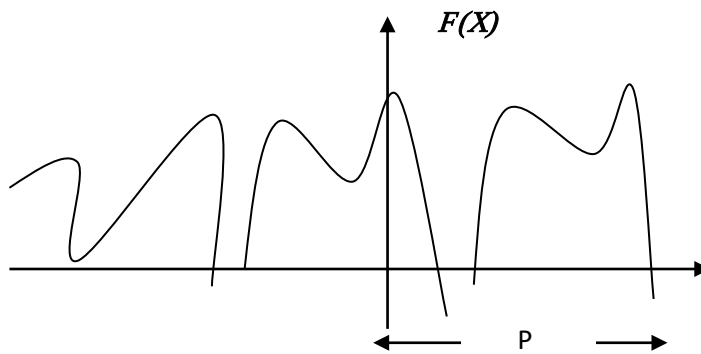
فان $\sin x$ لها الدورات $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, n \cdot 2\pi$ ومن الواضح ان دورة الداله الدورية يجب ان تكون موجبه؛ ولكن شرط الدورية يتحقق للقيم السالبة بالإضافة الى الموجبة ويمكن القول ان

$$f(x-p) = f(x) \text{ لكل } x$$

لان

$$f(x)=f(x-p)=f(x-2p) \text{ كذلك } f(x)=f(x-p+p)=f(x-p)$$

ومن تعريف الدوال الدورية يتبين لنا ان قيم الدالة تعيد نفسها وهذا يؤدي ان بيان الدالة الدورية يمكن ان يرسم لكل قيم الدالة X وذلك بعمل قالب للمخطط في فترة طولها P . وبعد ذلك يستنسخ المخطط من القالب اعلى واسفل محور x -



دالة دورية ذات دورة P الشكل (١-١)

معظم الدوال التي تظهر في الهندسة والفيزياء تكون دوريه في المسافة او الزمن – فمثلا الموجات الصوتيه (ACOUSTIC WAVES) ولكي نفهم هذه الموجات بشكل افضل نحتاج لتمثيلها بدلالة دوال دورية بسيطة (Periodic functions simple)

الدوال لها دورة مشتركة 2π بالرغم من كلا منهما له دورات اخرى .
..... الخ من الواضح ان كل هذه

اذا كانت f دورية ذات دورة 2π نحاول ان نمثل f بدلالة سلسله غير منتهية (Infinite Series).

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

نلاحظ ان كل حد في هذه السلسلة ذو دورة 2π لذلك اذا كان مجموع هذه السلسلة موجودا ، فسوف يكون دالة ذات دورة 2π هناك سؤالان يحتاجان الى اجابة :

(أ) ماهي القيم التي تأخذها a_0, a_n, b_n

(ب) اذا وجدنا قيما مناسبة هذه المعاملات ، هل ان المتسلسلة تمثل حقا الدالة المعطاة $f(x)$

يظهر لأول مرة انه من الصعوبة الإجابة على السؤال . لان المعادلة (1) هي عدد غير منتهي من المجاهيل .

ولكن يمكن ايجاد جواب مقبول لهذا السؤال باستخدام العلاقات التعامدية (Orthogonalite) الآتية:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ويمكن تلخيص هذه العلاقة بالقول ، التكامل المحدد (في الفترة من

$-\pi$ الى π) لوجدنا اي دالتين مختلفتين في السلسلة في المعادله رقم (1) يكون صفرا .

والفكرة الاساسيه تكمن في ان المساوات المقترحة في المعادلة (1) يجب ان تكون مساواة حقيقية ، وبالتالي فان كلا الطرفين يعطي النتيجة نفسها بعد اجراء العمليات نفسها . وبذلك فان العلاقات التعامدية تقدم عمليات لتبسيط

الطرف الايمن من المعادلة (١) اي . نضرب طرفي المعادلة المقترحة بإحدى الدوال التي تظهر هناك ثم نكامل من $-\pi$ الى π (يجب ان نفرض ان تكامل السلسلة يتم أجراه حداً بعد حد. الان اذا ضربنا طرفي المعادلة رقم (١) بثابت $(\cos 0x)$, ١ ونكامل من $(-\pi$ الى $\pi)$ نجد ان

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$$

كل حد في تكامل السلسلة يكون صفراً . لذلك فان الطرف الايمن في هذه المعادلة يختصر الى. $2\pi a_0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{وبذلك يكون}$$

وهذا يعني ان a_0 هي القيمة المتوسطة (mean value) لـ $f(x)$ في دورة واحدة

ثم ، اذا ضربنا طرفي المعادلة (١) بـ $\sin mx$ حيث m تمثل عدد صحيح مثبت ، ثم تكامل من

$-\pi$ الى π ، سوف نجد

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \sin mx dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \sin mx dx$$

من المعادلة (٢) نلاحظ ان جميع الحدود التي تحتوي على a_n سوف تختفي .بالإضافة الى هذا . فان الحد الوحيد الذي لا يساوي صفراً من الحدود التي تحتوي على b_n هو الذي فيه $n=m$ (تذكر ان n هي دليل

(index) المجموع وتأخذ جميع قيم الاعداد الصحيحة $1,2,3,\dots$ نختار m عدد صحيح ثابت لذلك فان $n=m$ تحدث مرة واحدة .

والان سيكون لدينا الصيغة الاتية :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) بـ $\cos mx$ (m صحيح) ثم نكامل لنحصل على

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

والان يمكن ان نلخص هذه النتائج . والتي تتحقق المساوات المقترحة .

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = a_0$$

يجب ان نختار b_n, a_n, a_0 حسب الصيغ الأتية :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

يسمى الطرف الايمن من المعادلة (١) بسلسلة فورية للدالة f وتسمى b_n, a_n, a_0 بمعاملات فورية

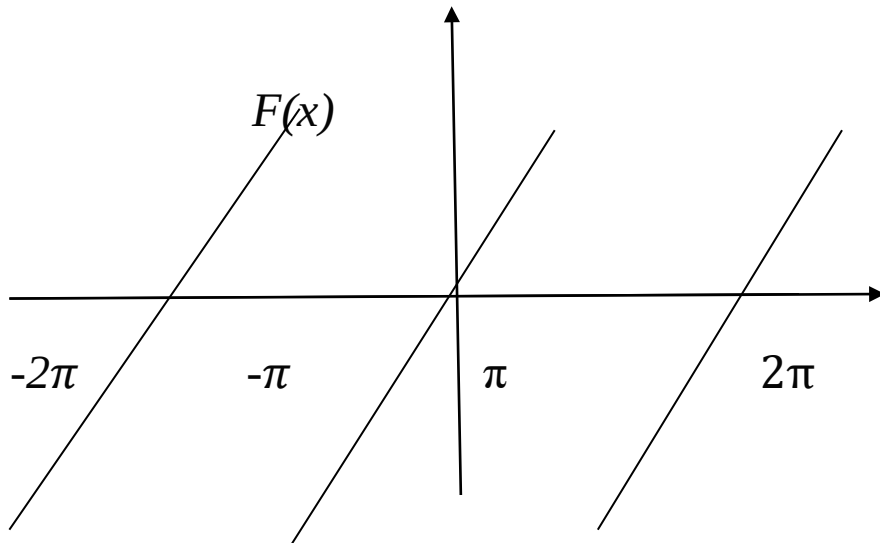
(fourier coefficients) ولحد الان لم نجب على السؤال (ب) حول المساواة لذا سوف نكتب

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) \sim$$

لكي نشير الى سلسله فورية المقترنة بـ $f(x)$

مثال:- لتكن $f(x)$ دورية ذات دورة 2π معرفة بالصيغة $f(x) = x$ في الفترة $-\pi < x < \pi$ - لاحظ الشكل (١-٢) حسب الصيغ التي حصلنا عليها سابقا يكون لدينا



شكل (١-٢)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n^2} + \frac{x \cos nx}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{(-2\pi) \cos 2\pi}{n}$$

وبهذا لا حل هذه الدالة لدينا

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$\sim 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots)$$

$$+ \frac{1}{3}$$

.

(٢-١) الدورة الاختيارية ونشر نصف- المدى

Arbitrary period and half range expansions

فيما سبق وجدنا طريقة لتمثيل الدالة الدورية ذات دورة 2π بواسطة سلسلة فورية وليس من الضروري ان نقيد انفسنا بهذه الدورة ذلك انه يمكن توسيع فكرة سلسلة فورية لتمثل دوال لأية دورة بواسطة تعديل بسيط لمقياس المتغيرات .

لنفرض ان f دالة دورية ذات دورة $2a$ (اخذنا $2a$ بدلا من p لكونها ملائمة كما سنلاحظ لاحقا) لذلك يمكن ان نكتب f على شكل سلسله من الدوال
 $\sin(\pi x/a), \cos(\pi x/a), \sin(2\pi x/a), \cos(2\pi x/a)$
 وجميعها ذات دورة $2a$ ، بالصيغة

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{a} + b_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

ان معاملات السلسلة الفورية والتي مكن تحديدها اما بالقياس الى الصيغ في بند 1 واما بواسطة مفهوم التعامدية . في اي من الحالتين تكون المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx ,$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

منحني الدالة الدورية :

يكفى للدالة الدورية $f(x)$ التي لها الدورة T ان نرسمها على الفترة $[0, T]$ مثلا ، ثم نكرر منحناها على كل فترة اخرى طولها T

نظرية تكامل الدالة الدورية :

ليكن $f(x)$ دالة دورية لها الدورة T فأن

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

البرهان

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^T f(x)dx$$

ولكن

$$= \int_0^a f(x_1 + T)dx_1 = \int_0^a f(x_1)dx_1$$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx$$

وعلى ذلك فان

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^T f(x)dx$$

ونلاحظ ان

$$\int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_T^{3T} f(x)dx$$

$$\int_{-T}^0 f(x)dx =$$

تغير الدورة :

نعرف ان ليست كل الدوال لها الدورة 2π ولذلك سنلجأ الى تغير دورة الدالة

2π ليكن $f(x)$ لها الدورة T ، اي ان $f(x+T) = f(x)$ ليكن قيم X .

ونفرض ان $X = KU$ حيث K ثابت موجب وعلى ذلك فان

$$f(ku+T) = f(ku)$$

وليكن $f_1(u) = f(ku)$ وعلى ذلك فان

$$f(ku + T) =))$$

$$f(k(u + \frac{T}{K}))$$

$$(u + \frac{T}{K}) = f_1(u)$$

$$\therefore f_1 \frac{T}{K}$$

وعلى ذلك فان $f_1(u)$ دالة دورية لها الدورة $\frac{T}{K}$ ، نختار K بحيث ان $2\pi =$

$\frac{T}{K}$ وعلى ذلك فان $K = \frac{T}{2\pi}$ ومن ذلك نرى ان التحويل $X = \frac{T}{2\pi}u$ يحول

الدالة $f(x)$ الى الدالة $f_1(u)$ والتي لها الدورة 2π .

(٣-١) انواع خاصة من الدوال الدورية :

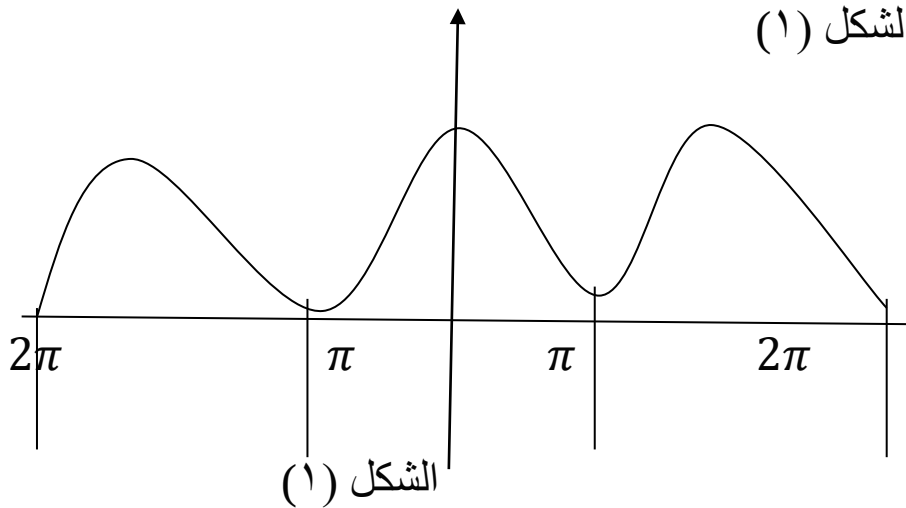
يوجد اربعة انواع من الدوال الدورية والتي تتميز بصفة التماثل (بدرجة ما) ويمكن التمييز فيما بينهم بمجرد النظر الى منحنياتها .

(أ) الدالة الزوجية : *even funcion*

هي دالة دورية لها الدورة 2π ولها الخاصية $f(x) = f(-x)$ وفيها

$$f(\pi + x) = f(\pi - x)$$

كما في الشكل (١)



وذلك لان

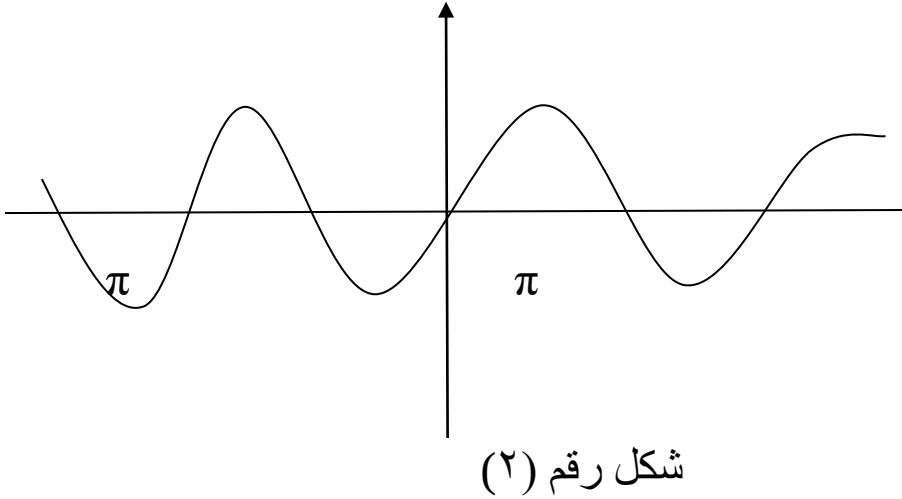
$$F(\pi + x) = f(2\pi - \pi - x) = F(\pi - x)$$

$$f(-\pi - x)$$

تبيين العلاقة $f(x) = f(-x)$ ان منحنى الدالة متماثل حول المحور y ، بينما
تبيين العلاقة

$f(\pi + x) = f(\pi - x)$ ان المنحنى متماثل حول المستقيم $x = \pi$.

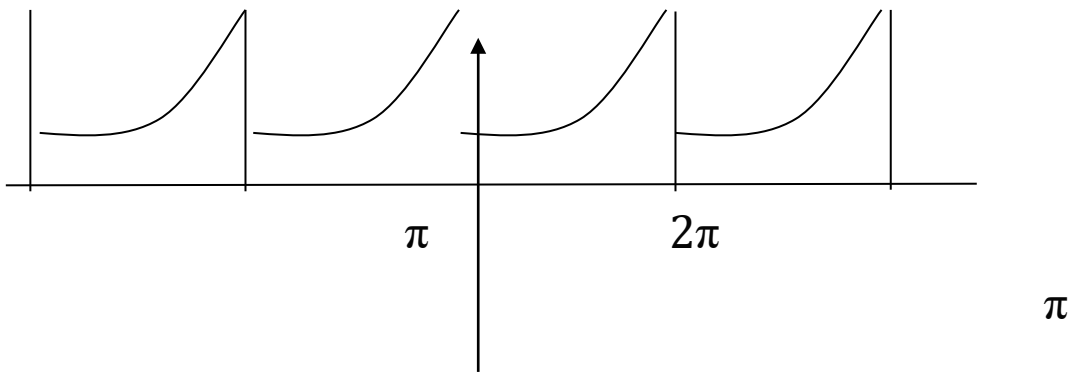
(ب) الدالة الفردية : *odd function*
لها الخاصية $f(x) = -f(-x)$ كما في الشكل (٢)



• نلاحظ ان $f(0)=0$, $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$ وان المنحنى متماثل
حول نقطة الاصل .

(ح) دالة زوجية التوافق : *Even harmonic function*

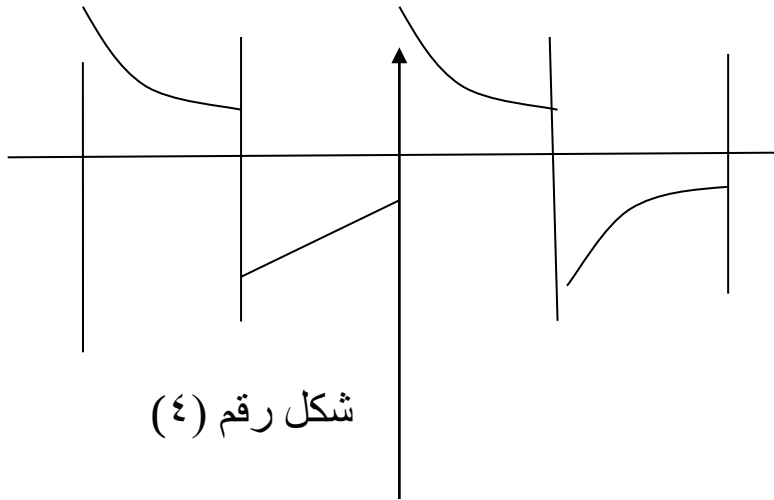
ولها الخاصية $f(\pi + x) = f(\pi - x)$ كما في الشكل رقم (٣)



شكل رقم (٣)

(د) دالة فردية التوافق : *Odd harmonic function*

ولها الخاصية $f(\pi + x) = -f(x)$ كما في الشكل رقم (٤)



شكل رقم (٤)

بعض التكاملات الخاصة :

سوف تحتاج الى بعض التكاملات المحدد في دراستنا المتسلسلة فوريير

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$$

(١)

$$(١١) \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$

علما ان $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$$

(١١١)

مثال: ليكن $f(x) = x$ معروفا بالفترة $-1 < x < 1$ فان مخطط توسيع

الدورية (ذات دورة 2) يمكن ملاحظته بالشكل (٣-١)

وان معاملات الفورية هي

$$a_0 = 0, a_n = b_n = \int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx = - \frac{2 \cos \pi}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

ان دالتي $\sin x$, $\cos x$ التي ظهرت في سلسله فورية لها بعض خواص التناظر (*symmetry*) والتي لها اهمية في ايجاد المعاملات . ومخطط دالة $\cos x$ يكون متناظرا حول المحور العمودي بينما مخطط دالة $\sin x$ تكون غير متناظرا حول المحور نفسه . نوضح هذه الخواص بتعريف

مبرهنة (٣-١) : اي دالة دورية وحيدة القيم ولها الدورة 2π يمكن التعبير عنها بالمتسلسله .

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \dots \quad (١)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$b_n =$$

البرهان :

تتكامل المتسلسله (١) بالنسبة الى x من 0 الى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} dx = \pi a_0$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

وبضرب طرفي المتسلسلة (١) بالنسبة الى x من 0 الى 2π نحصل على

$$= 0 + a_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = 0 + a_n \pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

وبالمثل بضرب طرفي (١) في $\sin(nx)$ والتكامل 0 الى 2π

نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

قد استخدمنا في البرهان نتائج التكاملات المحدودة الخاصة .

مثال : اوجد متسلسله فوريير للدالة

$$F(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq \pi \\ \pi & , \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

الحل :-

الدالة المعطاة لها الدورة 2π ومن الشكل نرى انها لا تحقق اي من

الخواص الاربعه وهي

$$F(-x) = \pm f(x) \quad (f+x) = \pm F(x)$$

, f

وبذلك نستخدم الصيغة العامة

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi dx \right] = \frac{3}{2} \pi$$

$$\therefore \frac{1}{2} a_0 = \frac{3}{4} \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^x x \cos(nx) dx + \int_x^{2\pi} \pi \cos(nx) dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cos(nx) dx \right]$$

وعلى ذلك فـ_____ان

$$\pi + \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) - 1}{2n} \cos(nx) - \frac{1}{n} \sin(n)$$

$$F(x) = \frac{3}{4}$$

مثال :

عبر عن الدالة

$$F(x) = \begin{cases} a & , 0 < x < \pi \\ -a & , \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

في صورة متسلسلة فوريير

الحل :- من الشكل نرى $f(x) = -f(-x)$, $f(t + \pi) = -f(x)$

اي ان الدالة فردية وله خاصية فردية التوافق وتكون متسلسلة فوريير على الصورة

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} \sin(2m+1)x$$

حيث ان

$$B_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2m+1)x dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin(2m+1)x \, dx$$

$$= \frac{4a}{\pi(2m+1)}$$

$$F(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$$

وبذلك يكون

الفصل الثاني

التقارب النقطي لسلاسل فوريير

تعريف (١-٢) نقول عن الدالة $f: R \rightarrow \mathbb{C}$ انها دورية (*periodic*) ان وجد عدد موجب p بحيث

$$F(x+p)=f(x) \forall x \in R \dots\dots\dots(١)$$

ويسمى p عندئذ دور (*period*) الدالة f

لاحظ ان العلاقة (١)

$$F(x+np)=f(x+(n-1)p+p)=f(x+(n-1)p)=\dots=f(x)$$

$$F(x-np)=f(x-np+p)=f(x-(n-1)p)=\dots=f(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

مما يعني ان اي مضاعف صحيح للدور p هو دور اخر للدالة f . لكننا عندما نتحدث عن دور الدالة فاننا غالبا مانقصد اصغر عدد موجب p يحقق المساواة (١)

فعلى سبيل المثال دور الدالة $\sin x$ والدالة $\cos x$ هو 2π ، بينما دور الدالة $\sin \frac{\pi}{l}x$ او $\cos \frac{\pi}{l}x$ هو $2L$. اما الدالة الثابتة فان كل عدد موجب هو دور لها اذا كان المتسلسلة

$$S(X) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (٢)$$

متقارب على R فمن الواضح انها تمثل دالة دورية في 2π لان 2π هو الدور المشترك لجميع حدودها.

وقد وجدنا في الفصل السابق ان اختيار المعاملات في هذه المتسلسلة بشكل

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_0 =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in N$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}$$

حيث ان F اي دالة في $(-\pi, \pi)$ يقود الى ان

$$S_n(X) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \xrightarrow{L^2} F(X) \quad (٣)$$

نريد الان ان نبحت في امكانية شروط تحقق التقارب $E(X)$ على $S_n(X)$ نقطيا

$[-\pi, \pi]$, ومن ثم على R بعد توسيع تعريف F من $[-\pi, \pi]$ الى R بالامتداد الدوري

$$2\pi) = \forall x \in R$$

$$F(x+)$$

تعريف (2.1)

(١) نقول ان الدالة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ متصلة قطعيا (piecewise

continuous) على $[a, b]$ اذا كانت

(i) متصلة على $[a, b]$ باستثناء عدد منتهى من النقاط $(x_1, \dots, x_n)$

(ii) نهاياتها اليمنى واليسرى

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) = F(x_i^-), \lim_{x \rightarrow x_i^+} F(x) = F(x_i^+)$$

موجودتين عند كل x_i باستثناء النقطتين a, b حيث يشترط وجود $f(a+)$ و $f(b-)$ فقط

(٢) تكون الدالة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ملساء قطعيا (piecewise

smooth) على $[a, b]$ اذا كانت كل من f و f' متصلة قطعيا على الفترة $[a, b]$

(٣) تكون الدالة معرفه على الفترة الغير محدودة متصلة (ملساء) قطعيا اذا كانت متصلة ملساء قطعيا على فترة جزئية محدودة من مجال تعريفها

لاحظ ان الدالة متصلة $[a, b]$ تكون متصلة قطعيا على $[a, b]$ ولكنها قد لا تكون ملساء قطعيا، مثل الدالة

$$F(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$$

حيث ان النهاية اليمنى للمشتقة $f'(x)$ لا توجد عنده 0 ومن جهة اخرى ملساء قطعيا قد لا تكون متصلة .

مبرهنة (٢-٢) :-

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[-\pi, \pi]$ بحيث $f(-\pi) = f(\pi)$ وكانت f متصلة قطعياً على $[-\pi, \pi]$ فإن المتسلسلة

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

مقاربة ، بحيث a_n, b_n هي معاملات فوريير للدالة f

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

البرهان:-

بما ان f متصل قطعياً فهي تنتمي الى $L^2(-\pi, \pi)$ فتكون كل من المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$n \in N \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

موجودة وبما ان f متصله وتحقق $f(-\pi) = f(\pi)$ فإن

$$[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

$$\left| \frac{\pi}{-\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right| = nb_n \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx$$

$$f(x) \sin(nx) dx \left| \frac{\pi}{-\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| = na_n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}$$

$$S_N = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N$$

$$\frac{1}{n} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^N$$

$$\left[\sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{N}$$

حيث نحصل على العلاقة الخيرة باستخدام متراجحه كوشي (1.5) ومن
متراجحة بيسل (1.21) نجد ان

$$\sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(X)]^2 dx < \infty$$

فنستنتج ، من تقارب $\sum \frac{1}{n}$ ، ان المتتالية المتزايدة S_N محدودة من
اعلى ، فهي اذن متقاربة .

نتيجة (٢-٣) :-

اذا كانت F تحقق شروط النظرية (3.3) فان تقارب متسلسلة فوريير

$$a_0 + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

من الدالة f على الفترة $[-\pi, \pi]$ منتظم ومطلق

البرهان :

واضح ان امتداد الدالة f من $[-\pi, \pi]$ الى R بالعلاقة

$$F(x+2\pi) = F(x) \quad \forall x \in R$$

هو دالة متصلة تحقق شروط النظرية (3.2)، وبناء عليه فان متسلسلة فوريير (3.27)

تتقارب من $F(X)$ عند كل $X \in R$ ولكن

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

وبالنظر الى تقارب $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ فان المتسلسلة (3.27) متقاربة بانتظام باختبار فايرشتراس

الفصل الثالث

تحويل فوريه وتطبيقاته في المعادلات التفاضلية الجزئية

لإيضاح خواص مفيدة متعددة لتحويل فوريه وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، بصورة خاصة سنبين كيفية ان تحويل فوريه يحول التفاضل الى ضرب و عليه تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية، كذلك نستخدم مفهوم الالتفاف غير المنتهي .

ان تحويل فوريه للدالة $f(x)$ حيث ان $-\infty < x < \infty$ يتعين بالصيغة الآتية:

$$f[\varepsilon] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx \quad \dots \quad (1)$$

أي انه اذا ابتدأنا بدالة $f(x)$ معرفه على محور x الحقيقي فنعوض عنها بالمعادلة (1)

ف نحصل على دالة جديدة $f(\varepsilon)$ حيث ان $-\infty < \varepsilon < \infty$ على سبيل المثال فان جدول (1) يبين بعض تحويلات فورية المؤلفه

جدول بعض تحويلات فورية المؤلفه

الدالة $f(x)$	تحويل فوريه $f(\varepsilon)$
$1-f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$	$f(\varepsilon) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$ (دالة مركبة)
$2-f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{في الحالات الاخرى} \end{cases}$	$f(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ (دالة حقيقية)
$3-f(x) = e^{-x^2}$	$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$ (دالة حقيقية)

ولتحويلات اخرى نشير الى الجدول في تنزيل الكتاب نلاحظ من التطبيقات ان الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ قد تكون مركبة وقد لا تكون ففي المثال الاول الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ تتضمن العدد المركب i وعليه نسميها دالة مركبة القيم بالمتغير الحقيقي ε (حيث ε يتغير من $-\infty$ الى ∞) وبعبارة اخرى ان قيم المتغير ε حقيقيه وقيم الدالة المركبة .

ان فائدة تحويل فورية (كما في معظم التحويلات الاخرى) تأتي من حقيقة تحويل عملية التفاضل الى عملية ضرب ،الى ان المعادلة التفاضلية تتحول الى معادلة جبرية، كما ان هنالك عدد كبير من الخواص التي تجعل من تحويل فورية اداة عملية فعالة ،ندون قليلا منها .

خواص مفيدة لتحويل فورية :

الخاصية الاولى : (ازواج تحويل فورية)

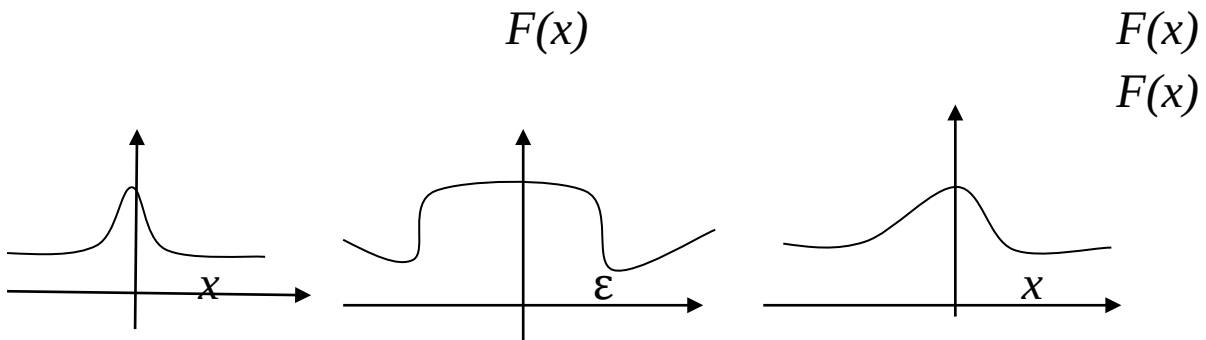
ان تحويل فورية $f(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ يعطي دالة جديدة $f(x)$ معرفة بالصيغة :

$$F[f] = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx$$

وان تحويل فورية العكسي $f(x)$ حيث $-\infty < \varepsilon < \infty$ سيعطي الدالة الاصلية $f(x)$ طبقا للصيغة :

$$F^{-1}[f] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} dx$$

لاحظ الشكل :



شكل (5-3) بين منحنى الدالة وتحويله

الخاصية الثانية: (التحويل الخطي)

ان تحويل فورييه هو تحويل خطي اي ان :

$$F [af + bg] = aF [f] + bF [g]$$

ويمكن اثبات هذه الصيغة بسهولة حيث ستطبق مرارا في المستقبل فمثلا
تحويل فورييه للدالة

$$F \left[\frac{1}{x^2 + 1} \right] + 3F [e^{-x^2}] \quad \text{يكون} \quad \frac{1}{x^2 + 1} + 3e^{-x^2}$$

الخاصية الثالثة: (تحويل المشتقات الجزئية)

عندما نناقش تحويل المشتقات يجب ان نميز المشتقات الجزئية بالنسبة الى متغيراتها المختلفة فمثلا اذا كان تحويل فورييه يحول المتغير x (متغير التكامل في التحويل) واذا كانت الدالة المراد تحويلها هي المشتقة الجزئية للدالة $u(x,t)$ بالنسبة الى x فعند اذن صيغة التحويل تكون

$$F [u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) e^{-i\epsilon x} dx = i\epsilon F [u]$$

$$F [u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\epsilon x} dx = -\epsilon^2 F [u]$$

من ناحية اخرى اذا حولنا المشتقة الجزئية $u_t(x,t)$ واذا كان المتغير التكامل في التحويل x فعندئذ يكون تحويل:

$$F [u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) e^{-i\epsilon x} dx = \frac{\partial}{\partial t} F [u]$$

$$F [u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\epsilon x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F [u]$$

الخاصية الرابعة: (خاصية الالتفاف)

لكل تحويل تكاملي هنالك ما يسمى بخاصية الالتفاف حيث انه لا يكون بالضرورة حاصل ضرب دالتين $f(x), g(x)$ مساويا حاصل ضرب تحويلهما اي ان:

$$F [f(x) g (x)] \neq F[f] F [g]$$

ومع ذلك وفي نظرية التحويلات هنالك ما يسمى بالالتفاف $f * g$ للدالتين f, g التي تلعب بطريقه و باخرى دور حاصل الضرب والصحيح عن الالتفاف هو ان:

$$F [f * g] = F[f] F [g] \dots\dots (2)$$

ويعرف الالتفاف بالصيغه

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x,t)g(\varepsilon) d\varepsilon \dots\dots (3)$$

هذا ويمكن وبدون صعوبه اثبات صحة المعادله (٢) ونلاحظ من تعريف الالتفاف انه اذا كانت $g(x), f(x)$ دالتين فعندئذ الالتفاف $(f * g)(x)$ دالتين جديدة

$$G(X)=e^{-x^2} \quad f(x)=x \quad \text{تطبيق على التفاف دالتين:}$$

عندئذ التفاف هاتين الدالتين هو

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x- \varepsilon) e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$$

وحصلنا على هذه القيمة بتطبيق الصيغة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} = \sqrt{\pi}$$

ان اهمية الالتفاف في المعادله (٣) في التطبيقات غالبا مايعزى الى ان الخطوه الاخير من حل المعادله التفاضليه الجزئيه هي باختصار ايجاد التحويل العكسي لمقدار يمكن ان نفسر بانه حاصل ضرب تحويلين (f) $F(g), F$ اي ايجاد

$$F^{-1} \{F[f]F[g]\}$$

وباتخاذ التحويل العكسي لطرفي المعادله (2) نحصل على النتيجة الاتية

$$F * g = F^{-1} \{F[f]F[g]\}$$

وعليه ايجاد المعادلة (4) فان كل ما علينا هو ايجاد التحويل العكسي لكل عامل للحصول على f, g ثم حساب التفافهما نحن الان في موضع يؤهلنا لحل المساله مهمه في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية وهذا هو حل مسألتنا, وقبل ترك المسأله لنحل هذه النتيجة نلاحظ ان الدالة المطلوب تكاملها تتألف من حدين

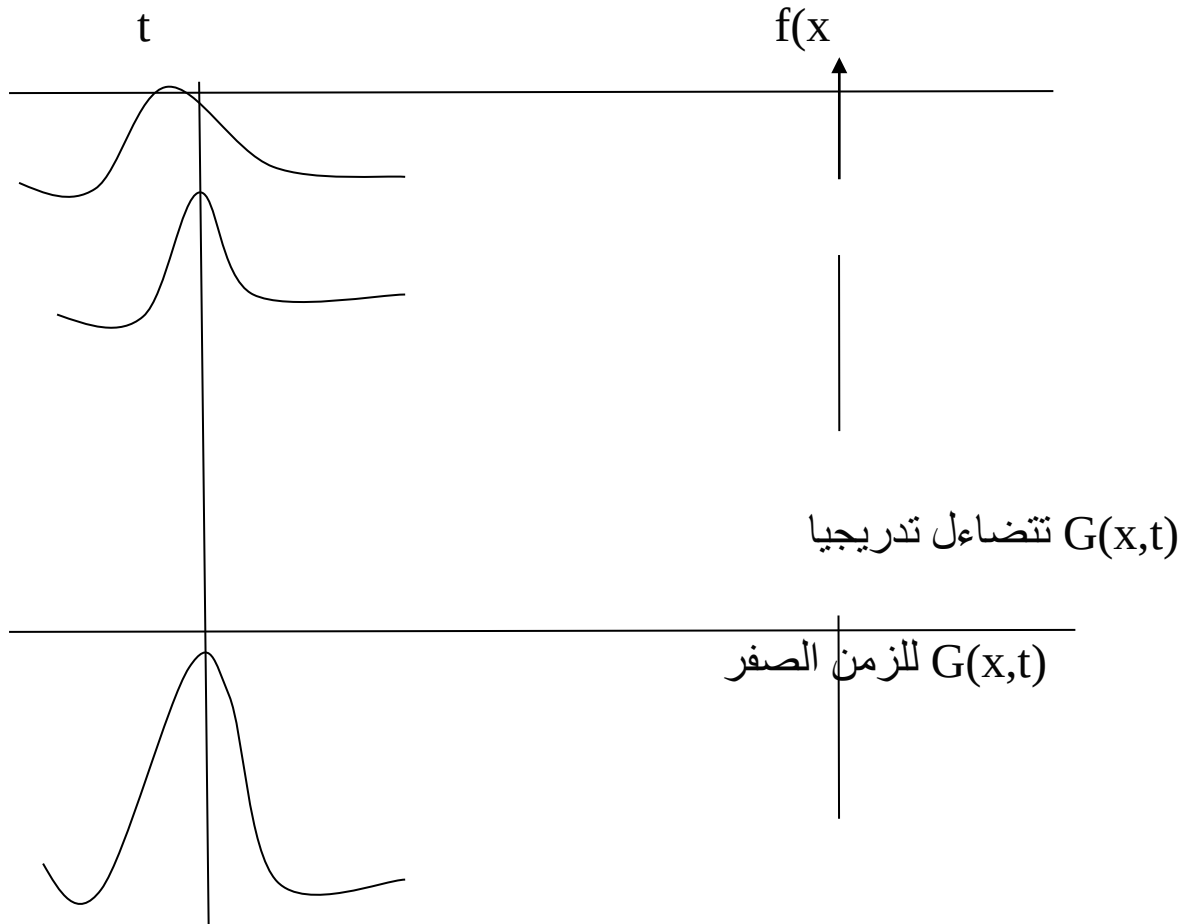
1- درجة الحرارة الابتدائية $\Phi(x)$

2- الدالة $G(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{gt}} e^{-(x-\varepsilon)^2/4ta^2}$

والتي تسمى بدالة كرين او دالة الحافز والاستجابة

يمكن البرهنة على ان الدالة الحافز والاستجابة $G(X,t)$ هذه هي درجة حرارة الاستجابة الى درجة حرارة الحافز عندما $x=\varepsilon$ وبعبارة اخرى $G(x,t)$ هي درجة حرارة في الذراع في زمن t الناشئه عن وحدة حافز حرارة عندما $x=\varepsilon$

$G(x,t)$ شبه ما يسمى منحنى التوزيع الطبيعي في الاحصاء حيث نلعب دور تباين التوزيع



X

$$X = \varepsilon$$

الشكل اعلاه دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ من درجة حرارة محفزه عندما $X=\varepsilon$ لذا فان تفسير المعادلة (4) هو ان درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0)=\Phi(X)$ تتجزأ الى متصلة من الحوافز ذات قيم $\varepsilon(\Phi)$ عند كل نقطة $(X=\varepsilon)$ وتوجد درجة الحرارة الناتجة $G(x,t)$ $\varepsilon(\Phi)$ ثم تجمع (تكامل) درجة الحرارة هذه للحصول على معادلة (4) سنلاحظ بعدئذ ان هذا المفهوم العام يعرف بالتراكيب من جهة النظر العلمية .
غالبا مايمكن ايجاد التكامل في حل المعادله (4) لدرجة حرارة ابتدائية معينه $\Phi(X)$ أما اذا لم يمكن أيجاد ذلك تحليليا فأن الحل يمكن ايجاده عند أي نقطة (x,t) بحساب التكامل بطرائق عددية.

المصادر

[١] ديفيد. ياورز – ترجمة الدكتور . نزار حمدون شكر- مسائل القيمة الحدودية- لمديرية دار الكتب والنشر – جامعة الموصل – العراق – ١٤٠٩هـ | ١٩٨٩م.

[٢] أ.د حسن مصطفى العويضي- المعادلات التفاضلية الجزء الثاني- مكتبة الرشد- الرياض- المملكة العربية السعودية-١٤٢٦هـ | ٢٠٠٥م.