



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسبات وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة العليا

بحث تخرج

مقدم الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات جامعة القادسية وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في علوم الرياضيات .

من قبل الطالب
علي ماجد كريم

بإشراف الاستاذ
هشام رحمن

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(وَقُلْ رَبِّي زِدْنِي عِلْمًا)

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيِّ الْعَظِيمِ

((الاهداء))

الى من ضحوا بدمائهم الطاهرة من اجل الاسلام
اهل البيت ((عليهم السلام))
الى كل من ضحى من اجل الحق والعلم
العلماء
الى من اوحى الله بهما برا " واحسانا "
ابي وامي
الى الذي لم يبخل علي بعلمه وارشاده
استاذي الفاضل
الى من رافقني سنوات الدراسة
اصدقائي وزملائي
والى من يقدر المجهود العلمي اهدي ثمرة جهودي.

﴿ شكر وتقدير ﴾

الحمد والشكر لله العلي القدير والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآل بيته الطيبين الطاهرين
الى يوم الدين بعد ان اشكر الله سبحانه وتعالى في تيسير امرنا في اتمام بحثنا اتقدم
بخالص شكري وتقديري الى استاذي الفاضل ((هشام رحمن))
الذي قدم لي النصائح والمتابعة العلمية الصادقة التي كان لها الاثر الواضح في اتمام هذا البحث
ادعو من الله عز وجل التوفيق والتقدم في مسيرته العلمي . . .

المحتويات

- 1- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية .
- 2- جذرا المعادلة المميزة الحقيقيتان والمختلفتان .
- 3- حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة .
- 4- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة .
- 5- معادلة فولترا التكاملية .

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية في المتغير y

(المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ من الدرجة الأولى وتكون على الصورة

العامّة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x) \quad (1)$$

$$a_0 \neq 0$$

فإذا كانت جميع المعادلات $a_0, a_1, \dots, a_n$ قيم ثابتة سميت المعادلة

خطية ذات معاملات ثابتة وإلا كانت واحدة على الأقل من المعادلات

دالة في x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة.

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

خطية متجانسة، حيث $P(x) = 0$ في المعادلة (1)

المعادلة

إذا كانت $P(x) \neq 0$ فإن المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة.

أفترض في (1) أن D هو المؤثر التفاضلي

نفرض $D = \frac{d}{dx}$ أي المشتقة الأولى بالنسبة إلى x

نذلك فإن:

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 = \frac{d^3}{dx^3},$$

مثال

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9e^{3x}$$

يضاف لمؤثر D :

$$D [P_1(x) \pm P_2(x)] = D P_1(x) \pm D P_2(x)$$

$$2) \quad D [K P(x)] = K D P(x)$$

$$3) \quad F(D) e^{ax} = F(a) e^{ax}$$

F كثيرة حدود في D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) Y = f(x)$$

حيث Y أن

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

دالة كثيرة حدود في D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة التفاضلية

$$\Phi(D)y = P(x)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة إذا المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهي معادلة خطية متجانسة.

ملاحظات هامة: المعادلات التفاضلية المتجانسة والثانية

نفرض ان المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

تكون

إذا كان كل من y_1, y_2 حل خاص للمعادلة (1) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حل ايضاً للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثابتان.

المبرهان
التوضيح:

(1) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (1) مستقلان خطياً إذا كان (ثابت) $\frac{y_2}{y_1} \neq c$ اي ان $y_2 \neq c y_1$

(2) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (1) مرتبطان خطياً إذا كان (ثابت) $\frac{y_2}{y_1} = c$ اي ان $y_2 = c y_1$

تعريف (الرونسكيان) Wronskian

إذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابليتين للاشتقاق في نطاق نعرف بهما
فإننا نعرف الرونسكيان لها كما يلي:

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف:

1) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (1) مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان

$$W\{y_1, y_2\} = 0$$

2) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (1) مستقلان خطياً إذا وفقط إذا كان

$$W\{y_1, y_2\} \neq 0$$

مثال:

اختبر ارتباط واستقلال المجموعة من الدوال الآتية:

1) e^x, e^{-x}

2) $1, x, x^2$

3) $e^x, 2e^x, x$

الحل:

1) $W\{e^x, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

∴ الدالتان مستقلتان خطياً.

$$2) W \{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3) W = \{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

الدوال مرتبطة خطياً

تعريف الحل العام

إذا كان y_1, y_2 حلين مستقلين للمعادلة (1) فإن $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (1) حيث C_1, C_2 ثابتان اختياريان.

أيضاً إذا كان الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة (2) له

الشكل $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

نفرض أن المعادلة

(1)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

حيث a_1, a_2 ثابتان

الحصول على الحل العام لتلك المعادلة، فنأخذ حلين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ لحل المعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت

نضع المعادلة على الصورة $(D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$

نقوم بذلك المفروض $D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$
 $D y = D e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

نجد على المعادلة

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

حيث ان $e^{\lambda x} \neq 0$ ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

ونسمي هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) (Auxiliary/characteristic)

الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بملء المؤثر D

وذلك بوضع λ بملء من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ)

وبالتالي لها جذران λ_1, λ_2

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{حيث}$$

وهذان الجذران هما ثلث حالات:

(1) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$

١٢ حقيقتان متساويتان $\lambda_1 = \lambda_2$

١٣ مزيان.

(١) حلل المعادلات المميزة حقيقتان مختلفتان:

أي ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ في ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حالات خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً لماذا؟

وبالتالي فإن الحل العام يكون على صورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

c_1, c_2 ثابتان، اختياريان.

مثال:

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \quad \text{أوجد الحل العام للمعادلة}$$

الحل:

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

$$D = \frac{d}{dx} \quad \text{حيث}$$

نفترض ان $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

فإن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -4, \lambda = 1$$

أي أن

أي أن

يكون الحل العام على الصورة

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$2y'' - 3y' = 0$$

$$(2D^2 - 3D)y = 0$$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

$$2\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

فإن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda = 0, \lambda = -3/2$$

وتكون هيئتها

ويكون الحل العام هنـ

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-3/2 x}$$

أي أن

$$y = c_1 + c_2 e^{-3/2 x}$$

(ب) نعتبر المعادلة التفاضلية متجانسة

إذ أن $\lambda_1 = \lambda_2$ في هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطاً

بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ لذا نبحث عن حل آخر y_2 غير مرتبط بالحل

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يحل حلاً للمعادلة وغير

مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

أو

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

حيث

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

الحل:

نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة المعطاة

من المعادلة المسماة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

ويكون هيراما

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

أي أن الحل العام

(٧) حل المعادلة التفاضلية

إذا كان أحد جذري المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $\alpha > 0$ و $\beta \neq 0$

فإن الجذر الآخر يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)

حيث $\beta \neq 0$ من ذلك فإن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (11)$$

حيث A_1, A_2 ثابتان اختياريان

ويمكن إثبات أن الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

والثابت ذلك :

المعادلة
او هي الحل العام للمعادلة

$$y'' + 9y = 0$$

الحل
نضع المعادلة على صورة

$$(D^2 + 9) = 0$$

نفترض ان $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

من فان المعادلة المربعة هي

$$\therefore \lambda = \pm 3i$$

وتكون جذورها

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

y هي المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n
ذات المعاملات الثابتة

يمكن تقسيم الحالات السابقة الخاصة بكل المعادلات التفاضلية

على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض ان $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المربعة

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

التي جذورها متماثلين $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور

(ا) إذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (أعداد حقيقية)

فإن الحل العام

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

(ب) إذا كانت جميع الجذور حقيقه واحد الجذر مكرر K من المرات

فإن الحل العام $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_K$ و $\lambda_{K+1} \neq \dots \neq \lambda_n$

$$Y = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_K x^{K-1}] e^{\lambda_1 x} + c_{K+1} e^{\lambda_{K+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$$

(ج) إذا كانت الجذور

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$$

فإنه يكون

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$Y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x]$$

الحل

او بعد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0 ; y(0) = 4, y'(0) = 8, y''(0) = -4$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 0$$

نفرض ان $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 1, -3 \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda+3) = 0$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} \quad (1)$$

ولابد ان الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية، فوجد

$$y' = c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} \quad (2)$$

$$y'' = c_2 e^x + 9c_3 e^{-3x}$$

وبالتقويض في الشروط الابتدائية في المعادلات (1), (2), (3)

$$\therefore 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (4) \Leftarrow (1) \quad y(0) = 4$$

$$8 = c_2 - 3c_3 + \dots \quad (5) \Leftarrow (2) \quad y'(0) = 8$$

$$C_2 + 9C_3 \quad (6) \Leftarrow (3) \quad y''(0) = -4 = -4$$

كل المعادلات (4)، (5) و (6) $C_1 = 0, C_2 = 5, C_3 = -1$

$$y = 5e^x - e^{-3x} \quad \text{ويكون الحل على الصورة}$$

الحل:

أولاً الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y' - 2y = 0$$

الحل:

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 + D - 2)y = 0$$

نقضي أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة

تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -1, -2$$

ويكون الحل العام

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$$

مثال ١:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D-2)^3 (D+3)^2 (D-4) y = 0$$

الحل:

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة

$$(\lambda - 2)^3 (\lambda + 3)^2 (\lambda - 4) = 0$$

$$\therefore \lambda = 2, 2, 2, -3, -3, 4$$

و يكون الحل العام

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{2x} + (C_4 + C_5 x) e^{-3x} + C_6 e^{4x}$$

مثال ٢:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2) y = 0$$

الحل:

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة

$\therefore$ تكون المعادلة المصاحبة

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 0, 0, 1, 1$$

و يكون الحل العام

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x$$

سؤال ١:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

التي تحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 2 \quad y''(0) = -6$$

الحل:

نضع المعادلة على الصورة

$$(\mathbb{D})^3 - 6\mathbb{D}^2 + 9\mathbb{D}) y = 0$$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 3$$

ويكون الحل العام

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^{3x} \quad (1)$$

ولإيجاد الحد الخاص، نوجد

$$y' = 3(C_2 + C_3 x) e^{3x} \quad (2)$$

$$y'' = 9(C_2 + C_3 x) e^{3x} + 3C_3 e^{3x} + 3C_3 e^{3x} \quad (3)$$

$$= 3[3(C_2 + C_3 x) e^{3x} + 2C_3 e^{3x}]$$

لنفوض في (1)، (2)، (3) من الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2 \quad (4)$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 3c_2 + c_3$$

$$y''(0) = -6 \Rightarrow -6 = 3[3c_2 + 2c_3]$$

$$\Rightarrow -2 = 3c_2 + 2c_3$$

من (4) (5) (6) نحصل على

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = -4$$

وبكونا الحل الخاص الذي يحقق الشروط

$$y = 2(1-2x)e^{3x} - 2$$

مثال ١١

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

الحل:

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة

فإن تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

هنا أن المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليلها

الأسهل هنا هو أن نأخذ من الدرجة الثالثة ، لذا استخدمنا التخمين لحساب الجذور

من نظرية المعادلات ، للمعادلة ١٣ جذر حقيقي واحد على الأقل عياري عن

١٣ عوامل العدد ١٣ (الذي المطلق).

نقرب $\lambda = 1$ $L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0$

نقرب $\lambda = -1$ $L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S$

نقرب $\lambda = -1$ ، $\lambda = 1$ ، $\lambda = 2 \pm 3i$ ، $\lambda = -2 \pm 3i$ عوامل باستخدام

القسم على العامل $(\lambda + 1)$ فنجد على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

نصبح المعادلة المربعة

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

$$\lambda = -1, \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x} [c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x]$$

معادلة المواد التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات

المعادلات الثابتة :

نعلم ان المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات معاملات

الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x) \quad a_0 \neq 0 \quad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ دوال في $P(x)$ دالة متصلة في

نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D)y = P(x) \quad (2)$$

حيث $\Phi(D)$ دالة كثيرة حدود من درجه n في D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

وليجاد الحل العام للمعادلة (2) نضع الخطوات الآتية:

(1) نوجد حل المعادلة المتجانسة المتناظرة

$$\Phi(D)y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته نوزعم للحل الناتج بالرمز y_h اي ان y_h تحقق

المعادلة المتجانسة فقط

(٢) نوجد حلًا خاصاً نزيله بالفرم y_p نكفي المعادلة (2) وسوف

نرضى لضرب الجاد y_p

(٣) نوجد الحل العام y_c حيث $y_c = y_h = y_p$ وبالنسبة لـ y_c

نكفي المعادلة (2).

ولنثبت أن y_c تكفي المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

$$\therefore \Phi(D)y_h = 0$$

$$\Phi(D)y = P(x)$$

y_p تكفي المعادلة

$$\therefore \Phi(D)y = P(x)$$

$$\Phi(D)y = P(x)$$

ولنثبت أن y_c تكفي المعادلة

$$\therefore \text{L.H.S} = \Phi(D)y_c = \Phi(D)[y_h + y_p] = \Phi(D)y_h +$$

$$\Phi(D)y_p = 0 + P(x) = P(x)$$

$$= \text{R.H.S}$$

٤. معادلة فولتيرا التفاضلية:

لقد دعونا المعادلة التفاضلية في الشكل:

$$g(a) = P(a) + \lambda \int_a^a V(a,t) g(t) dt \quad (1)$$

معادلة فولتيرا التفاضلية، سنقر، فيما يلي ان، للزاة

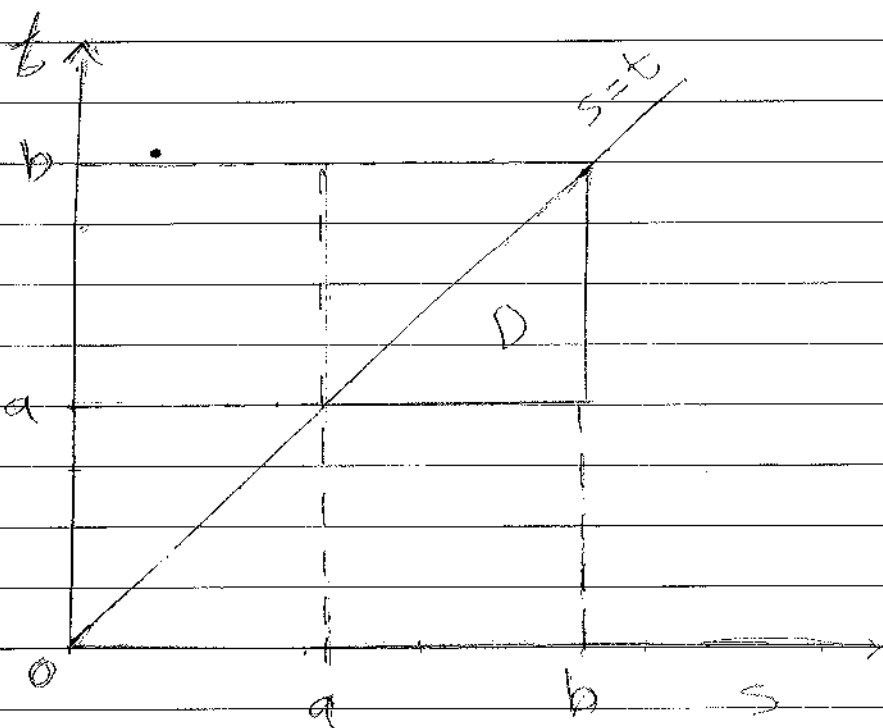
$V(a,t)$ مستمرة في المجال Δ المحدود بالمتغيرات $(s=t)$

$t=a$ ، $s=b$ ، وعلى b . ولنفرض كذلك ان P كحول

د كحول تربيعيا على المجال (a,b)

كل المعادلة (1) في حدودها ان معادلة فريدولم بتغير

دالة جديدة $K(s,t)$ على النحو الآتي:



$$K(a,t) = V(a,t) \quad (t \leq a \leq b)$$

$$K(s,t) = 0 \quad (t > s \leq b)$$

ان الفواة $V(s, t)$ محصورة في المربع $b \leq t \leq a$ $b \leq s \leq a$
 ومستمرة هناك. الاستثناء النادر $S=t$ ؛ ولذلك فإن اياد
 اكل وقت طرقت النظره السليبه ففي النري مكررة (2)

$$V_a(s, t) = \int_t^a V(s, x) V(x, t) dx \quad (2)$$

وبشكل عامي غير :-

$$V_{a+1}(s, t) = \int_t^s V(s, x) V_a(s, t) dx \quad (3)$$

وإذا فرضنا ان V لا يتاخر في Δ و A اي :-

$$|V(s, t)| < A$$

فإننا نجد ان V_a كذلك (2) :-

$$|V_a(s, t)| < (s-t) A^a$$

وبشكل عامي ان :-

$$|V_a(s, t)| < \frac{(s-t)^{a-1}}{(n-1)!} A^a$$

وإذا WS الفواة (3) :-

$$R(s, t, \lambda) = V(s, t) + \lambda V_s(s, t) + \lambda^2 V_{ss}(s, t) + \dots$$

فإننا نجد :-

$$|\lambda|^{a-1} |V_a(s,t)| \leq \frac{|\lambda|^{n-1} (s-t)^{a-1} A^a}{n!}$$

$$\frac{|\lambda|^{a-1} (b-a)^{a-1} A^a}{n!}$$

يتبع عندها ان المتسلسلة متقاربة منتظام في Δ
 وهذا كانت λ و ذلك هذا نستطيع القول : ان لنواة
 الحالة فولترا هو دالة صحيحة في λ وبالتالي فان
 لتمام فولترا دالة صحيحة " وهذا كانت قيم λ وهذا
 كانت دالة $f(a)$ ويعطى هذا ان الدالة للنواة
 الحالة والدالة $f(a)$ وفق المعنى :

$$g(a) = f(a) + \lambda \int_a^a R(s,t,\lambda) f(t) dt \quad (4)$$

مثال (1) اوجد متسلسلة نير فان للدالة التكاملية :

$$g(a) = (1+a) + \lambda \int_0^s (s-t) g(t) dt$$

الحل :-

$$V(s,t) = V_1(s,t) = s-t$$

$$V_3(s,t) = \int_0^s (s-x)(x-t) dx = \frac{(s-t)^3}{3!}$$

$$V_5(s,t) = \int_0^s \frac{(s-x)(x-t)^3}{3!} dx = \frac{(s-t)^5}{5!}$$

∴ $\lambda = 1$ also,

$$g(s) = (1+s) + \lambda \left(\frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} \right) +$$

$$g(s) = e^s \quad \text{if } s \text{ is small} \quad \lambda = 1 \quad \text{if } s \text{ is small}$$

الخلاصة:

تناولنا في هذا البحث المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة العليا وكذلك خواصها المتجانسة والحلول من الرتبة الثانية ايضا" وكذلك كيفية ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة وكيفية ايجاد جذرا المعادلة المميزة الحقيقيان والمختلفان وكذلك ايضا" تناولنا حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة وحلها وايضا" المعادلات التفاضلية الخطية الغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة - ومن خلال ذلك درسنا معادلة فولترا التفاضلية التكاملية .

المصادر:

- (1) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم)
الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د. حسن
العويضي ، د. عبد الوهاب عباس (2001) القاهرة.
- (2) نظريات المعادلات التفاضلية د. رحمة عبد الكريم ،
مطبوعات جامعة الملك سعود ، 1408 هـ .
- (3) نظريات وسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم)
فرانك ايزر ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ،
1997 م .
- (4) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الاول : د. حسن
العويضي- د. عبد الوهاب عباس ، د. سناء علي زارع ،
دار الرشد ، 2005 .