



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم / علوم الرياضيات

مسالة شتورم- ليوفيل في القيم الذاتية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

عَبَّاسُ عَلِيَّ حَبِيب

إلى مجلس كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات - قسم علوم
الرياضيات - جامعة القادسية كجزء من متطلبات نيل شهادة
البركالوريوس في قسم علوم الرياضيات

بإشراف

الدكتور هشام رحمن محمد

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

((لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ
رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا
حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ
وَاعْفُ عَنَّا وَاعْفِرْ لَنَا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
الْكَافِرِينَ))

صدق الله العلي العظيم

البقرة (٢٨٦)

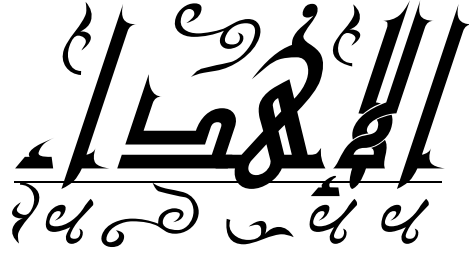
الشكر والتقدير

لأبد لنا ونحن نسير مسيرتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة تعود
إلى سنين قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا المحترمين الذين
قدموا لنا الكثير ساعين وباذلين جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لبعث
الأمة من جديد

وقبل إن نمضي نقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة
والاعتزاز إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ...
إلى الذين أمهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ...

إلى جميع أساتذتنا الأفاضل في كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا
المعلومات - قسم الرياضيات

واخص بالتقدير والشكر الدكتور هشام رحمن محمد .



لا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا يطيب الليل إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة
إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك (الله جل جلاله).

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح العالم إلى نبي الرحمة ونور
العالمين (سيدنا محمد صلى الله واله وسلم)

إلى من كلفه الله بالهبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى من
أحمل اسمه بكل افتخار أرجو من الله يمدد عمرك لتري ثمارا قد حان
قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك في ذهني اليوم وفي الغد والى الأبد
بها اهتدي (والدي العزيز)

إلى ملاكي في الحياة وسر وجودي والى سر ابتسامتي والى من علمتني معنى
الحب والحنان والرحمة (والدتي العزيزة)

إلى من أرى التفاؤل بعينيهم والسعادة فيهم والى شعلة الذكاء والنور إخواني
الأعزاء وجميع الأصدقاء.

إلى من شاركني وساعدني في تقديم البحث وبالأخص الدكتور هشام رحمن محمد

الفهرس

رقم الصفحة

- | | |
|----|-----------------------------------|
| 1 | 1- الملخص |
| 2 | (1-1) مقدمة |
| 3 | (2-1) طرح المسألة - شترم - ليوفيل |
| 5 | (3-1) مبرهنة وجود |
| 5 | (4-1) مبرهنة نشر |
| 6 | (5-1) تحويل بروخر |
| 7 | (6-1) خواص 4 |
| 11 | (7-1) مسألة القيم الذاتية |
| 13 | (8-1) مبرهنة |
| 14 | (9-1) نتائج مبرهنة الفل لشرم |
| 15 | (10-1) الاهتزاز |
| 16 | (11-1) مبرهنة السعة |

المختص

1-

أن الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إيجاد القيم الذاتية

والدوال الذاتية باستخدام مسألة شرورم - ليوفيل في

القيم الذاتية في الفترة المخلقة $[a, b]$ التي تتعلق

بوسيط حقيقي 2 ويكون الاهتمام في مسألة القيم الذاتية

على الحالات التي لا يكون فيها للمعادلة $R_1 u - R_2 u = 0$

حل وحيد . و نستفد منا في البحث من هنة الوجود

وتحويل برونر وفراص 3 ، وتوصلنا الى ان القيمة

الذاتية هي أي عدد 2 حيث يكون للمعادلة حل $u(x)$

غير الحل البديهي يسمى هذا الحل الدالة الذاتية

الموافقة للقيمة الذاتية 2 .

(١-١) المقدمة

إن الموضوع الرئيسي في هذا البحث هو نظرية الممارسات

التفاعلية الاعتيادية للقيم الذاتية

يفترض في قارئ هذا البحث أن يكون مطلعاً على مبادئ

التحليل الرياضي إضافة إلى المعلومات الأساسية في

مكاملة الممارسات التفاعلية الاعتيادية

ونلاحظ في دراسة الممارسات التفاعلية الخطية أنها تبالغ

دوالاً حتمية

إن تطبيقاتنا في هذا البحث منسجمة بالدرجة الأولى على

الممارسات الهامة في الفيزياء مثل معادلة بسل والاهتزاز

ومبرهنة النسبية وهذه الممارسات تخضع لها ظواهر فيزيائية
عديدة وهامة

وأخيراً أود أن أشير إلى أن هذا البحث هو محاولة

الأولى في الكتابة في موضوع القيم الذاتية في نظرية الممارسات

ولذلك فإني أكون شديداً الممتنان إلى أساتذتي الأعزاء

الذين يكرمون بتقديم ملاحظاتهم على ما جاء في هذا البحث

مسألة ستورم-ليوفيل في القيم الذاتية

(2-1) طرح المسألة : إن مسألة ستورم-ليوفيل في القيم الذاتية هي

$$R_1 u - R_2 u = 0 \quad L u + \lambda r(x) u = 0 \quad \text{في } J = [a, b] \quad \text{1-}$$

بفرض أن L : المؤثر التفاضلي الثابت

R_1 : مؤثر

R_2 : مؤثر

$$L u = (p(x) u')' + q(x) u \quad \text{2-}$$

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) \quad R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) \quad \text{3-}$$

فهي إذن مسألة قيم حدية متجانسة للمعادلة التفاضلية.

$$(p u')' + (q + \lambda r) u = 0 \quad \text{4-}$$

التي تتعلق بوسط حقيقي λ (إن جميع الحدود ذات قيم حقيقية)

ويجب الاهتمام في مسألة القيم الذاتية على الحالات التي لا يكون فيها للمعادلة (1)

حل وحيد، أي على الحالات التي يكون فيها بالافتقار إلى الحل البديهي $u \equiv 0$

هناك حل آخر $u(x) \neq 0$ ، إن هذا الأمر لا يتحقق لأجل الحقيقة لـ λ بل

لأجل قيم معينة لها تسمى القيم الذاتية للمسألة، والحقيقة الذاتية إذن هي

أي عدد λ بحيث يكون للمعادلة (1) محل $u(x)$ غير الحل البديهي، يسمى

هذا الحل الدالة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية λ ، وعليه إذا كانت

$u(x)$ دالة ذاتية فإن $u(x) \neq 0$ ، بفرض أن $c \neq 0$ ، دالة ذاتية أيضاً

وإذا وجدنا قيم λ ذاتية عددها الدوال الذاتية المستقلة خطياً p على الأكثر، فإننا نقول عن القيمة الذاتية أنها مضاعفة p مرة.

وعندما يكون $\lambda = 0$ تكون قيمة ذاتية بسيطة.
مثلاً: إذا كانت لدينا المسألة:

$$u'' + \lambda u = 0 \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

إذا كان $\lambda = 0$ (الحل العام $u = C_1 + C_2 u$) أو إذا كان

$$\lambda = -M^2 < 0 \quad \text{الحل العام } u = C_1 e^{Mt} + C_2 e^{-Mt}$$

البريحي

$$\text{أما إذا كان } \lambda = M^2 > 0 \text{ فإنه } u = C_1 \cos Mx + C_2 \sin Mx \text{ هو الحل العام}$$

وأن الشرط الحدودي تتحقق عندما يكون $\sin M\pi = 0$ هناك إذن عدد محدود من القيم الذاتية البسيطة:

$$\lambda_n = n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

وأن الدوال الذاتية المقابلة لها هي:

$$u_n(x) = \sin nx$$

وإذا كانت ψ دالة ذات مشتقة مستمرة في J (يمكن كذلك الاكتفاء بشرط أضعف من هذا الشرط) وكان $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ فإنه من الممكن نشر $\psi(x)$ في متسلسلة من الدوال الذاتية:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

وذلك لأننا لو حددنا $\psi(x)$ باعتبارها دالة فردية إلى الفترة

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

لا يمكن نشرها في متسلسلة فورييه في الفترة $-\pi \leq x \leq \pi$ وهذه

المتسلسلة لا تتوحد سوى الحدود الجيبية. إن هذا المثال يوفقنا إلى

مسألتين أساسيتين حول القيم الذاتية هما:

مسألة القيم الذاتية : ماهي الشروط التي ينبغي أن تتوفر لكي توجد

قيم ذاتية وكيف يوجد عدد غير منتهى من القيم الذاتية λ_n

مسألة النشر : ماهي الشروط التي يمكن نشر دالة كيفية في سلسلة دوال ذاتية

$$\psi(x) = \sum a_n u_n(x)$$

إن البرهنة التالية ستعطي جواباً على هذين السؤالين ضمن الفروض التالية التي نرمز لها بـ (SL)

$$(SL) \quad p(x) \in G^1(J) \text{ و } q(x), r(x) \in G^0(J), p(x) > 0, \\ x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \text{ و } r(x) > 0 \text{ في } J$$

(3-1) برهنة وجود : إذا تحققت الفروض (SL) فإن لمسألة القيم الذاتية (1) عدداً منتهياً من القيم الذاتية الحقيقية :

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \text{ عندما } n \rightarrow \infty$$

إن للدالة الذاتية $u_n(x)$ المواظفة للقيمة الذاتية λ_n ، n صفراً في الفترة المفتوحة (a, b) وأن بين كل صفريين u_n يوجد صفراً لـ u_{n+1}

(4-1) برهنة نشر : يمكن تنظيم الدوال الذاتية بحيث يكون

$$\int_a^b r(x) u_n^2(x) dx = 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

إن هذه الدوال تشكل عندئذ نظاماً متعامداً متظافراً

أي أنه يكونه

$$\int_a^b r(x) u_m(x) u_n(x) dx = 0 \quad \text{بحيث أن } m \neq n$$

نظرية المتكاملات م-12

وانه يمكن نشر كل دالة $\psi(x) \in G'(J)$ محققة الشروط الحدودية المتجانسة في متسلسلة متقاربة أطلاقاً وبأنظام من الدوال الذاتية :

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x)$$

ونسمى هذه المتسلسلة متسلسلة فورييه لـ ψ (بخصوص u_n) وان أمثلة فورييه c_n هي :

$$c_n = \int_a^b r(x) \psi(x) u_n(x) dx$$

وفيما يلي سنقدم أمثلة لها لنرى الجبرهتين ينسب اليه بروف.

(1-5) تحويل بروف : لنفرض دالتين $p(x)$, $\psi(x)$ على النحو :

$$u(x) = p(x) \sin \psi(x) \quad p(x) u'(x) = p(x) \cos \psi(x) \quad (5)$$

وبفرض أن $p(x) > 0$ نجد :

$$p(x) = [(u(x))^2 + (p(x) u'(x))^2]^{1/2}, \quad \psi(x) = \arctg \frac{u(x)}{p(x) u'(x)}$$

إن $p(x)$ معرفة بفرض النظر عن مضاعفة 2π . ولتحدد $\psi(x)$ نختار

قيمة $\psi(a)$ بحيث تحقق $-\pi < \psi(a) < \pi$ ثم نختار قيمة $\psi(a)$ بحيث

تكون هذه الدالة مستمرة ويكون لها بالتالي مشتق مستمر

من الدالة (4) والتحويل (5) نجد :

$$\psi' = \frac{1}{p} \cos^2 \psi + (r + \lambda r) \sin^2 \psi \quad (6)$$

$$P' = \left(\frac{1}{p} - q - 2r\right) P \cos \psi \sin \psi \quad (7)$$

والمعادلة (6) هي معادلة في ψ من الدرجة الأولى فإذا ما تمكنا من حلها عوضا في (7) وبالمعادلة فحصل على P

(1-6) خواص ψ . ليكن $u(x, \lambda)$ حلاً للمعادلة (4) بالقيم الابتدائية

$$u(a) = \sin x \quad P(a) u'(a) = \cos x \quad (8)$$

يفرض أن x ثابت وأن $0 < x \leq \pi$ إنه هذا الحل u

وفق تحويل بودفر دالة $\psi(x, \lambda) = \arctan \frac{u}{P u'}$ مستمرة أيضا في (x, λ)

ومتحققة للمعادلة التفاضلية (6) أو للمعادلة:

$$\psi' = \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + 2r\right) \sin^2 \psi \quad (9)$$

مع الشروط $\psi(a, \lambda) = x$ ويتبع هذا الحل بالخواص التالية:

$$(أ) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad a < x < b \quad \psi(x, \lambda) > 0 \quad \text{لأجل}$$

$$(ب) \quad \psi(b, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad \lambda \rightarrow -\infty$$

(ج) توجد ثوابت موجبة $0 < \lambda_0 < D$, δ بحيث يكون:

$$\delta \sqrt{\lambda} \leq \psi(b, \lambda) \leq D \sqrt{\lambda} \quad \lambda \geq \lambda_0$$

$$(د) \quad \text{يتبع عن } \psi(x_0, \lambda_0) = K\pi \text{ (بعض } K \in \mathbb{Z}) \text{ أن } \psi'(x_0, \lambda_0) > 0$$

وبعبارة أخرى أن المنحني $\psi(x, \lambda_0)$ لا يقطع في المستوى (x, λ) المستقيم

$y = k\pi$ مرة واحدة على الأكثر وذلك يكون من الأدنى نحو الأعلى.
وينتج بشكل خاص أنه $\psi(x, \lambda) > 0$ لأجل $a < x \leq b$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

لا ثبات (أ) نستنتج (و) بالمسبة لـ λ فنحصل على المعادلة
التفاضلية التالية في ψ : $\psi' = \psi$

$$\psi' = \psi \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r \right) \geq \sin \psi \cos \psi + r \sin^2 \psi$$

مع $\psi(a, \lambda) = 0$
إن المعادلة $y(x) = \psi(x, \lambda_0)$ تحقق معادلة تفاضلية خطية من الشكل:

$$y' = L(x)y + h(x) \quad y(a) = 0 \quad (10)$$

وبحسبها نجد

$$y(x) = \int_a^x e^{L(x)-L(t)} h(t) dt \quad L(x) = \int_a^x L(t) dt$$

ولكن استناداً إلى (د) نجد $h(x) = r(x) \sin^2 \psi(x, \lambda_0) > 0$

بالاستناد عدد منتهى من المواقع وعلى هذا فإن $y > 0$ لأجل $a < x \leq b$

لا ثبات (ب) نشهد للطرف الايمن من المعادلة التفاضلية (و) $f(x, w)$

ولنبعد عن دالة w تحقق:

$$w(a) > \kappa, w' > f(x, w)$$

ليكن $w(x)$ دالة خطية تحقق $w(a) = \pi - \varepsilon, w(b) = \varepsilon$ وبما أنه ε

عدد موجب صغير بحيث يكون $w(a) < \kappa$. عندئذ يكون $\sin^2 w \geq \sin^2 \varepsilon$

وبما أننا نستطيع أن نكتب $r(x) \geq r_0 > 0$ فإنه يكون لأجل قيم λ السالبة

$$f(x, w) \leq \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + \lambda r_0 \right) \sin^2 \varepsilon \rightarrow -\infty \quad \lambda \rightarrow -\infty$$

ولما كان w' ثابتاً فإن w تحقق لأجل $0 < \lambda \leq 1$ المتراجحة المذكورة
 $w' > f(x, w)$

نسمي هذه الدالة w دالة عليا. ان $\psi(x, \lambda) \leq w(x)$ مهما كانت x من J

لأثبت ذلك نلاحظ أن $\psi(a, \lambda) \leq w(a)$ وبما أن كلا من w, ψ مستمرة فإن هناك عدداً $\delta > 0$ بحيث يكون $\psi(x, \lambda) \leq w(x)$ لأجل $a \leq x \leq a + \delta$
 لنفرض مؤقتاً أن $\psi(x, \lambda) \leq w(x)$ ليست صحيحة مهما كانت x من J
 عندئذ يوجد قيمة أولى x_0 يكون عندها $w(x_0) < \psi(x_0, \lambda)$ في هذه الحالة يكون

$$\frac{\psi(x_0, \lambda) - \psi(x_0 - h, \lambda)}{h} > \frac{w(x_0) - w(x_0 - h)}{h}$$

ومنه يكون $w'(x_0) \leq \psi'(x_0, \lambda)$ وهذا يتناقض مع كون $w' > f(x, w)$

وهكذا نرى أن $\psi(x, \lambda) \leq w(x)$ وبشكل خاص $\psi(b, \lambda) \leq \varepsilon$
 ولذلك انتهت برهان (د)

لأثبت (ج) نلاحظ أنه بسبب كون r, p موجبتين كفاً فإنه لأجل قيم كبيرة لـ λ يكون :

$$A_0 + B_0 \lambda \sin^2 \psi \leq \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r) \sin^2 \psi \leq A + \lambda B \sin^2 \psi$$

نفرض أن A_0, B_0, A, B ثوابت موجبة مناسبة، وعلى هذا يكون

$$\frac{\psi'}{A + \lambda B \sin^2 \psi} \leq 1 \leq \frac{\psi'}{A_0 + B_0 \sin^2 \psi}$$

وبما كانت من (a) إلى (b) r بعد إجراء التعويض $\psi(x) = \psi$ ونحيث كتبنا $\psi(x)$ بدلاً من $\psi(x, \lambda)$ فإننا نجد :

$$\int_a^{\psi(b)} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \leq b - a \leq \int_a^{\psi(b)} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} \quad (11)$$

لكن k عدد طبيعي بحيث يكون $k\pi < \psi(b) < (k+1)\pi$ وإذا
 سألنا المتراجحة الأولى من π إلى $k\pi$ فقط فإننا نحصل على:

$$b - a \geq (k+1) \int_0^\pi \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \geq (k+1) \int_0^\pi \frac{ds}{A + \lambda B s^2} \geq \frac{\gamma(k+1)}{\sqrt{\lambda}}$$

بفرض أن γ ثابت موجب، وهكذا نجد:

$$\frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\lambda} (b-a) \geq \pi k - \pi \geq \psi(b) - 2\pi$$

ومنه ينتج $\sqrt{\lambda} \psi(b) \leq D$ لأجل قيم كبيرة لـ λ

وإذا سألنا المتراجحة الثانية في (11) من $(k+1)\pi$ فإننا نجد:

$$b - a \leq (k+1) \int_0^\pi \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} = 2(k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s}$$

وبما أن $\sin s \leq \frac{1}{2}$ فإننا نجد:

$$b - a \leq \frac{2(k+1)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \frac{dt}{A_0 + B_0 \frac{t^2}{\gamma}} = \frac{C(k+1)}{\sqrt{\lambda}}$$

ومنه ينتج $\psi(b) \leq D \sqrt{\lambda}$

النتائج (د) من المعادلة (9) مبالغة

$$\psi' = \frac{1}{p} + (q - \frac{1}{p} + \lambda r) \sin^2 \psi$$

بما أن $p > 0$ ينتج $\psi(x, \lambda) > 0$ إذا $a \leq x \leq b$

(1-7) مسألة القيم الذاتية : يمكن إعطاء شرط الحدي :

$$R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0$$

معنى هندسياً ، ان هذا الشرط يعني أن المتجهين $(p(a)u'(a), u(a))$ و (α_2, α_1) متعامدان ، ومن الواضح أن هناك عددًا واحدًا α يحقق

$$\alpha_1 \sin \alpha + \alpha_2 \cos \alpha = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

إن α هي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور x والمستقيم العمودي على الاتجاه

(α_2, α_1) والمار بنقطة الأصل ، وإذا كان $u(x, \lambda)$ حلاً لمسألة القيم الابتدائية

(4)، (8) بهذه القيمة α فإن $R_1 u = 0$ أيضاً ، كذلك كل حل لـ (4) مع $R_1 u = 0$ هو مضاعف لـ u

كذلك ان $R_2 u = 0$ عندما فقط تقع النقطة $(p(b)u'(b), u(b))$

على المستقيم المار بنقطة الأصل ، والعمودي على الاتجاه (p_2, p_1) وإذا عينا الزاوية β بحيث يكون :

$$\beta_1 \sin \beta + \beta_2 \cos \beta = 0 \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

فإنه ينتج ان الحل لمسألة القيم الابتدائية (4) و (8) الخاصة بـ $R_2 u = 0$

إذا وفقط ، إذا كان $\psi(b, \lambda) = \beta + n\pi$ ، بفرضه أن n عدد صحيح ،

وبما أن $\psi(b, \lambda)$ ، استناداً الى خواص ψ النقطة (أ)

هو دالة متزايدة تماماً لأجل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، وأن مجموعة قيم $\psi(b, \lambda)$

هي $(-\infty, \infty)$ ، فإن لكل $n \geq 0$ يوجد $\lambda_n = \lambda_n$ بحيث يكون :

$$\psi(b, \lambda_n) = \beta + n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

في حين لا يوجد $n < 0$ أي قيم لـ λ_n من هذه . إن الأعداد λ_n هي القيم الذاتية التي تبحث عنها كوابل الدوال .

$$U_n(X) = U(X, \lambda_n)$$

الدوال الذاتية المقابلة . وأستناد إلى (ج) من خواص ψ يكون :

$$\beta^2 \lambda_n \leq (\beta + n\pi)^2 \leq \beta^2 \lambda_n$$

يفتح من ذلك أن :

السلوك التقاربي : يوجد ثابتان موجبان C, G بحيث يكون :

$$C^2 \leq \lambda_n \leq G^2$$

لأجل القيم الكبيرة لـ n

بهذا نكون قد أثبتنا الجزء الأول من البرهنة الوجود واعتماداً

على (د) من خواص ψ ينتج أن لـ U_n في (a, b) موجفاً سلبياً تماماً .

ذلك أنه لكي يكون لـ U_n موجفاً سلبياً يلزم أن يكون $\psi(X, \lambda_n) = K\pi$

أو ، إذا فرضنا اختصاراً لـ $\psi(X, \lambda_n) = K\pi$ ، $\psi_n(X) = K\pi$ ولكن

$$n\pi \leq \psi_n(b) = n\pi + \beta \leq (n+1)\pi , \quad 0 \leq \psi_n(a) = \alpha \leq \pi$$

وأستناداً إلى (د) من خواص ψ نأخذ $\psi_n(X)$ بفرض أن $a < X < b$

التي $K\pi$ مرة واحدة تماماً لأجل n, m, K ودونها لا تأخذ

هذه القيمة لأجل قيم أخرى K من Z

وأما فيما يتعلق بأوضاع المواضع المفردة

(1-8) صيغة: لنكن فترة كيفية وليكن

$$0 < p(x) \in G^1(J), q(x) \in G^0(J), n, v \in G^k(J)^{(*)}$$

وليكن L المؤثر التفاضلي المحلي

نأخذ كاف $x_0, x_1 \in J$ موضعين مفردين لـ v متباينين (أي أن $v \neq 0$ في (x_0, x_1)) وإذا كان:

$$\frac{L u}{u} \leq \frac{L v}{v}$$

في نقط (x_0, x_1) حيث يكون $u(x) \neq 0$ فمما ننتج أن u لا يتغير إحداهما

$$u = c v \quad (أ)$$

(ب) لـ u موضع مفرد في (x_0, x_1) .

البرهان: إذا لم نضع الحالة (ب) فإن $u \neq 0, v \neq 0$ في $J_0 = (x_0, x_1)$

وشتابع هنا أن نفرض أن $u > 0, v > 0$ في J_0 فيكون:

$$w = u v' - v u' \quad \text{نفرض أن } w \leq 0 \quad (p w)'$$

$$w(x_0) \geq 0 \quad \text{لأن } w(x_0) = 0 \text{ و } v(x_0) \geq 0 \text{ و } v'(x_0) \geq 0 \text{ وأن } w(x_1) \leq 0$$

وعليه أن $p w$ متزايدة تماماً فإن $w(x) = 0$ إذن

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{1}{u^2} w \rightarrow \frac{u}{v} = \text{const}$$

وهذه الحالة (أ)

$G^k(J)(X)$ هي مجموعة جميع الدوال المعرفة على الفترة J ولها مشتقات مستمرة من المرتبة k

(١ - ٩) نتائج ، مبرهنة الفعل لـ شتورم : ضمن الفروض العامة في المبرهنة السابقة (١ - ٨) وبشكل خاص بفرض أن فترة معينة نستنتج ما يلي :

(أ) إذا لم يكن u حلاً بدنياً لـ $Lu = 0$ فإن u هو مفرق بسيطة

منتهية أو محدودة ، وإذا كانت هذه المواضع محدودة فليس لها أقلية تجمع في $\mathbb{R}$.

لأنه إذا كان $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ فإنه ينتج عن مبرهنة وحدانية الحل أن

$u = 0$ ، وإذا كان $u(x_k) = 0$ (بفرض أن k عدد طبيعي) وكان $x_k \rightarrow \xi \in \mathbb{J}$

فإنه ينتج بمكاملة بسيطة أن $u(\xi) = u'(\xi) = 0$ وبالتالي فإنه $u = 0$

(ب) خاصية الفعل ، نقول عن المواضع المفرقة لـ u, v إنها تتبادل الفعل

فيما إذا كان بين كل موخرين لـ u موضع مفرق لـ v وبالعكس

(ج) مبرهنة الفعل لـ شتورم ، إذا كان u_1, u_2 حلين مستقلين خطياً

لـ $Lu = 0$ فإن المواضع المفرقة لهما تتبادل الفعل ،

ذلك لأنه إذا كان u حلاً لـ $Lu = (pu')' + qu = 0$ وكان v حلاً غير

بدنياً لـ

$$L_0 v = (p v')' + q_0 v = 0 \quad q_0(x) \leq q(x)$$

فإن بين كل موخرين مفرقين لـ v موضعاً مفرقياً لـ u .

ولنتبع الجزء الثاني من المبرهنة (١ - ٨) السابقة بعبارة

$$\frac{L_0 v}{v} = q - q_0 \geq 0 \quad \frac{L u}{u} = 0$$

(د) ينتج بشكل خاص عن (ج) أن بين كل موضعين مغريين لحل $u(x, \lambda)$

د (4) موضعاً مغرياً (λ', x') عندما $\lambda < \lambda'$ وبذلك يكون قد أثبتنا

الجزء الأخير من مبرهنة الوجود.

للمبرهنة مسألة لستورم ليوفيل في القيم الذاتية

(1-1) الاهتزاز: نفرض جميع الدوال ذات قيم حقيقية، نقول عند حل

$L u = 0$ أنه مهتز (أو له سلوك اهتزازي) في K

إذا كان L عدد محدود من المواقف المغرية في K وأستاداً إلى (أ) من نتائج مبرهنة لستورم (1-9):

أن هذه الحالة لا تحدث إلا إذا كان K غير مترابط، يقال في هذه الحالة أيضاً

أن المعادلة $L u = 0$ اهتزازية، ذلك لأنه استناداً إلى (ج) من مبرهنة الفصل لستورم (1-9).

فإن كل حل (غير بدوي) مهتز إذا كان أحد الحلول مهتزاً

أن مبرهنة الفصل لستورم ذات أهمية كبيرة في تحديد السلوك الاهتزازي

عملياً، فاستناداً إلى هذه المبرهنة يكون:

لأن u تكمن $L u = (p u') + q_0(x) u$ اهتزازية وكان $q(x) \geq q_0(x)$

فإن $L u = (p u') + q u = 0$ اهتزازية

وكيف يتحقق على ذلك نبين:

(ب) أن معادلة بنسل التفاضلية $u'' + (x^2 - x^2) u + x u' + x^2 u''$ اهتزازية

في $(0, \infty)$ مهما كان العدد الحقيقي λ .

ذلك لأننا إذا أدخلنا المتغير الجديد $x = \log s$ وكتبنا $w(s) = u(e^s)$

فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$Lw = w' + (e^{2s} - x^2)w = 0$$

يفرض أن الاشتقاق هو بالنسبة لـ s ، وإذا وضعنا:

$$L_0 v = v'' + v = 0$$

فإننا نحصل على استناداً إلى (أ) على المطلوب وذلك لأن $u(s) = q(s)e^{-s} - q(s)e^s$ حيث q دالة في الحالة التي يفرضها وبالاختصار على (ب) من مبرهنة الفصل لستورم (ع) إلى تحديد أفضل للمبدئين المعاملات المعرفية فيما إذا وضعنا:

$$L_0 v = v'' + v = 0$$

بمناسبة، كمسألة مقارنة

(1-1) مبرهنة السعة: لنكن فترة معينة وليكن $p, q \in G(x)$

يفرض أن $p > 0$ ، $q > 0$ ، فإذا كان n ولا غير بدية 1

$$L_0 u = (pu')' + qu = 0 \text{ وكان } x_k \leq x_{k+1} \text{ موضعين قوسيين لـ } u$$

فإن

$$|u(x_{k+1})| \geq |u(x_k)| \text{ حيثما إن كان } (pq)' \geq 0$$

أي أن السمات تنقص أو تزيد حسبما يكون pq متزايداً أو متناقصاً

واللافت أن النتيجة التالية:

$$y(x) = u^2 + \frac{1}{pq} (pu')^2$$

فإنه يمكن كتابتها:

$$y' = 2uu' - \frac{(pq)'}{(pq)^2} (pu')^2 + \frac{2pu'}{pq} (-qu) = -\frac{(pq)'}{(pq)^2} \left(\frac{u'}{q}\right)^2$$

فإذا كان $\sigma \geq (pq)'$ أو $\sigma \leq 0$ فإن لا متناقص أو متزايد. ولكن

$$u'(x_k) = 0 \text{ ، وبالتالي فإن } u(x_k) = u^2(x_k) \text{ و } u(x_{k+1}) = u^2(x_{k+1})$$

ومن ثم نصل على المطلوب

مثال : ان سمات دوال بسل في $(0, \infty)$ متناقصة وذلك عندما كان

العدد الحقيقي α وهذا ينتج من المعادلتين من الاقتران

$$(1) \text{ معادلة بسل التفاضلية } u'' + \alpha^2 u = 0 \text{ (عند } \alpha^2 \text{ اقترانية في } (0, \infty) \text{ مع } \alpha \text{ كذا العدد الحقيقي } \alpha \text{)}$$

بعد التحويل ، حيث يكون $p(s) = 1$ و $q(s) = e^{2s} \alpha^2$ ، انما فقط

عندما $|\alpha| > 1$ ، انما كان $|\alpha| < 1$ فلا توجد قيم تقوى

المصادر

- 1- سمير نوف في دروس في الرياضيات العالمية
ترجمة أ. و. قدسي، من. أحمد، دكتور في أحمد،
أ. كنغو وزارة التعليم العالي، سوريا، 1970
- 2- J. C. Burkill, The Theory of ordinary differential equations, Oliver and Boyd 1962
- 3- E. T. Copson: Theory of functions of a complex Variable, Oxford Press, 1962
- 4- L. M. Gelfand, G. E. Shilov, Generalized functions, Theory of differential equations, Academic Press 1962.
- 5- G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Cohen, 1956
- 6- E. L. Ince, ordinary differential equation, London 1927
- 7- M. Krashinsky, A. Kiselev, G. Makarenko, Problems and exercises in integral equation, Mir Pub 1971
- 8- A. Lichnerowicz, Lineare Algebra und Lineare Analysis Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956
- 9- W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Eine Einführung Springer Verlag 1976
- 10- C. R. Wylie, Differential equations, McGraw Hill Company 1979