



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

بعض تطبيقات نظرية المارتينجال

في سوق المال

بحث مقدم الى قسم الرياضيات /كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
جامعة القادسية كأستكمال جزئي لمتطلبات نيل درجة بكالوريوس علوم في
الرياضيات

من قبل الطالبة:

نغم غانم عبد

بإشراف د. إحسان جبار كاظم

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ اَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ
عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صدق الله العلي العظيم

سورة التوبة (١٠٥)

الإهداء

يا من احمل اسمه بكل افتخار

يا من يرتعش قلبي لذكرك

اهدي هذا البحث إلى أبي

إلى حكمتي...وعلمي

إلى أدبي...وحلمي

إلى طريقي... المستقيم

إلى طريق... الهدايا

إلى ينبوع الصبر والتفاؤل و الأمل

إلى كل من في الوجود بعد الله ورسوله

أمي الغالية

إلى سندي وقوتي وملأذي بعد الله

إلى من أثروني على أنفسهم

إلى من علموني علم الحياة

إلى من اظهروا لي ما هو أجمل من الحياة

إخوتي

إلى من كانوا ملاذي وملجئي

إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات

إلى من سأفتقدهم.....وأتمنى إن يفتقدوني

إلى من جعلهم الله إخوتي.....ومن أحببتهم بالله طلاب قسم الرياضيات

إلى من يجمع بين سعادتي وحزني

إلى من لم اعرفهم..... ولن يعرفوني

إلى من أتمنى إن اذكرهم.....إذا ذكروني

إلى من أتمنى إن تبقى صورهم..... في عيوني

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين رسول الحق وحبيب رب
العالمين سيدنا ومولانا وشفيعنا ابا القاسم محمد وعلى اله وصحبه اجمعين المتنجسين
الميامين، اتقدم بالشكر الجزيل والثناء الجميل لكل من مديد العون وساندني في اتمام
هذا البحث.

وكما اخص بالشكر مشرفي على البحث الدكتور (احسان جبار كاظم)

لما قدمه لي من مساعدة . . .

المحتويات

الصفحة

الفصل الاول

- ١ - فضاء الاحتمالات المنتهي
- ٢ - التوقعات
- ٩ - التوقعات المشروطة
- ١٥ - خصائص التوقعات المشروطة

الفصل الثاني

٢٢

المارتينجال

الخلاصه

تناولنا في هذا البحث بعض تطبيقات الاحتمالية و
نظرية المارتينجال في السوق المال والاوراق المالية
حيث تطرقنا هنا للنماذج المتقطعة فقط.

المقدمة

الرياضيات المالية من مواضيع الرياضيات التطبيقية التي تلعب دوراً مهماً في حياة الإنسان . فعنينا في هذا البحث بدراسة بعض النماذج المتقطعة التي تصف أسعار الأسهم وخاصة ما يتعلق بنظرية المارتينجال

يتكون البحث من فصلين:-

تناولنا في الفصل الأول فضاءات الاحتمال المنتهي وبعض التطبيقات في سوق المال.

أما في الفصل الثاني فتناولنا نظرية المارتينجال وأعطينا بعض الخواص المارتينجال وقدمنا بعض النماذج الرياضية التي تستخدم المارتينجال في سوق المال.

الفصل الاول

قضاء الاحتمالات المنتهي

Finite Probability Space

الفصل الأول

فضاء الاحتمالات المنتهية

Finite probability Space

أما نعرفه: فضاء الاحتمالات المنتهية

تتألف الاحتمالات المنتهية من فضاء العينة Ω وأحداث

قياس p . فضاء العينة عبارة عن مجموعة منتهية غير خالية

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

ويكون قياس الاحتمال p دالة تعين لكل عنصر ω من Ω رقم

في $[0, 1]$ بحيث أن

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

الحدث: مجموعة جزئية من Ω تحدد أحوال وقوع الحدث

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

أمثلة

أفترض أننا قمنا بقاء عملة ثلاث مرات فضاء العينة

$$\Omega = \{\omega; \omega = HHH, HHT, HTH, THH, THT, TTH, TTT\}$$

أفترض أن احتمال الاحتمالات متساوية

$$p(H) = p$$

والاحتمال الآخر كتابه

$$p(T) = q = 1 - p$$

نقترح اننا الرصيات مستقلة ، ثم مقياس احتمال p هو

$$p(w) = \begin{cases} p^3 & \text{if } w = HHH \\ p^2q & \text{if } w = HHT, HTH, THH \\ pq^2 & \text{if } w = HTT, THT, TTH \\ q^3 & \text{if } w = TTT \end{cases}$$

ان الفضاء (Ω, p) هو فضاء احتمال منتهي

ليكن A حدث لأول اختيار

$$\begin{aligned} \therefore p(A) &= p\{w: w = HHH, HTH, HHT, HTT\} \\ &= p^3 + p^2q + p^2q + pq^2 \\ &= p^2(p+q) + pq(p+q) \\ &= p^2 + pq \\ &= p(p+q) \\ &= p \end{aligned}$$

1-2 تعريف : المتغير العشوائي Random Variable

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي Ω ، المتغير العشوائي X

هو قيمه حقيقيه معرفه على Ω ، توزيع X هو احتمال X

3- كل قيم X اي $X = x$

1-1 ملاحظه : المتغير العشوائي ليس توزيع و التوزيع

ليس متغير عشوائي

مثال (1-2)

النتظر على المثال (1-1) لتكن $p=q=1/2$ يعرف المتغير

العسوائي

$X =$ العدد الكلي للصواب

$Y =$ العدد الكلي للخطأ

لاحظ ان $X \neq Y$ لان $Y = 2 - X$ واحتمالية التوزيع لـ X هي

$$P_X(X=0) = P\{w: w = TTT\} = 1/8$$

$$P_X(X=1) = P\{w: w = TTH, THT, HTT\} = 3/8$$

$$P_X(X=2) = P\{w: w = THH, HTH, HHT\} = 3/8$$

$$P_X(X=3) = P\{w: w = HHH\} = 1/8$$

واحتمالية التوزيع لـ Y هي

$$P_Y(Y=0) = P\{w: w = HHH\} = 1/8$$

$$P_Y(Y=1) = P\{w: w = THH, HTH, HHT\} = 3/8$$

$$P_Y(Y=2) = P\{w: w = TTH, THT, HTT\} = 3/8$$

$$P_Y(Y=3) = P\{w: w = TTT\} = 1/8$$

$$\therefore P_X = P_Y$$

$$\Rightarrow P_X \equiv P_Y \Rightarrow X \equiv Y$$

3-1 مثال :-

على المثال (1-1) لتكن $p=2/3$ و $q=1/3$ والمتغير العشوائي معرف على

$X =$ العدد الكلي للصواب

$$P_X(X=0) = P\{w: w = TTT\} = 1/27$$

$$P_X(X=1) = P\{w: w = TTH, THT, HTT\} = 6/27$$

$$P_X(X=2) = P\{w: w = THH, HTH, HHT\} = 12/27$$

$$P_X(X=3) = P\{w: w = HHH\} = 8/27$$

نلاحظ ان توزيع X تحت مقياس الاحتمال $(p, q) = (1/2, 1/2)$

يختلف عن توزيع الاحتمالات تحت اطار مقياس الاحتمالات $(p, q) = (2/3, 1/3)$

$$X \equiv Y \not\Rightarrow P_X = P_Y \quad \text{لهذا السبب}$$

التوقعات Expectation

1-3 تعريف:

ليكن X متغير عشوائي معرفاً على فضاء احتمال (Ω, p)

يتم إعطاء القيمة المتوقعة من X من

$$E_X = \sum_{w \in \Omega} X(w) p(w)$$

والتيabin X هو

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X - E_X)^2 = E(X^2) - (E_X)^2$$

2-1 ملاحظة

افترض ان $\tilde{p}$ يكون مقياس احتمال آخر معرف على Ω

$$\tilde{E}_X = \sum_{w \in \Omega} X(w) \tilde{p}(w) \quad \text{ثم القيمة المتوقعة من } X \text{ هي}$$

$$\tilde{p}_X \neq p_X \Rightarrow \tilde{E}_X \neq E_X \quad \text{نلاحظ}$$

1-4 اقرب :- دالة الجدي Conver Function

1- يقال ان الدالة $g(x)$ تكون جدي على الفترة (a, b) اذا كان

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) \quad \text{لكل } x_1, x_2 \text{ تنتمي الى}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{عندما}$$

2- نقول بان الدالة جدي إذا

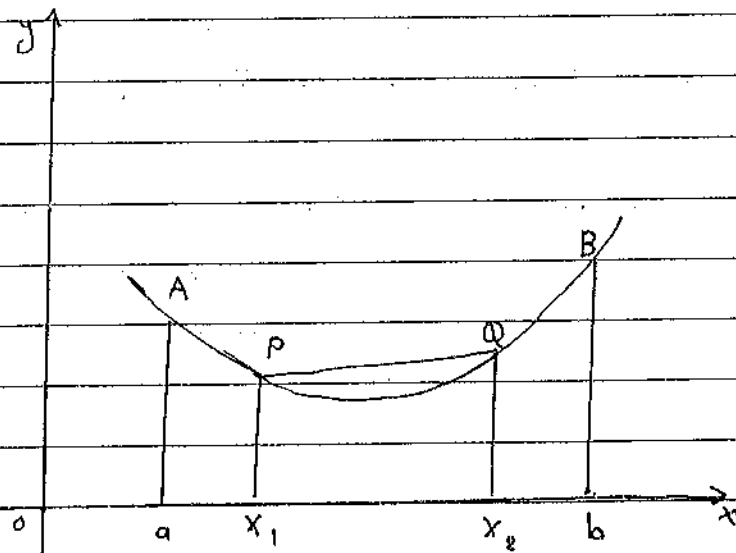
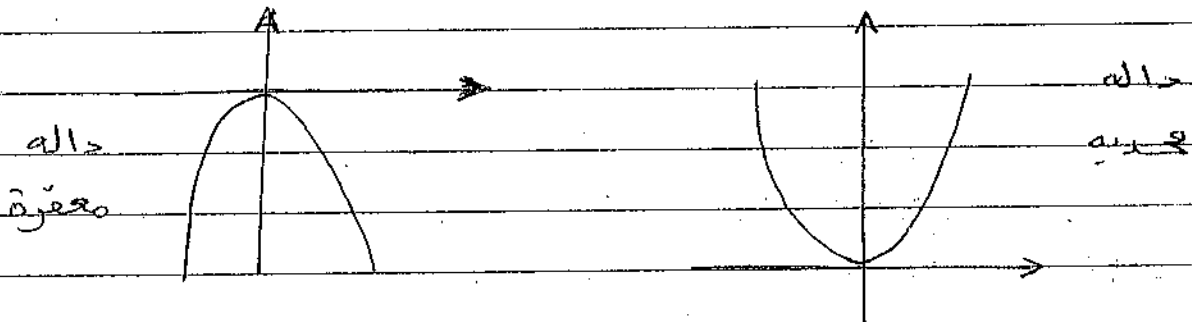
$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$$

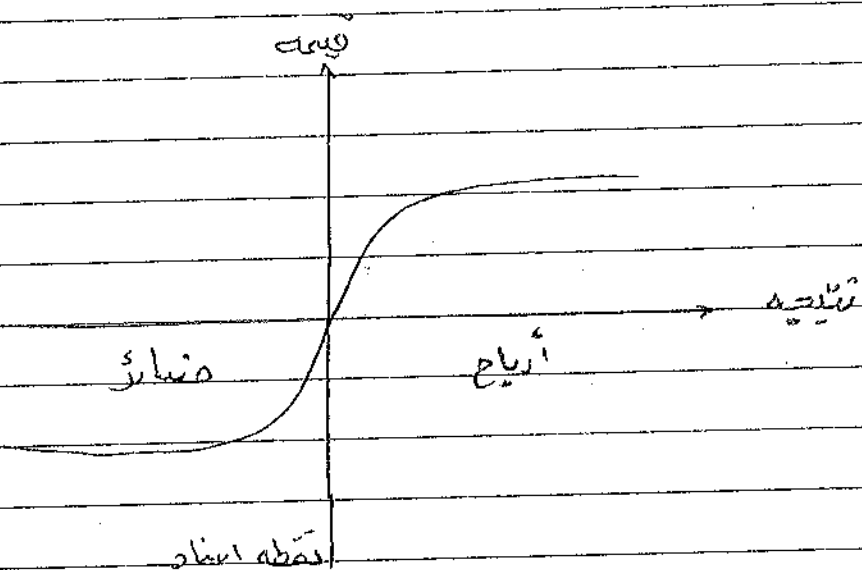
$$0 < \lambda < 1 \quad \text{عندما}$$

3- الدالة $g(x)$ مقعرة اذا كانت $-g(x)$ جدي

1-3 ملاحظة

يصح الاشكال للدوال الجدي والمقعرة





مثال 1-4:

لتكن $g(x) = |x|$

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= |\lambda x + (1-\lambda)y| \\ &\leq \lambda |x| + (1-\lambda) |y| \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \end{aligned}$$

$\therefore g(x)$ دالة مقعرة

مثال 1-4 ملاحظة:

① الدالة المحدبة e^x ، x^2 ، x لكل $x > 0$

② الدالة مقعرة $\sqrt{x}$ ، $\log x$ لكل $x > 0$

③ كلاهما محدب ومقعّر $ax + b$

مبرهنة (1-1):

الدالة محدبة (أو محدبة بحدّة) إذا وفقط إذا كان لها مشتقة

التي هي غير سالبة (موجبة) في كل مكان

1-5 دالة

$$\frac{d^2g}{dx^2} = 2 > 0 \text{ hence } g(x) = x^2 \text{ is convex} \quad (1)$$

is $g(x) = \frac{1}{x^3}$ also

$$x > 0 \text{ is } \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{-2}{x^3} < 0 \text{ hence } g(x) = \frac{-1}{x} \text{ is concave} \quad (2)$$

$$x < 0 \text{ is } \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{-2}{x^3} > 0$$

is $g(x)$ is concave for $x > 0$ and convex for $x < 0$

$$x > 0 \text{ is } \frac{d^2g}{dx^2} = 6x > 0 \text{ hence } g(x) = x^3 \text{ is convex} \quad (3)$$

$$x < 0 \text{ is } \frac{d^2g}{dx^2} = 6x < 0$$

is $g(x)$ is convex for $x > 0$ and concave for $x < 0$

(1.2) Jensen's Inequality

Let X be a random variable with values in (a, b)

Let $\varphi(x)$ be a convex function

$$\therefore E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$$

Proof: - Let $M = E(X)$ then

we can write the Taylor expansion

$$\varphi(x) = \varphi(M) + \varphi'(M)(x-M) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x-M)^2$$

حرف کی بین x و M و N و P والہ حرف

$$\varphi''(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(M) + \varphi'(M)(x-M)$$

وَبِأَمْرِ الْوَقْعِ كُلِّ الْيَافِينِ خُصِلَ عَلَى

$$E(\varphi(x)) \geq E(\varphi(\mu)) + E(\varphi'(\mu)(x - \mu))$$

$$= \varphi(\mu) + \varphi'(\mu) \varepsilon (x - \mu)$$

مسألة: $\varphi'(M)$ و $\varphi(M)$ متوالت

$$= \varphi(\mathcal{M})$$

$$= \varphi(E(x))$$

abz 26 1.5

① عنونا $g(x) = x^2$ الى g نستخدم صيغة المتكاملة في

Tensen's inequality Limit

$$E x^2 \geq (E x)^2 \Rightarrow \text{Var}(X) = E x^2 - (E x)^2 \geq 0$$

$$E(g(x)) = g(E(x))$$

↳ $g(x)$ ist ②

$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x} + b$$

فقال علي ذلك

$$\rightarrow E(g(x)) = E(ax + b)$$

$$= 9Ex + 6$$

$$= g(E_x)$$

المسألة (1-6)

$$E(e^x) \geq e^{E(x)} \quad \leftarrow \text{بواسطة Jensen's inequality}$$

$$E(\log(x)) \leq \log(E(x)) \quad \leftarrow \text{بواسطة Jensen's inequality}$$

$$x < 0 \text{ دالة محدبة، } x > 0 \text{ دالة مقعرة، } x^3 \text{ دالة مقعرة}$$

$$\Rightarrow E(x^3) \geq (E(x))^3 \quad \text{إذا } x > 0$$

$$E(x^3) \leq (E(x))^3 \quad \text{إذا } x < 0$$

التوقعات المشروطة

Conditional Expectation

تعتبر الاحتمالات الحالية للخيار

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

نلاحظ بان

$$\frac{\tilde{p}u}{1+r} + \frac{\tilde{q}d}{1+r} = \frac{1+r-d}{u-d} \cdot \frac{u}{1+r} + \frac{u-1-r}{u-d} \cdot \frac{d}{1+r}$$

$$= \frac{1}{(u-d)(1+r)} [u(1+r-d) + d(u-1-r)]$$

$$= \frac{1}{(u-d)(1+r)} [(1+r)(u-d)]$$

$$= 1$$

$$\therefore \frac{\tilde{p}u}{1+r} + \frac{\tilde{q}d}{1+r} = 1$$

وبذلك، الطريقة: $S_n(W_n)$ يمكن حسابها على

$$S_n(\underline{w}_n) = \frac{\tilde{p}u S_n(\underline{w}_n)}{1+r} + \frac{\tilde{q}d S_n(\underline{w}_n)}{1+r}$$

$$= \frac{1}{1+r} [\tilde{p} S_{n+1}(\underline{w}_n H) + \tilde{q} S_{n+1}(\underline{w}_n T)]$$

يعطينا تعريف التوقع الشرطي لـ S_{n+1} المعلومات حول الزمن

n هي المعلومات المتاحة عند n (مست

$$\underline{w}_n = w_1 w_2 \dots w_n$$

مع ملاحظة $\tilde{p}, \tilde{q}$

$$\tilde{E}[S_{n+1}(\underline{w}_{n+1} | \underline{w}_n)] = \tilde{E}[S_{n+1}(\underline{w}_{n+1})]$$

$$= \tilde{p} S_{n+1}(\underline{w}_n H) + \tilde{q} S_{n+1}(\underline{w}_n T)$$

حيث يمكننا إعادة كتابة المعادلة بشكل آخر:

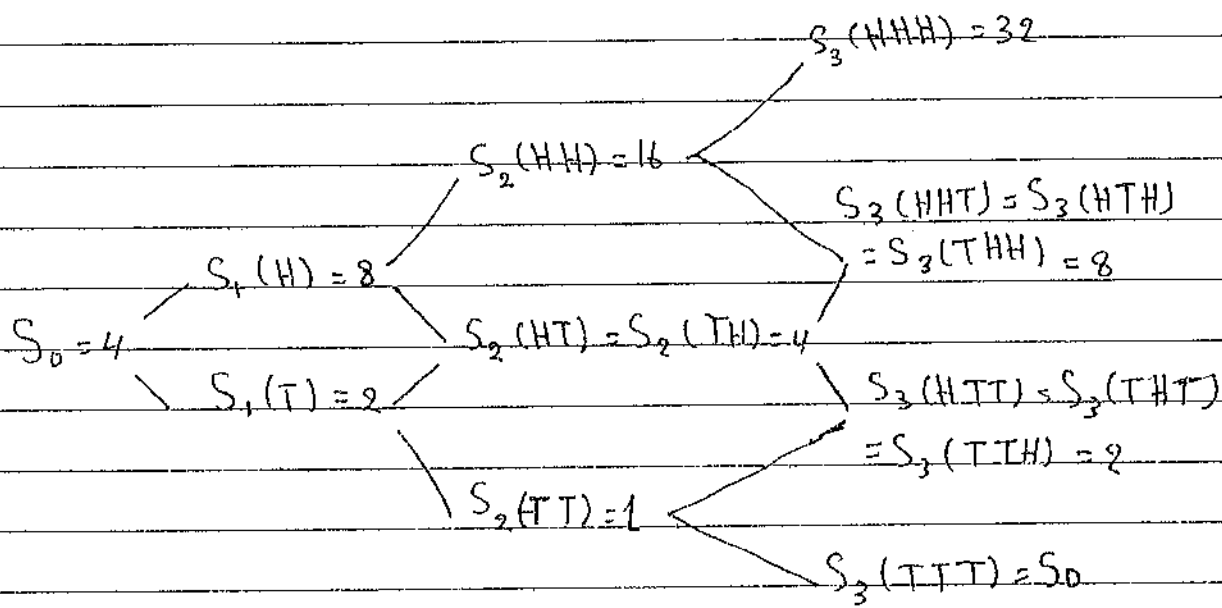
$$S_n(\underline{w}_n) = \frac{1}{r+1} \tilde{E}_n[S_{n+1}(\underline{w}_{n+1})]$$

مثال 7:

$$S_0 = 4, \quad u = 2, \quad d = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{2}$$

وباستخدام الأفضال المتوقعة $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ نجد



(1-1) USW

$$\tilde{E}_1[S_2|H] = \tilde{p} S_2(HH) + \tilde{q} S_2(HT) = \frac{1}{2}(16) + \frac{1}{2}(4) = 10$$

$$\tilde{E}_1[S_2|T] = \tilde{p} S_2(TH) + \tilde{q} S_2(TT) = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(1) = 2.5$$

$$\tilde{E}_2[S_3|HH] = \tilde{p} S_3(HHH) + \tilde{q} S_3(HHT) = \frac{1}{2}(32) + \frac{1}{2}(8) = 20$$

$$\tilde{E}_2[S_3|HT] = \tilde{p} S_3(HTH) + \tilde{q} S_3(HTT) = \frac{1}{2}(8) + \frac{1}{2}(2) = 5$$

$$\tilde{E}_2[S_3|TH] = \tilde{p} S_3(THH) + \tilde{q} S_3(THT) = \frac{1}{2}(8) + \frac{1}{2}(2) = 5$$

$$\tilde{E}_2[S_3|TT] = \tilde{p} S_3(TTH) + \tilde{q} S_3(TTT) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0.5) = 1.25$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1[S_3|H] &= \tilde{p}^2 S_3(HHH) + \tilde{p}\tilde{q} S_2(HHT) + \tilde{p}\tilde{q} S_2(HTH) + \tilde{q}^2 S_2(HTT) \\ &= \frac{1}{2^2}(32) + \frac{1}{2^2}(8) + \frac{1}{2^2}(8) + \frac{1}{2^2}(2) = 12.5 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_1[S_3|T] = \tilde{p}^2 S_3(THH) + \tilde{p}\tilde{q} S_3(THT) + \tilde{p}\tilde{q} S_3(TTH) + \tilde{q}^2 S_3(TTH)$$

$$= \frac{1}{2^2} (8) + \frac{1}{2^2} (8) + \frac{1}{2^2} (8) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2}\right) = 3.125$$

تاكيد ان التوقعات لا تغير ابداً

$$\tilde{E}[S_1] = \tilde{p} S_1(H) + \tilde{q} S_1(T) = \frac{8+2}{2} = 5$$

$$\tilde{E}[S_2] = \tilde{p}^2 S_2(HH) + \tilde{p}\tilde{q} S_2(HT) + \tilde{p}\tilde{q} S_2(TH) + \tilde{q}^2 S_2(TT)$$

$$= \frac{16+4+4+1}{2^2} = 6.25$$

$$\tilde{E}[S_3] = \tilde{p}^3 S_3(HHH) + \tilde{p}^2\tilde{q} S_3(THT) + \tilde{p}\tilde{q}^2 S_3(TTH)$$

$$+ \tilde{q}^3 S_3(TTT) = \frac{32+8+8+8+2+2+2+0.5}{2^3} = 7.8125$$

5- التوقعات

* $H(\underline{w}_n) = \underline{w}_n$ عند المصير في التنبؤ

* $T(\underline{w}_n) = \underline{w}_n$ عند الكتابة في التنبؤ

لنكن $1 \leq n \leq N$ ونسأل $\underline{w}_n$ بالمتغير العشوائي الذي يعتمد على

لنكن $\underline{w}_n$ المتغير العشوائي الذي يعتمد على $\underline{w}_n$ بواسطة

$$\tilde{E}_n[x] = \tilde{E}[x|\underline{w}_n] = \sum_{w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_N} \tilde{p}^{\#H(w_{n+1}, \dots, w_N)} \tilde{q}^{\#T(w_{n+1}, \dots, w_N)} x(\underline{w}_n)$$

$$\sum_{w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_N} = \sum_{w_N = H \text{ or } T} \sum_{w_{n+2} = H \text{ or } T} \sum_{w_{n+1} = H \text{ or } T} \dots$$

(1-6) ملاحظة :-

عندما $N = n+1$ نصل على الحالة التالية

$$\begin{aligned}\tilde{E}_n[X] &= \sum_{w_{n+1} = H \text{ or } T} \tilde{p}^{\#H(w_{n+1})} \tilde{q}^{\#T(w_{n+1})} X(w_{n+1}) \\ &= \tilde{p} X(w_n H) + \tilde{q} X(w_n T)\end{aligned}$$

(1-7) ملاحظة :- لا يمكن التوقع الشرطي لأي معلومات بواسطة

$$\begin{aligned}\tilde{E}_0[X] &= \tilde{E}[X | \underline{w}_0] = \sum_{w_1, w_2, \dots, w_N} \tilde{p}^{\#H(\underline{w}_N)} \tilde{q}^{\#T(\underline{w}_N)} X(\underline{w}_N) \\ &= \tilde{E}[X]\end{aligned}$$

والتوقعات المشروطة تقع جميع المعلومات السابقة

$$\tilde{E}_N[X] = \tilde{E}[X | \underline{w}_N] = X$$

(1-8) ملاحظة :- التوقع الشرطي $\tilde{E}$ يتم حسابه باستخدام حالات

المحاكاة للخام $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$

لحساب التوقع الشرطي $\tilde{E}$ نستخدم الاحتمالات الفعلية $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ لـ X

من $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ على التوالي

(1-9) ملاحظة :-

تلاحظ بان

$$\tilde{p} + \tilde{q} = 1$$

$$\tilde{p}^2 + 2\tilde{p}\tilde{q} + \tilde{q}^2 = 1$$

!

$$\sum_{w_1, w_{n+1}, \dots, w_{n_2}} \tilde{p}^{\#H(w_1, w_{n+1}, \dots, w_{n_2})} \tilde{q}^{\#T(w_1, w_{n+1}, \dots, w_{n_2})} = 1$$

$$\sum_{w_{n_1}, w_{n_1+1}, \dots, w_{n_2}} \sum_P \# H(w_{n_1}, w_{n_1+1}, \dots, w_{n_2}) \# T(w_{n_1}, w_{n_1+1}, \dots, w_{n_2}) \stackrel{\text{Lemma 9}}{=} 1$$

$\uparrow S_n, S_n, S_n \downarrow$

ثبات نسبة الخسوف:

نکته: $H(w_{n_1}, w_{n_2}) = S \cup S'$ و S' عبارت از n_1, n_2 می باشد.

$S \sim \chi^2_{(n_2 - n_1, p)}$

$$\sum_{w_{n1} \dots w_{n2}} \frac{1}{p} \#H(w_{n1} \dots w_{n2}) \cdot \frac{1}{q} \#(w_{n1} \dots w_{n2}) = p(S=0, t, w_{n2}=n_1)$$

$$= \sum_{S=0}^{n_2-n_1} \binom{n_2-n_1}{S} p^S q^{n_2-n_1-S}$$

$$= (-10 + 9) n_2 - n_1 = 1$$

(1-10) ملازمہ :- ایسے ۸ متغیر عشوائی (random) ہوتے ہیں جن کا مشاہدہ اول اختیار (1st) تم

$$E[X] = \sum_{w_1, w_2} p \#H(w_1, w_2) q \#T(w_1, w_2) X(w_1)$$

$$= p^2 X(H) + pq X(H) + pq X(T) + q^2 X(T)$$

$$= pX(H) + qX(T)$$

$$= p_X(H) + q_X(T)$$

$$= \sum_{w_1} p^{\#T(w_1)} q^{\#T(w_1)} X(w_1)$$

پیدا، عام S کی n متغیر عشوائی نمونہ علی N_m اور N_m, m, n اور n کے

$$\begin{aligned}
 E_n[Z] &= \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{1}{p} \#H(w_{n+1} \dots w_N) \frac{1}{q} \#T(w_{n+1} \dots w_N) Z(w_m) \\
 &= \sum_{w_{n+1} \dots w_m} \frac{1}{p} \#H(w_{n+1} \dots w_m) \frac{1}{q} \#T(w_{n+1} \dots w_m) Z(w_m) \\
 &\quad \times \sum_{w_{m+1} \dots w_N} \frac{1}{p} \#H(w_{m+1} \dots w_N) \frac{1}{q} \#T(w_{m+1} \dots w_N)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_n[Z] = \sum_{w_{n+1} \dots w_m} \frac{1}{p} \#H(w_{n+1} \dots w_m) \frac{1}{q} \#T(w_{n+1} \dots w_m) Z(w_m)$$

خصائص التوقعات المتكررة

ليكن N عدد طبيعي، وليكن X و Y متغيرات عشوائية لأول N خطوات

تتبع N ، وليكن $0 \leq n \leq N$. ننتقل إلى التوقع المتكرر الخطوة

$$E_n \text{ في } w_n$$

الخاصية 1: linearity التكرار

$$E_n[c_1 X + c_2 Y] = c_1 E_n[X] + c_2 E_n[Y]$$

حيث c_1, c_2 ثوابت

الاستبدال: من خلال تعريف التوقع المتكرر

$$E_n[X] = \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{1}{p} \#H(w_{n+1} \dots w_N) \frac{1}{q} \#T(w_{n+1} \dots w_N) X(w_N)$$

الآن، عتد X و Y متغيرات عشوائية اعتماداً على N خطوات

لنرى الأولى، $c_1 X + c_2 Y$ متغيرات عشوائية اعتماداً

على N خطوات، متكررة، وبالتالي

$$E_n[C_1 X + C_2 Y] = E[C_1 X + C_2 Y | \underline{w}_n]$$

$$= \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{\#H(w_{n+1} \dots w_N)}{p} \frac{\#T(w_{n+1} \dots w_N)}{q}$$

$$[C_1 X(w_N) + C_2 Y(w_N)]$$

$$= C_1 \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{\#H(w_{n+1} \dots w_N)}{p} \frac{\#T(w_{n+1} \dots w_N)}{q} X(w_N)$$

$$+ C_2 \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{\#H(w_{n+1} \dots w_N)}{p} \frac{\#T(w_{n+1} \dots w_N)}{q} Y(w_N)$$

$$= C_1 E[X | \underline{w}_n] + C_2 E[Y | \underline{w}_n]$$

$$= C_1 E_n[X] + C_2 E_n[Y]$$

الخطوة 2: اخرج ما هو معروف

إذا X معروف على أول N خطوات العالم، لنفرض

Iterated Conditioning

الخطوة 3: إذا

$$E_n[E_m[X]] = E_n[X]$$

إذا $0 \leq n \leq m \leq N$ فإن

$$E[E_n[X]] = E[X]$$

فإن

البيانات: لنفرض $Z = E_m[X]$ فإن Z بالتحديد معرفة على $\underline{w}_m$ فقط، و

$$E_n[E_m[X]] = E_n[Z] = \sum_{w_{n+1} \dots w_N} \frac{\#H(w_{n+1} \dots w_N)}{p} \frac{\#T(w_{n+1} \dots w_N)}{q} Z(w_N)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{w_{n+1} \dots w_m} p^{\#H(w_{n+1} \dots w_m)} q^{\#T(w_{n+1} \dots w_m)} Z(w_m) \\
&\quad \times \sum_{w_{m+1} \dots w_N} p^{\#H(w_{m+1} \dots w_N)} q^{\#T(w_{m+1} \dots w_N)} \\
&= \sum_{w_{n+1} \dots w_m} p^{\#H(w_{n+1} \dots w_m)} q^{\#T(w_{n+1} \dots w_m)} Z(w_m) \\
&\quad \times \sum_{w_{m+1} \dots w_N} p^{\#H(w_{m+1} \dots w_N)} q^{\#T(w_{m+1} \dots w_N)} X(w_N) \\
&= \sum_{w_{n+1} \dots w_N} p^{\#H(w_{n+1} \dots w_N)} q^{\#T(w_{n+1} \dots w_N)} X(w_N) \\
&= E_n[X]
\end{aligned}$$

independence of the variables

$n+1, n+2, \dots, N$ are independent of w_n

$$E_n[X] = E[X]$$

// intuition

$w_{n+1}, \dots, w_N$ are independent of w_n

$$E_n[X] = E[X | w_n]$$

$$= \sum_{w_{n+1} \dots w_N} p^{\#H(w_{n+1} \dots w_N)} q^{\#T(w_{n+1} \dots w_N)} X(w_{n+1} \dots w_N)$$

$$= \sum_{w_{n+1} \dots w_N} p^{\#H(w_{n+1} \dots w_N)} q^{\#T(w_{n+1} \dots w_N)} X(w_{n+1} \dots w_N)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\underline{w}_n} p \#H(\underline{w}_n) q \#T(\underline{w}_n) \\
&\quad \times \sum_{w_{n+1} \dots w_N} p \#H(w_{n+1} \dots w_N) q \#T(w_{n+1} \dots w_N) X(w_{n+1} \dots w_N) \\
&= \sum_{\underline{w}_N} p \#H(\underline{w}_N) q \#T(\underline{w}_N) X(\underline{w}_N) \\
&= E[X]
\end{aligned}$$

Conditional Jensen's Inequality :- 5 and 13

X is a random variable $g(x)$ is convex

$$E[g(x)] \geq g(E[x])$$

$$q = \frac{1}{3}, p = \frac{2}{3} \quad (1, 7) \text{ and } (1, 8)$$

① linearity is

Logic

$$E_1[S_2|H] = \frac{2}{3} \times 16 + \frac{1}{3} \times 4 = 12$$

$$E_1[S_3|H] = \frac{4}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{1}{9} \times 2 = 18$$

$$E_1[S_1|H] + E_1[S_2|H] = 12 + 18 = 30$$

is also

$$E_1[S_2 + S_3|H] = \frac{4}{9} \times (16 + 32) + \frac{2}{9} \times (16 + 8) + \frac{2}{9} \times (4 + 8)$$

$$+ \frac{1}{9} \times (4 + 2) = 30$$

$$\Rightarrow E_1[S_1 + S_3|H] = E_1[S_1|H] + E_1[S_3|H]$$

② - Taking out what is known استخراج ما هو معروف

نلاحظ بأن S_1 يعتمد على اختيار اللاعب الأول W_1

$$E_1[S_2 | H] = 12$$

$$\Rightarrow S_1(H) E_1[S_2 | H] = 8 \times 12 = 96$$

$$E_1[S_1 S_2 | H] = \frac{2}{3} \times 128 + \frac{1}{3} \times 32 = 96$$

$$\Rightarrow E_1[S_1 S_2 | H] = S_1(H) E_1[S_2 | H]$$

③ Iterated Conditioning

$$E_2[S_3 | HH] = \frac{2}{3} \times 32 + \frac{1}{3} \times 8 = 24$$

$$E_2[S_3 | HT] = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 6$$

$$E_2[S_3 | TH] = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 6$$

$$E_2[S_3 | TT] = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E_1[E_2[S_3] | H] = \frac{2}{3} E_2[S_3 | HH] + \frac{1}{3} E_2[S_3 | HT]$$

$$= \frac{2}{3} \times 24 + \frac{1}{3} \times 6 = 18$$

$$E_1[E_2[S_3] | H] = \frac{4}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{1}{9} \times 2 = 18$$

$$E_1[S_3 | T] = \frac{4}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = 4.5$$

$$E_1[E_2[S_3] | T] = \frac{2}{3} E_2[S_3 | TH] + \frac{1}{3} E_2[S_3 | TT]$$

$$= \frac{2}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} = 4.5$$

$$\therefore E_1[E_2[S_2]] = E_1[S_2]$$

⑨ Independence الاستقلال

independent

$$\frac{S_2(HH)}{S_1(H)} = \frac{16}{8} = 2 = \frac{S_2(TH)}{S_1(T)}$$

$$\frac{S_2(HT)}{S_1(H)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{S_2(TT)}{S_1(T)}$$

مما يعني أن S_2 مستقل عن نتيجة الاختيار الثاني W_2

$$E_1 \left[\frac{S_2}{S_1} | H \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_2(HH)}{S_1(H)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{S_2(HT)}{S_1(H)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{16}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E_1 \left[\frac{S_2}{S_1} | T \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_2(TH)}{S_1(T)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{S_2(TT)}{S_1(T)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow E \left[\frac{S_2}{S_1} | H \right] = E \left[\frac{S_2}{S_1} | T \right] = \frac{3}{2}$$

$$E \left[\frac{S_2}{S_1} \right] = p^2 \frac{S_2(HH)}{S_1(H)} + p q \frac{S_2(HT)}{S_1(H)} + p q \frac{S_2(TH)}{S_1(T)} + q^2 \frac{S_2(TT)}{S_1(T)}$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{16}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow E \left[\frac{S_1}{S_1} \right] = E \left[\frac{S_2}{S_1} \right] = \frac{3}{2}$$

⑤ Jensen's Inequality عدم المساواة Jensen

ان كانت $g(x) = x^2$ دالة مقعرة

$$E_1(S_2 | H) = p \int_2^2 (HH) + q \int_2^2 (HT) = \frac{2}{3} \times (6)^2 + \frac{1}{3} (4)^2 = 17.6$$

$$E_1(S_2 | T) = p \int_2^2 (TH) + q \int_2^2 (TT) = \frac{2}{3} (4)^2 + \frac{1}{3} (1)^2 = 11$$

$$(E_1(S_2 | H))^2 = (p S_2(HH) + q S_2(HT))^2 = \left(\frac{2}{3} (6) + \frac{1}{3} (4) \right)^2 = 121$$

$$(E_1(S_2 | T))^2 = (p S_2(TH) + q S_2(TT))^2 = \left(\frac{2}{3} (4) + \frac{1}{3} (1) \right)^2 = 9$$

$$E_1(S_2^2 | H) > (E_1(S_2 | H))^2 \quad \text{هذا يعني ان}$$

$$E_1(S_2^2 | T) > (E_1(S_2 | T))^2$$

$$\Rightarrow E_1(S_2^2) > (E(S_2))^2$$

الفصل الثاني

المارتينجال

Martingales

الفصل الثاني

مارتينجال Martingales

فإن خلال

$$S_n(\underline{w}_n) = \frac{1}{r+1} \tilde{E}_n[S_{n+1}(\underline{w}_{n+1})]$$

ويقسم كلا الجانبين من المعادلة أعلاه بواسطة $(1+r)^n$ فنحصل

على

$$\frac{S_n(\underline{w}_n)}{(1+r)^n} = \tilde{E}_n \left[\frac{S_{n+1}(\underline{w}_{n+1})}{(1+r)^{n+1}} \right] \quad (2-1)$$

حيث S_n سعر السهم في الوقت n
 و $\frac{S_n}{(1+r)^n}$ سعر الخصم في الزمن n

r هو سعر الفائدة منذ وقت n إلى $n+1$.

فإن خلال المعادلة (2-1) نستنتج أنه في ظل الافتقالات المحايدة

المخاطر، القيمة المتوقعة لسعر الخصم في الزمن $n+1$

هي نفس قيمة المعلومات في الزمن n هي نفس أسعار الأسهم

المختلفة في الزمن n التي تنفي بهذا الشرط أن S_n Martingale

في ما يلي نعرف مارتينجال فيما يتعلق الافتقالات الفعلية

وبالمثل يمكننا تعريف مارتينجال مع وجود الافتقالات المحايدة

للمخاطر عن طريق الاستعانة بـ E بواسطة $\tilde{E}$

2-1 تعريف :-

العمليات العشوائية $\{M_n\}_{n=1}^N$ تسلسل عمليات تصادفية متوافقة

إذا M_n يعتمد فقط على اولى عمليات n (ميت بحت) مستقل

$\{M_n\}_{n=1}^N$ توافق $\Rightarrow$ M_1 يعتمد فقط على w_1
 M_2 يعتمد فقط على w_1, w_2
 M_n يعتمد فقط على $w_1, w_2, \dots, w_n$

2-1 ملاحظة :-

إذا كان $\{M_n\}_{n=1}^N$ عمليات تصادفية متوافقة

$$E_n [M_n] = E[M_n | w_n] = M_n$$

2-2 تعريف :-

انظر في نموذج تسعير الاصول العشوائية الحرة N لتكن $\{M_n\}_{n=1}^N$

M_0 ثابت

$$M_n = E_n [M_{n+1}], \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad \text{إذا (1)}$$

(2-2)

نقول هذه العملية مارتينجال "فوق" (ميل الى الارتفاع) أو "فانحسار"

$$M_n \leq E_n [M_{n+1}], \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad \text{إذا (2)}$$

نقول هذه العملية مارتينجال "جزئي" (ميل الى الارتفاع)

$$M_n \geq E_n [M_{n+1}], \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad \text{إذا (3)}$$

نقول هذه العملية مارتينجال "سوبر" (ميل الى الانخفاض)

(2-2) ملاحظة 1 -

لا بد ان $\{M_n\}$ عبارة مارتينجال $\hat{M}$

$$M_{n+1} = E_{n+1}[M_{n+2}] \Rightarrow E_n[M_{n+1}] = E_n[E_{n+1}[M_{n+2}]]$$

$$\Rightarrow E_n[M_{n+1}] = E_n[M_{n+2}]$$

$$\Rightarrow M_n = E_n[M_{n+2}]$$

من العبارة السابقة $\{M_n\}$ مارتينجال اذا وفقت اذا

$$M_n = E_n[M_m], \quad n \leq m \leq N \quad (2-3)$$

(2-3) ملاحظة 1 -

ان توقع مارتينجال ثابت على كل الزمن اي اذا كان $\{M_n\}$ هو

$$M_0 = E M_n \quad n = 0, 1, \dots, N \quad \text{مارتينجال}$$

$$M_0 = E_0 M_1 = E M_1 \quad \text{لاحظ ان}$$

$$M_1 = E_1 M_2 \Rightarrow E M_1 = E[E_1 M_2] = E M_2$$

$\vdots$

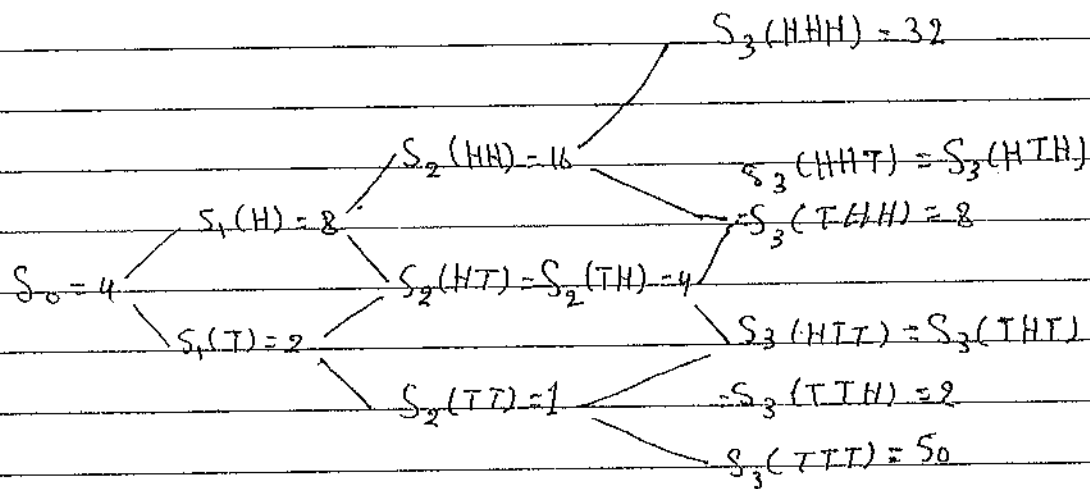
$$M_n = E_n M_{n+1} \Rightarrow E M_n = E[E_n M_{n+1}] = E M_{n+1}$$

عندما M_0 ثابت

$$M_0 = E M_0 = E M_1 = \dots = E M_N$$

النتيجة :-

في خلال النموذج الثاني الثلاثي التالي :-



نفس (2-1) نموذج ولا يتغير فترات من 1

نقطة وجود و هو ب لا يتغير (2-1) نفس

$$E_0[S_1|S_0] = pS_1(H) + qS_1(T) = \frac{1}{3} \times 8 + \frac{2}{3} \times 2 = 4 = S_0$$

$$E_1[S_2|H] = pS_2(HH) + qS_2(HT) = \frac{1}{3} \times 16 + \frac{2}{3} \times 4 = 8 = S_1(H)$$

$$E_1[S_2|T] = pS_2(TH) + qS_2(TT) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 1 = 2 = S_1(T)$$

$$\Rightarrow E_1[S_2] = S_1$$

$$E_2[S_3|HH] = pS_3(HHH) + qS_3(HHT) = \frac{1}{3} \times 32 + \frac{2}{3} \times 8 = 16 = S_2(HH)$$

$$E_2[S_3|HT] = pS_3(HTH) + qS_3(HTT) = \frac{1}{3} \times 8 + \frac{2}{3} \times 2 = 4 = S_2(HT)$$

$$E_2[S_3|TH] = pS_3(THH) + qS_3(THT) = \frac{1}{3} \times 8 + \frac{2}{3} \times 2 = 4 = S_2(TH)$$

$$E_2[S_3|TT] = pS_3(TTH) + qS_3(TTT) = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 0 = 2 = S_2(TT)$$

$$\Rightarrow E_2[S_3] = S_2$$

$$E_1[S_3|H] = p^2 S_3(HHH) + pq S_2(HHT) + pq S_2(HTH) + q^2 S_1(HTT)$$

$$= \frac{1}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{4}{9} \times 2 = 8 = S_1(H)$$

$$E_1[S_3|T] = p^2 S_3(THH) + pq S_2(THT) + pq S_2(THH) + q^2 S_1(TTT)$$

$$= \frac{1}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = 2 = S_1(T)$$

$$\Rightarrow E_1[S_3] = S_1$$

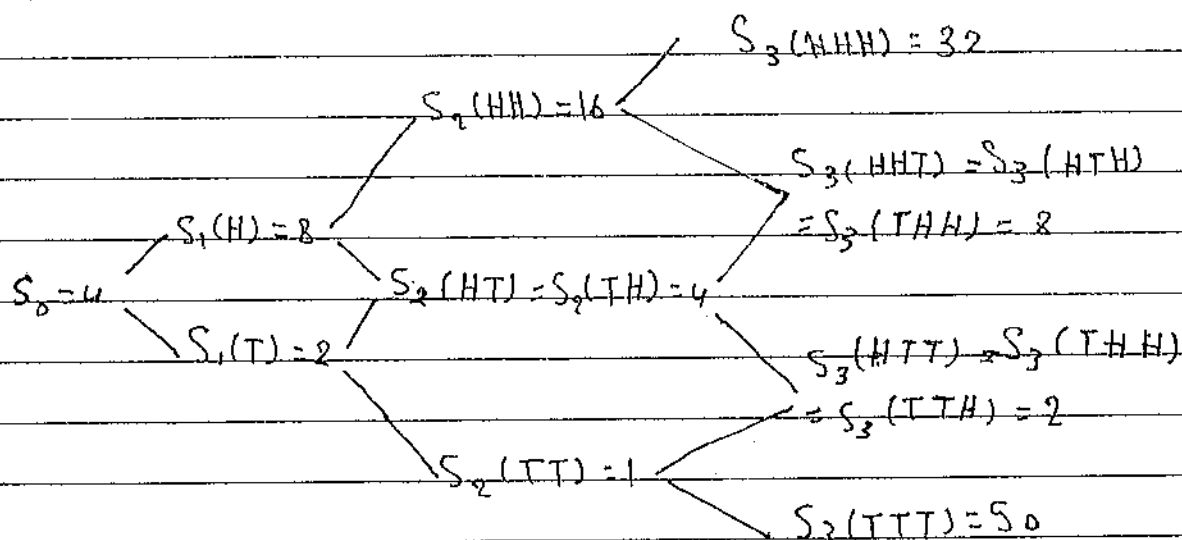
من اجل

$$E_n[S_m] = S_n$$

$$0 \leq n \leq m \leq 3$$

ومن هنا الاحتمالات: $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ وبتساوي الاحتمال
 $\{p = \frac{1}{2}, q = \frac{2}{3}\}$

2-2 مثال: من خلال الموقف الثلاث قرات 3 و 8 3



(2-2) ل 55

نفس $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ (نفس الأعداد، بعبارة أخرى)

$$E_0[S_1|S_0] = pS_1(H) + qS_1(T) = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 6 = \frac{3}{2} S_0$$

$$E_1[S_2|H] = pS_2(HH) + qS_2(HT) = \frac{2}{3} \times 16 + \frac{1}{3} \times 4 = 12 = \frac{3}{2} S_1(H)$$

$$E_1[S_2|T] = pS_2(TH) + qS_2(TT) = \frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 1 = 3 = \frac{3}{2} S_1(T)$$

$$\Rightarrow E_1[S_2] = \frac{3}{2} S_1$$

$$E_2[S_3|HH] = pS_3(HHH) + qS_3(HHT) = \frac{2}{3} \times 32 + \frac{1}{3} \times 8 = 24 = \frac{3}{2} S_2(HH)$$

$$E_2[S_3|HT] = pS_3(HTH) + qS_3(HTT) = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 6 = \frac{3}{2} S_2(HT)$$

$$E_2[S_3|TH] = pS_3(THH) + qS_3(THT) = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 6 = \frac{3}{2} S_2(TH)$$

$$E_2[S_3|TT] = pS_3(TTH) + qS_3(TTT) = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} S_2(TT)$$

$$\Rightarrow E_2[S_3] = \frac{3}{2} S_2$$

$$E_1[S_3|H] = p^2 S_3(HHH) + p q S_2(HHT) + p q S_3(HTH) + q^2 S_3(HTT)$$

$$= \frac{4}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 8 + \frac{1}{9} \times 2 = 18 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_1(H)$$

$$E_1[S_3|T] = p^2 S_3(THH) + p q S_2(THT) + p q S_3(TTH) + q^2 S_3(TTT)$$

$$= \frac{4}{9} \times 8 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{1}{9} \times 1 = \frac{9}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_1(T)$$

$$\Rightarrow E_1[S_3] = \frac{3^2}{2^2} S_1$$

هنا يثبت $E_n[S_m] = \left(\frac{3}{2}\right)^{m-n}$ $S_n \geq S_n$ $0 \leq n \leq m \leq 3$

وبالتالي - بفرض العايد في S_0, S_1, S_2, S_3 هو مارتيغال جزئي حيث

قياس الاحتمال $\{p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}\}$

افترضنا ان سعر الفائدة $r = \frac{1}{4}$

وسعر السهم يتحقق في اذن من n هو $\frac{S_n}{(1+r)^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$

$E\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} S_{n+1} | \mathcal{W}_n\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} E_n[S_{n+1}]$

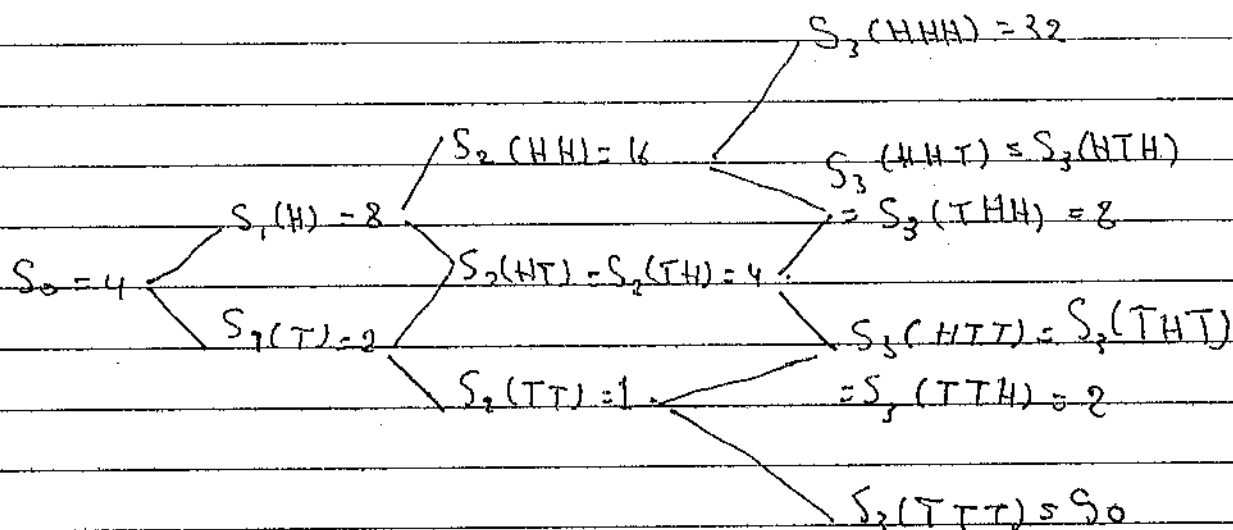
$= \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \frac{3}{2} S_n$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} S_n \geq \left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$

وبالتالي فان سعر انخفاض السهم هو مارتيغال جزئي تحت قياس الاحتمال

$\{p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}\}$ هذا هو كمال عادة في الاسواق الحقيقية

2-3 مثال



مثال (2-3) نموذج ثلاث فترات

نقترح احتمالاً $\tilde{p} = 1/2$ و $\tilde{q} = 1/2$ نقترح احتمالاً $\tilde{p} = 1/2$ و $\tilde{q} = 1/2$

$$\tilde{E}_0[S_1|S_0] = \tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T) = \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 2 = 5 = \frac{5}{4}S_0$$

$$\tilde{E}_1[S_2|H] = \tilde{p}S_2(HH) + \tilde{q}S_2(HT) = \frac{1}{2} \times 16 + \frac{1}{2} \times 4 = 10 = \frac{5}{4}S_1(H)$$

$$\tilde{E}_1[S_2|T] = \tilde{p}S_2(TH) + \tilde{q}S_2(TT) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2} = \frac{5}{4}S_1(T)$$

$$\Rightarrow \tilde{E}[S_2] = \frac{5}{4}S_1$$

$$\tilde{E}_2[S_3|HH] = \tilde{p}S_3(HHH) + \tilde{q}S_3(HHT) = \frac{1}{2} \times 32 + \frac{1}{2} \times 8 = 20 = \frac{5}{4}S_2(HH)$$

$$\tilde{E}_2[S_3|HT] = \tilde{p}S_3(HTH) + \tilde{q}S_3(HTT) = \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 2 = 5 = \frac{5}{4}S_2(HT)$$

$$\tilde{E}_2[S_3|TH] = \tilde{p}S_3(THH) + \tilde{q}S_3(THT) = \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 2 = 5 = \frac{5}{4}S_2(TH)$$

$$\tilde{E}_2[S_3|TT] = \tilde{p}S_3(TTH) + \tilde{q}S_3(TTT) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4} = \frac{5}{4}S_2(TT)$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_2[S_3] = \frac{5}{4}S_2$$

$$\tilde{E}_1[S_3|H] = \tilde{p}^2S_3(HHH) + \tilde{p}\tilde{q}S_3(HHT) + \tilde{p}\tilde{q}S_3(HTH) + \tilde{q}^2S_3(HTT)$$

$$= \frac{1}{4} \times 32 + \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{25}{2} = \left[\frac{5}{4}\right]^2 S_1(H)$$

$$\tilde{E}_1[S_3|T] = \tilde{p}^2S_3(THH) + \tilde{p}\tilde{q}S_3(THT) + \tilde{p}\tilde{q}S_3(TTH) + \tilde{q}^2S_3(TTT)$$

$$= \frac{1}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{25}{8} = \left[\frac{5}{4}\right]^2 S_1(T)$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_1[S_3] = \frac{5^2}{4^2} S_1$$

$$\tilde{E}_n[S_m] = \left(\frac{5}{4}\right)^{m-n} S_n \geq S_n \quad 0 \leq n < m \leq 3$$

وبالتالي فان العملية $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ هي مارتينغال جزئي تحت

$$\text{صمد قطر الاحتمال } \{\tilde{p} = 1, \tilde{q} = \frac{1}{2}\}$$

افترض ان سعر الفائدة $r = \frac{1}{4}$. سعر انخفاض السهم في الوقت n هو

$$\frac{S_n}{(1+r)^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$$

الآن لدينا

$$\tilde{E}_n[S_{n+1}] = \frac{5}{4} S_n$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \tilde{E}_n[S_{n+1}] = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \times \frac{5}{4} S_n$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} S_{n+1}\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$$

وبالتالي فان سعر انخفاض السهم هو عبارة عن داجر دافع للخاطر

$$\text{الاحتمالات: } \{\tilde{p} = \frac{1}{2}, \tilde{q} = \frac{1}{2}\}$$

1-2 مير هينه :-

$$0 < d < 1+r < u$$

لتكن الاحتمالات حدود المخاطر تحقق

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

ثم فان الاحتمالات حدود المخاطر وسعر انخفاض السهم هو مارتينغال

$$\tilde{E}\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \frac{S_n}{(1+r)^n}$$

البرهان ٢ -
 أول برهان // لنفرض w_n و w_{n+1}

$$\begin{aligned} E_n \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] &= \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} S_{n+1}(w_H) + \tilde{q} S_{n+1}(w_T) \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p}_u S_n(w) + \tilde{q}_d S_n(w) \right] \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n} \times \frac{\tilde{p}_u + \tilde{q}_d}{1+r} \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n} \quad (\tilde{p}_u + \tilde{q}_d) / (1+r) = 1 \text{ بحسب } \end{aligned}$$

ثاني برهان // نلاحظ بان $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ و S_{n+1} متغيران عشوائيان

$$\begin{aligned} E_n \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] &= E_n \left[\frac{S_n}{(1+r)^{n+1}} \times \frac{S_{n+1}}{S_n} \right] \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n} E_n \left[\frac{1}{1+r} \times \frac{S_{n+1}}{S_n} \right] \\ &\quad (\text{المتوسط الشرطي}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{S_n}{(1+r)^n} \times \frac{1}{1+r} E \left[\frac{S_{n+1}}{S_n} \right] \\ &\quad (\text{المتوسط الكلي}) \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n} \times \frac{\tilde{p}_u + \tilde{q}_d}{1+r} = \frac{S_n}{(1+r)^n} \end{aligned}$$

الملاحظة: كل فترة للوقت t ذات الحدين المتغيرة N_t و σ

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

(2-4)

عندما Δ_n حصة السهم في الوقت n يعبر فقط اولا، العلامات، لتفقيه

n وايضا S_n وسعر السهم في الزمن n يعبر فقط على اولا، العلامات، لتفقيه

n ثم العلامات المستوائيه $\{\Delta_n\}$ و $\{S_n\}$ عليه تصادف فيه توافقته

وبالتالي فاننا عليه الحافظه X_n هي ايضا تصادف فيه توافقته

2-2 مبرهنة

من خلال نفوذ في الثاني الحدين للفرقة $\{\Delta_n\}_{n=0}^{N-1}$ دع حصة الاسهم

عليه تصادف فيه توافقته لتكن العلامات الحافظه X_n التي

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

ولكن لا ثابت، عليه تصادف فيه توافقته وتكون $\sum_{n=0}^N \frac{X_n}{(1+r)^n}$

هو ما ينبغي تحت الاحتمالات الحادية المخاطر

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \tilde{E}_n \left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-5)$$

البرهان في

ليسا

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n \left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] &= \tilde{E}_n \left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \right] \\ &= \tilde{E}_n \left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] + \tilde{E}_n \left[\frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \right] \end{aligned}$$

(الخطا)

$$= \Delta_n \tilde{E}_n \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}$$

(استخراج هو ما سبرونا)

$$= \frac{\Delta n S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n - \Delta n S_n}{(1+r)^n}$$

مبرهنة (2-1)

$$= \frac{X_n}{(1+r)^n}$$

(2-1) نتيجة:

في ظل ظروف نظرية (2-2) لدينا

$$\tilde{E}_n \left[\frac{X_n}{(1+r)^n} \right] = X_0$$

$$n=0, 1, 2, \dots, N$$

(2-6)

(2-4) ملاحظة:

في نموذج (2-2) الملاحظة في دراسة المتكاملات، X يمكن أن يكون هناك

مترادفه في نموذج ذو الحدين، أكثر من ذلك هناك مترادفه في

مثال نموذج ذو الحدين للفترة واحدة، $X_0 = 0$ و $X(H) > 0$

$$\text{و } X_1(T) > 0 \iff \tilde{E}(X_0) = 0 \text{ عموماً}$$

$$\tilde{E} \left[\frac{X_1}{1+r} \right] = \frac{1}{1+r} [\tilde{p} X_1(H) + \tilde{q} X_1(T)] > 0$$

هنا يعني

$$0 < \tilde{E} \left[\frac{X_1}{1+r} \right] + \tilde{E}(X_0) = X_0 = 0$$

وهو ما يقضي - إذا استلزمنا إيجاد احتمالات، فبايرة الخطأ في نموذج

يؤدي إلى مترادفه في النموذج وهذا ما يسمى، انظره لا أساسيه

الاولى لاسعار الأسهم

(2-3) برهنة [الاصلاحية الاولى] لأسعار التسعير $\frac{1}{1+r}$ -

لا يوجد حكم $\Rightarrow$ هناك مقياس احتمالي بحيث يكون الخلفاء

السعر عليه S_n هو مارتيغال

(2-4) برهنة [مربعة التسعير الخالية للمخاطر] $\frac{1}{1+r}$

من خلال الفترة N لنفرض تسعير الأصول الاسمية مع $u < 1+r < d$ و

مع محايي المخاطر الاحتمالية قياسها $\tilde{P}$ ، لتكن V_n متغير عشوائي

(مشتقة الامتياز في الزمنية N) لعقد على رصيدة V_N حيث

$$V_n(\underline{w}_n) = \frac{1}{1+r} [\tilde{p} V_{n+1}(\underline{w}_n H) + \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_n T)] \quad (2-7)$$

$n=0, 1, 2, \dots, N-1$

فإن

$$V_n = E_n \left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}} \right] \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (2-8)$$

كذلك، مشتقة الخلفاء السعر

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = E_n \left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (2-9)$$

فلاذا (2-9) $\frac{1}{1+r}$

نلاحظ باننا اخترنا قياس محايي المخاطر ليحل سعر الخلفاء لهم

مارتيغال ونقيمه لبرهنة (2-4) فإن أسعار الخوفاق المالية

المشتقة المقصود في إطار التسعير المحايي للمخاطر هي أيضاً مارتيغال

2-4 مثال

ارم عمده قراراً و تکراراً افتاده

$$p(H) = p(T) = \frac{1}{2}$$

ولیکن
 اذا j th ریمه هو H
 اذا j th ریمه هو T

$$X_j = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

من خلال الاعمال المستوانه M_0, M_1, M_2 المرفعه بواسطه $M_0 = 0$

وتمثل العمل المستوانه بطريقه متتاليه

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad n \geq 1$$

① نبدأ من M_0, M_1 هو مارتنجال

② اظهار ذلك

$$S_n = e^{\alpha M_n}$$

 $n = 0, 1, 2, \dots$
 هو مارتنجال جبرتي

③ اظهار بان

$$S_n = \left(\frac{2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \right)^n e^{\alpha M_n}$$

 $n = 0, 1, 2, \dots$

هو مارتنجال

الحل
 ①
$$\begin{aligned} E_n(M_{n+1}) &= E_n(M_n + X_{n+1}) \\ &= E_n(M_n) + E(X_{n+1}) \\ &= M_n + E(X_{n+1}) \end{aligned}$$

(عنما M_n نكافئ X_{n+1} متساو لـ M_n)

$$\begin{aligned} &= M_n + (1) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} \\ &= M_n \end{aligned}$$

من M_n هو مارتنجال

$$\textcircled{2} E_n(S_{n+1}) = E_n(e^{aM_{n+1}})$$

$$= E_n(e^{a(M_n + X_{n+1})})$$

$$= E_n(e^{aM_n}) E_n(e^{aX_{n+1}})$$

$$= e^{aM_n} E(e^{aX_{n+1}})$$

"بما أن X_{n+1} و M_n لهما توزيع مستقل"

$$(M_n \text{ و } X_{n+1} \text{ لهما توزيع مستقل})$$

$$= e^{aM_n} \left[e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}} \right] \geq e^{aM_n}$$

$$= S_n$$

S_n هو متزايد

$$\textcircled{3} E_n(S_{n+1}) = E_n\left(\left(\frac{2}{e^a + e^{-a}}\right)^{n+1} e^{aM_{n+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{e^a + e^{-a}}\right)^{n+1} E_n(e^{aM_{n+1}})$$

$$= \left(\frac{2}{e^a + e^{-a}}\right)^{n+1} \left[\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right] e^{aM_n}$$

$$= \left(\frac{2}{e^a + e^{-a}}\right)^n e^{aM_n}$$

$$= S_n$$

S_n هو متزايد

المصادر

1. Stochastic calculus for finance I: the binomial Asset pricing model by steven E. shreve , spinger , 2004
2. Stochastic calculus for finance II: continuous time model by steven E. shreve , spinger , 2004
3. Brownian motion calculus by ubbo f wiersema , john wiley & sons , ltd 2008
4. Basic sytochastic process by Adzistaw Brrzezniak and Tomasz zastawniak , Springer 1999