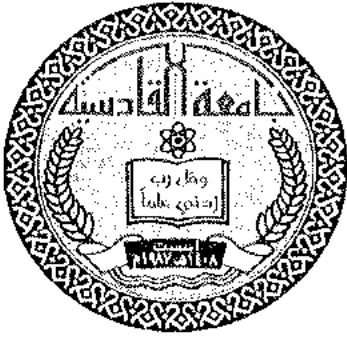




جمهورية العراق / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية / كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

الدوال المتصلة والتكافؤ التبادلي

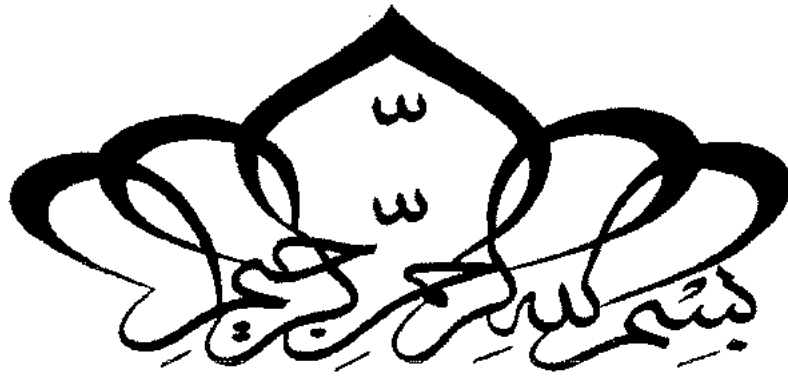
بحث تخرج تقدم به الطالب

علي ابراهيم جاسم

الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات / قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

إشراف

أ.م.د. رعد عزيز



﴿ فَسُبْحَانَ الَّذِي فِي يَدِهِ مَلَكُوتُ كُلِّ شَيْءٍ
وَإِلَيْهِ تُرْجَعُونَ ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة يس

الآية ٨٢

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الخلق والمرسلين نبينا محمد
صلى الله عليه وسلم وعلى آله الطيبين الطاهرين.

أول الشكر وآخره أقدم به إلى المدعم الباري عز وجل (الله) سبحانه وتعالى، الذي أحاطني
برعايته الإلهية العظيمة، وسرّ لي كل عسير، وألهمني الصبر والقوة في شق طريقتي نحو البحث
العلمي.

وأوجه بخالص شكري وتقديري وعظيم امتناني إلى أستاذي الفاضل القدير
الأستاذ الدكتور / رعد

والى من تعجز كلماتي وتحنني هامتي لعظيم عطائها، شمس حياتي التي لا تغيب
وسيلتي إلى الجنة، إلى من وصفها منذ صغري بالجيل في شموخها، وعظمتها
وبالجمل في صبرها وجلدها، وكالدي في حنانها الذي لا ينهي، إليك (يا أمي)
أطال الله في عمرك في صحة وخير حال.

والى كل من شدوا أزرني وشاطروني أمري لأكمل الخطوات لولا هم بعد الله سبحانه وتعالى
لاعتذر القلم عن رسم الكلمات (اخوتي) أطال الله أعماركم بالصحة والسعادة وسدد طريق الخير لخطاكم.
وأخيراً لأبد من كلمة شكر ومحبة وامتنان إلى كل من شد من أزرني، وكل من
ساندني في عملي وأعطاني القدرة والإصرار في تحقيق هدفي حتى
لو كان بكلمة تشجيع واحدة، ومن فاتي ذكر أسمائهم، جزاهم الله خير الجزاء.

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

صدق الله العظيم إلهي لا يطيب الليل إلا بشرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك .. ولا تطيب
الله جل "اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا برويتك
سيدنا "إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين "جلاله
إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون "محمد صلى الله عليه وسلم
انتظار .. إلى من أحمل اسمه بكل افتخار .. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان
.. قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهندي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد

الغلاف

درسنا في هذا الموضوع في الفضاءات التوبولوجية

والتي تظهر الدالة المتصلة - المفتوحة - المغلقة والمجموعات

التوبولوجية التي تتركز على البنية التوبولوجية للفضاء

وبالتالي قد حققنا الغاية المرجوة لدراسة علم التوبولوجية

الآن وهي دراسة المجموعات التوبولوجية Topological property

وهنا نأصبح نعرفه متى تكون الفضاءات التوبولوجية متكافئة

من ناحية أخرى (التشاكل - التكافؤ - التوبولوجية

الجمعية هذا النوع من الدوال لا تظهر على الحفاظ فقط

على صفات المجموعات وإنما هي كونها مفتوحة أو مغلقة

بل تتعدى ذلك للعديد من المجموعات الأخرى التي تحفظ

تحت مثل هذا النوع يسمى بالمجموعات التوبولوجية

ومن أجل ذلك سوف نطلق على هذا من الدوال

أسم الدوال التوبولوجية أو التشاكل التوبولوجي

المحتويات Contents

الصفحة	الموضوع
1	المقدمة
2	الدوال المتصلة
10	الدوال المفتوحة والدوال المغلقة
15	التشاكل (التكافؤ) التوبولوجي
20	المصادر

الدوال المتصلة والتكافؤ التوبولوجي

Continuous Functions and Topological Equivalence

مقدمة:

درستنا في الفضاءات التوبولوجية ولدينا ان المجموعات المفتوحة تلعب دوراً رئيسياً في بناء هذه الفضاءات كما أنها تمثل عناصر التوبولوجي. نعرف على مجموعة طاء وأيضاً بعد دراستنا لمفهوم الدوال المتصلة بين الفضاءات إثرييه والدور الذي تلعبه المجموعات المفتوحة في تحقيق مفهوم الارتصال لهذه الدوال سوف نشارك في هذا الفصل دراسة مفهوم ارتصال الدوال في حالة غياب مفهوم الارتالة إثرييه.

في هذه الحالة سيتم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية، مع دراسة خواص الدوال المتصلة. أخيراً سنتعرف على مفهوم الدوال المفتوحة والدوال المتعلقة وكذلك التماثل التوبولوجي.

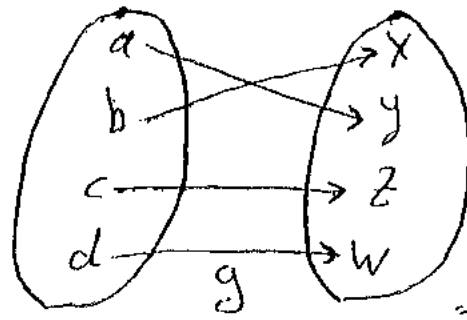
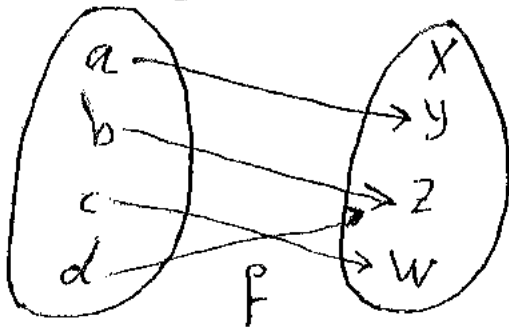
1-1

الدوال المتصلة Continuous Functions تعريف:

ليكن (X, τ) و (Y, ν) فضاءً توبولوجيًا.
يقال ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة اذا كان لأي مجموعة مفتوحة H في Y فان الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة في X . أي أن

$$\forall H \in \nu \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau$$

مثال // اعتبر التوبولوجي $\tau = \{X, \phi, [a], [a, b], [a, b, c]\}$
معرف على المجموعة $X = [a, b, c, d]$
والتوبولوجي $\nu = \{Y, \phi, [X], [Y], [Y, Z, W]\}$ معرف على
المجموعة $Y = [X, Y, Z, W]$ فإذا كانت
الدالة $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ معرفتين بالمخطط التالي



أدلت:

الدالة $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ متصلة لأن الصورة العكسية لكل عنصر من
عناصر التوبولوجي ν هي عنصر من عناصر التوبولوجي τ أي أنه:

$$\forall H \in \nu \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau$$

ثانيًا

الدالة $g: X \rightarrow Y$ ليست متصلة لأن المجموعة الجزئية $\{Y, Z, W\}$
تنتمي إلى ν في حين أن صورتها العكسية
 $g^{-1}(\{Y, Z, W\}) = \{a, c, d\}$ لا تنتمي إلى التوبولوجي τ .

نظريه:

الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) الى
الفضاء التوبولوجي (Y, ν) تكون متصلة اذا وفقط اذا كان
لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$
تكون مغلقة في X .

البرهان:

نفرض ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة وأن $F \subseteq Y$
مجموعة مغلقة. اذاً F^c مجموعة مفتوحة. وعليه فإن المجموعة
 $f^{-1}(F^c)$ مفتوحة في X .
بما ان $\tau \in \tau$ $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$ اذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة
مغلقة في X .

من ناحية أخرى نفرض أنه لكل مجموعة مغلقة $F \subseteq Y$ يكون
 $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

نطلب اثبات ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة.
لذلك نفرض ان $G \subseteq Y$ مجموعة مفتوحة في Y اذاً
المجموعة G^c مجموعة مغلقة في Y وعليه تكون $f^{-1}(G^c)$
مجموعة مغلقة في X .

ولكن $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G^c))^c$ اذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة
ومن ثم فإن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة.

مثال //

بالرغم من كون الدالة f متصلة ولكنها لا تحافظ على هيئة
كون المجموعة مفتوحة او مغلقة. مثلاً $\tau \in \tau$ $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ولكن
 $f([a, b]) = [4, 2] \neq \mathbb{R}$ وأيضاً المجموعة $[a, d]$ مغلقة في X ولكن
 $f([a, d]) = [2]$ ليست مغلقة في Y .

نظريه ٥٥

نفرض ان (X, τ) , (Y, ν) , (Z, δ) ثلاث فضاءات
 يتولجيه وان كل $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ و $g: (Y, \nu) \rightarrow (Z, \delta)$
 داله متصله، فان داله التجميع $g \circ f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \delta)$ و تكون متصله
 البرهان ٥٥

يترك للقارئ كتمرين ■

نظريه ٥٥

الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصله اذا وفقط اذا كان
 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$

البرهان ٥٥

نفرض ان الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصله وان $A \subseteq X$
 $\therefore f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(f(\overline{A}))$
 لكن $f(\overline{A})$ مجموعه مغلقة، اذاً $f^{-1}(f(\overline{A}))$ مجموعه مغلقة لان الداله
 متصله، ولان $\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A}))$ اي ان $\overline{A}$ مجموعه مغلقة لتتوي على مجموعه A
 $\therefore A \subseteq \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

من ناحية اخرى نفرض ان $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$
 ونطلب اثبات ان $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ داله متصله، لذلك نفرض ان

$F \subseteq Y$ مجموعه مغلقة وان $A = f^{-1}(F)$ ، اذاً

$$f(\overline{A}) = f(f^{-1}(\overline{F})) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$$

$$\therefore \overline{A} \subseteq f^{-1}(F) = A$$

٥٥ المجموعة A مغلقة، أي ان الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة
 هي أيضاً مجموعة مغلقة، وهذا يثبت ان الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$
 متصله ■

نظرية :

الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, ν) تكون متصلة اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لأي عنصر من عناصر الاساس (القاعدة) للتوبولوجي ν مجموعة مفتوحة في X .

البرهان :

اولاً : نفرض أولاً ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة وأن β_Y قاعدة للتوبولوجي ν - ليكن $B \in \beta_Y$

بما ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة، فإن $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X .

ثانياً :

نفرض ان لأي عنصر $B \in \beta_Y$ يكون $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X ، المطلوب إثبات ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة.

ليكن G مجموعة مفتوحة في Y وحيث ان β_Y اساس فإن $B_i \in \beta_Y$

و $G = \bigcup_{B_i \in G} (B_i)$ وعليه يكون

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{B_i \in G} B_i\right) = \bigcup_{B_i \in G} f^{-1}(B_i)$$

حيث ان $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في X فإن $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة، وهذا ثم فإن الدالة

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ متصلة $\square$

نظريه

لتكن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, σ) ولتكن σ قاعده جزئيه للتوبولوجي τ . الداله f تكون متصلة اذا وفقط اذا كانت الهجره العكسيه لـ σ في X من عناصر σ مجموعه مفتوحه في X .

البرهان

يترك كتمرين للقارئ

نظريه

الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, σ) تكون متصلة اذا وفقط اذا كان $f(b(A)) \subseteq [f(A) \cup b(f(A))]$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان

اولاً: نفرض ان الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ متصلة، فان $f(A) \subseteq f(\bar{A})$ لكل $A \subseteq X$. بما ان $b(A) \subseteq \bar{A}$ وكذلك $f(\bar{A}) = f(A) \cup b(f(A))$ فكله لدينا

$$f(b(A)) \subseteq [f(A) \cup b(f(A))], \forall A \subseteq X$$

ثانياً:

نفرض ان الداله f تحقق الشرط

$$f(b(A)) \subseteq [f(A) \cup b(f(A))], \forall A \subseteq X$$

ونطلب اثبات ان الداله f تكون متصلة.

لتكن $A \subseteq X$ فان $\bar{A} = A \cup b(A)$ ومنه يستج ان:

$$f(\bar{A}) = f(A) \cup f(b(A))$$

ولكن من الفرضيه حصلنا

$$f(\bar{A}) \subseteq f(A) \cup f(b(A))$$

وبما ان

$$f(\bar{A}) = f(A) \cup b(f(A))$$

$$f(\bar{A}) \subseteq f(\bar{A}), \forall A \subseteq X$$

اي ان الداله f متصلة

(6)

نقريه:

ليكن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ دالة متصلة من الفضاء

التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, τ)

اذا كان $x_n \in X$ متتالية تقاربيه بحيث $\lim x_n = x$

فان $f(x_n) \in Y$ متتالية

وتقاربيه ونهايتها $f(x)$.

البرهان:

نفرض ان الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ متصلة

وان $x_n \rightarrow x$ وتريد اثبات ان $f(x_n) \rightarrow f(x)$

نفرض ان H هي جوار للنقطة $f(x)$ فان $f^{-1}(H)$

هي جوار للنقطة x وبسبب ان $x_n \rightarrow x$ فان

لعدد n_0 بحيث ان $x_n \in f^{-1}(H)$ لكل $n \geq n_0$

وهذا يعني ان $f(x_n) \in H$ لكل $n \geq n_0$

اي ان $f(x_n) \rightarrow f(x)$ $\square$

نظريه:

نفرض ان (X, τ) فضاء توبولوجي قابلي للتقارب
وان (Y, σ) اي فضاء توبولوجي.
الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ تكون متصلة اذا
وفقت اذا كان لأي متتاليه تقاربيه
 $X_n \rightarrow X$ فان $f(X_n) \rightarrow f(X)$

البرهان:

اذا كانت الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ متصلة وان
 $X_n \rightarrow X$ فان $f(X_n) \rightarrow f(X)$ كما رأينا في النظرية
الابقيه.

نثبت ان العكس، نفرض ان شرط التقارب للمتتاليات
متحقق لأي $X_n \rightarrow X$ اذا كان $f(X_n) \rightarrow f(X)$
فان $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ متصلة. ونحاول اثبات
 $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$. اذا كانت $X \in \bar{A}$ فانه
توجد متتاليه $(X_n)_n$ من نقاط A بحيث $X_n \rightarrow X$
بما ان $f(X_n) \in f(A)$
وبما ان $f(X_n) \rightarrow f(X)$ فان $f(X) \in \bar{f(A)}$
من ثم يكون
 $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$

نظريه

ليكن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ دالة متصلة من الفضاء

التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, σ)

فإن كان (A, τ_A) فضاء جزئياً من (X, τ)

فإن دالة التقيد $f|_A: A \rightarrow Y$ تكون

متصلة على A

البرهان

ليكن $f: X \rightarrow Y$ دالة متصلة حيث τ

$f|_A = f \cap (A \times Y)$ فانه لأي دالة

$g: A \rightarrow X$ حيث $g(a) = a$ لكل $a \in A$

ليكن g متصلة على A فانه أي دالة

متصلة على A ومن ثم تكون دالة التقيد

$f|_A = f \circ g$ متصلة على A أي $f|_A$ متصلة

الدوال المفتوحة والدوال المغلقة open and closed Functions

تعريف:

ليكن كل من (X, τ) و (Y, ν) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$$

(1) دالة مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y .

(2) دالة مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X هي مجموعة مغلقة في Y .

مثال // نعرفنا أن $\tau = \{X, \emptyset, [a]\}$ توبولوجي معرف على المجموعة

$X = \{a, b\}$ و $\nu = \{Y, \emptyset, [X]\}$ توبولوجي معرف على المجموعة

$Y = \{X, y\}$ نعرف الدالتين التاليتين

$$f: X \rightarrow Y$$

$$g: X \rightarrow Y$$

$$f(a) = f(b) = X$$

$$g(a) = y, g(b) = X$$

ملاحظ أن الدالة $f: X \rightarrow Y$ مفتوحة وليست مغلقة، لأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة بينما صورتها $f(\{b\}) = \{X\}$ ليست مغلقة.

كما يتضح أيضاً أن الدالة $g: X \rightarrow Y$ ليست مفتوحة ولا مغلقة (يمكن التأكد من ذلك) ■

سؤال //

نفرضه أن $\tau = \{X, \phi, [a]\}$ بيولوجي معرف على المجموعة $X = \{a, b, c\}$ وأن $\nu = \{Y, \phi, [x]\}$ بيولوجي معرف على المجموعة $Y = \{x, y\}$ وأن $f: X \rightarrow Y$ دالة معرفه كما يلي :-
 $f(a) = f(b) = y, f(c) = x$
 راضع ان الدالة $f: X \rightarrow Y$ مغلقة، ليست مفتوحة.

يمكن للتقاربي ملاحظة أن هناك دالة قد تكون مفتوحة ولكنها ليست مغلقة، والعكس بالعكس، وذلك ما هو الشرط الضروري والكافي لكي نحل دالة ما الهدفين معاً، أي أنها قد تكون دالة مفتوحة ومغلقة في آن واحد. هذا الشرط يتحدد من خلال النظرية التالية :-

نظرية :-

دالة التقابل $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت مغلقة.

البرهان //

نفرضه ان $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ دالة مفتوحة، وأن $F \subseteq X$

مجموعة مغلقة $F = (H - G): G \in \tau$

ومن ثم فإن

$$f(F) = f(X - G) = f(X) - f(G) = Y - f(G)$$

بما أن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مفتوحة، فإن

$$f(G) \in \nu \text{ ومن ثم فإن } f(F) = Y - f(G)$$

مغلقة، أي أن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مغلقة.

وبالمثل يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية. ■

نظريه:

ليكن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y, ν) الدالة f تكون مفتوحه اذا وفقط اذا كان

$$f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ, \forall A \subseteq X$$

البرهان:

نفرض ان $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مفتوحه و
 المطلوب اثباته ان $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ, \forall A \subseteq X$
 نفرض ان $A \subseteq X$ و بما ان $A^\circ \subseteq A$ فان
 $f(A^\circ) \subseteq f(A)$ وعليه فان $f(A^\circ)$ مجموعه مفتوحه (لان
 f داله مفتوحه) ومن ثم فان $f(A^\circ) = (f(A^\circ))^\circ \subseteq (f(A))^\circ$
 اى ان

$$f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$$

كذلك:

نفرض ان الشرط: $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ, \forall A \subseteq X$ متحقق
 المطلوب اثباته ان $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مفتوحه،
 لاثبات ذلك نختار $G \in \tau$ مجموعه مفتوحه
 في X من الشرط نجد ان

$$f(G) = f(G^\circ) \subseteq (f(G))^\circ$$

ولكن من معلوم ان $f(G) \subseteq (f(G))^\circ$ ، اذ ان
 $f(G) = (f(G))^\circ$ ، اى ان $f(G)$ مجموعه مفتوحه ومن
 ثم فان الداله f مفتوحه. ■

نظرية ٥٥

الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ تكون مغلقة إذا وفقط إذا

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \quad \forall A \subseteq X$$

كان

البرهان ٥٥

أولاً: نفرض أن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مغلقة وأن

$$A \subseteq X \text{ بما أن } A \subseteq \overline{A}, \text{ فإن } f(A) \subseteq f(\overline{A})$$

بما أن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مغلقة، فإن $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)} \text{ ومن ثم نجد أن } f(A) \subseteq f(\overline{A})$$

ثانياً

نفرض أن الشرط $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \quad \forall A \subseteq X$ متحقق

وال المطلوب إثباته أن الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مفتوحة

لدينا ذلك نختار $G \in \tau$ مجموعة مفتوحة في X . من الشرط

$$f(G) = \overline{f(G)} \subseteq f(\overline{G})$$

نجد أن

$$f(G) = \overline{f(G)} \subseteq f(\overline{G}) \text{ ولأن } f(G) \subseteq \overline{f(G)} \text{ فإن } f(G) \subseteq f(\overline{G})$$

أي أن $f(G)$ مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن الدالة مفتوحة

نظريه:

الدالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $f(A) \subseteq f(\bar{A}) \quad \forall A \subseteq X$

البرهان:

أولاً:

نفرض أن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مغلقة، ولنا $A \subseteq X$
 بما أن $A \subseteq \bar{A}$ ، فإن $f(A) \subseteq f(\bar{A})$
 بما أن $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ مغلقة، فإن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
 مجموعة مغلقة تحتوي $f(A)$ ومن ثم نجد أن $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$

ثانياً:

نفرض أن الشرط $A \subseteq X$ $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ متحقق
 نفرض أن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة بوضع $A = F$
 في الشرط نجد أن:

$$f(F) \subseteq \overline{f(F)} \subseteq f(\bar{F}) = f(F)$$

$$\therefore \overline{f(F)} = f(F)$$

أي أن $f(F)$ مجموعة مغلقة، وعليه نأخذ أن

$$\blacksquare f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu) \text{ مغلقة}$$

التشاكل (التكافؤ) التوبولوجي Homeomorphisms

بعد أن عرفنا على مفهوم كل من الدوال المستمرة والدوال المفتوحة والدوال الحافظة ولا يمكننا أن ندرك الدوال المستمرة ليس من الضروري أن تكون المجموعات المفتوحة (المغلقة) من مجال إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في المجال المقابل لذا نقول أن الدوال المستمرة فقط لا تحافظ على هذه الخاصية.

أنه لو أخذنا الدوال المستمرة هذه كونهما مفتوحة وهذه الدوال تستفيده الحفاظ فقط على خواص المجموعات المفتوحة دون مغلقتها. وللهول على نوع من هذه الدوال والتي تحافظ على هذه المجموعات سواء كانت مفتوحة أو مغلقة عند انتقالها من المجال إلى المجال المقابل يجب أن تكون هذه الدوال تقابلية بالبناء أي كونهما متصلة ومفتوحة.

الخصيصة هذا النوع من الدوال لا تقتصر على الحفاظ فقط على صفات المجموعات من حيث كونهما مفتوحة أو مغلقة بل تعدى ذلك للعديد من خواص الأخرى التي تتوفر تحت تأثير مثل هذه وهذه تسمى خواص التوبولوجية. ومن أجل ذلك سوف نطلق على هذا النوع من الدوال اسم الدوال التوبولوجية أو التشاكل التوبولوجي.

تكريره :

الاول $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ من الفضاء (X, τ) الى
الفضاء (Y, τ) تسمى دالة تبولوجيه (تساكل تبولوجيه)
اذا وفقتا اذا كانت (تقابل ومتصلة ومفتوحه).
كما يقال للفضائين (X, τ) و (Y, τ) انهما متساويتا تبولوجيا
او متساكليتا اذا وفقتا اذا وجد بينهما تساكل ويعبر عن ذلك
بالرمز $(X, \tau) \cong (Y, \tau)$
واحيانا يكتب $X \cong Y$

مثال // نعرف ان $f: X \rightarrow Y$ دالة معرفه باليهيه
 $f(x) = (b-a)x + a, x \in X, a, b \in \mathbb{R}$
حيث ان $X = [0, 1]$ و $Y = [a, b]$ مع اختيار التبولوجيه المعتاد
على $[0, 1]$ و $[a, b]$ هذه الداله متباينه (وفت ذلك ؟)

نرفنا ان $y \in [a, b]$ و $y = f(x) = (b-a)x + a$ ومنها نحصل على ان
 $x = \frac{y-a}{b-a} = f^{-1}(y) \in [0, 1]$ وهذا يؤكد ان الداله f شامله وبالتالي
فان الداله العكسيه تكون موجوده. كما يمكن ملاحظه ان الداله $f: X \rightarrow Y$
مفتوحه لانه يعرفه مجموعه $B = (x, y) \subseteq X$ حيث $0 \leq x \leq 1$ و $a \leq y \leq b$
فان صور هذه المجموعه تعطينا كما يار $f(B) = f(x, y) = ((b-a)x + a, (b-a)y + a)$
 $= (b-a + a, (b-a) + a) = (b, b)$ لان $c = (b-a)x + a, 0 \leq x \leq 1$ لان $(b-a) \leq c \leq b$
كما ان $a \leq c$ لانه اذا كانت $c < a$ فان هذا يعنى ان

$(b-a)x + a = c < a \Rightarrow (b-a)x < 0 \Rightarrow (b-a) < 0$
وهذا تناقض دلله فان $f(B)$ مجموعه مفتوحه في Y . ونعرف ان $f(\emptyset) = \emptyset$
و $f(X) = Y$ ايضاً هذه الداله متصلة لانه يعرفه ان $H = (x, y) \subseteq [a, b]$
مجموعه جزئيه مفتوحه في Y حيث ان $a \leq y \leq b$ و $a \leq x \leq 1$ فان

$$f^{-1}(H) = \left[\frac{\alpha - a}{b - a}, \frac{\beta - b}{b - a} \right] \subseteq [0, 1] = X$$

فهذا يعني أن المجموعة $f^{-1}(H)$ مفتوحة في X وأن $f(Y) = X$ وكذلك $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. إذاً هذه الدالة هي تنايل متصلة و مفتوحة ومن ثم فهي دالة تيولوجية. إذاً $[0, 1] \cong [a, b]$

مثال //

في المثال السابق يتضح أن خاصية التول ليست تيولوجية
فمثلاً يا اختيار $\alpha = 0, b = 7$. يتضح أن

مثال //

خاصية كون الفضاء متقطع (Discrete) هي خاصية
تيولوجية

الحل //

بفرض أن الدالة $f: (X, D) \rightarrow (Y, D)$ تنايل متصلة
أن كل مجموعة رصيدة العنصر $\{x\}$ في الفضاء متقطع مفتوحة
فإن كل مجموعة $\{y\} = \{f(x)\}$ هي أيضاً مفتوحة.
إذاً f هو بيورفيزم. ومن ثم يكون
 $(X, D) \cong (Y, D)$

نظريه:

نفرض ان الداله $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ تقابل: الميارات

التاليه متكافئه:

- (i) الداله f تبولوجيه.
- (ii) الدالتان f و f^{-1} متصلتان.
- (iii) الداله f متصله ومغلقة.
- (iv) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$

البرهان:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) نفرض ان f داله تبولوجيه، فأنها تكون متصله ومفتوحه لإثبات أن الداله $f^{-1}: (Y, \nu) \rightarrow (X, \tau)$ متصله نفرض ان $A \subseteq X$ مجموعه مفتوحه. بما ان الداله f مفتوحه فأن $f(A) \in \nu$ وهذا يعنى أن الداله f^{-1} متصله.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

نفرض أن كل من الداله f والداله f^{-1} متصله. ونفرض أن $F \subseteq X$ مجموعه مغلقة. بما أن الداله f^{-1} متصله فأن $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ مجموعه مغلقة وعليه تكون الداله f مغلقة. إذاً الداله f متصله ومغلقة.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

نفرض ان الداله f متصله ومغلقة. بما أن الداله f متصله يحصل على

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad (1)$$

بما أن الداله f مغلقة يحصل على

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A}) \quad (2)$$

من (1) و (2) يحصل على

$$A \subseteq X \text{ لكل } f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

$$(i) \Leftarrow (iv)$$

نفرض أن $B \subseteq Y$ مجموعة مغلقة، إذاً $\bar{F}(B) \subseteq X$ وباستخدام
البنء (iv) نجد أن

$$\overline{F(\bar{F}(B))} = \overline{F(F^{-1}(B))} = \bar{B} = B$$

وعليه يكون $\bar{F}(B) = F^{-1}(B)$ أي أن $F^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة
وهذا يعني أن الدالة F مغلقة.

لنثبت أن الدالة F مفتوحة نفرض $F \subseteq X$ مجموعة
مغلقة فإنه من (iv) نجد أن

$$F(F) = \overline{F(F)} = \overline{F(F)}$$

وهذا يعني أن $F(F)$ مجموعة مغلقة.

إذاً الدالة F مغلقة وبما أنها تقابل فإن الدالة F
مفتوحة ومن ثم تكون دالة ثيولوجية. $\square$

المراجع

REFERENCES

- [1] Bartle R. G. , Sherbert D. R. , Introduction to Real Analysis , second edition , John Wiley & Sons INC. 1992.
- [2] Bourbaki , Topologie generale , Act. Sci. Indust. (1940-1953).
- [3] Čech E. , Topological Spaces , Interscience- Wiely , London , New York , 1966.
- [4] Császàr A. , General Topology , A Kademiai Kiado , Budapest , 1987.
- [5] Goshi , D. , Introduction to General Topology , Wiley Eastern Limited , New Delhi , 1986.
- [7] Kelly , J., General Topology , Van Nostrand , Princeton New Tersey , 1955.
- [8] Lipschutz , S. Theory and problems of General topology , Schum's Series , McGraw-Hill Int. 1965.
- [9] Munkres , J. , Topology : Afirst course , prentic0Hall , N. , Y. , 1975.
- [10] Naimpally S. N. , Warrack , B. D. , Proximity Spaces , Combridge Univ. Press , New York , 1970.
- [11] Sierpinski , W. , General topology , Toronto , 1952
- [12] Simmons , G. , F. , Introduction to topology and Modern Analysis , McGraw-Hill Int. 1963.
- [13] Willeard S. , General Topology , Reading M A , 1970.