

Ministry of Higher Education And Scientific Research
University of Al-Qadisiyah
College of Computer Science & Information Technology
Department of Mathematics



Application of Ruscheweyh Derivative of a class of Meromorphic Multivalent Functions

A research

Submitted to the Department of Mathematics / College of
Computer Science & Information Technology / Al-
Qadisiyah University as partial fulfillment the
requirement of the degree of Bachelor of Science in
Mathematics

By:

Muntadhr Khalid Mohamed Ali

Supervised

Dr.Waggas Galib Atshan

2017



لَا يَنْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا
الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ جُودًا بِمَا تَعْمَلُونَ خَيْرٌ ﴿١١﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة - ١١

ادراء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون

صدق الله العظيم

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلى بطاعتك .. ولا تطيب
اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا
برؤيتك

" الله جل جلاله "

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة و نور
العالمين

" سيدنا محمد صلى الله عليه واله و سلم "

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار ..
إلى

من أحمل أسمه بكل افتخار .. أرجو من الله أن يمد في عمرك لتري ثماراً
قد حان

قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوماً أهتدي بها اليوم وفي الغد
وإلى الأبد ..

والذي العزيز

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني ..

إلى بسملة الحياة و سر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

إلى الإخوة والأخوات، إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى
بنابيع

الصدق الصافي إلى من معهم سعدت، و برقتهم في دروب الحياة الحلوة

والحزينة سرت إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير

إلى من عرفت كيف أجدهم و علموني أن لا أضيعهم

أصدقائي

إلى التي طالما تمنيت أن اجتاز هذا الدرب معها

إلى نفسي ...

شكر وتقدير

"كم عالما .. فإن لم تستطع فهم متعلما ، فإن لم تستطع فأحب العلماء ، فإن لم

تستطع فلا تبغضهم"

لابد لي وأنا أخطر خطراتي الأخيرة في الحياة الجامعية من ورقة اعود إلى أعوام قضيتها في
رحاب الجامعة مع أساتذتي الكرام الذين قدموا الكثير باذلي بذلك جهودا كبيرة في بناء
جيل الف لتبث الأمة من جديد...

وقبل أن أمضي أقدم أسامي آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس
رسالة في الحياة...

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة...
إلى جميع أساتذتنا الأفاضل.....

وأخص بالتقدير والشكر: استاذي وقديوتي الدكتور وقاصي غالب عطشاه

الذي أقول له بشراكة قول رسول الله صلى الله عليه وسلم:

"إيا الحق في البحر ، والظير في السماء ، ليصلوه على معلم الناس الخير"

كما أنني أترجعه له بخاص الشكر إلى من علمني التأؤل والمضي إلى الأمام: إلى من رعايني
وحافظ علي، إلى من وقف إلى جانبي عندما ضللت الطريق.....

وكذلك أشكر كل من ساعد على إتمام هذا البحث وقدم لي العود ومد لي يد المساعدة
وزودني بالمعلومات اللازمة لإتمامه .. زملائي & زميلاتي

إلى من زرعوا التأؤل في دربي وقدموا لي المساعدات والتسهيلات والأشكر والمعلومات،
ربما = و يشعروا بدورهم بذلك فلهم مني كل الشكر

Abstract

In the present paper , we have studies and discussed application of Ruscheweyh derivative of class of Meromorphic multivalent functions. We obtain some interesting properties . Like coefficient bounds . Convex linear combination, growth an distortion bounds and radii of starlikeness and convexity.

Key words:*Meromorphic Multivalent function , Ruscheweyh derivative , Distortion bounds , Convex linear combination , Radius of Starlikeness.*

2015 Mathematics Subject Classification:30C45

المحتويات Contents

Subject	Page no.
1.Introduction	1
2.Coefficient Bounds	10
3.Distortion Theorems	17
4.Radii of starlikeness and convexity	22
5.References	26

1-Introduction:

Let ϕ^* denote the class of functions of the form:

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k, (a_k \geq 0 = [1, 2, \dots]). \quad (1)$$

Which are analytic and meromorphic multivalent in the punctured unit disk

$$U^* = \{z: z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\} = U/[0]$$

The Hadamard product (or convolution) of two function :

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k, g(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} b_k z^k,$$

In ϕ^* is defined by

$$(f * g)(z) = f(z) * g(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} b_k a_k z^k \quad (2)$$

Definition (1) [7,8]: The Ruscheweyh derivative of f of order $(\lambda + p - 1)$ denoted by $D^{\lambda+p-1} f$, is defined as following :

If

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k, \text{ then}$$

$$D^{\lambda+p-1}f(z) = \frac{1}{z^p(1-z)^{p+\lambda}} \cdot f(z)$$

$$= z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} a_k z^k, \lambda > -p, z \in U^*$$

In particular , when $p = 1$, we have

$$D^{\lambda}f(z) = z^{-p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k D_k(\lambda) z^k, \lambda > -1, z \in U^*$$

Definition (2): Let $f \in \phi^*$ be given by (1).

The class $\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$ is defined

$$\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda) =$$

$$\left\{ f \in \phi^*: \left| \frac{\eta z^2 (D^{\lambda+p-1}f(z))'' + \eta(p+1)z(D^{\lambda+p-1}f(z))'}{z^2 (D^{\lambda+p-1}f(z))'' + (\eta-\alpha)z(D^{\lambda+p-1}f(z))'} \right| <$$

$$\beta, (0 \leq \beta < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \eta < 1, \lambda > -p, p, k \in$$

$$N = \{1, 2, \dots\}, z \in U^* \} \quad (3)$$

Cho et al.[4]. Atshan and Buti [3]. Altintas et al[1]. Liu[6] Joshi et al.[5] and Aouf and Shammaky[2]. Studied meromorphic univalent and multivalent functions for another classes.

2-Coefficient Bounds

First in the following theorem . We obtain a necessary and sufficient condition for f to be in the class $\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$.

Theorem (1) : Let $f \in \phi^*$. Then $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$,if and only if

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} k(\eta(k + p) - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha)))a_k \leq \beta p(p + \alpha + (1 - \eta)) \quad (4)$$

For $(0 \leq \beta < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \eta < 1, \lambda > -p,$
 $p+1 \leq k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, z \in U^*$

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k \geq p} \frac{\beta p((p + \alpha) + (1 - \eta))}{k(\eta(k + p) - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha))) \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)]}} z^k,$$

Proof : Assume that the inequality (4) holds true and let $|z| = 1$ we have

$$\begin{aligned}
& \left| \eta z^2 \left(D^{\lambda+p-1} f(z) \right)'' + \eta(p+1)z \left(D^{\lambda+p-1} f(z) \right)' \right| \\
& \quad - \beta \left| z^2 \left(D^{\lambda+p-1} f(z) \right)'' + (\eta-\alpha)z \left(D^{\lambda+p-1} f(z) \right)' \right| \\
& = \left| \eta p(p+1)z^{-p} \right. \\
& \quad + \eta \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]!} a_k k(k-1)z^k \\
& \quad - \eta p(p+1)z^{-p} \\
& \quad \left. + \eta(p+1) \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]!} a_k z^k \right| \\
& - \beta p \left| (p+1)z^{-p} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]!} a_k k(k \right. \\
& \quad \left. - 1)z^k - \eta p z^{-p} \right. \\
& \quad + \eta \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]!} a_k k z^k + \alpha p z^{-p} \\
& \quad \left. - \alpha \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]!} a_k k z^k \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=p}^{\infty} \eta k(k+p) \frac{\Gamma(\lambda+p+k+1)}{\Gamma(\lambda+p)(k+1)!} a_k z^k \right| \\
&\quad - \beta \left| p((p+\alpha) + (1-\eta)) z^{-p} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=p}^{\infty} k((1+\alpha) - (k+\eta)) \frac{\Gamma(\lambda+p+k+1)}{\Gamma(\lambda+p)(k+1)!} a_k z^k \right| \\
&\leq \sum_{k=p}^{\infty} \eta k(k+p) \frac{\Gamma(\lambda+p+k+1)}{\Gamma(\lambda+p)(k+1)!} a_k - \beta p((p+\alpha) \\
&\quad + (1-\eta)) \\
&\quad - \sum_{k=p}^{\infty} \beta k((k+\eta) - (1+\alpha)) \frac{\Gamma(\lambda+p+k+1)}{\Gamma(\lambda+p)(k+1)!} a_k \\
&= \sum_{k=p}^{\infty} k(\eta(k+p) - \beta((k+\eta) - (1 \\
&\quad - \alpha) \frac{\Gamma(\lambda+p+k+1)}{\Gamma(\lambda+p)(k+1)!} a_k \\
&\quad - \beta p((p+\alpha) + (1-\eta))) \leq 0,
\end{aligned}$$

By hypothesis , hence by maximum modulus principle :
 $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$ conversely , suppose that $f \in$
 $\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$.

Hence

$$\left| \frac{\eta z^2 (D^{\lambda+p-1} f(z))'' + \eta(p+1)z(D^{\lambda+p-1} f(z))'}{z^2 (D^{\lambda+p-1} f(z))'' + (\eta - \alpha)z(D^{\lambda+p-1} f(z))'} \right|$$

$$= \left| \frac{\sum_{k=p}^{\infty} \eta k(k+p) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]} a_k z^k}{p((p+\alpha)+(1-\eta))z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} k((k+\eta)-(1+\alpha)) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]} a_k z^k} \right| < \beta .$$

Since $|Re(z)| \leq |z|$ for all z , we have

$$Re \left\{ \frac{\sum_{k=p}^{\infty} \eta k(k+p) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]} a_k z^k}{p((p+\alpha)+(1-\eta))z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} k((k+\eta)-(1+\alpha)) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]} a_k z^k} \right\}$$

$$< \beta$$

We can choose the value of z on the real axis, so that $z(D^{\lambda+p-1} f(z))'$ is real, let $z \rightarrow 1^-$. Through real values, we get the inequality (4). Sharpness of the result following by setting

$$f(z) = z^{-p} + \frac{\beta p((p+\alpha)+(1-\eta))}{\frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)]} k(\eta(k+p) - \beta((k+\eta)-(1+\alpha)))} z^k, k \geq$$

$$p \quad (5)$$

The proof is complete.

Corollary (1): Let $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$ then

$$a_k \leq \frac{\beta p ((p + \alpha) + (1 - \eta))}{\frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} k(\eta(k + p) - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha)))},$$

Where

$$(0 \leq \beta < 1, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \eta < 1, \lambda > -p, p, k \in N \\ = \{1, 2, \dots\}, z \in U^*)$$

Theorem (2): The class $\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$ is closed under convex liner combination.

Proof :- Let the function

$$f_j(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} a_k, (a_{k,j} \geq 0, j \\ = 1, 2, p \in N) \quad (6)$$

Be in the class $\varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$ it sufficient is show that the function $h(z)$ defined by

$$h(z) = (1 - \epsilon)f_1(z) + \epsilon f_2(z) \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda), (0 \leq \epsilon \\ \leq 1)$$

is since

$$h(z) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} [(1-\epsilon)_{k,1} + \epsilon a_{k,2}] z^k, \quad (0 \leq \epsilon \leq 1) \quad (7)$$

then making use theorem(1),we see that

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} k(\eta(k + p) - (\beta((k + \eta) \\ & \quad - (1 + \alpha))[(1-\epsilon)a_{k,1} + \epsilon a_k \\ & = (1-\epsilon) \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} k(\eta(k + p) \\ & \quad - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha))a_{k,1} + \\ & \quad \epsilon \sum_{k=p}^{\infty} \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)!]} k[\eta(k + p) \\ & \quad - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha))]a_{k,2} \\ & \leq (1-\epsilon)\beta p((p + 1) - (\eta - \alpha)) + \\ & \quad \epsilon \beta p(p + 1) - (\eta - \alpha)) \\ & = \beta p(p + 1) - (\eta - \alpha)) \end{aligned}$$

Hence

$$h(z) \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda).$$

The proof is complete.

3-Distortion theorems

In the following theorem , we obtain growth an distortion bounds for the function $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$

Theorem(3):if the function $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$

then for $0 < |z| < 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|z|^p} - \frac{\beta p((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z^p| \\ & \leq |f(z)| \leq \frac{1}{|z|^p} \\ & + \frac{\beta p((p + \alpha) - (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z|^p \quad (8) \end{aligned}$$

The result is sharp and attained for

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \frac{\beta p((p + \alpha) - (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))] \frac{[(\lambda + 2p + 1)]}{[(\lambda + p)(p + 1)!]}} z^p \quad (9)$$

Proof : Let $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$, then

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k \right| \leq |z|^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k |z|^k \\ &\leq |z|^{-p} + |z|^p \sum_{k=p}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

By theorem (1) , we have

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k \leq \frac{\beta p((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))] \frac{[(\lambda + 2p + 1)]}{[(\lambda + p)(p + 1)!]}}$$

Thus

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^p} + \frac{\beta p((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z|^p$$

Similarly , we have

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \frac{1}{|z|^p} - \sum_{k=p}^{\infty} a_k |z|^k \geq |z|^{-p} - |z|^p \sum_{k=p}^{\infty} a_k \\ &\geq \frac{1}{|z|^p} - \frac{\beta p((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z|^p \end{aligned}$$

Hence result (8) follows . The proof is complete.

Theorem (4): If the function $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$, then for $0 < |z| < 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{p}{|z|^{p+1}} - \frac{\beta p^2((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))] \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!}} |z|^{p-1} \\ & \leq |f'(z)| \\ & \leq \frac{p}{|z|^{p+1}} \\ & + \frac{\beta p^2((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))] \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!}} |z|^{p-1} \end{aligned}$$

The result is sharp and attained for the function given by (9).

Proof :- Let $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$, then

$$\begin{aligned}
 |f'(z)| &\leq \frac{p}{|z|^{p+1}} + \sum_{k=p}^{\infty} k a_k |z|^{k-1} \\
 &\leq \frac{p}{|z|^{p+1}} + |z|^{p-1} \sum_{k=p}^{\infty} p a_k \\
 &\leq \frac{p}{|z|^{p+1}} + \frac{\beta p^2 ((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z|^{p-1}
 \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned}
 |f'(z)| &\geq \frac{p}{|z|^{p+1}} - \sum_{k=p}^{\infty} k a_k |z|^{k-1} \\
 &\geq \frac{p}{|z|^{p+1}} - |z|^{p-1} \sum_{k=p}^{\infty} p a_k
 \end{aligned}$$

$$\frac{p}{|z|^{p+1}} - \frac{\beta p^2 ((p + \alpha) + (1 - \eta))}{p[2p\eta - \beta((p + \eta) - (1 + \alpha))]} \frac{\Gamma(\lambda + 2p + 1)}{\Gamma(\lambda + p)(p + 1)!} |z|^{p-1}$$

The proof is complete.

4-Radii of starlikeness and convexity

In the following theorem we obtain radii of starlike and convexity.

Theorem (5): Let $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$, then f is meromorphically multivalent starlike of order δ , $(0 \leq \delta < p)$. In the disk $|z| < r_1$, where

$$r_1(\beta, \alpha, \eta, \lambda, \delta) = \inf_k \left\{ \frac{((p-\delta)k(\eta(k+p)-\beta((k+\eta)-(1+\alpha)))^{\frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)!]}}}{(k+2p-\delta)\beta p((p+\alpha)+(1-\eta))} \right\}^{\frac{1}{k+p}} \quad (11)$$

Proof:- It is sufficient to show that

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} + p \right| \leq p - \delta, \quad (0 \leq p < \delta) \quad (12)$$

For $|z| < r_1(\beta, \alpha, \eta, \lambda, \delta)$, we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} + p \right| &= \left| \frac{zf'(z) + pf(z)}{f(z)} \right| \\ &= \left| \frac{-pz^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} k a_k z^k + pz^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} p a_k z^k}{z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\sum_{k=p}^{\infty} (k+p) a_k z^k}{z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k} \right| \leq \frac{\sum_{k=p}^{\infty} (k+p) a_k |z|^{k+p}}{1 - \sum_{k=p}^{\infty} a_k |z|^{k+p}}$$

The last expression above is bounded by $p - \delta$ if

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{k + 2p - \delta}{p - \delta} a_k |z|^{k+p} \leq 1 \quad (13)$$

In view of (12), it follows that (13) is true if

$$\begin{aligned} & \frac{k + 2p - \delta}{p - \delta} |z|^{k+p} \\ & \leq \frac{k(\eta(k+p) - \beta((k+\eta) - (1+\alpha))) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)!]}}{\beta p((p+\alpha) + (1-\eta))} \end{aligned}$$

Or

$$|z| \leq \left\{ \frac{(p-\delta)k(\eta(k+p) - \beta((k+\eta) - (1+\alpha))) \frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)!]}}{(k+2p-\delta)\beta p((p+\alpha) + (1-\eta))} \right\}^{\frac{1}{k+p}} \quad (14)$$

Theorem (5) follows easily from (14).

Theorem (6): Let $f \in \varepsilon_p(\beta, \alpha, \eta, \lambda)$, then f is meromorphically multivalent convex of order δ ,

$0 \leq \delta < p$, in the disk $|z| < r_2$ where

$$r_2(\beta, \alpha, \eta, \lambda, \delta)$$

$$= \inf_k \left\{ \frac{p(p-\delta)k(\eta(k+p)-\beta((k+\eta)-(1+\alpha))^{\frac{[(\lambda+p+k+1)]}{[(\lambda+p)(k+1)!]}}}{k(k+2p-\delta)\beta p((p+\alpha)+(1-\eta))} \right\}^{\frac{1}{k+p}} \quad (15)$$

Proof:- It is sufficient to show that

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + p \right| \leq p - \delta, \quad (0 \leq p < \delta) \quad (16)$$

For $|z| < r_2(\beta, \alpha, \eta, \lambda, \delta)$, we have

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + p \right| &= \left| \frac{zf''(z) + (1+p)f'(z)}{f'(z)} \right| = \\ &= \left| \frac{p(p+1)z^{-(p+1)} + \sum_{k=p}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-1} - p(p+1)z^{-(p+1)} + \sum_{k=p}^{\infty} k(p+1)a_k z^{k-1}}{-pz^{-(p+1)} + \sum_{k=p}^{\infty} ka_k z^{k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{k=p}^{\infty} k(k+p)a_k z^{k-1}}{-pz^{-(p+1)} + \sum_{k=p}^{\infty} ka_k z^{k-1}} \right| \leq \frac{\sum_{k=p}^{\infty} k(k+p)a_k |z|^{k+p}}{p - \sum_{k=p}^{\infty} k a_k |z|^{k+p}} \end{aligned}$$

The last expression above is bounded by $p - \delta$ if

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{k(k+2p-\delta)}{p(p-\delta)} a_k |z|^{k+p} \leq 1 \quad (17)$$

In view (16), it follows that (17) is true if

$$\begin{aligned} & \frac{k + 2p - \delta}{p - \delta} |z|^{k+p} \\ & \leq \frac{k(\eta(k + p) - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha))) \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)]}}{\beta p(p + \alpha) + (1 - \lambda))} \end{aligned}$$

Or

$$|z| \leq \left\{ \frac{p(p - \delta)k(\eta(k + p) - \beta((k + \eta) - (1 + \alpha))) \frac{[(\lambda + p + k + 1)]}{[(\lambda + p)(k + 1)]}}{(k + 2p - \delta)\beta p((p + \alpha) - (1 - \eta))} \right\}^{\frac{1}{k+p}} \quad (18)$$

Theorem (6) follows easily from (18).

References

[1] O.Altintas , H,limak and H.M Sirvastava , *A family of meromorphically univalent with positive Coefficientpanamer math. J*, 5(1),1995,75-81.

[2]M.K.Aouf and A.E Shamaky , *A Certain subclass of meromorphically P-valent convex functions with negative coefficients , G.Appl , 1(2),(2005),123-143.*

[3]W.G.Atshan and R.H. Buti ,*Fractional calculus of univalent function with negative coefficient defined by Hdamard Product with Rafid operator ,European Journal of pure of appl.Math. 4(2)(2011),162-173.*

[4]N.E.Cho , H. leeandOwa .*A class of meromorphic univalent functions with positive cofficients , Koebe Math.,4,(1987),43-50.*

[5] S.B. Joshi, S.R. Kulkarni and H.M. Srivastava. certain class of meromorphic functions with positive coefficients. *K. Math., Anal. Appl.*, 193(1995), (1-4).

[6] J.L. Liu, properties of some families of meromorphic p -valent functions, *Math. Japonica* .52(2000), 425-439.

[7] Ruschewyh, New criteria for univalent functions *proc, Amer. Math. Soc.*, 51(1957), 109-116.

[8] H.M. Srivastava and S. Owa (eds), *Current topics in analytic functions theory*, world scientific publishing company, Singapore, (1992).

المستخلص

في هذا البحث الحالي، درسنا وناقشنا تطبيق مرشايويرة للصنف من الدوال متعددة النكافؤ الميروورفية حيث حصلنا على بعض الخواص المهمة، مثل حدود المعامل التركيب الخطي المحدب، حدود الشويو والنمو، انصاف اقطار النجمة المحدب.

Key words: Meromorphic Multivalent function ,
Ruscheweyh derivative , Distortion bounds ,
Convex linear combination , Radius of
Starlikeness.

2015 Mathematics Subject Classification:30C45



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

تطبيق مشتقة رشاوية لصنف من الدوال متعددة التكافؤ
المير ومورفية

بحث مقدم الى قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا
المعلومات جامعة القادسية كأستكمال جزئي لمتطلبات نيل درجة
بكالوريوس علوم في الرياضيات

من قبل الطالب:

منتظر خالد محمد علي

بإشراف د. وقاص غالب عطشان

١٤٣٨ هـ

٢٠١٧