



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات الطبية

حول ديناميكية نمو المجتمعات المستمرة

بحث مقدم الى

جامعة القادسية /كلية علوم الحاسوب و الرياضيات/ قسم الرياضيات الطبية
كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات الطبية.

من قبل الطالبة

ميامين صالح برهان

باشراف

أ.م.د.حيدر عيال مطر

م.د. احسان جبار كاظم

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

((لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ
رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِصْرًا كَمَا
حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ
وَاعْفُ عَنَّا وَاعْفِرْ لَنَا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
الْكَافِرِينَ))

صدق الله العلي العظيم

البقرة (٢٨٦)

الشكر والتقدير

لابد لنا ونحن نسير مسيرتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة تعود
إلى سنين قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا المحترمين الذين
قدموا لنا الكثير ساعين وباذلين جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لبعث
الأمة من جديد

وقبل إن نمضي نقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة
والاعتزاز إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ...
إلى الذين أمهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ...

إلى جميع أساتذتنا الأفاضل في كلية علوم الحاسوب والرياضيات .

واخص بالتقدير والشكر الدكتور إحسان جبار كاظم

الإهداء

لا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا يطيب الليل إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك (الله جل جلاله).

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح العالم إلى نبي الرحمة ونور العالمين (سيدنا محمد صلى الله عليه وآله وسلم)

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى من أحمل اسمه بكل افتخار أرجو من الله يمدد عمرك لتري ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك في ذهني اليوم وفي الغد وإلى الأبد بها اهتدي (والدي العزيز)

إلى ملاكي في الحياة وسر وجودي وإلى سر ابتسامتي وإلى من علمتني معنى الحب والحنان والرحمة (والدتي العزيزة)

إلى من أرى التفاؤل بعينهم والسعادة فيهم وإلى شعلة الذكاء والنور إخواني الأعزاء وجميع الأصدقاء.

إلى من شاركني وساعدني في تقديم البحث وبالأخص الدكتور إحسان جبار كاظم

المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة
الآية	
الإهداء	
الشكر والتقدير	
المستخلص	
المقدمة	
الفصل الأول / المعادلات التفاضلية بصورة عامة	١١-١
الفصل الثاني / نماذج المجتمعات المستمرة لنوع وحيد	٢٥-١٢
المصادر	٢٥

المستخلص

درسنا في هذا البحث ديناميكية نمو المجتمعات المستمرة و الذي يعتبر من مواضيع الرياضيات الحيوية المهمة و اعطينا تعميم لمعادلة النمو الوجدسية.

مقدمة

إن نمو المجتمعات البشرية و الكائنات الحية بشكل عام من اهم مواضيع الرياضيات الحيوية فلذلك عنينا في هذا البحث بدراسة ديناميكية المجتمعات المستمرة.

يتكون هذا البحث من فصلين.

يتناول الفصل المعادلات التفاضلية بشكل عام وصور طور المعادلات التفاضلية وكيفية رسمها في المستوى الديكارتي و استقرارية المعادلات التفاضلية.

أما في الفصل الثاني فتناولنا دراسة ديناميكية المجتمعات المستمرة و اعطينا تعميما لمعادلة النمو القياسية التي تسمى في بعض الاحيان المعادلة اللوجستية.

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية بصورة عامة

1.1 الوجود و الوحداية

تعريف 1.1.1 [Arrowsmith] لتكن $X(t, x)$ دالة قيمة حقيقية للمتغيرين الحقيقيين t و x ، مجالها $D \subseteq \mathbb{R}^2$. الدالة $x(t)$ ، حيث t في فترة $I \subseteq \mathbb{R}$ ، و التي تحقق

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = X(t, x(t)) \quad (1.1)$$

تسمى حل للمعادلة التفاضلية (1.1).

ان الشرط الضروري لجعل $x(t)$ حل هو $(t, x(t)) \in D$ لكل $t \in I$ ، لذلك D تحدد مجال ومدى $x(t)$. اذا كانت $x(t)$ حل للمعادلة (1.1) فذلك يكون قصرها على اي فترة $J \subset I$. من اجل الملائمة سناخذ I على انها اكبر فترة بحيث ان $x(t)$ تحقق (1.1) عليها. ان الحلول مع هذه الخاصية تسمى حلول عظمى (maximal solutions). وعليه، ما لم يذكر غير ذلك، سنستخدم كلمة "حل" لتعني "حل اعظم". تأمل الامثلة الاتية على (1.1) وحلولها، نعطي

$$\dot{x} = X(t, x), D, x(t), I$$

في كل حالة (C و C^* ثابتان حقيقيان):

(a) $\dot{x} = x - t, D = \mathbb{R}^2, x(t) = 1 + t + Ce^t, I = \mathbb{R};$

(b) $\dot{x} = x, D = \mathbb{R}^2, x(t) = (C - t)^{-1}, I = (-\infty, C)$

$$x(t) = 0, \quad I = \mathbb{R}$$

$$x(t) = (C^* - t)^{-1}, I = (C^*, \infty)$$

ان وجود الحلول يحدد بخواص X .

قضية 1.1.2 اذا كانت X دالة مستمرة في مجال مفتوح، $D^* \subseteq D$ فان لاي $(t_0, x_0) \in D^*$ ، يوجد

حل $x(t), t \in I$ للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ بحيث ان $t_0 \in I$ وان $x(t_0) = x_0$.

على سبيل المثال، تأمل المعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = 2|x|^{1/2}, \quad (1.2)$$

حيث ان $D = \mathbb{R}^2$. اي زوج (t_0, x_0) حيث $x_0 \geq 0$ يعطى $(t_0, x(t_0))$ عندما يكون $x(t)$ هو الحل

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, C) \\ (C - t)^2, & t \in (C, \infty) \end{cases} \quad (1.3)$$

وان $C = t_0 - \sqrt{x_0}$. بطريقة مماثلة يمكن ان نجد الحل للازواج (t_0, x_0) عندما $x_0 < 0$.
 لاحظ ان القضية 1.1.2 لا تتضمن امكانية كون $x(t_0) = x_0$ لاكثر من حل واحد $x(t)$ على سبيل المثال هناك عدد غير منته من الحلول للمعادلة التفاضلية (1.2) تحقق $x(t_0) = x_0$ ، هي كل حل من الصيغة (1.3) عند $C > t_0$ و الحل $x(t) \equiv 0$.
 ان القضية الاتية تعطي الشرط الكافي لكل زوج في D^* بان يحدث في حل واحد و واحد فقط للمعادلة (1.1).

قضية 1.1.3 اذا كانت X و $\partial X / \partial x$ مستمرتان في مجال مفتوح، $D^* \subseteq D$ ، فانه لاي $(t_0, x_0) \in D^*$ يوجد حل وحيد $x(t)$ للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ بحيث ان $x(t_0) = x_0$.

لاحظ انه، على الرغم من ان $X = 2|x|^{1/2}$ مستمرة على $D = \mathbb{R}^2$ لكن

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{cases} |x|^{-1/2}, & x > 0 \\ -|x|^{-1/2}, & x < 0 \end{cases}$$

تكون مستمرة على $D^* = \{(t, x): x \neq 0\}$ فقط، وهي غير معرفة عند $x = 0$. نلاحظ ان الزوج $(t_0, 0)$ ، $t_0 \in \mathbb{R}$ في عدد غير منته من الحلول للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = 2|x|^{1/2}$.

من جانب اخر، $X(t, x) = x - t$ و $\partial X / \partial x = 1$ مستمرتان خلال المجال $D = \mathbb{R}^2$. اي زوج (t_0, x_0) يحدث في حل واحد و واحد فقط من حلول $\dot{x} = x - t$ ، وليكن

$$x(t) = 1 + t + Ce^t \quad (1.4)$$

عندما $C = (x_0 - t_0 - 1)e^{-t_0}$

3 التمثيل الهندسي للمعادلة التفاضلية

ان الدالة $x(t)$ التي تمثل حل المعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ يمكن ان تمثل هندسيا بواسطة بيان $x(t)$. ان هذا البيان يعرف منحني الحل في المستوي t, x .

اذا كانت X مستمرة في D ، فان القضية 2.2.4 تؤدي الى ان منحني الحل يقع في المنطقة D من المستوي t, x . هذا يحصل لان كل نقطة في D تقع على منحني حل واحد على الاقل. لذلك حلول المعادلة التفاضلية، تمثل بواسطة عائلة من منحنيات الحل في D (كما مبين في الاشكال 1.1-1.8).

اذا كان كلتا الدالتين X و $\partial X / \partial x$ مستمرتين في D فان القضية 2.2.5 تؤدي الى وجود منحني حل وحيد يمر خلال كل نقطة من D (كما مبين في الاشكال 1.1-1.6)

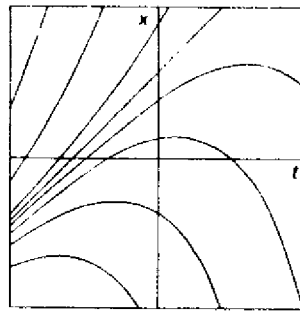


Fig. 1.1. $\dot{x} = x - t$.

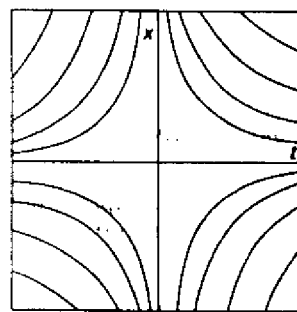


Fig. 1.2. $\dot{x} = -x/t, t \neq 0$.

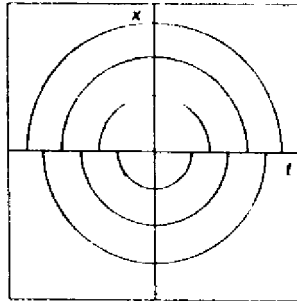


Fig. 1.3. $\dot{x} = -t/x$.

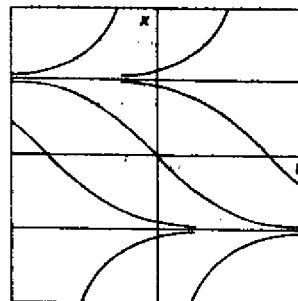


Fig. 1.4. $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

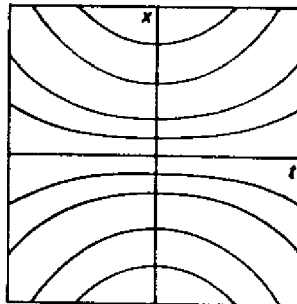


Fig. 1.5. $\dot{x} = 2xt$.

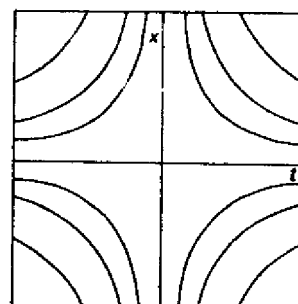


Fig. 1.6. $\dot{x} = -x/\tanh t, t \neq 0$.

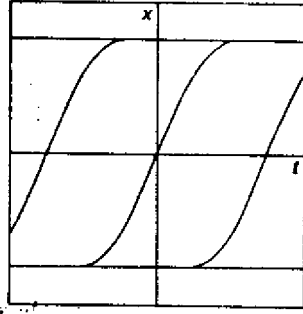


Fig. 1.7. $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}, |x| \leq 1$.

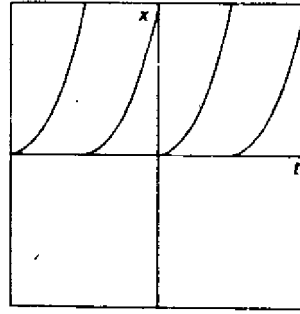


Fig. 1.8. $\dot{x} = 2x^{1/2}, x \geq 0$.

لاحظ ان عائلتي منحنيات الحل في الشكلين 1.2 و 1.6 يشبه احدهما الاخر. كل منحنى حل في واحد من الاشكال يمتلك متم في الشكل الاخر، هما متشابهان في الشكل، لهما نفس السلوك، الخ، لكنها منحنيات غير متطابقة. ان العلاقة بين عائلتي منحنيات الحل تلك هي مثال على ما نطلق عليه التكافؤ النوعي (qualitative equivalence) (سندرس هذا المفهوم في بنود لاحقة). نقول ان السلوك النوعي (qualitative behavior) لمنحنيات الحل في الشكل 1.2 هو نفسه لتلك التي في الشكل 1.6. ان دقة الرسم البياني لمنحنيات الحل ليست ضرورية للحصول على سلوكها النوعي، غالبا يكفي الوصف (sketch). يمكننا في بعض الاحيان الحصول على وصف منحنيات الحل من المعادلة التفاضلية مباشرة.

مثال 2.3.1 صف منحنيات الحل للمعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = t + t/x \quad (1.11)$$

في المنطقة D من المستوي t, x حيث $x \neq 0$.

الحل. تأمل الملاحظات الاتية.

(a) تعطي المعادلة التفاضلية ميل منحنيات الحل عند كل نقاط المنطقة D . وعليه، بصورة خاصة، منحنيات الحل تقطع المنحنى $t + t/x = k$ ، ثابت، ميله k . ان هذا المنحنى يسمى **الطية المحدبة** (isocline) للميل k . ان مجموعة الطيات المحدبة، يتم الحصول عليها باخذ قيم حقيقية مختلفة للثابت k ، هي عائلة القطع الزائد

$$x = \frac{t}{k-t}, \quad (2.12)$$

مع المحاذيين $x = -1$ و $t = k$. مجموعة مختارة من الطيات المحدبة تم بيانها في الشكل 1.9.

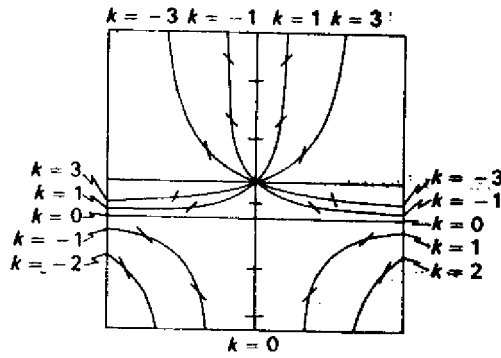


Fig. 1.9. Selected isoclines for the equation $\dot{x} = t + t/x$. The short line segments on the isoclines have slope k and indicate how the solution curves cross them.

(b) إشارة $\ddot{x}$ تحدد فيما اذا كانت منحنيات الحل في D مقعرة ام محدبة. اذا كانت $\ddot{x} > 0$ ، فان $\dot{x}$ متزايدة مع t وان منحنى الحل يسمى محدب (convex). اذا كانت $\ddot{x} < 0$ ، فان $\dot{x}$ متناقصة مع t وان منحنى الحل يسمى مقعر (concave). لذلك يمكن ان تقسم المنطقة D الى مجموعات جزئية تكون عليها منحنيات الحل اما مقعرة او محدبة مفصولة بتخوم عند $\ddot{x} = 0$. بالنسبة الى (1.5) نجد ان

$$\ddot{x} = x^{-3}(x+1)(x-t)(x+t) \quad (1.7)$$

والمنطقة D يمكن ان تنقسم الى مناطق $P(\ddot{x} > 0)$ و $N(\ddot{x} < 0)$ كما مبين في الشكل 1.10 .

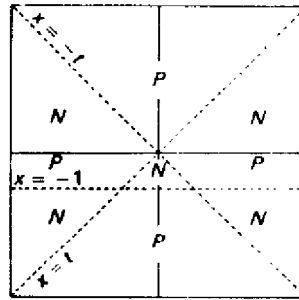


Fig. 1.10. Regions of convexity (P) and concavity (N) for solutions of $\dot{x} = t + t/x$.

(c) تكون المنطويات المحدبة متماثلة الموضع بالنسبة الى $t = 0$ و عليه يجب ان تكون متماثلة كذلك بالنسبة الى منحنيات الحل. ان الدالة $X(t, x) = t + t/x$ تحقق $X(-t, x) = -X(t, x)$ و عليه اذا كانت $x(t)$ حل للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ ، فذلك تكون الدالة $x(-t)$ (برهن).

الملاحظات الثلاث تلك تسمح لنا باننتاج وصف منحنيات الحل للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = t + t/x$ (انظر الشكل 1.11). لاحظ ان كلتا الدالتين $X(t, x) = t + t/x$ و $\partial X / \partial x = -t/x^2$ مستمرتين على $D = \{(t, x) : x \neq 0\}$ ، لذلك يوجد منحنى حل وحيد يمر خلال كل نقطة من D .

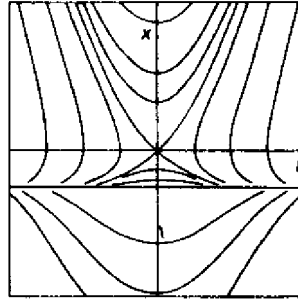


Fig. 1.11. The solution curves of the differential equation $\dot{x} = t + t/x$ in the t, x -plane.

1.2.1 منحنيات الحلول و صور الطور

المعادلة التفاضلية من الصيغة

$$x \in S \subseteq \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R} \times S \quad (2.13) \quad \dot{x} = X(x),$$

تسمى مستقلة بذاتها، لأن $\dot{x}$ تعتمد على x دائما وكذلك الحلول تحكم نفسها.

ان حلول المعادلة المستقلة بذاتها تمتلك الخاصية المهمة الآتية. اذا كانت الدالة $\xi(t)$ حل للمعادلة (2.13) مجالها I و مداها $\xi(I)$ فان الدالة $\eta(t) = \xi(t + C)$ تكون كذلك حل لكل عدد حقيقي C ، بنفس المدى لكن مجالها هو $\{t: t + C \in I\}$. يتبع هذا لان

$$\dot{\eta}(t) = \dot{\xi}(t + C) = X(\xi(t + C)) = X(\eta(t)) \quad (2.14)$$

يتم الحصول على منحنى الحل $x = \xi(t)$ بازاحة منحنى الحل $x = \eta(t)$ بتحريك C باتجاه t الموجب. بالاضافة الى ذلك، اذا وجد منحنى حل وحيد يمر خلال كل نقطة من نقاط الشريط $D' = \mathbb{R} \times \xi(I)$ فان جميع منحنيات الحل على D' هي ازاحات منحنى الحل $x = \xi(t)$. لذلك يقسم المجال D الى اشربة عندما يتم الحصول على كل منحنيات الحل بدفع منحنى منفرد بالاتجاه t . (انظر الاشكال 1.12-1.15). على سبيل المثال،

$$\dot{x} = x \quad (2.15)$$

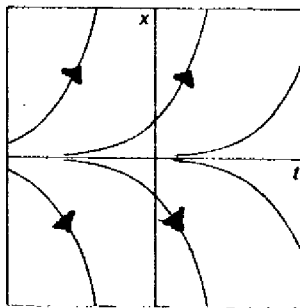


Fig. 1.12. $\dot{x} = x$: strips D' consist of the half-planes $x < 0$ and $x > 0$.

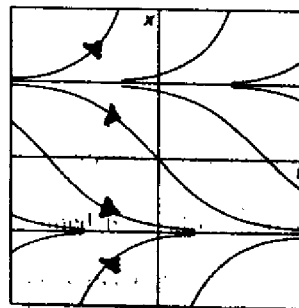


Fig. 1.13. $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$: strips $D' = \mathbb{R} \times \xi(I)$ with $\xi(I) = (-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ and $(1, \infty)$.

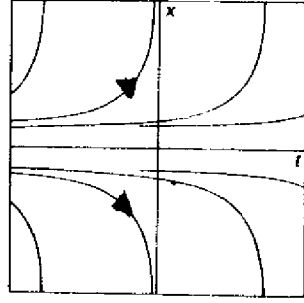


Fig. 1.14. Solution curves for $\dot{x} = x^3$.

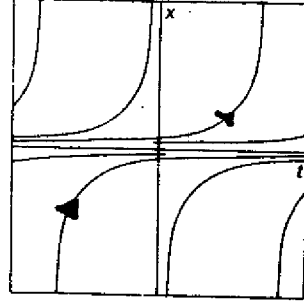


Fig. 1.15. Solution curves for $\dot{x} = x^2$.

لها الحلول

$$\xi(t) = e^t, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = (0, \infty) \quad (2.16)$$

$$\xi(t) = 0, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = 0 \quad (2.17)$$

$$\xi(t) = -e^t, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = (-\infty, 0)$$

جميع منحنيات الحل في الشريط $D' = \{(t, x) : x \in (0, \infty), t \in \mathbb{R}\}$ هي ازاحات e^t . بالمثل، تلك التي في $D' = \{(t, x) : x \in (-\infty, 0), t \in \mathbb{R}\}$ هي ازاحات $-e^t$.

بالنسبة لعوائل منحنيات الحل المرتبطة بازاحات في t ، السلوك النوعي (qualitative behavior) لعائلة الحلول تحدد باي عضو خاص. ان السلوك النوعي لمثل هذه العينة من المنحنيات تحدد بـ $X(x)$. عندما $X(x) \neq 0$ ، فاما ان يتزايد الحل او يتناقص، عندما $X(c) = 0$ يوجد حل $x(t) \equiv c$.

تعريف 2.3.2 (المسار). ليكن X حقلا متجهيا قابل للتفاضل. ولتكن نقطة ما في مستوي الطور. اذا افترضنا ان x هو حل اوسع لمسالة القيمة الابتدائية

$$\dot{x} = X(x), \quad x(0) = x_0$$

ومعرف على الفترة I التي تحتوي النقطة $t = 0$ ، فان المسار (Orbit) $\theta(x_0)$ هو مجموعة النقاط التي يقتفي اثرها الحل x اي ان

$$\theta(x_0) = \{x(t) : t \in I\}$$

ويعرف **المسار الموجب** (positive orbit) $\theta^+(x_0)$ للنقطة x_0 على انه مجموعة النقاط التي يقتفي اثرها الحل x في الزمن الموجب. اي ان

$$\theta^+(x_0) = \{x(t) : t \geq 0, t \in I\}$$

نلاحظ هنا ان المسارات لها اتجاه يتحدد من حركة المسار عند ازدياد قيم t ، والصفة الاساسية للمسارات مبينة في المبرهنتين الاتيتين.

مبرهنة 2.3.3 ليكن كل من θ_1 و θ_2 مسارا للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$ حيث X حقل اتجاهي قابل للتفاضل ، فان $\theta_1 = \theta_2$ او $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$.

تعريف 2.3.4 تسمى النقطة x_0 التي تقع في مستوي الطور للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$ نقطة اتزان (Equilibrium point) او نقطة صامدة (fixed point) اذا كان مسارها $\theta(x_0)$ يتكون من نقطة واحدة فقط.

ممهدة 2.3.5 تكون x_0 نقطة اتزان للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$ اذا و فقط اذا كان $X(x_0) = 0$.

نتيجة 2.3.6 لتكن $X = (K, H)$ حقلًا متجهيًا معرف على $\mathbb{R}^2$. فان كل خط من خطوط تساوي الميل يمر خلال كل نقطة من نقاط اتزان المعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$.

يمكن ان تمثل هذه المعلومات على المستقيم x بدلا من المستوي t, x . اذا كان $X(x) \neq 0$ ، فان الفترة ترتبط مع سهم يبين المفهوم الذي تتغير فيه x . عندما $X(c) = 0$ ، فان الحل $x(t) \equiv c$ يمثل بالنقطة $x = c$. تسمى تلك الحلول **نقاط صامدة** (fixed points) للمعادلة لان x تبقى عند c لكل t . التمثيل الهندسي للسلوك النوعي للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$ يسمى **صورة الطور** (phase portrait) لها. بعض المثلة حول صور الطور تبينت، بعلاقة مع $X(x)$ ، في الاشكال 1.16-1.19. عوائل منحنيات الحلول المناظرة تعطى في الاشكال 1.12-1.15.

اذا كانت x ليست ثابتة فيجب ان تكون متزايدة او متناقصة. وعليه لعدد منتهي معطى من النقاط الصامدة يمكن ان يكون عدد منته من صور الطور المختلفة فقط. نقصد بـ "مختلفة"، مع تحديدات مختلفة اين تكون x متزايدة او متناقصة. على سبيل المثال، تامل نقطة صامدة منفردة $x = c$ (الشكل 1.20). اذا كان $x < c$ ، فيجب ان تكون $X(x)$ اما موجبة او سالبة و بالمثل اذا كان $x > c$. اذن واحد من صور الطور المبينة يجب ان يحدث. وهذا يعني ان السلوك النوعي لاي معادلة تفاضلية مستقلة بذاتها مع نقطة صامدة واحدة يجب ان تقابل واحد من صور الطور في الشكل 1.20 لبعض قيم c .

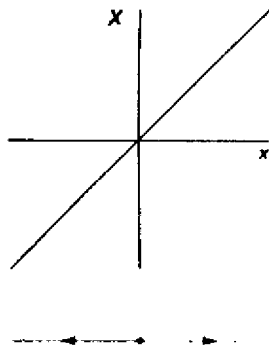


Fig. 1.16. $\dot{x} = x$, $x = 0$ is a fixed point.

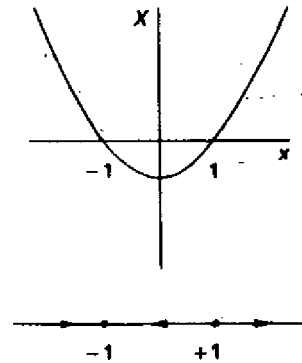


Fig. 1.17. $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $x = \pm 1$ are fixed points.

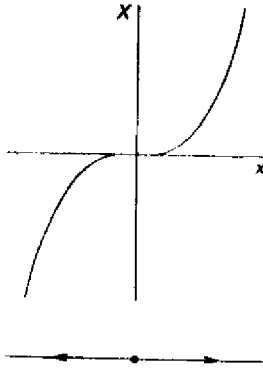


Fig. 1.18. $\dot{x} = x^3$, $x = 0$ is a fixed point.

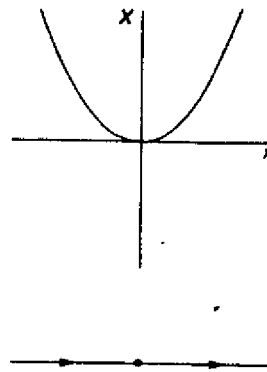


Fig. 1.19. $\dot{x} = x^2$, $x = 0$ is a fixed point.

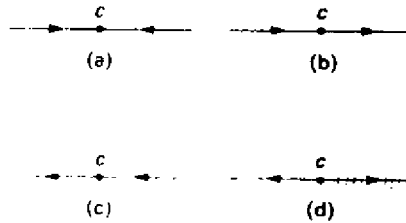


Fig. 1.20. The four possible phase portraits associated with a single fixed point. The fixed point is described as an **attractor** in (a), a **shunt** in (b) and (c) and a **repellor** in (d).

على سبيل المثال جميع المعادلات

$$\dot{x} = x, \dot{x} = x^3, \dot{x} = x - a, \dot{x} = (x - a)^3, \dot{x} = \sinh x, \dot{x} = \sinh(x - a)$$

تقابل الشكل 1.20(d) لـ $c = 0$ أو $c = a$. بالطبع، معادلتان مختلفتان، كل منها يمتلك نقطة صامدة، التي تقابل نفس صورة الطور في الشكل 1.20 لها نفس السلوك النوعي. نقول لمثل هاتين المعادلتين التفاضليتين متكافئتين نوعياً (qualitatively equivalent).

الآن لاحظ ان المجادلة التي تقود الى الشكل 1.20 تتحقق بشكل متساوي اذا كانت النقطة الصامدة عند $x = c$ واحدة من عدة نقاط في صورة الطور. بمعنى اخر، ان السلوك النوعي للنقطة x في جوار اي نقطة صامدة يجب ان يكون واحد من التي موضحة في الشكل 1.20(a)-(d). نقول ان هذا السلوك يحدد طبيعة النقطة الصامدة (nature of the fixed point) و نستخدم المصطلح المعروف في اسفل الشكل 1.20 لوصفها.

هذه خطوة مهمة لانها تؤدي الى ان صورة طور اي معادلة مستقلة بذاتها تحدد بشكل كامل بطبيعة نقاطها الصامدة. سنتبنى التعريف الاتي:

تعريف 2.3.7 يقال لمعادلتين تفاضليتين من الصيغة $\dot{x} = X(x)$ بانهما متكافئتين نوعياً (qualitatively equivalent) اذا كان لهما نفس عدد النقاط الصامدة، من نفس النوع، ومرتبة بنفس الترتيب على طول خط الطور.

على سبيل المثال ، المعادلة التفاضلية $\dot{x} = (x+2)(x+1)$ مكافئة نوعيا الى المعادلة التفاضلية $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. كلاهما تمتلك نقطتين صامدتين ، احدهما جاذبة و الاخرى نافرة، ويحدث الجذب عند اصغر قيمة لـ x . ان المعادلة $\dot{x} = (x+2)(x+1)$ لا تكافئ نوعيا المعادلة $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ لان التجاذب و التنافر يحدث بعكس الترتيب. اذا فكرنا بان المعادلة $\dot{x} = 1$ تمتلك نفور عند $x = -\infty$ و جذب عند $x = \infty$ ، فان $\dot{x} = 1$ و $\dot{x} = -1$ غير متكافئتين نوعيا لان الاخيرة تمتلك جذب عند $x = -\infty$ و نفور عند $x = \infty$.

مثال 2.3.8

رتب المعادلات التفاضلية الاتية في مجاميع متكافئة نوعيا:

- (1) $\dot{x} = \cosh x$; (2) $\dot{x} = (x - a)^2$; (3) $\dot{x} = \sin x$
 (4) $\dot{x} = \cos x - 1$; (5) $\dot{x} = \cosh x - 1$; (6) $\dot{x} = \sin 2x$;
 (7) $\dot{x} = e^x$; (8) $\dot{x} = \sinh^2(x - b)$.

الحل:

المعادلتين (1) و (7) لاتمتلكان نقاط صامدة، في كلتا الحالتين $X(x) > 0$ لكل x . كلاهما يمتلك صورة الطور المبينة في الشكل 1.21(a)، ولذلك يكونان متكافئتين نوعيا.

المعادلة (2) تمتلك تحويلة عند $x = a$ و ان $X(x) \geq 0$ لكل x . ان المعادلة (5) تمتلك نقطة صامدة وحيدة، وانها تمتلك نفس نوع التحويلة عند $x = 0$. المعادلة (8) تمتلك تحويل عند $x = b$ ، مرة اخرى $X(x) \geq 0$ لكل x . تلك المعادلتان تشكلان مجموعة متكافئة نوعيا ثانية بصورة طور مبينة في الشكل 1.21(b). المعادلات المتبقية (3)، (4) و (6) جميعها تمتلك عدد غير منته من النقاط الصامدة: (3) عند $x = n\pi$ ، (4) عند $x = 2n\pi$ و (6) عند $x = n\pi/2$. على اية حال، معادلة (4) تمتلك $X(x) \leq 0$ لكل x ، لذلك كل نقطة صامدة هي تحول، بينما (3) و (6) تمتلكان جواذب و نوافر بالتبادل (مبينة في الشكل 1.21(c) و (d)). وعليه فقط (3) و (6) متكافئتين نوعيا.

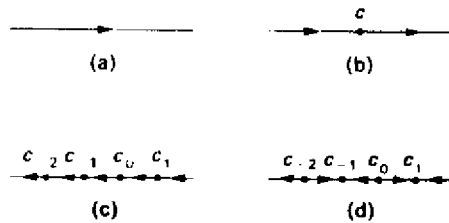


Fig. 1.21. Phase portraits for qualitatively equivalent groups in Example 1.2.1. In (b) $c = a$ for (2), 0 for (5) and b for (8). In (c) $c_n = 2n\pi$ for (4) and in (d) $c_n = n\pi$ for (3) and $n\pi/2$ for (6).

ان المثال 2.3.8 يرسم تصور حول حقيقة كون "التكافؤ النوعي" هو علاقة تكافؤ على مجموعة كل المعادلات التفاضلية الذاتية. وبالنتيجة يمكننا تقسيم هذه المجموعة الى صفوف منفصلة طبقا الى تلك المتكافئة نوعيا.

مبرهنة 2.3.9 ليكن كل من $\dot{x} = X(x)$ و $\dot{y} = Y(y)$ معادلة تفاضلية و ان U و V مستوي الطور لكل منهما على الترتيب. تكون المعادلتين التفاضليتين $\dot{x} = X(x)$ و $\dot{y} = Y(y)$ متكافئتين تبولوجيا

إذا وفقط إذا كان هناك تشاكل تبولوجي بين مستوي طور كل من هذين الحقلين المتجهين بحيث أن هذا التشاكل التبولوجي يحافظ (عند النقل) على المسارات (باتجاهاتها). أي بعبارة أخرى إذا وجد تشاكل تبولوجي $h: U \rightarrow V$ بحيث أن

$$h(\theta_X(x)) = \theta_Y(h(x)) \quad (2.18)$$

مثال 2.3.9 المعادلات الخطية $\dot{x} = ax$ و $\dot{y} = by$ حيث $a, b > 0$ متكافئتين تبولوجيا. تأمل التشاكل التبولوجي $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة على النحو $h(x) = x$.

مثال 2.3.10 ان المعادلتين $\dot{x} = -x$ و $\dot{x} = x(a - bx)$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ متكافئتان تبولوجيا. تأمل التشاكل التبولوجي $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ المعرفة على النحو $h(x) = \frac{a}{b}e^x$.

الفصل الثاني

نماذج المجتمعات المستمرة لنوع وحيد

(Continuous Population Models for Single Species)

1.1 نماذج النمو المستمرة

نماذج النوع-الوحيد بشكل خاص مرتبطة بدراسات مختبرية، لكن في العالم الحقيقي، يمكن ان نعكس نتائج التلسكوب المؤثرة في ديناميكية المجتمع. لتكن $N(t)$ مجتمع من الانواع عند زمن t ، فان نسبة التغير

$$\frac{dN}{dt} = \text{births} - \text{death} + \text{migration}, \quad (1.1)$$

هي معادلة الصيانة للمجتمع (conservation equation). ان صيغة الحدود المشهورة على يمين (1.1) من ضروريات نمذجة الحالة قيد الاهتمام. النموذج الايسر لا يتضمن هجرة وحدي الولادة و الموت متلائمة مع N هذا يعني

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$

حيث ان b, d ثابتان موجبان و المجتمع البدائي $N(0) = N_0$. وعليه اذا كان $b > d$ فان المجتمع ينمو تصاعديا بينما اذا كان $b < d$ فانه ينقرض. وجهة النظر هذه، التي قدمت من قبل مalthus في عام 1798، غير واقعية جدا. على اية حال، اذا تاملنا الماضي و تنبانا تخمين النمو من القرن السابع عشر الى القرن الواحد وعشرون ربما تكون اقل من غير واقعية، كما نرى في جدول 1.1 (تقديرات الامم المتحدة في اواسط القرن الواحد والعشرين). من عام 1900 ينمو المجتمع تصاعديا.

Table 1.1.

Date	Mid 17th Century	Early 19th Century	1918–1927	1960	1974	1987	2000	2050	2100
Population in billions	0.5	1	2	3	4	5	6.3	10	11.2

على الرغم من هذا النمو، العديد من علماء السكان قلقون بشأن فيما اذا سيكون هناك عدد كاف من الناس في المستقبل ام لا! في عام 1975 حوالي 18% من مجتمع العالم يعيشون في بلدان حيث كان معدل الخصوبة عند او تحت مستوى الاكمال (اقصد هنا بـ"الاكمال" اذا فقد المجتمع شخص يعوض بشخص اخر) (تقريبا 2.1 طفل لكل امرأة) بينما في عام 1997 كان 44% ويتوقع ان يكون 67% (الامم المتحدة) في عام 2015.

في المدى البعيد بالطبع لابد ان يكون هناك بعض التعديلات على مثل هذا النموذج. اقترح فير هولست (1838-1845) بان تكون عملية تعديل ذاتية يجب ان تعمل عندما يصبح عدد السكان كبير جدا. اقترح

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.2)$$

حيث ان r و K ثابتان موجبان. وسماها النمو اللوجستي (logistic growth) في المجتمع. في هذا النموذج معدل ولادات كل فرد هو

$$r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

هذا يعني انه يعتمد على N . ان الثابت K مدى سعة (carrying capacity) البيئة، الذي يحدد عادة من المصادر المستقلة المتوفرة.

هناك حالتان ثابتتان (steady state) او حالتان متوازنتان (equilibrium state) للمعادلة (1.2) ، وهما، $N = 0$ و $N = K$ ، هذا يعني، عندما $\frac{dN}{dt} = 0$. $N = 0$ غير مستقرة (unstable) لان التقريب الخطي (هذا يعني، N^2 يهمل بالمقارنة مع N) يعطي

$$\frac{dN}{dt} \approx rN$$

وهكذا N تنمو تصاعديا من اي قيمة ابتدائية صغيرة.

نقطة الاتزان الاخرى $N = K$ مستقرة (stable): التقريب الخطي حولها (هذا يعني $(N - K)^2$ يهمل مقارنة مع $|N - K|$) يعطي

$$\frac{d(N-K)}{dt} \approx -r(N - K)$$

لذلك $N \rightarrow K$ عندما $t \rightarrow \infty$.

مدى السعة K يحدد حجم مجتمع الحالة الثابتة المستقرة عندما تكون r قياس المعدل الذي تصل اليه، هذا يعني هي قياس الديناميكية: يمكننا تكوينها في الزمن بالتحويل من t الى rt . وعليه $1/r$ يمثل مقياس الزمن (timescale) لتجاوب النموذج مع اي تغيير في المجتمع.

إذا كان $N(0) = N_0$ فإن حل المعادلة (1.2) يكون

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{[K + N_0(e^{rt} - 1)]} \rightarrow K \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

ويوضح في الشكل 1.1

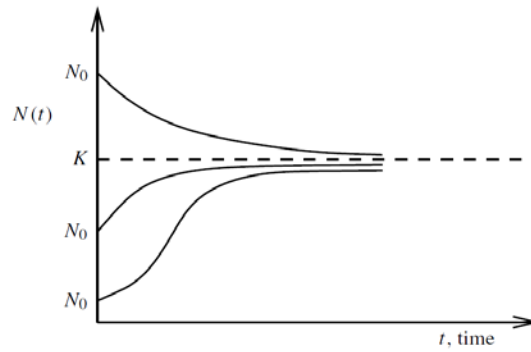


Figure 1.1. Logistic population growth. Note the qualitative difference for the two cases $N_0 < K/2$ and $K > N_0 > K/2$.

من (1.2)، إذا كان $N_0 < K$ ، فإن $N(t)$ يتزايد برتبة الى K بينما إذا كان $N_0 > K$ ، فإنه يتناقص برتبة الى K . من الحالة الانفة توجد فروق نوعية (qualitative difference) تعتمد على كون $N_0 > K/2$ او $N_0 < K/2$ ، مع الحالة $N_0 < K/2$ تمتلك الصيغة صفة نوعية تشبه حرف C ملاحظة عادة.

في حالة كون $N_0 > K$ ، هذا يؤدي الى ان معدل الولادات يكون سالب! بالطبع كل الحقائق في (1.1) تقول ان الولادات زائدا الهجرة (immigration) اقل من الوفيات زائد النزوح (emigration).

بصورة عامة اذا تأملنا مجتمع محكوم بالمعادلة

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad (1.4)$$

حيث ان $f(N)$ دالة غير خطية لـ N فان الحلول المتزنة N^* هي حلول المعادلة $f(N) = 0$ و تكون مستقرة خطيا اذا كان $f'(N^*) < 0$ ، وغير مستقرة اذا كان $f'(N^*) > 0$. هذا واضح من التقريب الخطي حول N^* بكتابة

$$n(t) \approx N(t) - N^*, \quad |n(t)| \ll 1$$

وتصبح (1.4) كالآتي

$$\frac{dN}{dt} = f(N^* + n) \approx f(N^*) + nf'(N^*) + \dots,$$

هي من المرتبة الثانية في $n(t)$ وتعطي

$$\frac{dN}{dt} \approx nf'(N^*) \Rightarrow n(t) \propto \exp[f'(N^*)t]. \quad (1.5)$$

لذلك n تنمو أو تضمحل طبقاً لـ $f'(N^*) > 0$ أو $f'(N^*) < 0$. ان مقياس الزمن لتجاوب النموذج للاضطراب يكون من الرتبة $|f'(N^*)|^{-1}$ ، هو زمن تغير الاضطراب الابتدائي بالعامل e .

هناك عدد من المجتمعات المتزنة N^* أو حالات الثبات وهي حلول المعادلة $f(N) = 0$: وهي تعتمد على نماذج النظام $f(N)$. بيانياً ارسم $f(N)$ بالقرب من N تعطي مباشرة الاتزان كنقاط عندما تقاطع محور- N . الاندراج $f'(N^*)$ عند كل حالة ثبات يحدد استقرارها الخطي. على أية حال، ربما تكون مثل حالات الثبات هذه غير مستقرة إلى عدد منته من الاضطرابات. افترض، على سبيل المثال، ان $f(N)$ كما موضح في الشكل 1.3. الاندراجات $f'(N^*)$ عند $N = 0, N_2$ تكون موجبة لذلك تكون نقاط الاتزان غير مستقرة بينما تلك التي عند $N = N_1, N_3$ تكون مستقرة لاضطرابات بسيطة. الاسهم تشير إلى الاستقرار أو عدم الاستقرار. اذا شوشنا الان، على سبيل المثال، المجتمع من نقطة اتزانه N_1 بحيث ان N في المدى $N_2 < N < N_3$ فان $N \rightarrow N_3$ بدلاً من ان تعود إلى N_1 . اضطراب مماثل من N_3 إلى قيمة في المدى $0 < N < N_2$ يؤدي إلى ان $N(t) \rightarrow N_1$. بشكل نوعي هناك اضطراب ابتدائي تحته تكون حالات الثبات مستقرة دائماً، وهذه البداية تعتمد على الصيغة اللاخطية الكاملة للدالة $f(N)$. بالنسبة إلى N_1 على سبيل المثال، بداية الاضطراب الضرورية هي $N_2 - N_1$.

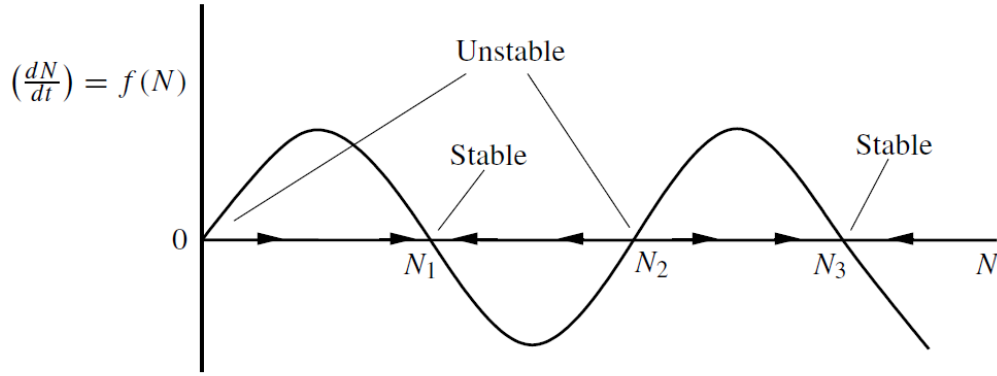


Figure 1.3. Population dynamics model $dN/dt = f(n)$ with several steady states. The gradient $f'(N)$ at the steady state, that is, where $f(N) = 0$, determines the linear stability.

1.2 نموذج تفشي حشرة: شجرة صنوبرية:

Insect Outbreak Model: Spruce Budworm

النموذج العملي الذي يعرض مجتمعين موجبين بحالة ثبات مستقرة خطيا هو **Spruce Budworm** الذي يمكن ان ، بالكفاءة الشرسة، يجرد ورق البلسم التنوب، هو مشكلة رئيسية في كندا. تامل لودويج ايتال (Ludwig et al.) في عام 1978 نموذج ديناميكية مجتمع ال budworm بانه يعطى بالمعادلة

$$\frac{dN}{dt} = r_B N \left(1 - \frac{N}{K_B}\right) - p(N).$$

هنا r_B معدل الولادة الخطي لـ budworm و K_B مدى السعة والذي يرتبط بكثافة اوراق النبتة (الغذاء) المتوفرة على الاشجار. ان الحد $p(N)$ يمثل الافتراس، بصورة عامة الطيور: صيغتها النوعية مهمة وموضحة في الشكل 1.4. المفترسات عادة تشبع لعدد N كبير بما فيه الكفاية . يوجد تقريبا لقيمة ابتدائية N_c ، في الاسفل منها المفترس صغير، بينما في اعلى منها يكون المفترس قريب من قيمة اشباعها: ان مثل هذه الصيغة الدالية تشبه مفتاح و N_c تبدو قيمة المفتاح الحرجة بالنسبة الى مجتمع صغير N ، فان الطيور تبحث عن الطعام و بخلاف ذلك حد الافتراس $p(N)$ ينخفض بسرعة، عندها $N \rightarrow 0$ ، فان المعدل الخطي المناسب الى N . لتوضيح ذلك نأخذ صيغة $p(N)$ المقترحة من قبل (Ludwig 1978)، وهي $BN^2/(A^2 + N^2)$ حيث A و B ثابتان موجبان، و ديناميكية $N(t)$ تحكم بالمعادلة

$$\frac{dN}{dt} = r_B N \left(1 - \frac{N}{K_B}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}. \quad (1.6)$$

هذه المعادلة فيها اربعة معلمات هي r_B ، K_B ، B .

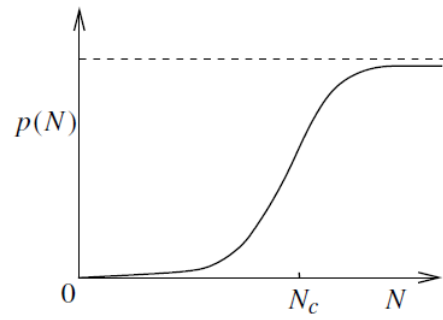


Figure 1.4. Typical functional form of the predation in the spruce budworm model; note the sigmoid character. The population value N_c is an approximate threshold value. For $N < N_c$ predation is small, while for $N > N_c$, it is 'switched on.'

تعميم المعادلة التفاضلية للنمو الاحيائي النسبي

مقدمة. بعد ان قدمنا نموذجين رياضيين لوصف النمو الاحيائي سنقدم هنا نموذجا ثالثا لوصف النمو الاحيائي ونقارن النتائج التي سنحصل عليها مع نتائج النموذجين السابقين.

النموذج الاول: سميناه المعادلة التفاضلية الأساسية للنمو والاضمحلال ولها الصيغة :

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \quad (1)$$

وإن حل المعادلة (1) يعطى بـ

$$y = ce^{\alpha t} \quad (2)$$

وذكرنا الخلل في معادلة (1) والحل المناظر (2) وهو إنه إذا كانت $\alpha > 0$ فيكون لدينا $y \rightarrow \infty$ عندما $t \rightarrow \infty$ وعليه بمرور الزمن يصبح النمو غير محدود . إن هذا يناقض الواقع لأننا نعلم إنه بعد مرور زمن معين يتوقف نمو الخلية أو الفرد ، بينما حسب المعادلة يصبح الحجم كبير جدا .

$$t = 0 \text{ عندما } y = y_0 , \quad \frac{dy}{dt} = F(y) \quad (3)$$

النموذج الثاني: هو تحويل للنموذج الاول كي يصبح اكثر ملائمة للواقع حيث فرضنا ان y تمثل ارتفاع إنسان (أو تمثل أشياء أخرى مثل حجم خلية) وافترضنا إن معدل تغير الارتفاع يعتمد على الارتفاع بطريقة أكثر صعوبة من طريقة التناسب البسيطة كالتي في (1) . وهكذا يجب إن يكون لدينا:

$$t = 0 \text{ عندما } y = y_0 , \quad \frac{dy}{dt} = F(y) \quad (3)$$

حيث تمثل y_0 الارتفاع عند زمن معين $t = 0$ ، و F دالة مناسبة لكن غير معلومة الان. وجربنا تقريبا من المرتبة الثانية مقدما بالدالة التربيعية $F(y) = \alpha y - \beta y^2$ ، حيث نختار $\beta > 0$ لكي نمنع النمو لـ y كما هو مطلوب من الواقع. المعادلة التفاضلية (3) تصبح عندئذ

$$t = 0 \text{ عندما } y = y_0 , \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \quad (4)$$

وتأكدنا من إن هذه المعادلة قدمت نموذجا رياضيا وصف الحقائق الاحيائية للنمو. وبفصل المتغيرات وجدنا ان حل المسألة (4) معطى بـ

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha t}} \quad (5)$$

إذا أخذنا الغاية لـ (5) عندما $t \rightarrow \infty$ ، نلاحظ ، عندما $\alpha > 0$ فإن أعظم قيمة لـ y تكون

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \alpha/\beta \quad (6)$$

1

وهذه تبين إنه توجد غاية لنمو y كما هو مطلوب من الحقائق الاحيائية وتشير إلى صحة نموذجنا الرياضي.

أما هنا سنقدم نموذجاً ثالثاً نأمل أن يقدم نتائج أكثر دقة من النموذج الثاني.

النموذج الثالث: سنقدم نموذجاً جديداً وهو تطوير لمعادلة النمو النسبي التي درست في النموذج الثاني ثم نقارن

نتائج النموذجين ونبين أي منهما أقرب للواقع.

افترض أن معادلة النمو النسبي تكون معطاة بـ

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^n \quad (7)$$

حيث α, β, n ثوابت. وأما الشرط الابتدائي هو

$$y = y_0 \quad \text{عندما } t = 0 \quad (8)$$

الآن سنحل مسألة القيمة الابتدائية المعطاة بـ (7) و (8).

الحل.

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dy}{\alpha y - \beta y^n} = dt$$

بتجزئة الطرف الايسر من المعادلة اعلاه بطريقة الكسور الجزئية:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha y - \beta y^n} &= \frac{1}{y(\alpha - \beta y^{n-1})} = \frac{a}{y} + \frac{b_0 + b_1 y + \dots + b_{n-2} y^{n-2}}{\alpha - \beta y^{n-1}} \\ &= \frac{a(\alpha - \beta y^{n-1})}{y(\alpha - \beta y^{n-1})} + \frac{b_0 y + b_1 y^2 + \dots + b_{n-2} y^{n-1}}{y(\alpha - \beta y^{n-1})} \end{aligned}$$

نجد ان $a\alpha = 1$ و $b_0 = b_1 = \dots = (b_{n-2} - a\beta) = 0$ او ان

$a = 1/\alpha$ و $b_0 = b_1 = \dots = 0$ و $b_{n-2} = \beta/\alpha$ و عليه

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^n} &= \int dt \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \int \left[\frac{1}{y} + \frac{\beta y^{n-1}}{\alpha - \beta y^{n-1}} \right] dy = \int dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \left[\ln y - \frac{1}{n-1} \ln(\alpha - \beta y^{n-1}) \right] = t + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{y}{[\alpha - \beta y^{n-1}]^{1/(n-1)}} \right] = t + c \quad (9)$$

وباستخدام الشرط الابتدائي (8) نجد ان

$$c = \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{y_0}{[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{1/(n-1)}} \right] \quad (10)$$

وبتعويض (10) في (9) نجد ان

$$\frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{y}{[\alpha - \beta y^{n-1}]^{1/(n-1)}} \right] = t + \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{y_0}{[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{1/(n-1)}} \right] \quad (11)$$

ان المعادلة (11) تمثل حل مسألة القيمة الابتدائية المقترحة. لكن من المفيد ان نحل (11) بالنسبة الى y .

بضرب المعادلة (11) ب α واعادة ترتيب الحدود و استخدام قوانين اللوغاريتمات نجد ان

$$\begin{aligned}
\ln \frac{y/[\alpha - \beta y^{n-1}]^{1/(n-1)}}{y_0/[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{1/(n-1)}} &= \alpha t \Rightarrow \frac{y/[\alpha - \beta y^{n-1}]^{1/(n-1)}}{y_0/[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{1/(n-1)}} = e^{\alpha t} \\
\Rightarrow \frac{y[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{1/(n-1)}}{y_0} &= [\alpha - \beta y^{n-1}]^{1/(n-1)} e^{\alpha t} \\
\Rightarrow \frac{y[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}}{y_0} &= [\alpha - \beta y^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}} [e^{(n-1)\alpha t}]^{1/(n-1)} \\
\Rightarrow \frac{y[\alpha - \beta y_0^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}}{y_0} &= [\alpha e^{(n-1)\alpha t} - \beta y^{n-1} e^{(n-1)\alpha t}]^{\frac{1}{n-1}} \\
\Rightarrow \frac{y^{n-1}[\alpha - \beta y_0^{n-1}]}{y_0^{n-1}} &= \alpha e^{(n-1)\alpha t} - \beta y^{n-1} e^{(n-1)\alpha t} \\
\Rightarrow \frac{y^{n-1}[\alpha - \beta y_0^{n-1}]}{y_0^{n-1}} + \beta y^{n-1} e^{(n-1)\alpha t} &= \alpha e^{(n-1)\alpha t} \\
\Rightarrow y^{n-1} \left[\frac{\alpha}{y_0^{n-1}} - \beta \right] + \beta y^{n-1} e^{(n-1)\alpha t} &= \alpha e^{(n-1)\alpha t} \\
\Rightarrow \beta y^{n-1} \left[\frac{\alpha/\beta}{y_0^{n-1}} - 1 + e^{(n-1)\alpha t} \right] &= \alpha e^{(n-1)\alpha t} \\
\Rightarrow y^{n-1} \left[\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{y_0^{n-1}} - 1 + e^{(n-1)\alpha t} \right] &= \frac{\alpha}{\beta} e^{(n-1)\alpha t}
\end{aligned}$$

وبضرب المعادلة اعلاه بـ $e^{-(n-1)\alpha t}$ نجد ان

$$y^{n-1}[(\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)at} + 1] = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Rightarrow y^{n-1} = \frac{\alpha/\beta}{[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)at}]}$$

وبالرفع للقوى $1/(n-1)$ نحصل على

$$y = \frac{(\alpha/\beta)^{1/(n-1)}}{[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)at}]^{1/(n-1)}} \quad (12)$$

ان المعادلة (12) هي اكثر عملية من المعادلة (11). الان اذا وضعنا $n = 2$ فان (12) تتطابق مع (5).

الان إذا أخذنا الغاية لـ (12) عندما $t \rightarrow \infty$ ، نلاحظ، عندما $\alpha > 0$ فإن أعظم قيمة لـ y تكون

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = (\alpha/\beta)^{1/(n-1)} \quad (13)$$

وهذا يبين انه توجد غاية لنمو y كما هو مطلوب من الحقائق الاحيائية وتشير الى صحة نموذجنا الرياضي.

لاستخدام النتيجة (12) نفرض قيمة y المناظرة للزمن $t = 1, t = 2$ (باستخدام وحدات معينة للزمن) تكون

معطاة بـ y_1, y_2 عندئذ من (12) نلاحظ ان :

$$y_1 = \frac{(\alpha/\beta)^{1/(n-1)}}{[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)\alpha}]^{1/(n-1)}}, \quad y_2 = \frac{(\alpha/\beta)^{1/(n-1)}}{[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-2(n-1)\alpha}]^{1/(n-1)}}$$

او

$$(\beta/\alpha)^{1/(n-1)}[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)\alpha}]^{1/(n-1)} = \frac{1}{y_1},$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha)[1 + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)e^{-(n-1)\alpha}] = \frac{1}{y_1^{n-1}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) + \frac{1}{y_0^{n-1}}e^{-(n-1)\alpha} - (\beta/\alpha)e^{-(n-1)\alpha} = \frac{1}{y_1^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-(n-1)\alpha} = \frac{1}{y_1^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}}e^{-(n-1)\alpha}$$

وعليه يكون لدينا

$$(\beta/\alpha)(1 - e^{-(n-1)\alpha}) = \frac{1}{y_1^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}}e^{-(n-1)\alpha} \quad (13)$$

وبالمثل يمكن ان نجد ان

$$(\beta/\alpha)(1 - e^{-2(n-1)\alpha}) = \frac{1}{y_2^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}}e^{-2(n-1)\alpha} \quad (14)$$

تدريد قيمة $\beta/\alpha, \alpha$ بدلالة y_0, y_1, y_2 نستمر كما يلي: نقسم المعادلة (14) على معادلة (13) نحصل على

$$1 + e^{(n-1)\alpha} = \frac{\frac{1}{y_2^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}} e^{-2(n-1)\alpha}}{\frac{1}{y_1^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}} e^{-(n-1)\alpha}} \quad (15)$$

$$\Rightarrow 1 + e^{(n-1)\alpha} = \frac{\frac{y_0^{n-1} - y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha}}{y_2^{n-1} y_0^{n-1}}}{\frac{y_0^{n-1} - y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}}{y_1^{n-1} y_0^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{(n-1)\alpha} = \frac{\frac{y_0^{n-1} - y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha}}{y_2^{n-1}}}{\frac{y_0^{n-1} - y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}}{y_1^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-(n-1)\alpha} = \frac{y_1^{n-1} (y_0^{n-1} - y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha})}{y_2^{n-1} (y_0^{n-1} - y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha})}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-(n-1)\alpha} = \frac{y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_1^{n-1} y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha}}{y_2^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}}$$

$$\Rightarrow e^{-(n-1)\alpha} = \frac{y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_1^{n-1} y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha} - y_2^{n-1} y_0^{n-1} + y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}}{y_2^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}}$$

$$\Rightarrow y_2^{n-1} y_0^{n-1} e^{-(n-1)\alpha} - y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha} = y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_1^{n-1} y_2^{n-1} e^{-2(n-1)\alpha} - y_2^{n-1} y_0^{n-1} + y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}$$

$$\Rightarrow y_2^{n-1} y_0^{n-1} e^{-(n-1)\alpha} = y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_0^{n-1} + y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha}$$

$$\Rightarrow y_2^{n-1} y_0^{n-1} e^{-(n-1)\alpha} - y_2^{n-1} y_1^{n-1} e^{-(n-1)\alpha} = y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_0^{n-1}$$

$$\Rightarrow e^{-(n-1)\alpha} (y_2^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_1^{n-1}) = y_1^{n-1} y_0^{n-1} - y_2^{n-1} y_0^{n-1}$$

$$\Rightarrow e^{-(n-1)\alpha} = \frac{y_1^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_0^{n-1}}{y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_1^{n-1}}$$

ومنها نجد ان

$$e^{-(n-1)\alpha} = \frac{y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})} \quad (16)$$

اذا عوضنا معادلة (16) في معادلة (13) نجد ان

$$(\beta/\alpha)(1 - \frac{y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}) = \frac{1}{y_1^{n-1}} - \frac{1}{y_0^{n-1}} \frac{y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha)(1 - \frac{y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}) = \frac{y_0^{n-1}y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}{y_1^{n-1}y_0^{n-1}y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})} - \frac{y_1^{n-1}y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_0^{n-1}y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}$$

$$= \frac{y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{n-1}-y_1^{n-1}y_0^{n-1}y_1^{n-1}+y_1^{n-1}y_0^{n-1}y_2^{n-1}}{y_1^{n-1}y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_1^{n-1}y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{n-1}}$$

$$= \frac{y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{2(n-1)}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha)(\frac{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})-y_0^{n-1}(y_1^{n-1}-y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{2(n-1)}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha)(\frac{2y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_1^{n-1}-y_0^{n-1}y_1^{n-1}}{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{2(n-1)}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}y_2^{n-1}y_0^{2(n-1)}-y_0^{n-1}y_2^{n-1}y_1^{2(n-1)}} \times \frac{y_2^{n-1}(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}{2y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_1^{n-1}-y_0^{n-1}y_1^{n-1}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{(n-1)}-y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}(y_0^{(n-1)}-y_1^{(n-1)})} \times \frac{(y_0^{n-1}-y_1^{n-1})}{2y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_1^{n-1}-y_0^{n-1}y_1^{n-1}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{(n-1)}-y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}} \times \frac{1}{2y_2^{n-1}y_0^{n-1}-y_2^{n-1}y_1^{n-1}-y_0^{n-1}y_1^{n-1}}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2^{n-1}y_0^{(n-1)} - y_1^{2(n-1)}}{y_1^{n-1}(2y_2^{n-1}y_0^{n-1} - y_2^{n-1}y_1^{n-1} - y_0^{n-1}y_1^{n-1})}$$

ومنها نجد ان

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_1^{2(n-1)} - y_2^{n-1}y_0^{n-1}}{y_1^{n-1}(y_0^{n-1}y_1^{n-1} - 2y_2^{n-1}y_0^{n-1} + y_2^{n-1}y_1^{n-1})} \quad (16)$$

يمكن استخدام (15) و (16) لكتابة (12) بدلالة قيم مختارة لـ y_0, y_1, y_2 . من المفيد ان نلاحظ ان القيمة الحدية لـ y

هي:

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_1^{n-1}(y_0^{n-1}y_1^{n-1} - 2y_2^{n-1}y_0^{n-1} + y_2^{n-1}y_1^{n-1})}{y_1^{2(n-1)} - y_2^{n-1}y_0^{n-1}} \quad (17)$$

المصادر:

[1] J.D. Murray" Mathematical Biology I. An Introduction"Third Edition
2001 Superstock.

[2] J.D. Murray" Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical
Applications" Third Edition 2003 J.D. Murray

.

[3] M.R. Spiegel, "Applied Differential Equations", Prentice Hall Inc. Englewood
Cliff, New Jersey, Third Edition(1981).