



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

**حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة باستخدام
المتسلسلات (طريقة فروبنيوس)**

بحث مقدم الى قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا
المعلومات جامعة القادسية كأستكمال جزئي لمتطلبات نيل درجة
بكالوريوس علوم في الرياضيات

من قبل الطالبة:

دعاء عدنان شدهان

بإشراف م. فراس حسين مجهول

٢٠١٧



لَّذِينَ فَعَلَ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا
الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ جُودًا بِمَا تَعْمَلُونَ خَيْرٌ

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة - ١١

إهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلى بطاعتك .. ولا تطيب
اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك
" الله جل جلاله "

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة و نور العالمين
" سيدنا محمد صلى الله عليه واله و سلم "

إلى كل فصائل المقاومة والحشد الشعبي المقدس والجيش العراقي الإبطال
إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار .. إلى
من أحمل أسمه بكل افتخار .. أرجو من الله أن يمد في عمرك لتري ثماراً قد حان
قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوما أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد ..
والذي الحبيب

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني ..
إلى بسمه الحياة و سر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

إلى من تطيب الحياة بوجودهم

أخي وأختي

إلى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم

أصدقائي

إلى من لا يستطيع العيش من دونه

شكر وتقدير

أشكر الله سبحانه وتعالى على ما أعطاني ووفقني ومنحني القوة والسند لأتعلم وأجتهد
أقدم الشكر والامتنان والمحبة والتقدير إلى كل من ساندني ووقف معي طيلة حياتي
الجامعية وكل أساتذتي الأفاضل وأخص بالشكر والامتنان: أستاذتي

ست (فراس حسي مجبول)

على ما قدمه لي من دعم وترجيح

وكذلك أشكر كل من ساعد على إتمام هذا البحث وقدم لي الموهبة ومد لي يد المساعدة
وزودني بالمعلومات اللازمة لإتمامه .. زملائي & زميلاتي

المحتويات Contents

الصفحة	الموضوع
١	المقدمة
٢	الفصل الاول - المعادلات التفاضلية الجزئية
٥	الفصل الثاني - حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنْيوس)
٢٣	الفصل الثالث أيجاد حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة القوى في حالة x كبيرة جدا
٣٧	المصادر

المقدمة

نشأت المعادلات التفاضلية منذ بداية الحساب ومازالت مستمرة منذ عهد نيوتن إلى عصرنا هذا وقد استخدمت المعادلات التفاضلية في فهم العلوم الفيزيائية والهندسة والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية. وللمعادلات التفاضلية انواع كثيرة وطرق حل مختلفة .

تناولنا في الفصل الاول تعريف المعادلة التفاضلية والمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ورتبة ودرجة المعادلة .وبعض الامثلة حول المعادلات الخطية المتجانسة.

في الفصل الثاني حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة طريقة فروبنوس (استخدام المتسلسلات في حل المعادلة التفاضلية)

في الفصل الثالث تناولنا طريقة حل فروبنوس عندما تكون قيمة X كبيرة جدا

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية الجزئية

تعريف ١ :- تعرف المعادلة التفاضلية (*Differential Equation*) بأنها إي معادلة (ليست متطابقة) مكونة من دوال جبرية أو دوال متساوية أو معا وتحتوي على مشتقة أو مشتقات دالة غير معلومة الشكل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$F(x,y)(x), y'(x), y''(x), y^3(x), \dots, y^n(x), \dots = C \quad (1)$$

مثال ١ :- فيما يلي بعض الأمثلة على المعادلة التفاضلية

- i) $u'_{(t)} = u_{(t)}$
- ii) $u'_{(t)} = u^2_{(t)}$
- iii) $u'_{(t)} = u_{(t)} + \sin(x) \quad (2)$
- iv) $u''_{(s)} + u'_{(s)} = s$
- v) $u^u_{(x)} = \sin(x)$

تعريف ٢ :- تعرف المعادلة التفاضلية الجزئية بأنها المعادلة التفاضلية التي تحتوي على دالة غير معلومة في متغيرين مستقلين أو أكثر ومشتقاتها الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة .

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية في المتغير المعقد u والمتغيرين المستقلين x, y هو

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (3)$$

مثال ٢:- فيما يلي بعض الأمثلة على المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\text{iv) } u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{vii) } u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{viii) } u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

$$\text{ix) } u_{tt}(x, t) = (c [u(x, t)] u_x(x, t))_x$$

$$\text{x) } u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - u^2(x, t)$$

$$\text{xi) } u_t(x, t) + \left(\frac{1}{2} u^2(x, t)\right)_x = u_{xx}(x, t)$$

$$\text{xii) } u_t(x, t) + (x^2 + t^2) u_x(x, t) = 0$$

$$\text{xiii) } u_{tt}(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0$$

تعريف ٣:- تعريف رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية

(Order of partial Differential Equations) بأنها رتبة أعلى مشتقة جزئية في تلك المعادلة التفاضلية الجزئية .

مثال ٣:-

المعادلات التفاضلية الجزئية (xii) في (4) تكون من الرتبة الاولى

المعادلات التفاضلية الجزئية (vi – xi) في (4) تكون من الرتبة الثانية

المعادلات التفاضلية الجزئية (xiii) في (4) تكون من الرتبة الرابعة

تعريف ٤:- تعرف درجة المعادلة التفاضلية الجزئية بأنها الدرجة الجبرية للمشتقة الجزئية ذات الرتب العليا والتي تظهر في تلك المعادلة التفاضلية الجزئية وتكون درجة المعادلة التفاضلية الجزئية عدد صحيح موجب .

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية

Linear partial Differential Equation

مثال :- فيما يلي الأمثلة على المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية

1. $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ متجانسة ذات معاملات ثابتة
2. $u_{xx} + u_{yy} + 2x - y = 0$ غير متجانسة ذات معاملات ثابتة
3. $u_t(x, t) + (x^2 + t^2) u_x(x, t) = 0$ متجانسة ذات معاملات متغيرة

الفصل الثاني

حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية باستخدام
المتسلسلات (طريقة فروبنوس)

Swries Solution Of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

طريقة فروبنوس

لقد سبق حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الترتيب الثانية
في صورة متسلسلة القوى في حالة إذا كانت $x = a$ نقطة عادية
في الجزء الأول. والآن سوف ندرس حالة إذا كانت $x = a$ نقطة
شاذة منتظمة ، وفي هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^{n+r}$$

أما إذا كان الحل حلو النقطة $x = 0$ الشاذة المنتظمة فأن:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

- إن لم تذكر النقطة فأننا نعتبر $x = 0$ وسوف نوضح طريقة
الحل بالمثال التالي:

مثال (1-2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$2xy^{11} + (x + 1)y^1 + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x

الحل:

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x} = 0$$

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1},$$

$$y^{11} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل قوى x)

$$C_n(n+r)(2n+2r-1) + C_{n-1}(n+r+2) = 0 \quad (1)$$

نضع $n = 0$ في المعادلة (1) فنحصل على

$$C_0 r(2r-1) + C_{-1}(r+2) = 0$$

حيث إن $C_{-1} = C_{-2} = \dots = 0$

فأن

$$C_0 r(2r-1) = 0$$

وباعتبار ان $C_0 \neq 0$ نحصل على

$$r(2r - 1) = 0 \quad (2)$$

المعادلة (2) تسمى المعادلة الدليلية (indicial equation) ومنها نجد ان

$$r = 0, r = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على العلاقة التكرارية (recurrence relation)

$$C_n = \frac{-(n + r + 2)}{(n + r)(2n + 2r - 1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وسوف نوجد قيم C المختلفة بدلالة $C_0 \neq 0$ في حالتها
جذري المعادلة الدليلية (2)

$$: r = 0 \quad (١)$$

$$\therefore C_n = \frac{-(n + 2)}{n(2n - 1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\therefore C = \frac{-3}{1(1)} C_0 = -3C_0$$

$$C_2 = \frac{-4}{2(3)} C_1 = \frac{(-4)(-3)}{(2)(3)} C_0 = 2C_0$$

$$C_3 = \frac{-5}{(3)(5)} C_2 = \frac{(-5)(2)}{(3)(5)} C_0 = \frac{-2}{3} C_0, \dots$$

$$: r = \frac{1}{2} \quad (٢)$$

$$C_n = \frac{-(n + 5/2)}{(n + 1/2)} C_{n-1}$$

$$\text{or } C_n = \frac{-(2n + 5)}{2n(2n + 1)} C_{n+1}, n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-7}{2(3)} C_0 = \frac{-7}{6} C_0$$

$$C_2 = \frac{-9}{(4)(5)} C_1 = \frac{9(7)}{(4)(5)(6)} C_0 = \frac{21}{40} C_0$$

$$C_3 = \frac{-11}{(6)(7)} C_2 = \frac{(11)(21)}{(6)(7)(40)} C_0 = \frac{-11}{80} C_0$$

,...

وبفرض $C_0 = 1$ فان الحل العام يكون

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore y = A_1 \left[1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots \right] \\ + A_2 \left[1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \dots \right] x^{1/2} \end{aligned}$$

ملاحظة: في المثال السابق لاحظنا عند حل المعادلة الدليلية أن جذري المعادلة $r = 0$ ، $r = \frac{1}{2}$ أي انهما مختلفان والفرق بينهما عدد كسري، وسوف نلاحظ أن هناك ثلاث حالات لجذري المعادلة الدليلية كما يأتي:

حالات جذري المعادلة الدليلية:

١- مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.

٢- متساويان.

٣- مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

الحالة الاولى:

الجزران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.

لقد درسنا الحالة الاولى في المثال السابق، ونعرض مثالا اخر.

مثال(2-2) اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2x(1-x)y + (1-x)y + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى في x

الحل:

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة وحيث ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)x}{2x(1-x)} = \frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x(1-x)}$$

فأن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y^1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1} ,$$

$$y^{11} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x - \sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x - \sum_{n=0}^{\infty} 2C(n+r)(n+r-1)x$$

من المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore C_n = \frac{(n+r)(2n+2r-5)}{(n+r)(2n+2r-1)} C_{n-1}, n \geq 1$$

بالتعويض عن جذري المعادلة الدليلية

$$r = 0 - ١$$

$$\therefore C_n = \frac{n(2n-5)}{n(2n-1)} C_{n-1}, n \geq 1$$

$$\therefore C_n = \frac{2n-5}{2n-1} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-3}{1} C_0 = -3C_0, C_2 = \frac{-3}{1} C_1 = C_0, C_3 = \frac{1}{5} C_2 = \frac{1}{5} C_0, \dots$$

$$r = 1/2 - ٢$$

$$\therefore C_n = \frac{(n+1/2)(2n-4)}{(n+1/2)(2n)} C_{n-1}, n \geq 1$$

$$\therefore C_n = \frac{(n-2)}{n}, n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-1}{1} C_0 = -C_0, C_2 = 0 = C_3 C_4 =.$$

$$\therefore y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2} = [1-x] C_0 x^{1/2}$$

حيث ان C_0 اختيارية ، نعتبر $C_0 = 1$

∴ الحل العام يكون على الصورة

$$y = A \left[1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \dots + B[1-x]\sqrt{x} \right]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

الحالة الثانية :

الجذران متساويان

في هذه الحالة نجد $r = r_1, r = r_2$ اي ان $r_1 = r_2$ ويكون $y_1 = \sum C_n x^{n+\mu}$ وبذلك نحصل على حل واحد فقط لكن للحصول على الحل الثاني المستقبلي خطيا ، نفرض $y_1 = f(xr_1)$ ؛ ولقد ثبت ان الحل الثاني يكون على الصورة :

$$y_2 = \frac{\partial(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=\mu}$$

ويكون الحل العام

حيث A, B ثابتان اختياريان

مثال (٢-٣) : اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى في x .

الحل :

نرى ان $x=0$ نقطة شاذة وعلى ذلك فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2x)x^2}{x^2} = 1,$$

$x = 0$: نقطة شاذة منتظمة

نفترض ان الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}, y' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ، نحصل على

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} &+ \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r+1} = 0 \end{aligned}$$

بمساواة معامل x^{n+r} بالصفر (اقل اس)

$$\therefore C_n(n+r)(n+r-1) + 3C_n(n+r) + C_n - 2C_{n-1} = 0$$

$$\therefore C_n[(n+r)(n+r+2) + 1] = 2C_{n-1}$$

$$\therefore C_n[(n+r+1)^2] = 2C_{n-1} \quad (1)$$

بوضع $n = 0$

$$\therefore C_0(r+1)^2 = 2C_{-1}$$

حيث C_0 ، $C_{-1} = 0$ اختيارية

$$\therefore r = -1, -1$$

اي ان جذري المعادلة الدليلية متساويان

من (١) نحصل على العلاقة التكرارية :

$$C_n = \frac{2}{(n+r+1)^2} C_{n-1}, n \geq 1$$

نوجد قيم $C_1, C_2, C_3, \dots$ بدلالة r

$$\therefore C_1 \frac{2}{(r+2)^2} C_0$$

$$C_1 \frac{2}{(r+3)^2} C_1 = \frac{2^2}{[(r+2)(r+3)(r+4)]^2} C_0$$

$$C_n = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)(r+4) \dots (r+n+1)]^2} C_0$$

وبافتراض $C_0=1$ حيث انها اختيارية ويكون الحل الاول كما يأتي :

$$x > 0, y_1(x, r) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r) x^{n+r}$$

حيث ان

$$C_n(r) = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3) \dots (r+n+1)]^2} n \geq 1$$

$$y_1(x, r) = x^r \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} + \frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)} x^2 + \frac{2^3}{(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2} \right]$$

$$y_1(x, -1) = \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9}x^3 + \dots \right]$$

كما ان

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} &= \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} x + \frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)} x^2 + \dots \right] \\ &+ x^r \left[\frac{-4}{(r+2)^3} x - 4 \left[\frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)} + \frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)^3} \right] x^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1(x, -1) &= \left. \frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} \right|_{r=1-} \\
&= x^{-1} 1nx \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9}x^3 \dots \right] + \\
&x^{-1} \left[-4x - 4 \left[\frac{2}{4} + \frac{2}{8} \right] x^2 + \dots \right] \text{ و يكون الحل العام هو } \\
\therefore y &= (A + B1nx)x^{-1} \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9}x^3 \dots \right] \\
&- Bx^{-1} [4x + 3x^2 + \dots]
\end{aligned}$$

الحالة الثالثة :

الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب
في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلية r_1, r_2 حيث $r_2 > r_1$ يكون عددا صحيحا
موجبا .

في هذه الحالة يعطى r_2 (اكبر الجذرين) حلا ، و ليكن y_2 في حين يعطى الجذر r_1
حلا وقد لا يعطى ، في حالة اذا وجد الحل y_1 من r_1 فان الحل العام يكون

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

بينما في حالة ان r_1 لا يعطى فاننا نضع $C_0 = b_0(r - r_1)$ في الحل الناتج و
ليكن الحل بعد التعويض , على الصورة $\bar{y}$ فان الحل العام يكون

$$y = A\bar{y}|_{r=r_1} + B \left. \frac{\partial \bar{y}}{\partial r} \right|_{r=r_1}$$

حيث r_1 اصغر الجذرين

مثال (٢-٤) : اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x .

الحل :

حيث ان $x=0$ نقطة شاذة فان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x} = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0,$$

$x = 0$: نقطة شاذة منتظمة

نفترض الحل على الصورة

$$\therefore y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر نحصل على $C_n(n+r)(n+r-4) +$

$$C_{n-2}=0$$

بوضع $n=0$ ، تصبح (١) على الصورة

$$C_0 r(r-4) + C_{-2} = 0$$

وحيث ان $C_{-2} = 0, C_0 \neq 0$ اختيارية

∴. اذن المعادلة الدليلية تكون على الصورة

$$r(r-4) = 0 \text{ اي } r_1 = 0, r_2 = 4$$

نلاحظ ان $r_2 - r_1 = 4$ (عدد صحيح موجب)

وتكون العلاقة التكرارية من (١) هي

$$C_n = -\frac{1}{(n+r)(n+r-4)} C_{n-2}, n \geq 2$$

واضح ان $C_1=0$ بوضع $n=1$ و بالتالي فإن $C_{2n+1} = 0$ اي ان جميع المعاملات الفردية تتلاشى

$$C_2 = -\frac{1}{(r+2)(r-2)} C_0$$

$$C_4 = -\frac{1}{r(r+4)} C_2 = \frac{-1^2}{(r-2)r(r+2)(r+4)} C_0, \dots$$

$$C_6 = -\frac{1}{(r+6)(r+2)}C_4$$

$$= \frac{-1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)}C_0$$

وبالتالي فإن الحل بدلالة r يكون على الصورة

$$y(x, r, C_0) = C_0 x^r \left[1 - \frac{1}{(r-2)(r+2)} x^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{(r-2)r(r+2)(r+4)} x^4$$

$$\left. - \frac{1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + \dots \right]$$

نلاحظ عند وضع $r=4$ فإن كل المعاملات تكون معرفة لكن عند وضع $r=0$ فإن كل المعاملات بدءا من معامل x^4 تكون غير معينة (غير محددة) لذلك نضع

$$C_0 = b_0 r \Leftarrow C_0 = b_0(r-0)$$

نحصل

$$\bar{y} = b_0 r x^r \left[r - \frac{r}{(r-2)(r+2)} x^2 + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} x^4 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + \dots \right]$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = \bar{y}|_{r=0}$$

$$= b_0 \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{(16)(12)}x^6 - \dots \right]$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = \bar{y} \ln x$$

$$+ b_0 x^r \left[1 - \left(\frac{1}{(r-2)(r+2)} - \frac{r}{(r-2)^2(r+2)} \frac{r}{(r-2)(r+2)^2} \right) x^2 - \left(\frac{1}{(r-2)^2(r+2)(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} \right) x^4 + \dots \right]$$

ويكون الحل الثاني هو

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial r} \Big|_{r=0} \\ &= y_1 \ln x \\ &+ b_0 \left[1 - \left(\frac{-1}{4} \right) x^2 - \left(\frac{1}{32} + \frac{-1}{32} + \frac{-1}{64} \right) x^4 + \dots \right] \\ &= y_1 \ln x + b_0 \left(1 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

على ذلك فأن

$$y = (A + B1nx) \left(\frac{-x^4}{16} + \frac{x^6}{192} - \dots \right) + B \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

مثال : اثبت ان حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' - y = 0$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A + B1nx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} - 2B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} H_n$$

الحل :

حيث $x=0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = 0,$$

$X=0$: نقطة شاذة منتظمة

نفترض ان الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$y_1(x, r) = \left[1 + \frac{1}{(r+1)^2}x + \frac{1}{(r+1)^2(r+1)^2}x^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{(r+1)^2(r+1)^2(r+3)^2}x^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{(r+1)^2(r+1)^2(r+3)^2(r+4)^2}x^4 + \dots \right]$$

$$\therefore y_1 = y_1(x, r)|_{r=0} = 1 + \frac{x}{(1!)} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2(x, r) = \frac{\partial y_1(x, r)}{\partial r} \\ = x^r \ln x \left[1 + \frac{1}{(r+1)^2}x + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}x^2 + \dots \right] \\ + x^r \left[\frac{-2}{(r+1)^3} \right] x^{-2} \left[\frac{1}{(r+1)^3(r+1)^2} + \frac{1}{(r+1)^2(r+1)^3} \right] x^2 \\ - 2 \left[\frac{1}{(r+1)^3(r+1)^2(r+3)^2} + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3}x^3 \dots \right]$$

$$y_2(x, r) = y_1 1nx$$

$$\begin{aligned} & - 2x^r \left[\frac{x}{(r+1)^2} \frac{1}{(r+1)} \right. \\ & + \frac{x^2}{(r+1)^2(r+1)^2} \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+1} \right) \\ & + \frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3} \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r+3} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$y_2 = y_2(x, r)|_{r=0}$$

$$= y_1 1nx$$

$$\begin{aligned} & - 2 \left[\frac{x}{(1!)} \frac{1}{1} + \frac{x^2}{(2!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{x^3}{(2!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

اي ان

$$= y_1 1nx - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

على ذلك فان حل المعادلة يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A + B 1nx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} - 2B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} H_n$$

حيث A,B ثابتان اختياريان، $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

الفصل الثالث

أيجاد حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة القوى في حالة x كبيرة جدا

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (1) \quad \text{لتكن لدينا}$$

في حالة متسلسلة القوى بجوار $x=a$ ولتكن $x=0$ اي لقيم محدود للمتغير X و كانت $x=0$ اما ان تكون نقطة عادية او نقطة مفردة منتظمة .

ماذا عن الحل اذا كانت $x=0$ نقطة مفردة غير منتظمة ، نبحث عن الحل عندما تكون

x كبيرة جدا ، نفرض ان $w = \frac{1}{x}$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية اذا كانت $w=0$

نقطة عادية او مفردة منتظمة وتحل المعادلة ، بالطرق السابقة ، حيث نلاحظ ان w

صغيرة جدا ، تعنى ان x كبيرة جدا ، ونقول اذا كانت $w=0$ نقطة عادية (مفردة

منتظمة) للمعادلة المحولة من (١) فأن المعادلة (١) لها نقطة عادية (مفردة

منتظمة) في اللانهاية .

مثال (٣-١) : اوجد حلول المعادلة التفاضلية التفاضلية التالية التي تحقق لقيم x

الكبيرة جدا .

$$xy'' + (3x - 1)y' + y = 0 \quad (1)$$

الحل :

حيث ان $x=0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - 1)}{x^2} = -\infty$$

اي ان $x=0$ نقطة شاذة غير منتظمة

لايجاد الحلول بدلالة قيم x كبيرة جدا

نضع

$$w = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dw} \left[-w^2 \frac{dy}{dw} \right] \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \left[-w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - 2w \frac{dy}{dw} \right] \\ &= w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\therefore \frac{1}{w^2} \left[w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \right] + \left[\frac{3}{w} - 1 \right] \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) + y = 0$$

او

$$w^2 \frac{d^2y}{dw^2} - w(1-w) \frac{dy}{dw} + y = 0 \quad (2)$$

و على ذلك فان $w=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (2)

و بالتالي فان النقطة عند اللانهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1)

∴ نفترض ان $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r}$ حلا للمعادلة (2)

بالتعويض في (2) فنحصل على

$$\begin{aligned} \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r} - \sum C_n (n+r) w^{n+r} \\ + \sum C_n (n+r) w^{n+r+1} + \sum C_n w^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

بمساواة مجموع معاملات w^{n+r} بالصفر (اقل اس في المعادلة)

$$C_n(n+r)(n+r-1) - C_n(n+r) + C_n + C_{n-1}(n+r-1) = 0$$

$$C_n(n+r-1)^2 - C_{n-1}(n+r-1) = 0 \quad (3)$$

نضع $n=0$

$$\therefore C_0(r-1)^2 + C_{-1}(r-1) = 0$$

و حيث $C_0 \neq 0, C_{-1} = 0$ اختيارية

$$(r-1)^2 = 0 \quad \therefore \text{و تكون المعادلة الدليلية}$$

$$\therefore r = 1, 1$$

من المعادلة (3) , تنتج العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{1}{n+r-1} C_{n-1}, n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-1}{r} C_0$$

$$C_2 = \frac{-1}{r+1} C_1 = \frac{(-1)^2}{r(r+1)} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{r+1} C_2 = \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+3)} C_0, \dots$$

باختيار $C_0 = 1$ ومن ذلك ، فان

$$y_1(w, r) = w^r \left[1 - \frac{1}{r}w + \frac{(-1)^2}{r(r+1)}w^2 + \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+3)}w^3 + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} y_1(w, 1) &= w \left[1 - \frac{(-1)^2 w^2}{2!} + \frac{(-1)^3 w^3}{3!} + \dots \right] \\ &= w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^n \end{aligned}$$

للحصول على الحل الثاني توجد :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1(w, r)}{\partial r} &= y_1(w, r) \ln w + w^r \left[\frac{1}{r^2} w - \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} \right) w^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r(r+1)(r+2)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} \right) w^3 \dots \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial y_1(w, r)}{\partial r} \right|_{r=1} = y_1 \ln w + w \left[\frac{w^2}{2!} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{w^3}{3!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right]$$

و باعتبار $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ، فإن

$$y_2 = y_1 \ln w + w_2 \left[H_1 - \frac{w}{2!} H_2 + \frac{w^2}{3!} H_3 - \dots \right]$$

$$= y_1 \ln w + w^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^{n-1}}{n!} H_n$$

اي ان حل المعادلة (2) هو

$$y = (A + B1nw) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^{n+1} - B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} H_n w^{n+1}$$

حيث A,B ثابتان اختياريان $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$y = [A + B1n \left(\frac{1}{x}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n-1}}{n!} B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n x^{-n-1}}{n!}]$$

مثال (٢-٣) :

حل المعادلة $4x^3 y'' + 6x^2 y' + y = 0$ لقيم x الكبيرة جدا .

الحل :

نرى ان $x=0$ نقطة شاذة ، وعلى ذلك فأن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{4x^3} x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1(x-0)^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4x} = \infty$$

اي ان $x=0$ نقطة شاذة غير منتظمة

لذلك نضع

و على ذلك فان $w = \frac{1}{x}$ ومنها $x = \frac{1}{w}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dw} \cdot = (-w^2 \frac{dy}{dw}) \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} (-w^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2w \frac{dy}{dw}) \\ &= w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}\end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\therefore \frac{4}{w^3} \left(w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \right) + \frac{6}{w^2} (-2w \frac{dy}{dw}) = 0$$

$$4w \frac{d^2y}{dw^2} + 2 \frac{dy}{dw} + y = 0$$

وحيث نلاحظ ان $w=0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض ان الحل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad C_n \neq 0$$

$$y' = \sum C_n (n+r) w^{n+r}$$

$$y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r}$$

$$\begin{aligned}\therefore 4 \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-1} + 2 \sum C_n (n+r) w^{n+r-1} \\ + \sum C_n w^{n+r} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore C_n [4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)] + C_{n-1} = 0$$

$$C_n [(n+r)(4n+4r-2)] + C_{n-1} = 0 \quad (1)$$

حيث C_{-1} ، $C_0 \neq 0$ ، بوضع $n=0$

$$C_0(r)(4r - 2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = \frac{1}{2}$$

من العلاقة الرجعية (1) نحصل على

$$C_n = \frac{-1}{(n+r)(4n+4r-2)} C_{n-1}, n \geq 1$$

وبالتعويض في العلاقة التكرارية

$$(i) r = 0$$

$$C_n = \frac{-1}{(4n-2)} C_{n-1} = \frac{-1}{2n(2n-1)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-1}{2 \cdot 1} C_0, C_2 = \frac{-1}{3 \cdot 4} C_1 = \frac{(-1)^2}{4!} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{6 \cdot 5}, C_2 = \frac{(-1)^2}{6 \cdot 5 \cdot 4!} C_0, \dots$$

ويكون الحل هو

$$y_1(w, 0) = C_0 \left[1 - \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{4!} - \frac{w^3}{6!} + \dots \right]$$

$$(ii) r = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{-1}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(4n + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)} C_{n-1}, n \geq 1$$

$$= \frac{-1}{(2n+1)(2n)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-1}{2.3} C_0, C_2 = \frac{-1}{4.5} C_1 = \frac{(-1)^2}{5!} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{6.7} C_2 = \frac{(-1)^2}{7!} C_0$$

ويكون الحل الثاني

$$y_2 = C_0 w^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots \right]$$

وبأخذ $C_0=1$ يكون حل المعادلة الاصلية هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= A \left[1 - \frac{x^{-1}}{2!} + \frac{x^{-2}}{4!} - \frac{x^{-3}}{6!} + \dots \right] + Bx^{-\frac{1}{2}} \left[+1 - \frac{x^{-1}}{3!} + \frac{x^{-2}}{5!} - \frac{x^{-3}}{7!} + \dots \right]$$

حيث A,B ثابتان اختياريان

مثال (٣-٣) : اثبت ان $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (1)$$

الحل :

$$(٢) \quad \frac{dt}{dx} = -1/x^2 \text{ اي } t = 1/x \text{ و منها } x = 1/t$$

و بذلك يكون

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$y'' = \left(-t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} \right) (-t^2) = t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \quad (4)$$

و بذلك تؤل المعادلة (1) الى

$$\frac{1}{t^2} \left[t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} \right] + \frac{4}{t} \left[-t^2 \frac{dy}{dt} \right] + 2y = 0$$

او

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (5)$$

و فيها نرى ان $t=0$ نقطة شاذة منتظمة و على ذلك فان $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة.

مثال (٣-٤) : اوجد حل المعادلة

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

في صورة متسلسلة القوى حول $x = \infty$.

الحل : لدينا

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{t} \therefore t = \frac{1}{x}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2} \quad \text{بوضع (2)}$$

$$\frac{dy}{dx} == -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = t^2 \left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \quad (4)$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$t^2(t^2 - 1) \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} + 6y = 0 \quad (5)$$

نرى ان $t=0$ نقطة شاذة منتظمة (تاكد من ذلك؟) ، وعلى ذلك نفترض ان حل المعادلة (5) على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+r}, C_0 \neq 0 \quad (6)$$

بالتعويض في المعادلة و مساواة معامل اقل قوى t بالصفر نحصل على العلاقة التكرارية

$$(n + r - 3)(n + r + 2)C_n - (n + r - 2)(n + r - 1)C_{n-2} = 0$$

وبوضع $n=0$ نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(r - 3)(r + 2) = 0$$

$$\therefore r = 3, r = -2$$

الجزران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح

من العلاقة التكرارية نجد ان

$$C_n = \frac{(n + r - 2)(n + r - 1)}{(n + r - 3)(n + r + 2)} C_{n-2}, \quad n \geq 2$$

من ذلك نرى ان

$$C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$$

$$C_2 = \frac{r(r + 1)}{(r - 1)(r + 4)} C_0$$

$$C_4 = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+1)(r+4)(r+6)} C_0$$

$$= \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} C_0$$

وهكذا ، وبذلك يكون الحل على الصورة

$$y = t^r C_0 \left[1 + \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} t^2 + \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} t^4 + \dots \right] \quad (7)$$

بوضع $r=3$ في $C_0 = 1$ نحصل على الحل الاول

$$y_1 t^3 \left[1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} t^4 + \dots \right] \quad (7)$$

بوضع $r=3$ في (7) ، $C_0=1$ نحصل على الحل الاول

$$y_1 t^3 \left[1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 + \dots \right]$$

و يوضع $r=-2$ في (7) ، $C_0=1$ نحصل على الحل الثاني

$$y_1 = t^{-2} \left[1 - \frac{t^2}{3} \right]$$

و يكون الحل العام للمعادلة (5) هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$At^3 \left[1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 \right] + \frac{B}{t^2} \left[1 - \frac{t^2}{3} \right]$$

اي ان

$$y = \frac{A}{t^3} \left[1 + \frac{3.4}{2.7} \frac{1}{x^2} + \frac{3.5.6}{2.7.9} \frac{1}{x^4} \right] + Bx^2 \left[1 - \frac{1}{3x^2} \right]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

● ملاحظة : قد تكون المعادلة التفاضلية في صورة معادلة اويلر . و لذلك بعد

التعويض في شكل متسلسلة نجد ان قوى x في جميع الحدود متساوية

والتي ينتج ان $c_n = 0, n \geq 1$ والطريقة تتضح في المثال الاتي :

مثال (٣-٥): استخدم طريقة فروبنيوس لايجاد الحل بالقرب من $x=0$ للمعادلة

$$x^2 y'' - x y' + y = 0 \quad \text{التفاضلية}$$

نقطة $x=0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟)

نفرض ان الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore y' = \sum C_n (n+r) x^{n+r}, y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum C_n (n+r) x^{n+r} + \sum C_n x^{n+r} = 0$$

نلاحظ هنا ان قوى x متساوية . وبمساواة معامل اقل قوى للمتغير x بالصفر ، نجد

ان

$$C_n [n+r) - (n+r-1) - (n+r) + 1] = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 = 0 \quad (1)$$

ويوضع $n=0$ في (1) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(r-1)^2 = 0, C_0 \neq 0$$

$$\therefore r = 1, 1$$

الجذران متساويان . و يوضع $r=1$ في (١) نجد ان

$$C_n n^2 = 0$$

و التي تؤدي الى ان $C_0=0$ لكل $n \geq 1$ وبالتالي يكون الحل على صورة

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^r [C_0 + 0] = x^r, C_0 = 1$$

ويكون الحل الاول هو

$$y_1 = y(x, r)|_{r=1} = x$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} = x^r \ln x r = 1 = x \ln x$$

و بذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax + Bx \ln x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

• ملاحظات : يمكن استخدام العلاقة :

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{-\int^x \frac{a_1(s)ds}{a_2(s)}}{y_1^2} dx$$

في ايجاد الحل الثاني في هذه الحالة و لذلك ففي المثال السابق يكون

$$y_2 = x \int \frac{-\int \frac{x-s}{s^2} ds}{x^2} dx = \int \frac{e^{1nx}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = 1nx$$

حيث $a_2(x) = -x^2$ ، $a_1(x) = -x$ هما مما يلي المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + y = 0$$

المصادر

١. محمد بن عبد الرحمن القويز، صالح عبد الله السنوسي، محمود احمد

عطوة، مبادئ التحليل الحقيقي – الجزء الاول، مطابع جامعة الملك

سعود، ١٤١٨هـ (١٩٩٧م)

٢. صالح عبد الله السنوسي، محمد بن عبد الرحمن القويز، مبادئ التحليل

الحقيقي – الجزء الثاني، مطابع جامعة الملك سعود ١٩٨٨م

٣. محمد بن عبد الرحمن القويز، التحليل المركب-الجزء الاول، مطابع

جامعة الملك سعود ١٩٨٨م