

جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة القادسية

كلية علوم الحاسوب و الرياضيات

قسم الرياضيات الطبية



حول ديناميكية نمو المجتمعات المتقطعة

بحث تخرج

مقدم الى كلية علوم الحاسوب والرياضيات / قسم الرياضيات الطبية
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات الطبية

من قبل الطالبة

شهد ردام جيثوم الشباني

باشراف

أ.م.د. حيدر عيال مطر

م.د. احسان جبار كاظم

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

❖ لا يكلف الله نفسا الا وسعها لها ما كسبت و عليها ما
 اكتسبت ربنا لا تؤاخذنا ان نسينا او اخطأنا ربنا ولا تحمل
 علينا أصرا كما حملته على الذين من قبلنا ربنا ولا تحملنا ما لا
 طاقة له لنا به واعف عنا واغفر لنا وارحمنا أنت مولانا فانصرنا
 على القوم الكافرين ❖

صدق الله العلي العظيم

الاهداء

الى ينبوع العلم المتدفق ونور الفكر المبدع الى الشمعة التي انارت

طريق الاجيال . . .

أستاذي الذي علمني مجرى الحنان ونبع المودة ابي الغالي . . .

الى رمز الحنان واشراقة الامل أُمي الحنونة . . .

الى جميع زملائي الافاضل أهدي بحشي هذا . . .

الباحثة

الشكر والتقدير

اسجد لله سبحانه وتعالى على توفيقى في أكمال متطلبات البحث فقد
استمدت منه العون وكان لنا خير معين فنعم المولى ونعم المحصير
وبعد . . .

انى اتوجه بجزيل شكري وصادق عرفاني وعظيم امتناني الى اساتذتي في كلية
علوم الحاسوب والرياضيات قسم الرياضيات الطبية لما ابدوه من جهود مضية
في تدريسي وتبصيري ومشوره وتوجيهي

الى جميع الجهود التي بذلت في اتمام بحثي هذا مع جزيل الشكر والامتنان

المستخلص

درسنا في هذا البحث ديناميكية نمو المجتمعات المتقطعة و الذي يعتبر من مواضيع الرياضيات الحيوية المهمة. حيث درسنا بعض المفاهيم الديناميكية المتعلقة بالنظم الديناميكية المتقطعة وبيننا كيفية تطبيقها في نمو المجتمعات.

مقدمة

ان نمو المجتمعات البشرية و الكائنات الحية بشكل عام من اهم مواضيع الرياضيات الحيوية

فلذلك عنينا في هذا البحث بدراسة ديناميكية المجتمعات المتقطعة.

يتكون هذا البحث من فصلين.

يتناول الفصل النظم الديناميكية المتقطعة و تكرارات الدوال و مساراتها ونقاطها الصامدة و

اما في الفصل الثاني فتناولنا دراسة ديناميكية المجتمعات المتقطعة واعطينا بعض الخواص

الخاصة بها .

المحتويات

.....	الاية
.....	الاهداء.....
.....	الشكر و التقدير
.....	المستخلص
.....	المقدمة
..... ١٨-١	الفصل الاول / النظم الديناميكية المتقطعة
..... ٢٥-١٩	الفصل الثاني / نماذج المجتمع المنقطع لنوع وحيد
..... ٢٦	المصادر

الفصل الأول

النظم الديناميكية المتقطعة

افترض إن f دالة وان x نقطة في مجالها. فان تكرارات x ، التي تحتوي

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

تشكل مسار x . إن أنواع المسارات الممكنة للقيم المختلفة للنقطة x و للدوال المختلفة تكون الأساس لدراسة الفوضى.

الفصل الأول مُكرّس لدراسة النقاط x التي بعض تكراراتها تكون x مرة أخرى. مثل هذه النقطة تسمى نقطة دورية. على سبيل المثال، إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ ، فيكون لدينا $f(0) = -1$ و $f(-1) = 0$ ، لذلك $f(f(0)) = 0$ و عليه 0 نقطة دورية للدالة f .

1.1 تكرارات الدوال Iteration of Functions

افترض إننا أدخلنا 0.5 في الحاسبة اليدوية ثم بدءنا بالضغط على الزر x^2 مرارا وتكرارا. ستعرض الحاسبة اليدوية الأعداد

$$0.5, 0.25, 0.0625, 0.003090625, 0.0000152858, \dots \quad (1)$$

واحد تلو الآخر. ماذا تعطينا الحاسبة اليدوية مع متابعة الأعداد تلك؟ إذا وضعنا

$$x_0 = 0.5 \text{ و } f(x) = x^2$$

فان المتتابعة في (1) تتضمن

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

تدعى تلك الأعداد تكرارات النقطة x_0 تحت تأثير الدالة f .

تعريف 1.1. لتكن f دالة و لتكن x_0 نقطة في مجالها. فان

$$f(x_0) = \text{التكرار الأول للنقطة } x_0 \text{ تحت تأثير الدالة } f$$

$f(f(x_0)) = \text{التكرار الثاني للنقطة } x_0 \text{ تحت تأثير الدالة } f.$

بشكل عام، إذا كان n اي عدد صحيح موجب، وان a_n التكرار الـ n للنقطة x_0 تحت تأثير الدالة f ، فيكون $f(a_n)$ التكرار الـ $(n + 1)$ للنقطة x_0 تحت تأثير الدالة f .

للسهولة سنتبنى الرموز الآتية:

$f^2(x_0)$ يرمز لـ $f(f(x_0))$ ، $f^3(x_0)$ يرمز لـ $f(f(f(x_0)))$

وبشكل عام،

$f^n(x_0)$ يرمز للتكرار النوني (التكرار الـ n) للنقطة x_0 تحت تأثير الدالة f .

سنسمي المتتابعة $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ التي تمثل تكرارات النقطة x_0 تحت تأثير الدالة f مسار (orbit) النقطة x_0 . في بعض الأحيان سنكتب x_n للدلالة على $f^n(x_0)$. في هذه الحالة ستمثل المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ مسار النقطة x_0 .

ملاحظة. خلال دراستنا سنأخذ بنظر الاعتبار إن تكرارات كل دالة قيد المناقشة تقع جميعها في مجال الدالة.

الآن سنوضح بعض التكرارات لعدد من الدوال.

NO.	$f(x)$	x	Orbit of x
1	$f(x) = x^2$	1	1,1,1,1, ...
2	$f(x) = x^2 - 1$	-1	-1,0,-1,0,-1, ...
3	$f(x) = x^2 + 1$	-2	-2, 5, 26, 677, 458330, ...
4	$f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$	0	0, 0.25, 0.3125,
5	$f(x) = 4x - 4x^2$	$\frac{1}{3}$	0,333 ..., 0.888, 0.395 ..., ...

كما تلاحظ، حتى مع الدوال التربيعية البسيطة، يبدو ان المسارات لها سلوك مختلف جدا.

في الحقيقة، مسار الـ 1 تحت تأثير الدالة $f(x) = x^2$ مسار ثابت 1.

مسار الـ 1- تحت تأثير الدالة $f(x) = x^2 - 1$ يتناوب بين -1 و 0.

على العكس، مسار الـ 2- تحت تأثير الدالة $f(x) = x^2 + 1$ غير مقيد، اما سلوك تكرار النقطتين 0 و $\frac{1}{3}$ في المثالين الاخيرين غير واضح.

سنبرهن في وقت لاحق إن تكرار الـ 0 تحت تأثير الدالة $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ يقترب من $\frac{1}{2}$ و تكرار $\frac{1}{3}$ تحت تأثير الدالة $f(x) = 4x - 4x^2$ ينشر نفسه على الفترة (0,1) بطريقة تبدو غير متوقعة.

بين العديد من الدوال التي يمكن لأحد أن يصف مساراتها هما دالتي الجيب و الجيب تمام. بالنسبة إلى دالة الجيب (بالقياس النصف قطري) ، إن مسار الـ 2 هو

$$2, 0.9092 \dots, \quad 0.7890 \dots, \quad 0.6516 \dots, \dots$$

بالاستمرار، نجد إن التكرار الـ 50 هو 0.2350... و التكرار الـ 100 هو 0.1692... مع تكرارات متعاقبة متناقصة. هذا يقودنا إلى تخمين إن $f^n(2)$ يقترب من 0 عندما تزداد n بدون حدود. في الاثناء يمكنك حساب تكرارات الـ 2 تحت تأثير دالة الجيب تمام $\cos x$ ، وتبين فيما اذا كان يمتلك غاية ممكنة.

1.2 النقاط الصامدة Fixed Points

النقطة التي تكراراتها هي النقطة نفسها تسمى نقطة صامدة. ان مفهوم النقطة الصامدة مهم جدا في دراسة ديناميكية الدوال.

تعريف 2.1. لتكن p نقطة في مجال الدالة f . تسمى النقطة p نقطة صامدة (fixed point) للدالة f اذا كان $f(p) = p$.

بيانياً، تكون نقطة p في مجال الدالة f اذا وفقط اذا كان بيان الدالة f يمس (او يقطع) المستقيم $y = x$ عند النقطة (p, p) (الشكل 1.4).

من الشكل 1.5 يمكن أن نخمن أن نقطة الأصل هي النقطة الوحيدة التي عندها منحنى $\sin x$ و المستقيم $y = x$ يمس احدهما الآخر. سنبرهن أن هذا صحيح. سنستخدم في الحل مبرهنة القيمة الوسطى (Mean Value Theorem) التي تنص على أن: إذا كانت f مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على (a, b) ، فتوجد c في (a, b) بحيث أن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{أو بشكل مكافئ} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

مثال 1.

لتكن $f(x) = \sin x$. بين أن 0 النقطة الصامدة الوحيدة للدالة f .

الحل.

لاحظ أولاً أن $f(x) \neq x$ إذا كان $|x| > 1$ ، لأن $|\sin x| \leq 1$ لكل x . الآن، إذا كان $0 < x \leq 1$ ، فإن مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى وجود z بين 0 و x بحيث أن

$$\sin x = \sin x - \sin 0 = f'(z)(x - 0) = x \cos z.$$

بما أن $0 < \cos z < 1$ لهذه النقطة z ، يتبع أن $0 < \sin x = x \cos z < x$.

إن حقيقة كون $f(-x) = -f(x)$ تؤدي إلى أن $f(x) \neq x$ لكل $x < 0$.

أخيراً، $\sin 0 = 0$ ، لذلك نستنتج أن 0 النقطة الصامدة الوحيدة للدالة f . ■

المبرهنة الأخيرة، ستكون مهمة جداً لنا. للسهولة سنكتب $f^n(x) \rightarrow p$ للدلالة على أن " $f^n(x)$ تقترب من p " (عندما تزداد n بدون حدود).

مبرهنة 1.3.

افترض أن f مستمرة عند p ولتكن x في مجال f . إذا كانت $f^n(x) \rightarrow p$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، فإن p نقطة صامدة للدالة f .

البرهان.

حسب الفرض، $f^n(x) \rightarrow p$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، لذلك $f^{n+1}(x) \rightarrow p$ بما إن $f^n(x) \rightarrow p$ ، فاستمرارية الدالة f عند p تؤدي إلى إن $f(f^n(x)) \rightarrow f(p)$ على أية حال $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ، لذلك بتعويض $f^{n+1}(x)$ بدلا عن $f(f^n(x))$ ، نجد إن $f^{n+1}(x) \rightarrow f(p)$ إن وحدانية الغاية للمتتابعة المعطاة تؤدي إلى إن $f(p) = p$. بالنتيجة تكون p نقطة صامدة للدالة f . ■

من حسابان التفاضل و التكامل نعلم إن المتتابعة المقيدة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ التي تكون متناقصة تتقارب إلى اصغر عدد z بحيث إن $x_n \leq z$ لكل n . نفس العبارة تتحقق بالنسبة للمتتابعة المقيدة المتناقصة، وعليه لأي متتابعة مقيدة و رتيبة (متزايدة أو متناقصة).

نتيجة 1.4

افترض إن f دالة مستمرة معرفة على فترة مغلقة. افترض ان $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة مقيدة و رتيبة. فتوجد نقطة صامدة p بحيث إن $f^n(x) \rightarrow p$ عندما $n \rightarrow \infty$.

البرهان.

حسب التعليق أعلاه، إن المتتابعة المقيدة و الرتيبة تكون متقاربة دائما. إذن النتيجة تتبع مباشرة من مبرهنة 1.3.

الآن سنستخدم نتيجة 1.4 لبرهان إن تكرارات أي عدد حقيقي تحت تأثير دالة الجيب تقترب من الصفر. (تم استنتاج هذه النتيجة بالتحليل البياني في بند 1.1).

مثال 2

لتكن $f(x) = \sin x$. بين إن تكرارات أي عدد حقيقي x يقترب من 0.

الحل.

ليكن $x \in \mathbb{R}$. لبيان إن المتتابعة $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ مقيدة، نلاحظ إن $-1 \leq \sin x \leq 1$ لكل عدد x . لذلك تقع المتتابعة في $[-1, 1]$ ، وعليه تكون مقيدة. الآن نلاحظ إن

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

لذلك إذا تمكنا من بيان أن المتتابعة تقترب إلى 0 لكل x في $[0,1]$ فهذا الشيء نفسه يحصل لكل x في $[-1,0]$ ، وعليه لكل x . لذلك نريد فقط أن نبين أن المتتابعة تقترب إلى x في $[0,1]$.

بما إن $f(0) = 0$ ، ليكن $0 < x \leq 1$. سنبين أن $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة متناقصة. كما في حل المثال 1، مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى وجود نقطة z بين 0 و x بحيث أن

$$\sin x < x \cos z < x$$

لذلك $0 < \sin x < x < 1$ عندما $0 < x \leq 1$ ، وهذا يعني أن

$$f(x) < x \text{ عندما } 0 < x \leq 1.$$

يتبع أنه لأي $n \geq 0$ ،

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = \sin f^n(x) < f^n(x)$$

نستنتج أن $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة متناقصة عندما $0 < x \leq 1$. بما إن المتتابعة مقيدة، نتيجة 1.4 تؤدي إلى أن المتتابعة متقاربة إلى نقطة صامدة والتي هي 0 حسب مثال 1. بالنتيجة تكون المتتابعة $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تقترب إلى 0 لكل x . ■

تزودنا مبرهنة 1.3 معلومات متعلقة بطريقة نيوتن-رافسون التي تم وصفها في البند 1.1. تذكر إن الطريقة تتضمن حساب المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ الناشئة بوضع x_0 كنقطة ابتدائية، وتعريف المتتابعة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

نفترض هنا إن $f'(x_n) \neq 0$ لكل n . في البند 1.1 اشرنا إلى أن المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة، وغايتها هي صفر الدالة f . الآن يمكننا أن ندعم هذا الزعم. ليكن

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

فان $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1) = g^2(x_0)$ و بصورة عامة، $g^n(x_0) = x_0$. وعليه
 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ هي متتابعة تكرارات النقطة x_0 تحت تأثير الدالة g . تخبرنا المبرهنة 1.3 انه إذا
كانت المتتابعة متقاربة، فإنها تقترب إلى نقطة صامدة z للدالة g . في هذه الحالة،

$$z = g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

لذلك، $\frac{f(z)}{f'(z)} = 0$ أو بشكل مكافئ $f(z) = 0$.

هذا يعني إن z صفر الدالة f .

النقاط الصامدة الجاذبة و النافرة Attracting and Repelling Fixed Points

بتطبيق التحليل البياني يمكننا إن نرى السلوك المتنوع لتكرارات النقاط المختلفة. في الحقيقة،
في الشكل 1.6(a) تكرار النقطة x يقترب من النقطة الصامدة p ، بينما في الشكل 1.6(b)
يذهب التكرار باتجاه ∞ . إن تكرار النقطة x في الشكل 1.6(c) يمتلك كل من تلك الحالتين
بالاعتماد على x . هذا يقودنا إلى التعريف الآتي.

تعريف 1.5.

لتكن p نقطة صامدة للدالة f .

(a) تسمى p نقطة صامدة جاذبة (attractor fixed point) للدالة f بشرط وجود فترة

$(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ تحتوي p بحيث انه إذا كانت

$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ فان $f^n(x) \rightarrow p$ عندما $n \rightarrow \infty$.

(مثل هذه النقطة تسمى أيضا مستقرة بشكل محاذي asymptotically stable).

(b) تسمى p نقطة صامدة نافرة (repelling fixed point) للدالة f بشرط وجود فترة

$(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ تحتوي p بحيث انه إذا كانت

$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ لكن $x \neq p$ فان $|f(x) - p| > |x - p|$.

يتبع من التعريف أعلاه إن النقطة الصامدة في الشكل 1.6(a) تكون جاذبة ، والنقطة الصامدة في

الشكل 1.6(b) نافرة. إن الشكل 1.6(c) يبين انه ليست كل نقطة صامدة تكون جاذبة أو نافرة،

حيث النقاط التي على اليسار النقطة p تنجذب الى p و النقاط التي على يمين النقطة p تنفر من p . توجد أنواع من النقاط الصامدة ليست جاذبة ولا نافرة.

لأكثر الدوال، ليس من السهل أن نبرهن من التعريف مباشرة إن نقطة صامدة معطاة p جاذبة (أو نافرة أو غير ذلك). على أية حال، إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند p ، فيوجد معيار مفيد سينص عليه ويبرهن في مبرهنة 1.6. سنحتاج في البرهان تطبيق بديهية الاستقراء الرياضي، التي عادة ما تسمى بقانون الاستقراء.

مبرهنة 1.6

افترض ان f قابلة للاشتقاق عند نقطة صامدة p .

- (a) اذا كان $|f'(p)| < 1$ ، فان p جاذبة.
- (b) اذا كان $|f'(p)| > 1$ ، فان p نافرة.
- (c) اذا كان $|f'(p)| = 1$ ، فان p يمكن أن تكون جاذبة او نافرة او غير ذلك.

يمكننا وضع مبرهنة 1.6 للاستخدام المباشر.

مثال 3

لتكن $\mu > 0$ ثابت، وليكن

$$f(x) = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

- (a) جد قيم μ التي عندها يكون 0 نقطة صامدة جاذبة.
- (b) جد قيم μ التي لا يوجد عندها نقطة صامدة غير صفرية.
- (c) جد قيم μ التي تكون عندها النقطة الصامدة غير الصفرية نقطة صامدة جاذبة.

الحل.

لاحظ انه تكون النقطة x نقطة صامدة للدالة f إذا كانت $x = \mu x - \mu x^2$ و عليه أما $x = 0$ أو $x = 1 - \frac{1}{\mu}$ ، والتي تؤدي إلى $x = 1 - \frac{1}{\mu}$ إذا كانت $0 < \mu \leq 1$ ، فيكون لدينا $0 \leq 1 - \frac{1}{\mu} \leq 1$ ، لذلك توجد نقطة صامدة وحيدة في الفترة $[0,1]$ ، ألا و هي 0. على العكس

من ذلك، إذا كان $\mu > 1$ ، فتوجد نقطتان صامدتان هما 0 و $1 - \frac{1}{\mu}$. الآن نريد أن نحدد أي نقطة صامدة تكون جاذبة وأي منها تكون نافرة. بما إن $f'(x) = \mu - 2\mu x$ ، يتبع إن

$$f'(0) = \mu \text{ و } f'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu$$

حسب مبرهنة 1.6 تكون 0 جاذبة إذا كان $0 < \mu < 1$ و تكون نافرة إذا كان $\mu > 1$. وكذلك تكون $1 - \frac{1}{\mu}$ جاذبة إذا كان $1 < \mu < 3$ وتكون نافرة إذا كان $\mu > 3$. أخيراً، يمكن أن نبين إن 0 تكون جاذبة إذا كان $\mu = 1$ (تمرين 15)، وأن $1 - \frac{1}{\mu}$ جاذبة إذا كان $\mu = 3$ (تمرين 16). ■

أحواض الجذب Basins of Attraction

إذا كانت p نقطة صامدة جاذبة لدالة f ، فإن جميع النقاط القريبة من p "تنجذب" باتجاه p ، بمعنى أنه يوجد تكرار يقترب إلى p . إن مجموعة كل النقاط التي تكراراتها تقترب من p تسمى حوض الجذب للنقطة p .

تعريف 1.7

افترض أن p نقطة صامدة للدالة f ، **حوض جذب basin of attraction** النقطة p يحتوي على كل النقاط x بحيث أن $f^n(x) \rightarrow p$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، ويرمز لها بـ B_p .

مثال 4

لتكن $f(x) = x^2$. جد حوض الجذب B_0 للنقطة الصامدة 0 .

الحل.

إذا كان $|x| < 1$ ، فإن $f^n(x) = x^{2^n} \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، وعليه $0 \in B_0$. على العكس، إذا كان $|x| \geq 1$ ، فإن $|f^n(x)| \geq 1$ ، لذلك $x \notin B_0$. وعليه

$$B_0 = \{x: |x| < 1\} = (-1, 1)$$

(يمكننا أيضاً التوصل إلى النتيجة نفسها باستخدام التحليل البياني).

ملاحظة

إذا كانت p نقطة صامدة نافرة فان $B_p = \{p\}$ ، فمثلا، إذا كانت $f(x) = 2x$ فان $B_0 = \{0\}$. من جانب آخر، إذا كانت $f(x) = \sin x$ فان $B_0 = \mathbb{R}$ (مجموعة كل الأعداد الحقيقية).

النقاط الصامدة النهائية Eventually Fixed Points

أخيرا نقدم مفهوم النقطة الصامدة النهائية، التي ستستخدم في الأمثلة القادمة.

تعريف 1.8

لتكن x نقطة في مجال الدالة f . فتسمى x نقطة صامدة نهائية eventually fixed point إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث تكون $f^n(x)$ نقطة صامدة للدالة f .

ملاحظة

تكون النقطة الصامدة نقطة صامدة نهائية . على أية حال ، إذا كانت $f(x) = \sin x$ فان $f(0) = 0$ و $f(\pi) = 0$ ، لذلك تكون النقطة $x = \pi$ نقطة صامدة نهائية وليست نقطة صامدة. من اجل إن لا يحصل التباس، عندما نشير إلى إن x نقطة صامدة نهائية، سنفترض بشكل عام أنها ليست نقطة صامدة.

مثال 5

لتكن T دالة معرفة على النحو

$$T = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بين إن $1/8$ نقطة صامدة نهائية.

الحل.

$$T\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}, \quad T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad T\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad T(1) = 0, \quad T(0) = 0$$

لذلك $\frac{1}{8}$ نقطة صامدة نهائية.

ملاحظات.

(1) إن الدالة T تسمى دالة الخيمة tent function، بسبب شكل بيانها (شكل 1.7). بين مثال 5 إن T تمتلك نقطة صامدة نهائية . يمكن أن نبين بطريقة مماثلة إن النقطة $x = k/2^n$ ، حيث أن k و n عدنان صحيحان موجبان و إن $0 < k/2^n \leq 1$ نقطة صامدة نهائية لدالة T (انظر تمرين 27). سنستخدم هذه النتيجة عندما ندرس T بتفصيل أكثر في البند 1.4.

(2) نشير إلى انه إذا كانت x نقطة صامدة نهائية للدالة f (بعض تكرارات x تكون كذلك نقطة صامدة p للدالة f)، فتكون x في حوض الجذب للنقطة p . على أية حال، العكس ليس صحيحا لان تكرارات النقاط يمكن أن تقترب إلى p بدون ان تكون p نقطة صامدة نهائية.

شكل 1.7

1.3 النقاط الدورية Periodic Points

إن مفهوم الدورية هو مفهوم مشترك في كل لغات العصر. فغالبا ما يهتم الإنسان بدراسة الظواهر التي تتكرر خلال فترة معينة من الزمن. فالظواهر الفلكية كحركة الأرض حول نفسها تتكرر كل 24 ساعة فتكون خلال دورتها هذه الليل و النهار ودوران الأرض حول الشمس كل 360 يوم تقريبا فتكون خلال دورتها هذه الفصول الأربعة وظهور مذنب هالي كل 76 سنة تقريبا وغيرها من الظواهر الفلكية. وكذلك الحركة الدورية للبندول هو أيضا مثال لظاهرة دورية.

إن مفهوم الدورية هو مرتكز الدراسة الديناميكية. وسندرس في هذا الفصل أهم خواص النقاط الدورية.

تعريف 1.9

لتكن $x_0 \in \text{Dom}(f)$. فنقول ان x_0 نقطة دورية (periodic point) للدالة f ذات دورة n اذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث ان

$$f^n(x_0) = x_0$$

(b) تكون النقاط $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ مختلفة.

إذا كانت x_0 نقطة دورية للدالة f ذات دورة n فان مسار x_0 الذي هو

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$$

يكون مسار دوري (periodic orbit) ويسمى مدار بدورة n (n -cycle).

ملاحظة 2.

حسب تعريف 1.9 تكون النقاط الصامدة نقاط دورية ذات دورة 1 . تسمى النقاط الدورية ذات دورة 1 نقاط صامدة (بخلاف ذلك تسمى نقاط دورية).

لتوضيح المدار بدورة 2 ، تأمل الدالة $h(x) = -x^3$. فان $\{-1, 1\}$ مدار بدورة 2 لان $h(-1) = 1$ وان $h(1) = -1$.

مثال 1

إن دالة الخيمة (tent function) T المعطاة على النحو

$$T(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بين إن المسار $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ مدار بدورة 3 للدالة T .

الحل.

$$T\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}, T\left(\frac{4}{7}\right) = 2 - 2\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}, T\left(\frac{6}{7}\right) = 2 - 2\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}$$

وهذا يبين إن $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ مدار بدورة 3 للدالة T .

ملاحظة 2.

إن دالة الخيمة T لا تمتلك مدار بدور 3 فقط وإنما تمتلك مدار بدورة n . إن هذا احد الأسباب الذي يعلل دراسة دالة الخيمة في الداينمك. سندرس دالة الخيمة بتمعن في البند 1.4.

ملاحظة 3.

بيانياً، يمثل المدار ذو دورة n بحلقة مغلقة (closed loop). الشكل 1.9(a) يبين المدار $\{-1, 1\}$ ذو الدورة 2 للدالة $f(x) = -x^3$ ، والشكل 1.9(b) يبين المدار ذو الدورة 3 لدالة الخيمة في المثال 1 أعلاه.

شكل 1.9

قضية 1.10

لتكن x, z نقطتين في مجال الدالة f . فيكون $\{x, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f إذا وفقط إذا كان $f(x) = z$ ، حيث أن x, z نقطتين صامدتين للدالة f^2 .
البرهان.

نفرض إن $\{x, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f . إذن $f(x) = z$ و $f(z) = x$ ، وعليه

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(z) = x$$

لذلك تكون x نقطة صامدة للدالة f^2 . بنفس الطريقة يمكن ان نبين ان z نقطة صامدة للدالة f^2 . وعليه إذا كان $\{x, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f ، فإن x, z نقطتين صامدتين للدالة f^2 .

بالعكس، إذا كانت x نقطة صامدة للدالة f^2 هذا يعني إنها ليست نقطة صامدة للدالة f ، فتوجد نقطة z تختلف عن x بحيث إن $\{x, z\}$ يكون مدار ذو دورة 2 للدالة f ، لذلك تكون x نقطة دورية بدورة 2 للدالة f .

نتيجة 1.11

يكون $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ مدار ذو دورة n للدالة f اذا وفقط إذا كانت x_k نقطة صامدة للدالة f لكل $k = 1, 2, \dots, n-1$.

على سبيل المثال، افترض إن $f(x) = x^2 - 1$ ، لذلك

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2$$

من الواضح إن 0 نقطة صامدة للدالة f^2 لكنها ليست نقطة صامدة للدالة f . وعليه يجب أن تكون هناك نقطة ولتكن z بحيث إن $\{0, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f . بما إن $f(0) = -1$ نستنتج ان $\{0, -1\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f .

النقاط الدورية الجاذبة Attracting Periodic Points

افترض ان x نقطة دورية ذات دورة n للدالة f . فتكون x نقطة صامدة للدالة f^n . لذلك يكون من الطبيعي ان نعرف النقاط الدورية الجاذبة و النافرة.

تعريف 1.12

لتكن x نقطة دورية ذات دورة n للدالة f . فتسمى x نقطة دورية جاذبة ذات دورة n (attracting periodic- n point) إذا كانت x نقطة صامدة جاذبة للدالة f^n ، كذلك تكون x نقطة دورية نافرة ذات دورة n (repelling periodic - n point) إذا كانت x نقطة صامدة نافرة لدالة f^n .

ملاحظة 4.

افترض إن f مستمرة عند نقطة دورية x ذات دورة n . إذا كانت x جاذبة (نافرة)، فان كل نقطة في $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ نقطة دورية جاذبة (نافرة) ذات دورة n ، لذلك نقول ان المدار $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ ذو الدورة n مدار جاذب (نافر).

بصورة خاصة، إذا كان $n = 2$ فتكون النقطة الدورية ذات دورة 2 جاذبة إذا وفقط إذا وجدت فترة $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ بحيث إذا كان $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ، فإن

$$f^{2n+1}(y) \rightarrow f(x) \text{ و } f^{2n}(y) \rightarrow x$$

عندما $n \rightarrow \infty$. إن الشكل 1.10 يبين عدد x ينجذب إلى مدار ذو دور 2 للدالة f .

شكل 1.10

مثال 2

لتكن $f(x) = -x^{1/3}$. بين أن 1 نقطة دورية ذات دورة 2 جاذبة للدالة f .

الحل.

لاحظ أولاً أن $f(1) = -1$ و $f(-1) = 1$. لذلك تكون النقطة 1 ذات دورة 2. الآن لاحظ أن

$$f^2(x) = f(f(x)) = -(-x^{1/3})^{1/3} = x^{1/9}$$

لذلك $(f^2)'(1) = \frac{1}{9}$. حسب مبرهنة 1.6 تكون 1 نقطة صامدة جاذبة للدالة f^2 . لذلك حسب

تعريف 1.10 تكون 1 نقطة دورية ذات دورة 2 و جاذبة.

ملاحظة 5

يمكن أن نبين أن 1 نقطة دورية ذات دورة 2 جاذبة للدالة f من خلال بيان وجود فترة J حول 1 بحيث أنه إذا كانت $x \in J$ ، يكون $|f^2(x) - 1| < |x - 1|$.

أعطينا في البند 1.2 معيار لبيان فيما إذا كانت نقط ما جاذبة أم نافرة وان هذا المعيار يتضمن المشتقة. بالمثل هناك معيار لبيان فيما إذا كان مدار ما جاذب أم نافر ويتضمن المشتقة كذلك. قبل أن نذكر المبرهنة 1.14 لدينا نتيجة ابتدائية.

مبرهنة 1.13

ليكن $\{x, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f . إذا كانت f^2 قابلة للاشتقاق عند x و z ، فإن

$$(f^2)'(x) = f'(x)f'(z) = (f^2)'(z) \quad (2)$$

مبرهنة 1.12

ليكن $\{x, z\}$ مدار ذو دورة 2 للدالة f .

(a) إذا كان $|f'(x)f'(z)| < 1$ ، فإن المدار ذو الدورة 2 يكون مدارا جاذبا.

(b) إذا كان $|f'(x)f'(z)| > 1$ ، فإن المدار ذو الدورة 2 يكون مدارا نافرا.

ملاحظة 6

إذا كان $|f'(x)f'(z)| = 1$ ، فلا نستطيع أن نستنتج أي شيء حول فيما إذا كان المدار $\{x, z\}$ جاذبا أم نافرا أو غير ذلك. على سبيل المثال، لتكن $f(x) = 1/x$. فإن $f^2(x) = x$ ، لذلك يكون $\{x, 1/x\}$ مدار ذو دورتين لكل $x \neq 0$. واضح إن المدار $\{x, 1/x\}$ لا يكون جاذبا ولا نافرا، على الرغم من أن

$$|f'(x)f'(z)| = |(f^2)'(x)| = 1, \quad \forall x \neq 0$$

عندما تكون $|f'(x)f'(z)| \neq 1$ فيمكننا معرفة فيما إذا كان المدار $\{x, z\}$ مدارا جاذبا أم نافرا.

مثال 3

لتكن $f(x) = x^2 - 3x + 2$. بين إن $\{0,2\}$ مدار نافر بدورة 2.

الحل.

بما إن $f(0) = 2$ و $f(2) = 0$ ، يتبع إن $\{0,2\}$ يكون مدار ذو دورتين. إن حقيقة كون $f'(x) = 2x - 3$ يؤدي إلى إن $f'(0) = -3$ و $f'(2) = 1$ ، لذلك

$$f'(0)f'(2) = (-3)(1) = -3$$

لذلك حسب مبرهنة 1.14 يكون $\{0,2\}$ مدار نافر بدورة 2 للدالة f .

إن الشكل 1.11 يعرض بيان الدالة f ، مع المدار $\{0,2\}$ ذو الدورتين. بالتحليل، تكون تكرارات x ، تكون قريبة من 0، والتي تبين سبب كون المدار ذي الدورتين مدارا نافرا.

شكل 1.11

ملاحظة 7

إذا كان $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ مدار ذو دورتين، فحسب قاعدة السلسلة يكون

$$(f^n)'(x) = [f'(f^{n-1}(x))][f'(f^{n-2}(x))] \dots [f'(f(x))][f'(x)] \quad (3)$$

إذا كانت القيمة المطلقة للطرف الأيمن من (3) أقل (أكبر) من 1، فيكون المدار ذو الدورة n جاذبا (نافرا). نشير إلى أنه إذا كانت x نقطة صامدة، فتصبح (3)

$$(f^n)'(x) = (f'(x))^n \quad (4)$$

تعريف 1.15

إن حوض الجذب للمدار الجاذب هو مجموعة من النقاط متناهية بشكل اعتباطي قرب نقاط في المدار.

مثال 5

لإعطاء توضيح إضافي للمفاهيم الواردة في هذا البند، نقدم الدالة B ، التي تكون قريبة نسبياً من دالة الخيمة:

$$B(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

(الشكل 1.12). نسمي الدالة B دالة الخبز (baker's function)، فيما يتعلق بعُجْن عجينة الخبز. (إنّ الدالة تُتعلّقُ بسنّ المنشار الذي يظهر في الهندسة).

الشكل 1.12

الفصل الثاني

نماذج المجتمع المتقطع لنوع و حيد

Discrete Population Models for a Single Species

2.1 النماذج البسيطة (Simple Models)

نماذج المعادلات التفاضلية ، سواء كانت اعيادية، تاخير ، جزئية، تصادفية، تؤدي الى تداخل الاجيال. العديد من الانواع لاتتملك تداخل بين اجيالها المتعاقبة ولذلك يكون نمو المجتمع في خطوات متقطعة. بالنسبة للكائنات الحية البدائية يمكن ان يكون ذلك قصير جدا في هذه الحالة النماذج المستمرة (في الزمن) تكون تقريبا معقول. على اية حال، بالاعتماد على النوع اطوال الخطوة يمكن ان يكون واسع جدا. السنة شائعة. مع ذبابة الفاكهة الخارجة من الشرائق هو يوم، بالنسبة للخلايا يمكن عدد من الساعات، بينما البكتريا و الفايروسات يمكن ان نتامل اقل من ذلك. في النماذج التي سنناقشها في هذا الفصل سيكون لدينا خطوة- الزمن هي 1. وعليه يجب ان تربط النماذج المجتمع عند الزمن $t + 1$ ، ويرمز لها N_{t+1} ، بدلالة المجتمع N_t عند الزمن t . هذا يقودنا الى دراسة معادلات الفروق، او النماذج المتقطعة، من الصيغة

$$N_{t+1} = N_t F(N_t) = f(N_t), \quad (2.1)$$

حيث $f(N_t)$ هي بصورة عامة دالة غير خطية لـ N_t . غالبا ما تستخدم الصيغة الاولى لتوكيد وجود حالة الاستقرار الصفري . مثل هذه المعادلات عادة غير قابلة للحل تحليليا لكن يمكن ان نستخلص كمية كبيرة من المعلومات حول ديناميكية المجتمع بدون الحل التحليلي. ان رياضيات معادلات الفروق ستدرس هنا بعمق وتطبق في حقول متنوعة: انها مواضيع جذابة تظهر لبعض الظواهر غير المتوقعة كليا سنناقش بعضها فيما بعد. نماذج معادلة الفروق ثبتت كذلك لاستخدام في طيف واسع ومنذهل لمناطق الاحياء الطبية كنمو الخلايا السرطانية (انظر، على سبيل المثال، المقال المقدم من قبل Cross and Cotton 1994)، الشيخوخة (انظر، على سبيل المثال، المقال المقدم من قبل Lipsitz and Goldberger 1992) ، تكاثر الخلايا (انظر، على سبيل المثال، المقال المقدم من قبل Hall and Levinson 1990) و الجينات (انظر على سبيل المثال، فصل الوراثة inheritance في كتاب Hoppensteadt and Peskin 1992 وفي كتاب Roughgraden 1996). تبين مؤخرا ان لهذه المعادلات استخدام مذهل في نمذجة

الديناميكية التفاعل المزدوج و تنبؤ الانفصال. اوسع استخدام للبيانات هو محتمل في علم البيئة، يوجد في كتاب Hassell 1978 امثلة عديدة ، انظر كذلك كتاب ممتاز واكثر حداثة للمؤلف (Kot 2001).

من الاشارة الخاصة، اذا علمنا صيغة $f(N_t)$ فمسألة ايجاد قيمة N_{t+1} تكون مباشرة وتتولد لبشكل بتتابع باستخدام بسيط مكرر لـ (2.1). طبعاً، ايا كانت صيغة $f(N_t)$ ، فاننا نهتم فقط بالمجتمعات غير السالبة.

البراعة في نمذجة ديناميكية نمو مجتمع معين يقع في تحديد صيغة مناسبة لـ $f(N_t)$ ، لعكس ملاحظات معلومة او حقائق حول النوع قيد البحث. لعمل ذلك مع اي ثقة يجب ان نفهم التأثيرات الرئيسية على حلول التغيرات في صيغة $f(N_t)$ و معلماتها، وكذلك ماذا تماثل حلول (2.1) بالنسبة الى عينات قليلة من الفائدة العملية. المسألة الرياضية هي تطبيق، اي، ايجاد المسارات لتطبيقات غير خطية تبدأ بقيمة N_0 . يجب ان نلاحظ هنا عدم وجود ترابط بسيط بين نماذج معادلة الفروق و وما يظهر للمعادلة التفاضلية المستمرة المناظرة، حتى النتائج التقريبية للفروق المنتهية في معادلة متقطعة. هذا يصبح واضح ادناه.

افترض ان $F(N_t) = r > 0$ ، هذا يعني، ان المجتمع بعد خطوة واحدة يصبح ببساطة يلائم المجتمع الحالي. فمن (2.1)، يكون لدينا

$$N_{t+1} = r N_t \Rightarrow N_t = r^t N_0. \quad (2.2)$$

لذلك ينمو المجتمع او يضمحل هندسيا اذا كان $r > 1$ او $r < 1$ على الترتيب. تعديل طفيف في التأثيرات الكثيرة يمكن ان يكون

$$N_{t+1} = r N_S, \quad N_S = N_t^{1-b}, \quad b \text{ constant},$$

حيث ان N_S الناجي للتناسل. فيجب ان يكون هناك تقييد على b ، بالطبع، لكي يكون $N_S \leq N_t$ و بخلاف ذلك هذي المجتمعات الناجية للتكاثر تكون اكثر من المجتمع التي تكون جزء منه.

متتابعة فيبوناكس Fibonacci Sequence

اذا رمزنا الى عدد ازواج (ذكور و اناث) ارانب بالرمز N_t فبتطبيع دور التناسل الى 1 يكون لدينا عند مرحلة التناسل الـ t

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

هذه المعادلة تعطي، مع N_0 ، مايسمى بمتتابة فيبوناكس

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

كل حد في المتتابة هو ببساطة مجموع الحدين السابقين . المعادلة (2.3) معادلة فروق خطية التي يمكن حلها بالبحث عن حلول في الصيغة

$$N_t \propto \lambda^t$$

و التي بتعويضها في (2.3) تعطي معادلة لـ λ كحلول

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

لذلك، مع $N_0 = 1, N_1 = 1$ ، يكون حل (2.3) على النحو

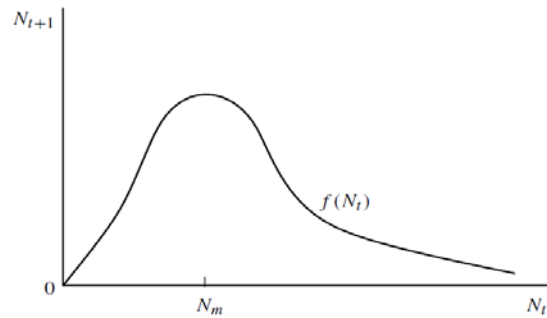
$$N_t = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_1^t + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_2^t \quad (2.4)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}).$$

عندما $t \rightarrow \infty$ ، ولان $\lambda_1 > \lambda_2$ ، يكون لدينا

$$N_t \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \lambda_1^t.$$

ان المعادلة (2.3) معادلة التجديد (renewal equation). يمكن بشكل حدسي نرى بناب العمر في هذا النموذج باعتبار ان العمر الى انجاب وبعده لا يوجد انجاب. بصورة عامة، بسبب التجمع و تنظيم النفس، نتوقع $f(N_t)$ في (2.1) بانها تمتلك قيمة عظمى، وليكن عند N_m ، كدالة بالنسبة الى N_t مع كون ان f متناقصة بالنسبة الى N_t ، الشكل 2.1 يوضح هذه الصيغة.



الشكل (2.1) صيغة النمو النوعية في النموذج $N_{t+1} = f(N_t)$.

انواع الدالة $f(N_t)$ يمكن ان تستخدم في حالات خاصة كالتي وصفت اعلاه. احد تلك النماذج، بعض الاحيان يشار اليها كعملية فير هولست (Verhulst Process) ، هي

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \quad r > 0, \quad K > 0, \quad (2.5)$$

التي تبدو نوع متقطع مناظر لنموذج النمو اللوجستي المستمر لكن ليس في كل الحالات: ان حالة الاستقرار ليست $N = K$. كما سنبين، على اية حال، ان الحلول و اعتمادها على المعلمة r مختلفة جدا. العيب الواضح في هذا النموذج هو اذا كان $N_t > K$ فان $N_{t+1} < 0$. الطريق الاكثر ملائمة لاشتقاقها من معادلة فير هولست هو استبدال المشتقة dN/dt بصيغة فروق بخطوة واحدة للحصول على

$$N(t+1) - N(t) = rN(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] \Rightarrow N(t+1) = \left[1 + r - \frac{r}{K}N(t)\right]. \quad (2.6)$$

باعادة القياس مع

$$N(t) = \left(\frac{1+r}{r}\right) Kx(t)$$

و وضع $1 + r = r'$ تصبح المعادلة الاخيرة بصيغة (2.2) نفسها، هذا يعني،

$$x(t+1) = r'x(t)[1 - x(t)]. \quad (2.7)$$

النموذج الاكثر واقعية يجب ان يكون بحيث ان عندما N_t كبير يجب ان يكون هناك نقصان في النمو لكن يجب ان تبقى N_{t+1} غير سالبة الصيغة النوعية لـ $f(N_t)$ في الشكل 2.1 هي مثال لاعلى ذلك. احد النماذج الذي يستخدم بكثرة، يعرف بمنحنى ريكير (Ricker curve) ويعطى على النحو

$$N_{t+1} = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right], \quad r > 0, \quad K > 0 \quad (2.8)$$

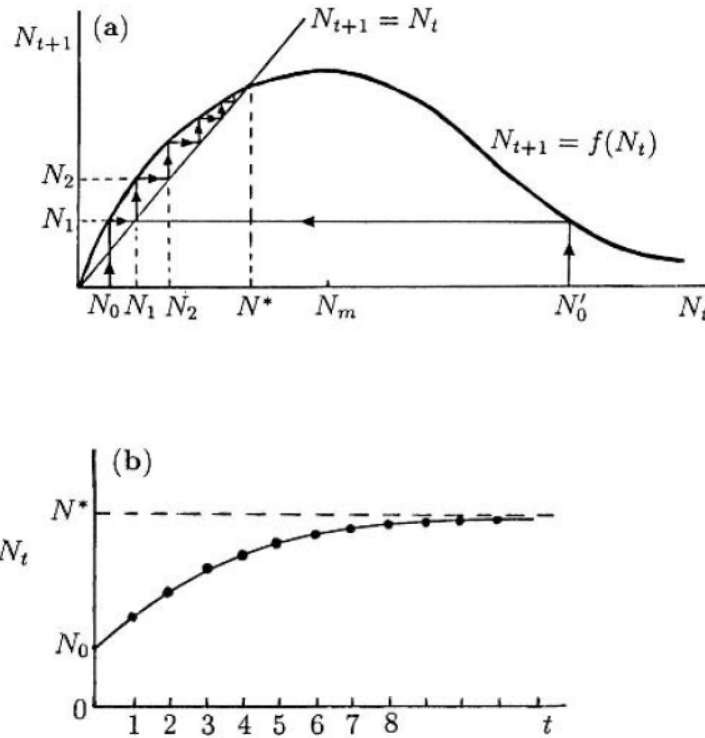
الذي يمكن ان نفكر به كتعديل للصيغة (2.2) حيث يوجد عامل الفناء (mortality factor) $\exp(-rN_t/K)$ الذي يكون يحد من زيادة N_t . هنا $N_t > 0$ لكل t اذا كان $N_0 > 0$.

which we can think of as a modification of (2.2) where there is a mortality factor $\exp(-rN_t/K)$ which is more severe the larger N_t . Here $N_t > 0$ for all t if $N_0 > 0$.

2.2 الاجراء البياني للحل

يمكن ان نحصل على كمية كبيرة من المعلومات حول سلوك نمو مجتمع من خلال معنى بياني بسيط. تامل (2.1) مع f كما في الشكل 2.1. حالات الاستقرار هي حلول N^* للمعادلة

$$N^* = f(N^*) = N^* F(N^*) \Rightarrow N^* = 0 \text{ or } F(N^*) = 1. \quad (2.9)$$



الشكل 2.3 (a) التصميم البياني لحالة الثبات و برهنة كيف تقترب N_t منها. (b) زمن تقييم نمو المجتمع مستخدما (a). استخدمنا محنى مستمر يربط المجتمعات عند خطوات زمن مختلفة من اجل وضوح الصورة الذهنية

بيانيا، استخدمنا الصيغة الاولى في (2.9) فقط، تستخدم الثانية على الاغلب لتوكيد حقيقة ان $N^* = 0$ تكون حالة ثبات دائما. بيانيا حالات الثبات هي تقاطع المنحنى $N_{t+1} = f(N_t)$ و الخط المستقيم $N_{t+1} = N_t$ كما مبين في الشكل (a) 2.2 بالنسبة الى الحالة حيث القيمة العظمى للمنحنى $N_{t+1} = f(N_t)$ ، عند N_m ، وان $N_m > N^*$. التقييم الديناميكي لحل (2.1) N_t يمكن ان يحصل عليه بيانيا كالآتي. افترض اننا نبدأ عند N_0 في الشكل (a) (2.2).

فان N_1 تعطى بحركة بسيطة على طول المحور N_{t+1} حتى نتقاطع على مع المنحنى $N_{t+1} = f(N_t)$ ، يعطي $N_1 = f(N_0)$. الان يستخدم المستقيم للبدأ مرة اخرى مع N_1 في بدلا عن N_0 . فنحصل على N_2 بالاسلوب اعلاه و من ثم N_3, N_4 وهكذا: الاسهم تبين متتابعة المسار. المسار باختصار هو سلسلة انعكاسات في المستقيم $N_{t+1} = N_t$. نرى ان $N_t \rightarrow N^*$ عندما $t \rightarrow \infty$ وتكون رتيبة كما في موضح في الشكل (2.2)(b). اذا بدأنا عند $N'_0 > N^*$ في الشكل (2.3(a)، مرة اخرى $N_t \rightarrow N^*$ وبشكل رتيب بعد الخطوة الاولى. اذا بدأنا من مكان قريب جدا من حالة الثبات N^* فالاقتراب اليها يكون رتيب على طول المنحنى $N_{t+1} = f(N_t)$ الذي يقطع $N_t = N_{t+1}$ ، هنا هذا يعني ،

$$0 < \left[\frac{df(N_t)}{dN_t} \right]_{N_t=N^*} = f'(N^*) < 1. \quad (2.10)$$

ان قيمة $f'(N^*)$ ، حيث ان الفتحة ترمز الى المشتقة بالنسبة الى N_t ، هي معلم مهم كما سنبين: هي تمثل القيمة الذاتية للنظام عند حالة الثبات N^* . لانه اي اضطراب صغير حول N^* ببساطة يتناقص الى الصفر، تكون N^* حالة اتزان مستقرة خطيا.

افترض الان ان $f(N_t)$ تحقق الاتزان $N^* > N_m$ كما في الشكل 2.4. السلوك الديناميكي للمجتمع يعتمد على هندسة تقاطع المنحنيات عند N^* كما مبين من الدرج الموسع في الشكل (2.4(a),(b),(c): في (a) يكون $-1 < f'(N^*) < 0$ في (b) $f'(N^*) = -1$ و في (c) $f'(N^*) < -1$. ان الحل N_t متذبذب في جوار N^* . اذا كان التذبذب متناقص في الذروة و ان $N_t \rightarrow N^*$ فان N^* مستقرة كما في الشكل (2.4(a)، بينما تكون غير مستقرة اذا كان التذبذب يزداد كما في الشكل (2.4(c). الحالة في الشكل (2.4(b) يعرض التذبذبات الدورية و يفترض ان الحلول الدورية للمعادلة $N_{t+1} = f(N_t)$ تكون ممكنة.

ان المعلمة $\lambda = f'(N^*)$ ، هي القيمة الذاتية N^* للمعادلة $N_{t+1} = f(N_t)$ ، مهمة في تحديد السلوك المحلي حول حالة الثبات. الحالة: $0 < \lambda < 1$ كما في الشكل (2.3(a) و $-1 < \lambda < 0$ وان $\lambda < -1$ كما في الشكل (2.4(b) و (c) على التوالي. نقطة الاتزان تكون مسترة اذا كان $-1 < \lambda < 1$ و تسمى نقطة اتزان جاذبة. قيم التفرع الحرجة (Bifercation values) $\lambda = \pm 1$ التي عندها يتغير سلوك الحل N_t . الحالة $\lambda = 1$ تحدث عندما المنحنى $N_{t+1} = f(N_t)$ يمس $N_{t+1} = N_t$ عند حالة الثبات $1 = f'(N^*)$ ، وتسمى التفرع المماس tangent bifercation.

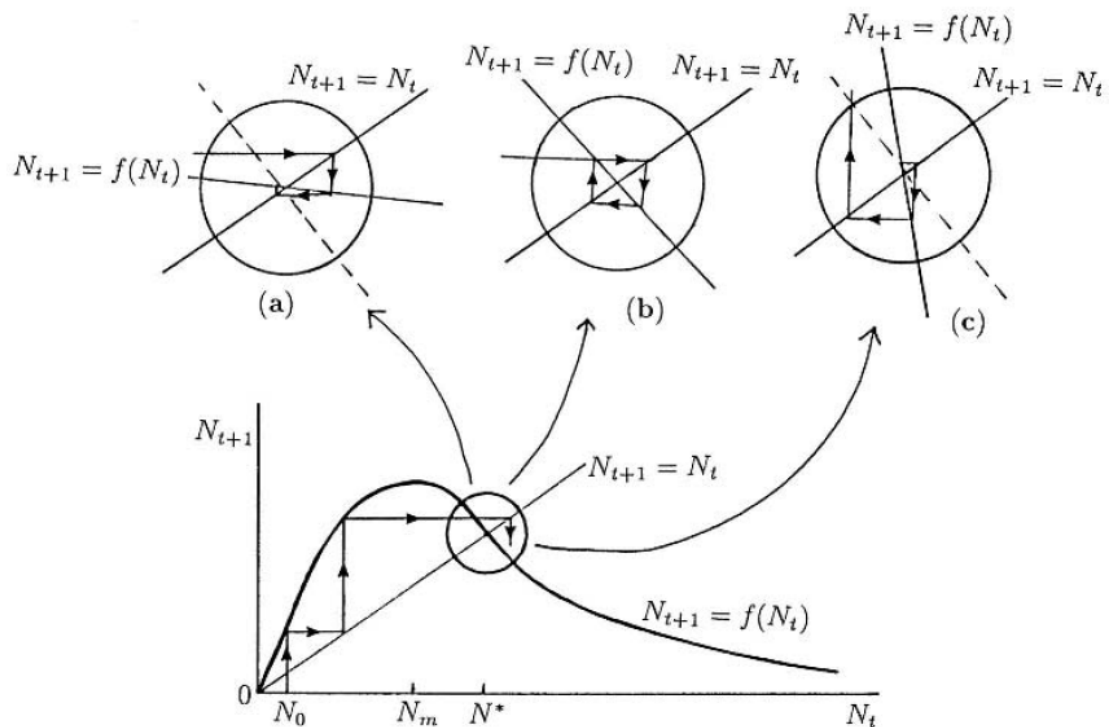


Figure 2.4. Local behaviour of N_t near a steady state where $f'(N^*) < 0$. The enlargements show the cases where (a) $-1 < f'(N^*) < 0$, N^* is stable with decreasing oscillations for any small perturbation from the steady state. (b) $f'(N^*) = -1$, N^* is neutrally stable. (c) $f'(N^*) < -1$, N^* is unstable with growing oscillations.

حالة الثبات تكون غير مستقرة بشدة اذا كان اضطراب صغير قرب N^* لا يقترب من الصفر.
السلوك الديناميكي للمجتمع لكل من الحالات الثلاث في الشكل 2.4 موضحة في الشكل 2.5.

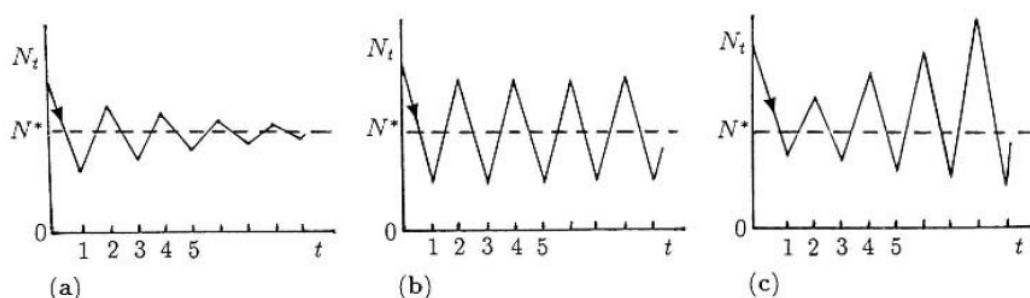


Figure 2.5. Local behaviour of small perturbations about the equilibrium population N^* with (a), (b), and (c) corresponding to the situations illustrated in Figures 2.3 (a), (b) and (c) respectively: (a) is the stable case and (c) the unstable case.

المصادر:

[1] J.D. Murray" Mathematical Biology I. An Introduction"Third Edition
2001 Superstock.

[2] J.D. Murray" Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical
Applications" Third Edition 2003 J.D. Murray

.

[3] M.R. Spiegel, "Applied Differential Equations", Prentice Hall Inc. Englewood
Cliff, New Jersey, Third Edition(1981).