



جمهورية العراق / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الفارسية / كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات  
قسم الرياضيات

# مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ

بحرث تقديم به الطالب  
غزوان فرحان شاكر

الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات / قسم الرياضيات  
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

إشرافه

م. فراس حسين مجهول

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا

الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيِّ الْعَظِيمِ

سورة المجادلة الآية ( ١١ )

## الاهداء

الهي لا يطيب الليل الا بشكرك ... ولا يطيب النها الا بطاعتك ... ولا تطيب  
اللحظات الا بذكرك ... ولا تطيب الاخرة الا بعفوك ... ولا تطيب الجنة الا  
برؤيتك

"الله جل جلاله"

الى من ادى السالة وادى الامانة ... ونصح الامة ... الى نبي الرحمة ونور العالمين  
"سيدنا محمد صلى الله عليه وآله"

الى من كلفه الله بالهيبة والوقار ... الى من علمني العطاء بدون انتظار ... الى من احمل  
اسمه بكل اقتحار ... امرجو من الله ان يمد في عمرك لترى ثمار قد حان قطفها بعد  
طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الابد  
"والدي العزيز"

الى ملاكي في الحياة ... الى معنى الحب والى معنى الحنان والتفاني ... والى بسمه  
الحياة وسر الوجود الى من كان دعائها سر نجاحي، وحنانها بلسم جراحي  
"والدتي الحبيبة"

الى الشموع التي ذابت في كبرياء لتنير كل خطوة في دربنا لتدلل كل عائق امامنا  
فكانوا رسلا للعلم والاخلاق

"اساتذتي"

## الشكر والتقدير

كن عالماً، فان لم تستطع فكن متعلماً، فان لم تستطع فاحب العلماء، فان لم تستطع فلا تبغضهم

لا بد لي وانا اخطو خطواتي الاخيرة في الحياة الجامعية من وقفة اعود الى اعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع اساتذتي الكرام الذين قدموا الكثير باذلين بذلك جهوداً كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الامة من جديد . . .

وقبل ان امضي اقدم اسمى ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة في الحياة . . . الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة . . . الى جميع اساتذتي الافاضل وخص بالتقدير والشكر استاذتي الفاضلة

م . فراس حسين مجهول

وكذلك اشكر كل من ساعد على اتمام هذا البحث وقد لي العون ومد لي يد المساعدة ونرودني بالمعلومات الانزمة لاتمامه . . . نرملائي ونرميلائي

الى من نرمرعوا التفاؤل في دربي وقدموا لي المساعدات والتسهيلات والافكار والمعلومات ربما دون ان يشعروا بدورهم بذلك . . . فلهم مني

كل الشكر

# المحتويات

| الصفحة | الموضوع                                   |
|--------|-------------------------------------------|
| ١      | المقدمة                                   |
| ٦-٢    | الفصل الأول                               |
|        | مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ               |
| ١١-٧   | الفصل الثاني                              |
|        | تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات الخطية    |
| ١٤-١٢  | الفصل الثالث                              |
|        | تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات التفاضلية |
| ١٩-١٥  | الفصل الرابع                              |
|        | تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات التكاملية |
| ٢٠     | المصادر                                   |

## المقدمة

ان اهمية مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ تكمن في انها تشكل مصدراً لمبرهنات الوجود والوحدانية في العديد من فروع التحليل، وبهذا المعنى فان هذه المبرهنة توضح الى حد بعيد القوة الموحدة لاساليب التحليل الدالي والفائدة المترتبة على مبرهنات النقطة الثابتة في التحليل.

وتعتبر نظرية النقطة الثابتة لبناخ اداة هامة في الفضاءات المترية، فانها تتضمن وجود وحدانية نقطة ثابتة من بعض الخرائط الذاتية في الفضاءات المترية، وتوفير طريقة بناء للحصول على تلك النقطة الثابتة، سميت هذه النظرية بعد ستيفان بناخ (Stefan Banach, 1892-1945).

في الفصل الاول درسنا النقطة الثابتة للدالة وبرهنا مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ.

في الفصل الثاني درسنا تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات الخطية ولاسيما في طرق التكرير المتعلقة بحل المعادلات الجبرية والخطية.

وفي الفصل الثالث اخذنا تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات التفاضلية الاعتيادية وبرهنا مبرهنة بيكاردو في وجود ووحدانية الحل واخيراً تطبيق معادلة بناخ على المعادلات التكاملية.

## الفصل الاول

### ١-١ مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ

النقطة الثابتة لتطبيق  $T: X \rightarrow X$  لمجموعة  $X$  في نفسها هي النقطة  $x$  من  $X$  تكون صورتها وفق التطبيق النقطة  $x$  ذاتها (بمعنى ان  $x$  "تبقى ثابتة" وفق  $T$ )، أي ان

$$Tx = x$$

الامر الذي يعني ان الصورة  $Tx$  تتطابق والعنصر  $x$

وعلى سبيل المثال، فلا يوجد للانسجام نقاط ثابتة، اما دوران المستوى فله نقطة ثابتة وحيدة (هي مركز الدوران)، واما التطبيق  $x \rightarrow x^2$  للمجموعة  $R$  في نفسها فله نقطتان ثابتتان (٠ و ١)، واما الاسقاط  $\xi_1 \rightarrow (\xi_1, \xi_2) \perp R^2$  على المحور  $\xi_1$  فله عدد غير منته من النقاط الثابتة (هي نقاط المحور  $\xi_1$  جميعها).

ان مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ، والتي سندرجها بعد قليل، هي مبرهنة حول وجود وحدانية نقاط ثابتة لتطبيقات معينة، وهي، فضلاً عن ذلك. تمدنا بالاجراءات اللازمة للحصول على تقريبات افضل للنقطة الثابتة (أي حل المسألة العملية). يدعى هذا الاجراء تكريراً ويعرف بانه الطريقة التي تتم بان نختار عنصراً كيفياً  $x_0$  في مجموعة معطاة، ونحسب بالتدريج متتالية  $x_0, x_1, x_2, \dots$  من علاقة بالشكل

$$x_{n+1} = Tx_n$$

اي اننا نختار عنصراً كيفياً  $x_0$ ، ونعين على التوالي العناصر  $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1$ ،

ان الاجراءات التكريرية تستعمل في كل فرع تقريباً من فروع الرياضيات التطبيقية، كما ان براهين التقارب وتقديرات الخطأ تتم على الاغلب باستعمال مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ (او مبرهنة اعقد في النقطة الثابتة). وتعطي مبرهنة بناخ الشروط الكافية لوجود (وحدانية) نقطة ثابتة لصاف من التطبيقات تسمى تقليصات، نعرفها على النحو التالي.

## ٢-١ تعريف التقليل

ليكن  $X = (X, d)$  فضاء مئري. يدعى التطبيق  $T: X \rightarrow X$  تقليلاً على  $X$  اذا وجد عدد حقيقي موجب  $\alpha$  واصغر من ١ بحيث انه اذا كان  $x, y$  عنصرين من  $X$  فان

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (\alpha < 1) \quad (1)$$

ويعني هذا هندسياً ان لاي نقطتين  $x, y$  صورتين اقرب احدهما الى الاخرى من قرب النقطتين  $x, y$  من بعضهما، وبعبارة ادق، فان النسبة  $d(Tx, Ty)/d(x, y)$  لا يمكن ان تتجاوز عدداً ثابتاً  $\alpha$  اصغر من ١.

## ٣-١ مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ (مبرهنة التقليل)

ليكن  $X = (X, d)$  فضاء مئرياً، حيث  $X \neq \emptyset$ . فاذا كان  $X$  تاماً وكان  $T: X \rightarrow X$  تقليلاً على  $X$ ، فانه يوجد لـ  $T$  نقطة ثابتة واحدة بالضبط.

**البرهان:**

سننشئ متتالية  $(x_n)$  ونبين بانها متتالية كوشي، الامر الذي يعني انها متقاربة نظراً لكون  $X$  فضاء تام. وبعدئذ نبرهن بان نهايتها  $x$  نقطة ثابتة لـ  $T$  وانه لا يوجد لـ  $T$  نقاط ثابتة اخرى. امام فكرة البرهان فهي كمال يلي:

نختار أي عنصر  $x_0$  من  $X$ ، ونعرف المتتالية التكريرية  $x_n$  على النحو التالي:

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, \quad x_n = T^n x_0, \dots \quad (2)$$

من الواضح ان هذه متتالية صورة  $x_0$  وفق الاستعمال المتكرر لـ  $T$ . سنبين ان  $x_n$  هي متتالية كوشي. لدينا استناداً الى (١) و(٢) التالي:

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

$$\leq \alpha d(x_m, x_{m-1})$$

$$= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0) \quad (3)$$

وبالتالي فاننا نجد استناداً متباينة المثلث والى الدستور الذي يعطي مجموع الحدود الاولى من متسلسلة هندسية انه اذا كان  $n > m$  فان.

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_{m+1}, x_m) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1})d(x_0, x_1)$$

$$= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

وبما ان  $0 < \alpha < 1$ ، فاننا نجد في البسط ان  $1 - \alpha^{n-m} < 1$ ، ويكون بالتالي

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (n > m) \quad (4)$$

ولما كان  $0 < \alpha < 1$  وكان  $d(x_0, x_1)$  عددا ثابتاً، فمن الممكن جعل الطرف الايمن من المتباينة السابقة صغيراً بقدر ما نشاء لدى أخذ  $m$  كبيراً بقدر كاف (وأخذ  $n > m$ ). وبالتالي فان  $(x_m)$  هي متتالية كوشي. وبما أن  $X$  تام، فان  $(x_m)$  متقاربة، وليكن مثلاً  $x_m \rightarrow x$ . سنبين الان أن هذه النهاية  $x$  هي نقطة ثابتة للتطبيق  $T$ .

يترتب على متباينة المثلث وعلى (١) أن

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

وبما أنه يمكن جعل المجموع الوارد في السطر الثاني أصغر من أي عدد موجب  $\varepsilon$  معطى سلفاً، لان  $x_m \rightarrow x$ ، فاننا نستنتج أن  $d(x, Tx) = 0$ ، الامر الذي يترتب عليه أن  $x = Tx$  استناداً الى (م٢) من البند ١-١. لذا فان  $x$  نقطة ثابتة لـ  $T$ .

ان  $x$  هي النقطة الثابتة الوحيدة للتطبيق  $T$ ، ذلك انه يترتب على  $Tx = x$  و  $T\tilde{x} = \tilde{x}$  استناداً الى (١) أن

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

وهذا يقتضي ان يكون  $d(x, \tilde{x}) = 0$  نظراً لان  $\alpha < 1$ . وبالتالي فان  $x = \tilde{x}$  استناداً الى (م٢)، وبذا يكتمل اثبات المبرهنة.

#### ٤-١ نتيجة (التكرير، حدا الخطأ)

إذا روعيت شروط المبرهنة ٢-١-١ فإن المتتالية التكريرية (٢)، بفرض  $x_0$  عنصراً اختيارياً من  $X$ ، تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة  $x \in T$ . أما تقدير الخطأ فهما التقدير السابق

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (5)$$

والتقدير اللاحق

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m) \quad (6)$$

البرهان:

ان المتباينة (٥) تنتج من (٤) بجعل  $(n \rightarrow \infty)$ . لننتقل الان الى استنتاج (٦). اذا اخذنا  $m = 1$  واستعضنا عن  $y_0 \rightarrow x_0$  وعن  $y_1 \rightarrow x_1$  فاننا نجد انطلاقاً من (٥) ان

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

فاذا وضعنا  $y_0 = x_{m-1}$ ، فاننا نجد  $y_1 = Ty_0 = x_m$  ونحصل على (٦).

ان حد الخطأ السابق (٥) يمكن ان يستعمل في بداية حساب تقدير عدد الخطوات الضرورية للحصول على دقة معطاة. اما (٦) فيمكن ان يستعمل في المراحل المتوسطة او في نهاية الحساب، ودقته تساوي على الاقل دقة (٥)، وقد تكون افضل.

ان هذا الوضع من وجهة نظر الرياضيات التطبيقية لا يزال غير مرض تماماً، ذلك انه كثيراً ما يحدث ان يكون التطبيق  $T$  تقليصاً ليس على الفضاء  $X$  بأكمله، وانما على مجموعة جزئية  $Y$  من  $X$ . بيد انه اذا كانت  $Y$  مغلقة، فهي تامة وبالتالي يوجد للـ  $T$  نقطة ثابتة  $x$  في  $Y$ ، كما ان  $x_m \rightarrow x$  كما في السابق، شريطة فرض قيد مناسب على اختيار  $x_0$  بحيث تبقى الحدود  $x_m$  في  $Y$ . ونورد في هذا الصدد نتيجة نموذجية ومفيدة من الواجهة العلمية على النحو التالي:

## ٥-١ مبرهنة (التقليص على الكرة)

ليكن  $T$  تطبيقاً لفضاء مترى تام  $X = (X, d)$  في نفسه، لنفرض ان  $T$  تقليص على كرة مغلقة  $Y = \{x | d(x, x_0) \leq r\}$ ، أي ان  $T$  يحقق (١) ايأ كان  $x$  و  $y$  من  $Y$ . لنفترض فضلاً عن ذلك ان

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r \quad (7)$$

عندئذ تتقارب المتتالية التكريرية (٢) من نقطة  $x$  في  $Y$ . ان هذه هي نقطة ثابتة لـ  $T$  في  $T$ .

**البرهان:**

علينا فقط اثبات ان كل الحدود  $x_m$  والنقطة كذلك تقع في  $Y$ . اذا وضعنا  $m = 0$  و غيرنا  $n$  الى  $m$  واستعملنا (٧)، فاننا نجد ان

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r$$

لذا فان كل الحدود  $x_m$  واقعة في  $Y$ . كذلك فان  $x \in Y$  ذلك ان  $x_m \rightarrow x$  وان  $Y$  مغلقة. وهكذا فان صحة المبرهنة تترتب الآن من برهان مبرهنة بناخ ١-١-٢.

## الفصل الثاني

### ٢-١ تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات الخطية

لمبرهنة النقطة الثابتة لبناخ تطبيقات هامة في طرق التكرير المتعلقة بحل جمل المعادلات الجبرية الخطية. وهي تقدم شروطاً كافية لتقارب حدود الخطأ.

ولفهم الموضوع نعيد اولاً الى الذاكرة ان ثمة طرقاً مباشرة عدة لحل مثل هذه الجمل (وهذه الطرق تعطي الحل التام بعد القيام بعدد منته من العمليات الحسابية اذ كانت الدقة – طول الكلمة في الالة الحاسبة – غير محدود)، ومن الامثلة المألوفة طريقة الحذف لكوس.

بيد ان التكرير، او الطريقة غير المباشرة، قد يكون اكثر فعالية اذا كانت الجملة من نمط خاص، كأن تكون غير كثة، أي انها تتألف من عدد كبير من المعادلات الا ان عدد معاملاتها غير الصفريّة قليل. (ان مسائل الاهتزازات والنكبات وتقريبات الفضل للمعادلات التفاضلية الجزئية غالباً ما تقود الى جملة غير كثة).

وفضلاً عن ذلك فان الطرق المباشرة المعتادة تتطلب قرابة  $n^3/3$  من العمليات الحسابية ( $n$  = عدد المعادلات = عدد المجاهيل)، وقد تصبح اخطاء التدوير كبيرة جداً عندما نأخذ  $n$  قيمة كبيرة، في حين انه في التكرير فان الالخطاء الناشئة عن التدوير تتلاشى في نهاية المطاف. وفي الحقيقة فان طرق التكرير تستعمل غالباً لتحسين الحلول التي نجدها باستخدام الطرق المباشرة.

لتطبيق مبرهنة بناخ، فاننا نحتاج الى فضاء مترى تام وتطبيق تقليص عليه.

لنأخذ المجموعة  $X$  لجميع المرتبات  $n$  من الاعداد الحقيقية التي نكتبها بالشكل

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \quad z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

وهكذا لنعين على  $X$  متركا  $d$  معرفاً بالمساواة

$$d(x, z) = \max |\xi_1 - \zeta_1| \quad (1)$$

ان  $X = (X, d)$  تام، وهذا الامر يمكن اثباته بصورة مماثلة لما فعلناه في المثال ١-٥-١.

سنعرف على  $X$  التطبيق  $T: X \rightarrow X$  بالدستور

$$y = Tx = Cx + b \quad (2)$$

حيث  $C = (c_{ik})$  مصفوفة حقيقية مثبتة  $n \times n$ ، وحيث  $b$  متجه مثبت في  $X$ ، ان كل المتجهات هنا وحيثما وجدت في هذا البند هي متجهات عمودية، بسبب الاصطلاحات المألوفة في ضرب المصفوفات.

ما هي الشروط الواجب توفرها كي يكون  $T$  تقليصاً؟ اذا كتبنا (٢) بدلالة المركبات، فاننا نجد

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n C_{jk} \xi_k + \beta_j \quad j = 1, \dots, n$$

حيث  $b = (\beta_j)$ . فاذا وضعنا  $w = (w_j) = Tz$ ، فاننا نجد من (١) و(٢) ان

$$d(y, w) = d(Tx, Tz) = \max_j |\eta_j - w_j|$$

$$= \max_j \left| \sum_{k=1}^n c_{jk} (\xi_k - \zeta_k) \right|$$

$$\leq \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}|$$

$$= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}|$$

نرى انه يمكن كتابة هذا بالشكل  $d(y, w) \leq \alpha d(x, z)$ ، حيث

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^n |c_{jk}| \quad (3)$$

وهكذا فانه يترتب على مبرهنة بناخ ما يلي:

## ٢-٢ مبرهنة (المعادلات الخطية)

اذا كانت الجملة

$$x = Cx + b \quad (C = (c_{jk}) \text{ معطى}) \quad (4)$$

المؤلفة من  $n$  من المعادلات الخطية في  $n$  من المجاهيل  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (مركبات  $x$ ) تحقق الشرط

$$\sum_{k=1}^n |c_{jk}| < 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (5)$$

فلها حل واحد بالضبط  $x$ . يمكن الحصول على هذا الحل بايجاد نهاية المتتالية التكرارية

$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$  حيث  $x^{(0)}$  كيفي وحيث

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \quad m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

اما حدود الخطأ فهي ١ راجع (٣)

$$d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \quad (7)$$

ان (٥) شرط كاف للتقارب، وهو معيار مجموعة الاسطر ذلك انه يحوي مجاميع سطرية نجدها بجمع القيم المطلقة لعناصر سطر في  $C$ . واذا استعضنا عن (١) بمتارك اخرى، فاننا نجد شروطاً اخرى.

كيف تكون المبرهنة ١-٢-١ مرتبطة بالطرق المستعملة في التطبيقات العملية؟ ان الجملة المؤلفة من  $n$  من المعادلات والحاوية على  $n$  من المجاهيل تكتب عادة بالشكل

$$Ax = c \quad (8)$$

حيث  $A$  مصفوفة مربعة عدد اسطرها  $n$  والعديد من الطرق التكريرية في حل (٨) حيث  $\det A \neq 0$  تتم بان نكتب  $A = B - G$  حيث  $B$  مصفوفة غير شاذة مناسبة. عندئذ تغدو (٨) بالشكل.

$$Bx = Gx + c$$

وبالتالي نجد ان

$$x = B^{-1}(Gx + c)$$

وهذا يوحي بالتكرير (٦) حيث

$$C = B^{-1}G, \quad b = B^{-1}c \quad (9)$$

نوضه هذا بطريقتين معياريتين، هما طريقة جاكوبي في التكرير ذات الالهمية النظرية البالغة، وطريقة غوص – سيدل في طريقة التكرير المستعملة بصورة واسعة في الرياضيات التطبيقية.

## ٣-٢ تكرير جاكوبي

تعرف طريقة التكرير هذه كما يلي:

$$\xi^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left( \gamma_j \sum_{k=1, k \neq j}^n a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

حيث  $c = (\gamma_j)$  في (٨)، ونفترض ان  $a_{jj} \neq C$  عندما  $j = 1, \dots, n$  ويقترح هذا التكرير بحل المعادلة ذات الترتيب  $j$  في (٨) بالنسبة الى  $\xi_j$ . من السهل التحقق بان (١٠) يمكن كتابتها بالشكل (٦) حيث

$$C = -D^{-1}(A - D), \quad b = D^{-1}c \quad (11)$$

يفرض ان  $D = \text{diag}(a_{jj})$  هي المصفوفة القطرية التي عناصرها الصفرية هي عناصر القطر الرئيسي لـ  $A$ .

ان الشرط (٥) المطبق على  $C$  في (١١) كافى لتقارب تكرير جاكوبي. وبما ان  $C$  في (١١) بسيطة نسبياً، فانه يمكن التعبير عن (٥) مباشرة بدلالة عناصر  $A$ ، وتكون النتيجة هي معيار مجموع الاسطر لتكرير جاكوبي.

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

او

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}| < |a_{jj}| \quad j = 1, \dots, n \quad (12 *)$$

ويمكن القول ان هذا يبين ان التقارب يكون مضموناً اذا كانت العناصر في القطر الرئيسي لـ  $A$  كبيرة بقدر كاف.

نلاحظ بانه في تكرير جاكوبي، فقد تكون بعض المركبات لـ  $x^{(m+1)}$  متوفرة في لحظة معينة، الا انها لا تستعمل اثناء تقدم عملية حساب المركبات الباقية، أي ان جميع المركبات لتقريب جديد تقدم في آن واحد في نهاية الدورة التكريرية. ونعبر عن هذه الحقيقة بقولنا ان تكرير جاكوبي هو طريقة للتصحيات الآتية.

## ٢-٤ تكرير غوص – سيل

ان هذه الطريقة للتصحيات المتتابة، التي تستعمل فيها كل المركبات المعروفة اخيراً في كل لحظة. وتعرف الطريقة كما يلي:

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left( \gamma_j \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \quad (13)$$

ونحصل على مصفوفة من (١٣) بان نكتب

$$A = -L + D - U$$

حيث  $D$  هو كما عرفناه في تكرير جاكوبي، وحيث ان  $L$  و  $U$  مصفوفتان مثلثتان سفلى وعليا على الترتيب، عناصرهما في القطر الرئيسي اصفار جميعاً، وشارتا الناقص الوردتان امر اصطلاحي ومتفق عليه. لنتخيل الآن ان كل معدلة في (١٣) ضربت بـ  $a_{jj}$ . عندئذ يمكننا كتابة الجملة الناتجة بالشكل

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

او

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}$$

واذا ضربنا بـ  $(D - L)^{-1}$ ، فاننا نجد (٦) حيث

$$C = (D - L)^{-1}U, \quad b = (D - L)^{-1}c \quad (14)$$

ان الشرط (٥) المطبق على  $C$  في (١٤) كاف لتقارب تكرير كاوس – سيدل. ولما كانت  $C$  معقدة، فان المسئلة العملية الباقية تتلخص في ايجاد شروط ابسط كي تكون (٥) صالحة. ونذكر دون برهان ان (١٢) كاف.

## الفصل الثالث

### ٣-١ تطبيق مبرهنة بناخ على المعادلات التفاضلية

ان اهم تطبيقات مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ ترد في سياق فضاءات الدوال، وعندئذ تمدنا المبرهنة بمبرهنات في وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية.

لنأخذ معادلة تفاضلية عادية ظاهرة في المرتبة الاولى

$$x' = f(t, x) \quad \left( ' = \frac{d}{dt} \right) \quad (1a)$$

وتتألف مسألة القيمة الابتدائية لهذه المعادلة من المعادلة نفسها ومن الشرط الابتدائي

$$x(t_0 = x_0) \quad (1b)$$

حيث  $x_0$  و  $t_0$  عدنان حقيقيان معطيان.

سنستخدم مبرهنة بناخل لاثبات مبرهنة بيكار الشهيرة، التي على الرغم من كونها ليست الاقوى بين المبرهنات المماثلة المعروفة، الا انها تلعب دوراً حيوياً في نظرية المعادلات التفاضلية العادية. وفكرة المعالجة جد بسيطة، اذ اننا سنحول (١) الى معادلة تكاملية تعرف تطبيقات  $T$ ، وشروط المبرهنة ستقتضي ان يكون  $T$  تقليصاً بحيث تغدو نقطته الثابتة هي الحل لمسألتنا.

### ٣-٢ مبرهنة بيكار في الوجود والوحدانية (المعادلات التفاضلية العادية)

لتكن  $f$  دالة مستمرة على المستطيل

$$R = \{(t, x) | t - t_0 \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

وبالتالي فان  $f$  محدودة على  $R$  ولنفترض مثلاً ان

$$|f(t, x)| \leq c \quad \text{اذا كان } (t, x) \in R \quad (2)$$

نفترض ان  $f$  تحقق شرط ليبشتر على  $R$  بالنسبة للمتغير الثاني  $x$ ، أي انه يوجد عدد ثابت  $k$  (هو ثابت ليبشتر) بحث انه اذا كان  $(t, x)$  و  $(t, v)$  عنصرين من  $R$  فان

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v| \quad (3)$$

عندئذ يكون لمسألة القيمة الابتدائية (١) حل وحيد. وهذا الحل موجود على الفترة  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  حيث

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\} \quad (4)$$

في البرهان التقليدي يكون  $\beta < \min\{a, b/c\}$  وهذا افضل. ويمكن الحصول على هذا ايضاً بتعديل للبرهان الحالي (وذلك باستخدام مترك اعقد).

**البرهان:**

ليكن  $C(J)$  الفضاء المترى المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على الفترة  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  وحيث المترك  $d$  معرف بالمساواة

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

ان  $C(J)$  تام، الامر الذي نعرفه من ١-١-٥. ليكن  $\tilde{C}$  الفضاء المترى في  $C(J)$  التي تحقق الشرط

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta \quad (5)$$

من السهل ان نرى بان  $\tilde{C}$  مغلق في  $C(J)$  وبالتالي فان  $\tilde{C}$  تام استناداً الى ١-٤-٧.

وباجراء المكاملة ، نرى ان (١) يمكن ان يكتب بالشكل  $x = Tx$ ، حيث  $T: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$  معرف كما ياتي:

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (6)$$

وفعلاً فان  $T$  معرف ايا كان  $x$  من  $\tilde{C}$ ، ذلك ان  $c\beta < b$  استناداً الى (٤)، وبالتالي فاذا كان  $x \in \tilde{C}$ ، فان  $\tau \in J$  و  $(\tau, x(\tau)) \in R$  ويكون التكامل الوارد في (٦) موجوداً نظراً لكون  $f$  مستمرة على  $R$ . وكي نرى ان الصورة  $T$  وفق  $\tilde{C}$  هي نفسها، يمكن استعمال (٦) و (٢) وعندئذ نجد ان

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq c|t - t_0| \leq c\beta$$

سنبين ان  $T$  تقليص على  $\tilde{C}$  يترتب على شرط ليبشتز (٣) ان

$$|Tx(t) - Tv(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) - \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau)) d\tau \right|$$

$$\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k |x(\tau) - v(\tau)|$$

$$\leq k\beta d(x, v)$$

ولما كانت العبارة الاخيرة المستقلة عن  $t$ ، فمن الممكن اخذ القيمة الكبرى  $\max$  في الطرف الايسر فنجد ان

$$d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v) \quad \alpha = k\beta$$

نرى من (٤) ان  $\alpha = k\beta < 1$ ، وبالتالي فان  $T$  هو تقليص على  $\tilde{C}$  حقاً. وهكذا فان المبرهنة ٥-١-٢ تقتضي بانه يوجد لـ  $T$  نقطة ثابتة وحيدة  $x$  في  $\tilde{C}$ ، أي دالة مستمرة  $x$  على  $J$  تحقق المساواة  $x = Tx$ . وبوضع  $x(t)$  بدلا من  $Tx(t)$  في (٦) نجد ان

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (7)$$

ولما كان  $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، حيث  $f$  مستمرة، فمن الممكن اشتقاق (٧). لذا فان زوجية ولها مشتق وتحقق (١). وبالعكس، فكل حل لـ (١) يجب ان يحقق (٧)، وبذلك يكتمل البرهان.

وتقتضي مبرهنة بناخ ايضاً ان الحل  $x$  لـ (١) وهو نهاية المتتالية  $(x_0, x_1, \dots)$  التي نحصل عليها بتكرير بيكار

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad (8)$$

حيث  $n = 0, 1, \dots$ ، الا انه تجدر بنا الاشارة الى ان الفائدة العملية لهذه الطريقة في الحصول على تقريبات لحل (١) وحدود الخطأ المقابلة ذات فائدة محدودة بسبب المكاملات الواردة.

يمكن اثبات ان استمرار  $f$  كاف لوجود حل للمسألة (١)، ولكن ليس كافياً للوحدانية، وشرط لبيشترز كاف وليس لازماً.

## الفصل الرابع

### ٤-١ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التكاملية

سنفيد في الختام من مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ كمنهل لمبرهنة الوجود والوحدانية للمعادلات التكاملية. تسمى المعادلة التكاملية من النمط

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t) \quad (1)$$

معادلة فريدهولم من النوع الثاني\*. ان  $[a, b]$  هنا فترة معطاة، و  $x$  دالة على  $[a, b]$  وهي مجهولة. و  $\mu$  وسيط. ان النواة  $k$  للمعادلة هي دالة معرفة على المربع  $G = [a, b] \times [a, b]$  ، كما  $v$  هي دالة معطاة على  $[a, b]$ .

يمكن دراسة المعادلات التكاملية على فضاءات دوال مختلفة. وفي هذا الفصل، فاننا ندرس (١) على  $C[a, b]$ ، أي على فضاء الدوال المستمرة المعرفة على الفترة  $J = [a, b]$  حيث المترك  $d$  يعطى بالدستور

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| \quad (2)$$

\*\*\* ان ورد الحد  $x(t)$  يمكننا من التطبيق التكراري كما تبين المبرهنة ٤-٥-١ واذا لم تحو معادلة هذا الحد، فتكون على الشكل

$$\int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t)$$

ويقال عنها انها من النوع الاول. ومن المهم ان نلاحظ لدى تطبيقنا الحالي لمبرهنة باناخ ان  $C[a, b]$  و  $k$  مستمرتان على  $G$ . عندئذ تكون  $k$  دالة محدودة على  $G$ ، وليكن مثلاً

$$|k(t, \tau)| \leq c \quad \text{أيا كان } (t, \tau) \in G \quad (3)$$

من الواضح انه يمكن كتابة (١) بالشكل  $x = Tx$ ، حيث

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (4)$$

ان  $\nu$  و  $k$  مستمرتان، فان الدستور (٤) يحدد مؤثراً  $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ . سنفرض الان قيداً على  $\mu$  بحيث يغدو  $T$  تقليصاً. نستنتج من (٢) و (٤) ان

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau) [x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b k(t, \tau) |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\ &\leq |\mu| c \max_{\alpha \in J} |x(\alpha) - y(\alpha)| \int_a^b d\tau \\ &= |\mu| c d(x, y) (b - a) \end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذا بالشكل  $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ ، حيث

$$\alpha = |\mu| c (b - a)$$

نرى ان  $T$  يمكن ان يصبح تقليصاً ( $\alpha < 1$ ) اذا كان

$$|\mu| < \frac{1}{c(b-a)} \quad (5)$$

لذا فان مبرهنة النقطة الثابتة ٥-١-٢ تعطينا الان المبرهنة التالية:

#### ٤-٢ مبرهنة معادلة فريدهولم التكاملية

لتكن الدالتان  $k$  و  $\nu$  في (١) مستمرتين على  $J \times J$  و  $J = [a, b]$  على الترتيب، ولنفرض ان  $\mu$  يحقق (٥) حيث  $c$  معرفة في (٣). عندئذ يوجد لـ (١) حل وحيد  $x$  على  $J$ ، وحيث

$$x_{n-1}(t) = \nu(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \quad (6)$$

عندما  $n = 0, 1, \dots$ .

لننتقل الآن الى معادلة فولتيرا التكاملية

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t) \quad (7)$$

ان الفرق بين (١) و(٧) يكمن في ان الحد الاعلى للتكامل في (١) هو عدد ثابت  $b$ ، في حين انه في (٧) متغير. وهذا امر اساسي، فاننا دون فرض أي قيد على  $\mu$  نجد مبرهنة الوجود والوحداية التالية.

#### ٣-٤ مبرهنة معادلة فولتيرا التكاملية

لنفرض ان  $v$  الواردة في (٧) مستمرة على  $[a, b]$ ، وان النواة  $k$  مستمرة على المنطقة المثالية  $R$  في المستوى  $t\tau$  المحددة بالبيانات  $a \leq \tau \leq t$  و  $a \leq t \leq b$ . عندئذ يوجد لـ (٧) حل وحيد  $x$  على  $[a, b]$  ايا كان  $\mu$ .

**البرهان:**

نرى ان المعادلة (٧) يمكن ان تكتب الشكل  $x = Tx$  حيث  $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  معرف بالمساواة

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (8)$$

بما ان  $k$  مستمرة على  $R$  وان  $R$  مغلقة ومحدودة، فان  $k$  محدودة على  $R$ ، وليكن مثلاً

$$|k(t, \tau)| \leq c \quad \text{ايا كان } (t, \tau) \in R$$

وهكذا فاننا نجد استنادا الى (٢) انه ايا كان  $x$  و  $y$  من  $C[a, b]$  فان

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \\ &\leq |\mu| c d(x, y) \int_a^t d\tau \\ &= |\mu| c (t - a) d(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

يتبين بالاستقراء الرياضي ان

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y) \quad (10)$$

ان هذه المتباينة في الحالة  $m = 1$  ليست سوى (٩). فاذا افترضنا ان (١٠) صحيحة من اجل  $m$ ، فاننا نجد من (٨) ان

$$\begin{aligned} |T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau) [T^m x(\tau) - T^m y(\tau)] d\tau \right| \\ &\leq |\mu| c \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!} d\tau d(x, y) \\ &= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y) \end{aligned}$$

لذا فاننا نكون قد استنتجنا صحة (١٠) ايا كان  $m$  بتطبيق طريقة الاستقراء الرياضي.

وبالافادة من  $t - a \leq b - a$  في الطرف الايمن من (١٠)، ومن ثم بأخذ القيمة الاكبر  $\max$  في الطرف الايسر عندما تمسح  $t$  المجموعة  $J$ ، فاننا نستنتج من (١٠) ان

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x, y)$$

حيث

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

نلاحظ انه ايا كان  $\mu$  المثبت، وايا كان العدد  $m$  الكبير بقدر كاف، فان  $\alpha_m < 1$ . لذا فان  $T^m$  المقابل يكون تقليصا على  $C[a, b]$ .

#### ٤-٤ تمهيدية النقطة الثابتة

ليكن  $T: X \rightarrow X$  تطبيقاً مستمراً على فضاء مترى تام  $X = (X, d)$ ، ولنفرض ان  $T^m$  تقليص على  $X$ ، حيث  $m$  عدد صحيح موجب. عندئذ يوجد لـ  $T$  نقطة ثابتة وحيدة.

**البرهان:**

ان  $B = T^m$  هو فرضاً تقليصاً على  $X$  اي ان  $d(Bx, By) \leq \alpha d(x, y)$  ايا كان  $x, y$  من  $X$  وهناك  $\alpha < 1$  لذا فاننا نجد ايا كان  $x_0$  من  $X$  ان

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \leq \alpha d(B^{n-1} T x_0, B^{n-1} x_0) \quad (11)$$

$$\dots \leq \alpha^n d(Tx_0, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ان مبرهنة بناخ ٢-١-٥ تقتضي ان يوجد لـ  $B$  نقطة ثابتة وحيدة، سنرمز لها بـ  $x$  و  $B^n x_0 \rightarrow x$  وبما ان التطبيق  $T$  مستمر، فان هذا يقتضي ان يكون  $B^n T x_0 = T B^n x_0 \rightarrow T x$  لذا فاننا نجد وفق (ب) من ٢-٤-١ ان

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \rightarrow d(T x, x)$$

وبالتالي فان  $d(T x, x) = 0$  وفق (١١) ويبين هذا ان  $x$  نقطة ثابتة لـ  $T$  ولما كانت كل نقطة ثابتة لـ  $T$  ثابتة لـ  $B$  كذلك. فاننا نرى انه لا يمكن ان يوجد لـ  $T$  اكثر من نقطة ثابتة واحدة.

نلاحظ في الختام انه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا معادلة فريدهولم خاصة نواتها  $k$  صفرية في ذلك الجزء من المربع  $[a, b] \times [a, b]$  حيث يكون  $T > t$  وقد تكون  $k$  غير صفرية من القطر  $(T = t)$

## References

## المصادر

- [١] ايروين كريزك، ترجمة د. خضير حامد الاحمد المدخل الى التليل الدالي وتطبيقاته، جامعة دمشق، كلية العلوم، ١٩٨٥.
- [2] Andrzej Granas and James Dugundji, Fixed Point Theory (2003) Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-00173-5.
- [3] Kirk, William A.; Khamsi, Mohamed A. (2001). An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. John Wiley, New York. ISBN 978-0-471-41825-2.
- [4] Kreyszig, E. (1970), Introductory Mathematical Statistical. New York: Wiley.
- [5] Kreyszig, E. (1972), Advanced Engineering Mathematical 3<sup>rd</sup> ed. New York: Wiley.
- [6] Palais, R. "A simple proof of the Banach contraction principle." J. fixed point theory appl. 2 (2007), 221–223
- [7] Vasile I. Istratescu, Fixed Point Theory, An Introduction, D.Reidel, the Netherlands (1981). ISBN 90-277-1224-7 See chapter 7.
- [8] William A. Kirk and Brailey Sims, Handbook of Metric Fixed Point Theory (2001), Kluwer Academic, London ISBN 0-7923-7073-2.