



جمهورية العراق / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية / كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

الفضاء المتراص Compact Space

بحث تخرج تقدم به الطالب

مصدق غريب جلال الحمداني

الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات / قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

إشراف

أ.م.د. رعد عزيز

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(رَبِّ أَوْزِرْ عَنِّي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى
وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَصْلِحْ لِي فِي ذُرِّيَّتِي إِنِّي
نُتِبْتُ إِلَيْكَ وَإِنِّي مِنَ الْمُسْلِمِينَ)

صدق الله العلي العظيم

أهدي ثمرة جهدي هذا

الى مهد الحضارة ومهبط الأنبياء ... الى ارض الشهداء والتضحيات
العراق .. العظيم

الى من جرع الكاس فارغاً ليسقيني قطرة حب
الى من كلت انامله ليقدم لنا لحظه سعادة
الى من حصد الاشواق عن دربي ليمهد لي طريق العلم
الى القلب الكبير والدي العزيز

الى من ارضعتني الحب والحنان
الى رمز الحب وبلسم الشفاء
الى القلب الناصع بالبياض
والدتي .. الحبيبة

الى الحاضر الغائب .. الى وطني الصغير .. الى والدي الثاني
أخي .. حبيبي .. غزواني

الى الذين بذلوا كل جهد وعطاء لكمي اصل الى هذه اللحظة
أساتذتي .. الكرام
الأساتذة الفاضل رعد عزيز

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الخلق والمرسلين نبينا محمد
صلى الله عليه وسلم وعلى آله الطيبين الطاهرين.

أول الشكر وآخره أقدم به إلى المنعم الباري عز وجل (الله) سبحانه وتعالى، الذي أحاطني
برعايته الإلهية العظيمة، وسر لي كل عسير، وألهمني الصبر والقوة في شق طريقي نحو البحث
العلمي.

وأتوجه بخالص شكري وتقديري وعظيم امتناني إلى أستاذي الفاضل القدير
الأستاذ الدكتور / رعد

وإلى من تعجز كلماتي وتنحني هامتي لمظيم عطاها، شمس حياتي التي لا تيب
وسيلي إلى الجنة، إلى من وصفها منذ صغري بالجليل في شموخها، وعظمتها
وبالجليل في صبرها وجلدها، وكالندى في حنانها الذي لا ينهي، إليك (يا أمي)
أطال الله في عمرك في صحة وخير حال.

وإلى كل من شدوا أزرني وشاطروني أمري لأكمل الخطوات لولا هم بعد الله سبحانه وتعالى
لاعتذر القلم عن رسم الكلمات (إخوتي) أطال الله أعماركم بالصحة والسعادة وسدد طريق الخير لخطاكم.
وأخيراً لأبد من كلمة شكر ومحبة وامتنان إلى كل من شد من أزرني، وكل من
ساندني في عملي وأعطاني القدرة والإصرار في تحقيق هدي حتى
لو كان بكلمة تشجيع واحدة، ومن فاتي ذكر أسمائهم، جزاهم الله خير الجزاء.

المحتويات	الصفحة
الفصل الاول	
١-١ الغطاءات المفتوحة	١
٢-١ نظريه كانتور للفترات المتداخلة	٣
٣-١ خاصيه التقاطع المنته	٩
الفصل الثاني	
١-٢ القيمة العظمى والصغرى	١١
٢-٢ التراص ومتسلمات الانفصال	١٢
٣-٢ خاصيه كون الفضاء هاوسدورف على المجموعات والفضاءات المتراسة	١٣
٤-٢ الفضاءات المتراسة موضعا	١٩
٥-٢ الفضاء المنفصل	١٩
٦-٢ فضاءات بيير	٢١

٢ المجموعة

التراكم هو تقسيم لبعض خواص المجموعات المحددة

والمخلقة في فضاء الأعداد الحقيقية حيث مثال

نظريات تلعب دوراً هاماً في أغلب الرياضيات من نظرية

لهاين - بوريل حيث تنص «إن كل مجموعة جزئية

من الأعداد الحقيقية تكون محكمة إذاً كانت

مخلقة ومحددة ، نظرية بولزانو - فيرشترايس والتي

تنص على أن أي مجموعة جزئية غير متناهية من مجموعة مخلقة

في الأعداد الحقيقية لها نقطة تراكم ونظرية كانتور السطح

والتي تنص على «إنه إذا كانت $\{f_n\}$ متسلسلة

تتقارب من المجموعات المخلقة الغير خالية في

الفضاء المترية (X, d) وكانت $\lim d(f_n) = 0$

فإن $\bigcap f_n \neq \emptyset$

Compact Spaces

المقدمة

ندرس في هذا الفصل خاصية تبادلية لها دوراً فعالاً وبارزاً ليس
في إتمامات، أو بوليمية قحسب، بل في التحليل أيضاً وكثيراً من فروع
الرياضيات المختلفة. هذا الخاصية هي خاصية التراص، ولول فكرة ساهمت
في وضع نظرية متعمق التراص، ففتح مجال الدراسة هي نظرية هائيل.
يوريك المعروفة في تحليل، كتحقيقة والتي تقرر الإلبي

إذا كان X مجموعة ميزية مغلقة ومحددة ونقطة الأعداد الحقيقية
فإن أي عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة في R والتي إختيارها
يحتوي على x قيمة عائلة ميزية متناهية فـ x بحيث إن اتحادها
يحتوي على x أيضاً

ونظرية هائيل-يوريك هذه لها نتائج كثيرة منها: أنه إذا كانت
الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وحسب نقل الدالة f
إلى قيمتها الأعلى والتي قيمتها الفرق على الفترة المغلقة $[a, b]$
الفترة المغلقة $[a, b]$ تتسم فترة متزامنة من كانت محددة أيضاً. وهذا
النظرية الخاصة بتراص، إثباتات، المغلقة

لأن تكون المجموعة الجزئية A من فضاء متري متراصة يجب أن تكون
مغلقة فريدة. ولكن هذا التعريف غير مناسب للاستخدام مع الفضاءات
التوبولوجية الأكثر تعقيداً من الفضاءات المترية وذلك لمجموعة استخدام
مفهوم المجموعات المحددة

لتعريف المجموعة المتراصة في فضاء متري تقيد طريقتان الأولى
بإستخدام مفهوم تقاطع النجح والآخر باستخدام مفهوم انقطاع
المفتوحة الطريقتان متكافئتان وذلك تحت تفيد فرق بينهما فالأولى
تمتاز بسهولة الإستيعاب وبسهولة التطبيق ولكنها لا تسمح بتعريف
على الفضاءات المترية سوى الفضاء المترى أما التعريف الثاني فهو كافي
مع التعريف الأول في حالة فضاء متري فمثلاً على أية يمتاز بإمكانية
تسمية على فضاءات أكثر تعقيداً من الفضاءات المترية

الفصل الاول

1.1 الفضاءات المفتوحة (الفصل الأول)

تعريف

نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{A})$ ، فضاء مفتوح

للمجموعة A هو، ليجمع $\{G_i\}_{i \in I}$ من المجموعات المفتوحة G_i والتي إنفاضا

كون المجموعة A أي أن $A \subseteq \bigcup_i G_i$ ، فضاء جزئي من فضاء مفتوح

$\{G_i\}_{i \in I}$ هو ليجمع الجزئي $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ من A بحيث أن

$$A \subseteq \{G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n\}$$

مثال

نفرض أن $A = \{x, y\}$ ونفرض أن العائلة $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ حيث $G_n = \{n, n+1\}$

نظام للمجموعة A ، فضاء جزئي $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$

هو فضاء جزئي من A كوني المجموعة A

تعريف

نفرض أن $(X, \mathcal{A})$ فضاء توبولوجي نعال إن المجموعة جزئية $A \subseteq X$

مترابطة إذا كان كل فضاء مفتوح لهذا المجموعة يحوي فضاء جزئياً

مترابطة

مثال

المجموعة $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ليست مترامية لأن باختيار العائلة

$$G = \left\{ \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

كقطار متوحد للمجموعة A . لحساب إمكانية وجود القطار الجزئي للمجموعة

A ، نلاحظ أولاً أن كل عنصر من عناصر القطار G يمكن أن يكتب على شكل $\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

العائلة الجزئية $G' = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1 \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \right\}$ لا تكون قطاراً جزئياً

للمجموعة A وذلك لعدم وجود قطار للعناصر $\frac{1}{3} \in A$ حيث $\frac{1}{3} \notin A$

$$\frac{1}{3} \notin \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right)$$

وهكذا في كل مرة نحاول السفر إلى فترة سوف يبقينا عنصرين عقاباً

مثال

المجموعة $A = \{1, 2\} \subset \mathbb{R}$ ليست مترامية لأن باختيار العائلة

كقطار للمجموعة A تكون من قتران متوحد ولذا هذا

القطار لا يحتوي على أي قطار جزئي منه وبذلك فلا بد أن يكون باختيار

أي فترة منه عندهم G عملاً لعائلة $(1, 2)$ حيث إن العائلة

$G = \{(0, 2), (2, 4), (4, 6)\}$ لا تكون قطاراً جزئياً للمجموعة $A = \{1, 2\}$ ولذا لا يكون عنصر $2 \in A$

يكون قطاراً وهذا يعني أن G لا يحتوي على أي قطار جزئي للمجموعة A

مثال

المجموعة $A=R$ ليست متناهية، إلا أن اختيار العائلة $G=\{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$

كغطاء للمجموعة الإعداد، حقيقة $A=R$ ولذا لا تحتوي على أي غطاء جزئي

حيث إن أي محاولة للاستمرار ولو بغير واحدة من عناصر G سوف يتسبب

في عدم وجود غطاء لعدد $A=R$ فعلى أساس المثال لو تم الاستمرار

الفترة (2,4) فإن عدد في أي مجموعة نهائية

1-2 نظرية كانتور للفترة المتناهية

إذا كانت $\{a_n, b_n\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ متتالية من الفترات المتناهية

والمتماسة فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{a_n, b_n\} \neq \emptyset$ وإذا كان طول هذه الفترات يتناقص

للعدد فإن تقاطع هذه الفترات يكون على صورة نقطة واحدة

البرهان

بما إن $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ لكل عدد صحيح موجب n ، فإن المتواليات

$\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ لهما حدود، والحد الأدنى للفترة $[a_n, b_n]$ لها خواص

التالية ① $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

② $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$

بتطبيق نفس الفكرة على الفترة $[a_1, b_1]$ فيكون لدينا واحد من الفترتين

$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ و $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ لا يمكن تقصيلها بعد مضي عدد من الخطوات

امتنوح نفرض ان $[a_2, b_2]$ هو احد الفترتين $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ و $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

الذي لم يقسم بعد مضي عدد من الخطوات و اعتنا انما امتنوح 0

بالتكرار هذه العملية لتصل الى ما هو البتة عن فقرات امثلة امثلة

$\{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ والى ستر بأن اي مثل لا يقسم بعد

مضي عدد من الخطوات امتنوح 0 . بالاسهام الاستقرائي نستطيع

الحصول على ان $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$ لذلك نستطيع القول بأن اول طول

للفترات $[a_n, b_n]$ يتقارب الى الصفر

بالاسهام نظرية الفترات للتصور امثلة مكنه ان نوجد نقطة في

تقاطع كل هذه الفترات امثلة امثلة $P \in [a_n, b_n]$ لكل n بما ان

$P \in [a, 1]$ فانه تقيد فترة مفتوحة $0 < \epsilon$ بحيث ان $P \in (P-\epsilon, P+\epsilon)$

انتهى يوجد $\epsilon > 0$ بحيث تكون $(P-\epsilon, P+\epsilon) \cap [a, 1] \neq \emptyset$ نضع N عدد صحيح

موجب $\frac{1}{2^N} < \epsilon$ فانه $P \in [a_N, b_N]$ فانه $P \in (P-\epsilon, P+\epsilon) \cap [a_N, b_N]$

وهذا امثلة امثلة تقوية $[a_N, b_N]$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $[a_N, b_N]$

لا يمكن تقصيلها. هذا التناقض بيننا بيننا يوجد نظام عددي مثل $[0, 1]$ متناهية

نظرية ٥.٥.٥ لنكن $(Y, \mathcal{U})$ فضاء طوبولوجيا $F_1(x_1) \rightarrow$ دالة متصلة من الفضاء

الترتيب $(Y, \mathcal{U})$ إلى فضاء إقليدي $(Y, \mathcal{U})$ ، فإذا كانت $A \subseteq X$ مجموعة

مترابطة في X فإن $F(A)$ تكون أيضا مترابطة في Y .

البرهان ٥.٥.٥ نفرض أن A مجموعة مترابطة في X وأن $\{G_i : i \in I\}$ نظام

مفتوح للمجموعة $F(A)$ ، أي أن $F(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ ، نريد أن

$$A \subseteq F^{-1}(F(A)) \subseteq F^{-1}(\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} F^{-1}(G_i)$$

وعلى ذلك فإن $(F^{-1}(G_i))$ نظام مفتوح للمجموعة A ، لأن الدالة متصلة

و $\{G_i : i \in I\}$ مجموعة مفتوحة في Y فإن $F^{-1}(G_i)$ تكون مجموعات مفتوحة

لكل i ، بما أن A مجموعة مترابطة فإن النظام $(F^{-1}(G_i))$ يحتوي على نظام جزئي

مترابطة وليكن

$$\{F^{-1}(G_{i_1}), F^{-1}(G_{i_2}), \dots, F^{-1}(G_{i_m})\}$$

، يجب أن

$$A \subseteq F^{-1}(G_{i_1}) \cup F^{-1}(G_{i_2}) \cup \dots \cup F^{-1}(G_{i_m})$$

وعليه فإن

$$F(A) \subseteq F[F^{-1}(G_{i_1}) \cup F^{-1}(G_{i_2}) \cup \dots \cup F^{-1}(G_{i_m})] \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

$$\cup \dots \cup G_{i_m}$$

ومن ثم فإن $F(A)$ تكون

مجموعة مترابطة

مثال ٥.٥: في المستوى R مع القياس $\|\cdot\|$ فليعتبر الفترة

(a, b) فترة وذلك باعتبارها صورة فترية للفترة

(٥.١) تحت تأثير الدالة

$$P_1(0,1) \rightarrow (a,b)$$

المعرفة بالصورة $f(x) = (b-a)x + a$ لكل $ab \in R$ حيث $a \neq b$

٥) في مستوى $X = R \times R$ مع القياس $\|\cdot\|$ فليعتبر الفترة

$$C = \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

تعتبر فترة فترية لكنها صورة فترية للفترة (٥.٢)

تحت تأثير الدالة المعرفة بالصورة $f(t) = (\cos t, \sin t)$

الآن: هل الفترة الجزئية من الفضاء المترابطة تكون أيضًا مجموعة مترابطة؟

للإجابة على هذا السؤال نرجع إلى الأمثلة السابقة فنلاحظ أن الفترة

المحدودة والمغلقة (٥.١) هي ذات الأبعاد R تكون فترة (نظرية هاين-بوريل).

في حين أن الفترة المفتوحة (٥.١) ليست فترة مع كونها مجموعة

جزئية من الفترة المترابطة (٥.١). لهذا فانه ليس من الضروري أن تكون

المجموعات الجزئية من الفضاء المترابطة هي مجموعة مترابطة. أمّا إذا تحقق

فترابطة المجموعة الجزئية من الفضاء المترابط يبدو أنه خلال التناظرية

التالي.

تظروا

المجموعة الجزئية للعلاقة في الفضاء المتري هي أيضا مترية

المبرهان

نقترح أن A مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء المتري (X, d)

ونفرض أن (G_i) تسلسل مفتوح للمجموعة المغلقة A . أي أن $A \subseteq \bigcup G_i$

سنذكر كذا $x = \bigcup (G_i) \cap A^c$ ومان A^c مجموعة مفتوحة فإن $(G_i) \cap A^c$

هو تسلسل مفتوح للمجموعة X . ومان لفضاء (X, d) من الصيغة (x, ϵ) فكل

جزء من A^c وليكن

$$[G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m}, A^c]$$

بجسبات

$$X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m} \cup A^c$$

$$A^c = A \cup A^c$$

$$A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

وذلك يعني أن أي تسلسل مفتوح (G_i) للمجموعة A يحتوي على تسلسل جزئي

محتة $(G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m})$ وذلك أن A مجموعة مغلقة

يدل أن كوننا أن المجموعة الجزئية المغلقة في الفضاء المتري تكون دائما مغلقة

ولكن رب اسأل قسائل هل كل مجموعة جزئية مغلقة هي بالضرورة

مجموعة مغلقة في أي فضاء آخر هذا عكس النظرية السابقة صحيح دائما.

المثال التالي يبين أن ذلك ليس بالضرورة أن يكون صحيحا دائما.

مثال ٥

نفرض أن $\mathcal{C} = \{X, \emptyset, (a), (b, c), (a, b, c)\}$ توبولوجيا

على المجموعة X غير خالية $X = (a, b, c)$ ، نفرض أن $A = (a, b) \subseteq X$

واضح أن المجموعة A ليست مغلقة ولكن $(a), (b, c), (a, b, c)$

كلها مفتوح للمجموعة A . ومن ثم بالاستمرار أي عنصر من عناصر الفضاء

المفتوح نحصل على كلها جزئي مفتوح . إذا المجموعة A متراصة ولكنها ليست

مغلقة

1-3 خاصية التقاطع المنتهية Finite Intersection property

تعريف ٥

يقال أن عائلة المجموعات (A_i) تحقق خاصية التقاطع المنتهية

إذا كان تقاطع أي عائلة فرعية منتهية $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ وليس مفرقة

غير خالية أي أن:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$$

مثال ٦

العائلات $\left[(0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \dots \right]$ تحقق خاصية التقاطع المنتهية

وذلك لأن تقاطع أي عائلة فرعية منتهية $\left[(0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \dots, (0, \frac{1}{n}) \right]$

هي مجموعة غير خالية لأن

$$(0,1) \cap (0, \frac{1}{2}) \cap (0, \frac{1}{3}) \cap \dots \cap (0, \frac{1}{n}) = (0,b) \neq \emptyset$$

حيث أن

$$b = \min \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right]$$

مثال ٥٥

العائلة $\mathcal{C} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ ليس لها خاصية التقاط لمتناهية

$$[2,4] \cap [5,7] = \emptyset$$

فذلك ليس المثال

الامتدادات لنفسها من العلاقة بين مجموع خاصية التقاط لمتناهية وبين نفس الخاصية. لكنه العلاقة يمكن صياغتها في نظرية المتناهية.

نظرية ٥٥

القضاء المتداولي $(x, +)$ يكون متكاملاً إذا وافقه ذلك أن

لكل عائلة $\{F_i\}_{i \in I}$ من المجموعات يوجد x خاصية التقاط لمتناهية

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

البرهان ٥٥

فرض أن $(x, +)$ قضاء متكاملاً وأن $\{F_i\}_{i \in I}$ عائلة من المجموعات

المتعلقة التي لها خاصية تقاطع لمتناهية والمطلوب إثبات أن $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$

نشره حيث أن $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ بالمستحتم قانون دي مورجان

(De Morgan) نصل إلى أن

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \emptyset^c = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i^c = X$$

الفصل الثاني

وبذلك تكون العائلة $\{P_i^c\}$ مغايرة مغنوعة للفضاء المتراس (X, Π) وعليه

فإن يوجد فضاء متراس مست $\{P_{i_1}^c, P_{i_2}^c, \dots, P_{i_m}^c\}$ بحيث إن $\{P_{i_1}^c \cup P_{i_2}^c \cup \dots \cup P_{i_m}^c\}$

وأيضاً أسفهام قانون دي مورغان فإن

$$\emptyset = X^c = (P_{i_1}^c \cup P_{i_2}^c \cup \dots \cup P_{i_m}^c)^c = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_m}$$

وعليه فإن $\{P_i\}$ لا تحقق خاصية التقاطع المست وهذا يتناقض مع الفرض

بأن العائلة تحقق خاصية التقاطع المست إذا $\bigcap_{i \in I} P_i \neq \emptyset$

لإثبات الإيجابية المعاكس نفرض إن الفضاء (X, Π) غير متراس إذا يوجد فضاء

مفتوح $\{G_i\}_{i \in I}$ من المجموعات المفتوحة في X وهذا الفضاء لا يحتوي على أي فضاء مست

فإن عائلة المجموعات المغلقة $\{G_i^c\}$ لها خاصية التقاطع المست وهذا يرقم

إن $\bigcap G_i^c = \emptyset$ وهذا يعني إن عائلة المجموعات المغلقة $\{G_i^c\}_{i \in I}$ مست

لا تحقق خاصية التقاطع المست

نظرية العظمى والعظمى (العمل الثاني)

نفرض إن $R: X \rightarrow R$ دالة متصلة من الفضاء المتراس (X, Π) إلى مجموعة

الاعداد الحقيقية R فأن يوجد $c, d \in X$ بحيث إن $P(c) \leq P(x) \leq P(d)$

لك $x \in X$

البرهان

لما إن (X, Π) فضاء مترامح وإن R و L دالة متصلة فإن $(X) = A$

مجموعة مترامية في R و m ثم فهي مغلقة بسوف عادلة إثبات إن A

تتوي أصغر الأكبر M و أصغر الأصغر m و m ثم m و M متساويان

$$M = f(c), m = f(d), d \in X, c \in X$$

أولاً إذا كانت A تتوي أصغر الأكبر. قابل بالادلة

$$[(-\infty, a) : a \in A]$$

ذلك أن كل نقطة في A تتوي أصغر الأكبر. و m و M متساويان

A دلياً $[(-\infty, a_1), (-\infty, a_2), \dots, (-\infty, a_n)]$. فإذا كانت a_1 هو أكبر

عنصر أصغر $a_1, a_2, \dots, a_n$ فإن $(-\infty, a_1) \cup (-\infty, a_2) \cup \dots \cup (-\infty, a_n)$ و هذا اتحاد

$$A \subseteq [(-\infty, a_1) \cup (-\infty, a_2) \cup \dots \cup (-\infty, a_n)]$$

إذا A تتوي أكبر عناصرها وهو M

بالمثل يمكن إثبات أن A تتوي أصغر عناصرها و هو m

2-2 // التماس و وسائل الاتصال

Compactness and Separation Axioms

هناك سوف نقوم بدراسة العلاقة بين مفاهيم التماس و وسائل الاتصال

2-3

فستعرف دور خاصية كون الفضاء هيلبرت في البرهان

المبرهنات

المبرهنات

لنكن A مجموعة متناهية في الفضاء الهيلبرتي (X, t) فإذا كان

الفضاء (X, t) هو فضاء T_2 فإذا

$$\forall x \in X, x \notin A, \exists G, H \in T: x \in G, A \subseteq H, G \cap H = \emptyset$$

البرهان

نقرضات $A \subseteq X$ مجموعة متناهية وأن $x \notin A$ لأي $x \in A$

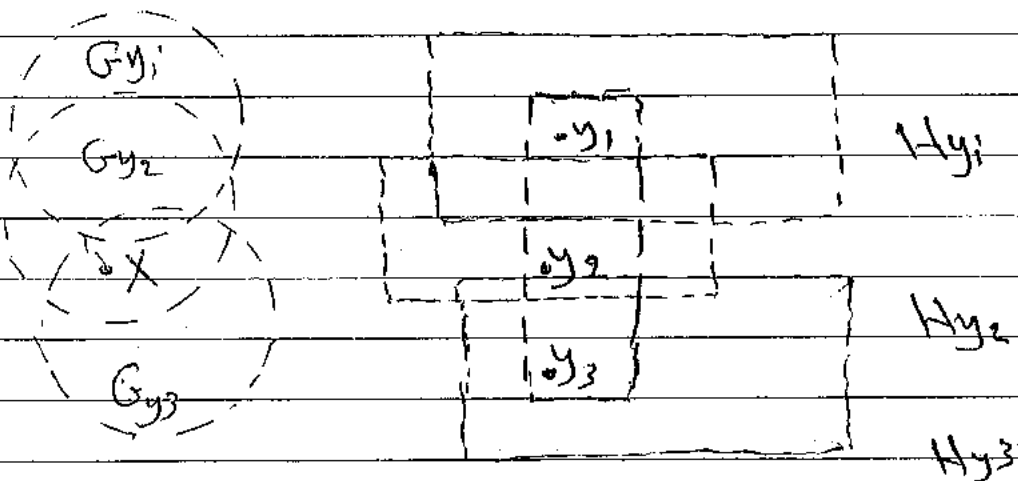
فإن $x \neq y$ وموجب أن الفضاء (X, t) هو فضاء T_2 فإنه توجد مجموعتان

مفتوحتان G_1, H_1 بحيث تكون $G_1 \cap H_1 = \emptyset, x \in G_1, y \in H_1$

حيث $y \in A$ فإن $G_1 \cap A = \emptyset$ (تؤلف G_1 مفتوحاً الهلبرتي

المتناهية A ومن ثم فإنه يوجد فضاء جزئي مفتوحاً الهلبرتي A والتي

$$A \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = H \text{ بحيث يكون } H = A \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$$



نفر من أن $G = G_{y_1} \cap G_{y_2} \cap \dots \cap G_{y_m} = G$ فإن الصورة G هي صورة

مفتوحة لأنها تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة وكذلك الصورة H

هي صورة مفتوحة لأنها التقاطع لعدد منته من مجموعات مفتوحة أيضا وعليه

فإن

$$G \cap H = G \cap (H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \dots \cup H_{y_m})$$

$$= (G \cap H_{y_1}) \cup (G \cap H_{y_2}) \cup \dots \cup (G \cap H_{y_m})$$

نتيجة ٥٥

كل مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء T_2 هي مجموعة مفتوحة

البيان ٥٥

لنكن A مجموعة جزئية من الفضاء X و (X, τ) وليكن

$p \in A$ نقطة بحيث أن $p \notin A$ ما أن (X, τ) هو فضاء T_2 فإنه ينشأ

عن النظرية السابقة عائلة تسمى كانت مفتوحة G, H بحيث يكون

$$\forall p \in G, A \subset H, G \cap H \neq \emptyset$$

وهنا يتقدم أن $A \subset G \subset A^\circ$ ولكل $p \notin A$ ولذا يثبت أن p نقطة داخلية

للمجموعة A° ما أن النقطة p نقطة اختيارية فإن A حار لكل نقطة من

تقاطعها مع G فهي مجموعة مفتوحة.

المثال الثاني يوضح أنه إذا لم يكن الفضاء T_2 فإنه لا توجد مجموعة مفتوحة

ولكننا غير مطلقة.

مثال ٥٥

نفرض أن $X = [a, b, c]$, $\phi(a) = (b, c)$, $\tau = [X, \phi(a), (b, c)]$ ثوبولوجيا على المجموعة

$X = (a, b, c, d)$ فلاحظ أن الفضاء (X, τ) ليس T_1 (تكملة ذلك).

نظرية ٥٥

نفرض أن A, B مجموعتان متتامتان في الفضاء (X, τ) يكون

أن $A \cap B = \emptyset$. لكن مجموعة $a \in A$ فبأن $a \notin B$ ما أن المجموعة

B مغلقة وأن الفضاء (X, τ) هو فضاء هاوسدورف. فإثباته من النظرية

فرض مجموعتان متتامتان G, H بحيث أن

$$a \in G, B \subset H, G \cap H = \emptyset$$

وهنا نريد أن نثبت $(G, a \in A)$ مغلق ففتح المجموعة المتتاممة A وعلينا

إثباته بفتح نظام جدي. فثبت المجموعة A وليكن

$$(G_1, G_2, \dots, G_m)$$

حيث أن

$$A \subset [G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m]$$

تقرنات

$$H = [H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m], G = [G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m]$$

يتضح أن $A \subset G$, $B \subset H$. أن G مجموعة مغلقة كونه اتحاد

مجموعات مغلقة. كما أن H مجموعة مغلقة كونه تقاطع عددية من المجموعات

البيان ٥٥

نقصد أن $(y, u) \rightarrow f(x, t)$ فتصله في الفضاء الجبري (x, t)

الى الفضاء الهاميلتوني (y, u) نقصد أن $f \in X$ هي دالة متصلة. كذلك

تكون دالة المعركة متصلة. وبموجب نظرية نوي أن الصورة المتصلة $f(F)$

للمعركة متصلة f هي مجموعة متصلة في y . بالتالي (y, u) هو فضاء $T^*(x)$

مجموعة متصلة. فالتالي $f(F)$ مجموعة متصلة. إذا الدالة $(y, u) \rightarrow f(x, t)$

متصلة.

نتيجة ٥٥

دالة التقابل المتصلة $(y, u) \rightarrow f(x, t)$ كذلك الفضاء الجبري (x, t)

الى الفضاء الهاميلتوني (y, u) هي دالة توبولوجية.

(تدريب، دليل)

يفرض أن (x, t) فضاء نام النظام وأن A, B مجموعتان متعلقتان

وكثيرات نام. بين أن إذا كانت A مجموعة متصلة فإنه توجد دالة متصلة

$f: X \rightarrow [0, 1]$ بحيث يكون $f(A) = (0)$ ، $f(B) = (1)$

(الحل)

بأن (x, t) فضاء نام النظام B مجموعة متصلة في X فإنه

لكل نقطة $a \in A$ - حيث أن $B \notin a$ - هناك دالة متصلة $(0, 1)$

$x \mapsto g$ بحيث أن $g(B) = (1)$ ، $g(a) = (0)$ ، إذا كان $a \in A$

حيث أن $B \notin a$ نجد أن $a \in g^{-1}(0)$ ، $a \in g^{-1}(0)$ ، $B \in g^{-1}(1)$ ومن ثم نجد

12

$$B \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} g_{\alpha}^{-1} [1], A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} g_{\alpha}^{-1} [(0, \frac{1}{2})]$$

حيث ان A مجموعة منتهية، $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} g_{\alpha}^{-1} [(0, \frac{1}{2})]$ فان (عظام) يتبع

$g_{\alpha}^{-1} (0, \frac{1}{2})$ يحوي عظاماً مستمرة وليكن

$$g_{\alpha_1}^{-1} [(0, \frac{1}{2})] \cap g_{\alpha_2}^{-1} [(0, \frac{1}{2})] \cap \dots \cap g_{\alpha_n}^{-1} [(0, \frac{1}{2})]$$

للمجموعة المنتهية A أوقات

$$A \subseteq g_{\alpha_1}^{-1} [(0, \frac{1}{2})] \cup g_{\alpha_2}^{-1} [(0, \frac{1}{2})] \cup \dots \cup g_{\alpha_m}^{-1} [(0, \frac{1}{2})]$$

$$B \subseteq \bigcap_{i=1}^m g_{\alpha_i}^{-1} (1)$$

$$g_{\alpha_1}(B) \subseteq (\frac{1}{2}, 1), g_{\alpha_1}(A) \subseteq (0, \frac{1}{2})$$

نفرض ان $g = \inf g_{\alpha}$ ، فحيث ان $h(B) = 1$ و $h(A) < \frac{1}{2}$

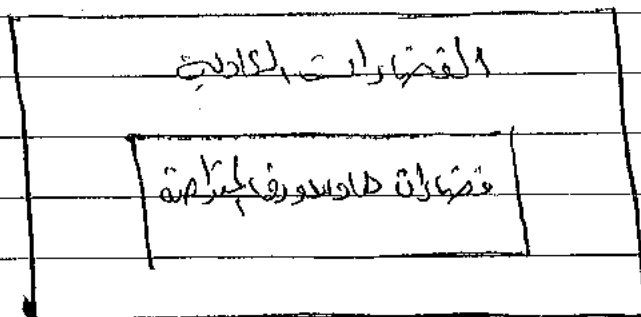
نعرّف الدالة $F: X \rightarrow [0, 1]$ بالمركبة

$$F(x) = 2 \max h(x) - \frac{1}{2} \text{ و } 0$$

هذه الدالة متصلة ونحقق $F(A) = 0$ و $F(B) = 1$.

نرى ان عرقنا العلاقة بين مفهومي التراص ومفاهيم التقصير. فبممكننا

فالحديث العلاقة بين التراص ومفاهيم التقصير في فضاءات التاكيد.



locally compact spaces

الفضاءات المتراصة موضعياً

// 2-4 //

تعريف

يقال إن الفضاء $(X, \mathcal{T})$ متراصاً موضعياً إذا وجد حوار متراص لكل نقطة $x \in X$

مثال

الفضاء المتعدد $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ متراص موضعياً حيث يوجد لكل $a \in \mathbb{R}$ وذلك مع الحوار

المغلق $[a-1, a+1]$ وهذا الحوار متراص بناءً على نظرية هين بورك وعلى

ذلك فإن $\mathbb{R}$ متراص موضعياً على الرغم كونه غير متراص

الفضاء المتعدد

// 2-5 //

$(X, \mathcal{T})$ متراص جلياً لا بد أن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$ حوار متراص للنقطة $p \in X$

مجموعة $\{p\}$ متراص كوني (مضيق)

نظرية

لي A مجموعة مغلقة في فضاء متراص موضعياً $(X, \mathcal{T})$ نفرض أن $a \in A$

نقطة إحصائية لها أن $a \in X$ والفضاء $(X, \mathcal{T})$ متراص موضعياً فآلة

لك $a \in A$ يوجد حوار متراص K_a وليكن K_a نفرض أن $C_a = K_a \cap A$ الآلة

C_a مجموعة مغلقة في K_a إذا C_a مجموعة متراصة من A بما أن $K_a \cap A \subseteq C_a$

فإن C_a هي حوار متراص للنقطة a في A وهذا يعني أن المجموعة A متراصة

متراص موضعياً

نظرية

إذا كان (x, π) فضاء متراس موقعياً $(y, t) \rightarrow P = (x, \pi)$ دالة متصلة ومفتوحة

فإن المجموعة $P(x)$ متراسة موقعياً

لبرهان

نفرض إن $y \in P(x)$ نختار $x \in X$ بحيث يكون $y = P(x)$ إن

لفضاء (x, π) متراس موقعياً فأنه يوجد حوار متراس N_x لك $x \in X$ بـ إن

$P = (x, \pi)$ دالة متصلة وبـ إن N_x مجموعة متراسة فأن $P(N_x)$

مجموعة متراسة في $P(x)$ بـ إن N_x^0 مجموعة مفتوحة والدالة (y, t) و (x, π)

مفتوحة إذا $P(N_x^0)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على y لأن $x \in N_x^0$ وكلية

فإن $y \in P(N_x^0) \subseteq P(N_x)$

بـ إن y لها حوار متراس هو $P(N_x)$ ومن ثم فإن $P(y)$ متراس موقعياً

نتيجة

خاصية كون الفضاء متراس موقعياً هي خاصية تدويرية

نظرية

« لفضاء T_2 يكون متراس موقعياً إذا وفقط إذا كان $x \in X$ يوجد

حوار مفتوح N_x بحيث تكون N_x مجموعة متراسة

البرهان

أولاً : نفرض إن لفضاء (X, π) متراس موقعياً وإن $x \in X$

إذا يوجد حوار مترام للنقطة x وليكن H بوضع $H = N_x$ به علاقة إن

H مجموعة مغلقة لأنها مجموعة مترام في فضاء T_2 حيث لهذا

$$\overline{N_x} = H^0 \subseteq H = H$$

لها كانت N_x مجموعة مغلقة ومترام من مجموعة مترام إذا N_x مجموعة

مترام

ثانياً

نقول إن $(X, \mathcal{A})$ فضاء T_2 وإنة لكل $x \in X$ يوجد حوار حوار متزوج

N_x بحيث تكون N_x مجموعة مترام فأن N_x حواراً مترام للنقطة

لذلك فأن $(X, \mathcal{A})$ يكون مترام موهجاً

6-2 فضاءات بيير Baire Spaces

أخيراً سنتقدم لنا، لفصل بتعريف ودراسة فضاءات بيير وسوف نشي إن كل

من الفضاءات المترية وفضاءات التامة وما سوف والمترام هي أنواع من

فضاءات بيير

تعريف

نفرض $(X, \mathcal{A})$ فضاء يتولمحي يقال إن الفضاء $(X, \mathcal{A})$ يسمى فضاء

بيير إذا كانت لكل عائلة A_α قابلة للعد من المجموعات المنزوعة في X بحيث

$$(A_\alpha)^0 = \emptyset \text{ فأن } (\bigcup A_\alpha)^0 = \emptyset$$

مثال

مجموعة الإسناد القياسية Q لا تحقق شروط فضاء بيير لأن Q هي انحصار

قابل للعد مجموعاتها المحدودة، المعزولة وكذلك (X) مجموعة متعلقة $\neq \{X\}^0$ تلك

$$X \in Q$$

مثال

مجموعة الإسناد المحدودة المعزولة X تحقق شروط فضاء بيير لأن كل مجموعة

معزولة في X مفتوحة ومن ثم لا تقبل مجموعة معزولة ليس لها تقاطع متعلقة

المعزولة

يفرض أن (X, Π) فضاء قبول محلي وأن A_α عائلة قابلة للعد من المجموعات

المعزولة المتوحدية والكثيفة في X - لفضاء (X, Π) تكون فضاء بيير إذا وفقط إذا

$$\text{كان } \bigcap \overline{A_\alpha} = X$$

البرهان

(1) المجموعة $A \subseteq X$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $X - A$ متعلقة

$$(2) \quad X - B = X \Leftrightarrow B^0 = \emptyset$$

كل فضاء قبول محلي مترابط محلي يكون فضاء بيير

نظرية

أي فضاء ميربي مفتوح من فضاء مير يكون فضاء مير

البرهان

تفرضه إن $(X, \mathcal{T})$ فضاء مير وإن $(A, \bar{A})$ فضاء مير مفتوح من

الفضاء $(X, \mathcal{T})$. تفرضه إن $\{B_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المتداخلة في

$(A, \bar{A})$ بحيث إن $(B_n)^0 = \emptyset$ في $(A, \bar{A})$ ونلاحظ إستبان إن $\bigcup B_n = \emptyset$

في $(A, \bar{A})$ لإشبات فلا تفرضه إن B_n هو إرتفاق B_n في $(X, \mathcal{T})$

فإن $B_n \cap A = B_n$ إن $(X, \mathcal{T})$ فضاء مير فإن $(B_n)^0 = \emptyset$ فضاء كان

$G \in \mathcal{A}$ مجموعة غير خالية بحيث إن $G \subseteq B_n$ فإن هذا يقضي إن

$G \cap A$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجيا المنسوبة لـ A فتواة

في B_n وهذا يتعارض مع الفرض بأن $(B_n)^0 = \emptyset$

نأن إننا لمجموعات B_n يحوي مجموعة غير خالية $W \in \mathcal{A}$ فإن اختيار

المجموعات B_n يحوي إننا المجموعة W التي نسقي إننا للتوبولوجيا

لأن $A \in \mathcal{A}$ ولأن $(B_n)^0 = \emptyset$ في X وهذا يتعارض مع الفرض بأن

الفضاء $(X, \mathcal{T})$ هو فضاء مير

المراجع

REFERENCES

- [1] Bartle R. G. , Sherbert D. R. , Introduction to Real Analysis , second edition , John Wiley & Sons INC. 1992.
- [2] Bourbaki , Topologie generale , Act. Sci. Indust. (1940-1953).
- [3] Čech E. , Topological Spaces , Interscience- Wiely , London , New York , 1966.
- [4] Császár A. , General Topology , A Kademiai Kiado , Budapest , 1987.
- [5] Goshi , D. , Introduction to General Topology , Wiley Eastern Limited , New Delhi , 1986.
- [7] Kelly , J. , General Topology , Van Nostrand , Princeton New Tersey , 1955.
- [8] Lipschutz , S. Theory and problems of General topology , Schum's Series , McGraw-Hill Int. 1965.
- [9] Munkres , J. , Topology : Afirst course , prentice0Hall , N. , Y. , 1975.
- [10] Naimpally S. N. , Warrack , B. D. , Proximity Spaces , Combridge Univ. Press , New York , 1970.
- [11] Sierpinski , W. , General topology , Toronto , 1952
- [12] Simmons , G. , F. , Introduction to topology and Modern Analysis , McGraw-Hill Int. 1963.
- [13] Willeard S. , General Topology , Reading M A , 1970.