



جمهورية العراق / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية / كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

التحويلات الخطية

بمحة تخرج تقدم به الطالب

حسين عباس هلال

الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات / قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس علوم في الرياضيات

إشراف

د. قصي حاتم عكار

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(رَبِّ أَوْزِرْ عَنِّي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى
وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَصْلِحْ لِي فِي ذُرِّيَّتِي إِنِّي
نُتِبْتُ إِلَيْكَ وَإِنِّي مِنَ الْمُسْلِمِينَ)

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ

ادراء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿قُلْ أَعْمَلُوا فَيَسِيرَ لَكُمْ إِلَى اللَّهِ وَعَمَلُكُمْ وَالْمُؤْمِنُونَ﴾

صدق الله العظيم

إلهي لا تطيب الليل إلا بشكرك ولا تطيب النهار إلا بطاعتك .. ولا تطيب
الاحتياط إلا بتذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بمذكرك .. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

" الله جل جلاله "

إلى مع بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

" سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم "

إلى مع كله الله بالهيبة والوقار .. إلى مع علمني المطا بدوه انتظار .. إلى

مع أحمل اسمه بكل اختيار .. أرجو مع الله أن يمد يدي عمرك لتري شمرا قد حان

قطاها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهدني بها اليوم وفي ألف والى الأبد ..

والذي المنيض

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنا .. والتفاني ..

إلى نسمة الحياة وسر الوجود

إلى من كان دنانها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

أمي الحبيبة

إلى الإخوة والأخوات ، إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والمطاء إلى يتابع

الصديق الصافي إلى من معهم سمكت ، ويرفقهم في دروب الحياة الحلوة

والخزينة سرقت إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير

إلى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أهلا أضيئهم

أصدقائي

شكركم

"كم عالما .. فإله لم تستطع فهم متعلما ، فإله لم تستطع فأحب العلما ، فإله لم

تستطع فلا تفضيهم"

لأب لي وأنا أخطو خطواتي الأخيرة في الحياة الجامعية مع ورقة أعوذ إلى أعوام قضيتها في
رعاية الجامعة مع أساتذتي الكرام الذين قدموا الكثير بأدلي بذكاء جهودا كبيرة في بناء
جيل الفد لتبث الأمة من جديد...

وقبل أن أمضي أدم أياك الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدسي
رسالة في الحياة...

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة...

إلى جميع أساتذتنا الأفاضل.....

وأخص بالشكر والتقدير : استاذي الدكتور قصي حاتم الفخاري

الذي أقول له بشيئة أقول رسول الله صلى الله عليه وسلم:

"إله الخوف في البحر ، والطير في السماء ، ليصلوه على معلم الناس الخير"

كما أنني أتوجه له بخالص الشكر إلى من علمني التفاضل والمضي إلى الأمام، إلى من رعايني
وحافظ علي، إلى من وثق إلي جانبي عندما ضللت الطريق.....

وكذلك أشكر كل من ساعد علي إتمام هذا البحث وقدم لي المود ومدة لي يد المساعدة
وزودني بالمعلومات اللازمة لإتمامه .. زملائي & زميلاتي

إلى من زرعوا التفاؤل في دربي وقدموا لي المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات،
ربما دورهم يشعروا بدورهم بذلك فلهم مني كل الشكر

Abstract الخلاصة

ان الهدف الرئيسي لهذا البحث هو التعرف الى التحويلات الخطية وكيفية ايجاد العلاقة الجبرية بين العمليات على التحويلات الخطية والعمليات الجبرية على المصفوفات الممثلة لها.

1- المقدمة Introduction

ان التحويلات الخطية من التطبيقات المهمة التي تستعمل في الفيزياء، والعلوم الهندسية، والعلوم الاجتماعية، والافرع المختلفة من الرياضيات. تندرج التحويلات الخطية من مواضيع الجبر الخطي.

ان التحويلات الخطية هي عبارة عن دوال مجالها ومجالها المقابل عبارة عن فضاء متجهات.

بحيث تنقل كل تركيب خطي لمتجهات في مجال الى التركيب الخطي نفسه لمتجهات اخرى في المجال المقابل.

ومن الامثلة على التحويلات الخطية هي تدوير المستوى R^2 بزاوية معينة (θ) فاذا رمزنا للتدوير بالرمز R_θ فانه يمكن اعتبار R_θ دالة R^2 الى R^2 أي ان $R_\theta: R^2 \rightarrow R^2$ هذا التدوير ينقل متوازي الاضلاع ذا الضلعين A, B الى متوازي اضلاع اخر ذي ضلعين $R_\theta(A), R_\theta(B)$ بحيث ان القطر $A + B$ ينتقل الى القطر $R_\theta(B) + R_\theta(A)$ أي بمعنى

$$R_\theta(B + A) = R_\theta(B) + R_\theta(A)$$

2 التحويلات الخطية (Linear Transformations)

تعريف (1.2)

ليكن V, W فضاء متجهيات على F ، لنقل F لنفسه، ولتكن $T: V \rightarrow W$ دالة تحقق التالي:

$$i) T(A+B) = T(A) + T(B)$$

ii) $T(\gamma A) = \gamma T(A)$ وذلك لأي متجهات $A, B \in V$ ولأي $\gamma \in F$ (هذه الخصال تسمى T "تحويلات خطية" من V إلى W)

مثال (2.2) ليكن $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $W = \mathbb{R}^2$ و $V = \mathbb{R}^3$ و

دالة معرفة: $T(x, y, z) = T(x+y, z)$ $\mathbb{R}^3$ من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$

لكن $A = (a_1, a_2, a_3)$ و $B = (b_1, b_2, b_3)$ وأن $r \in \mathbb{R}$ حيث أن r عدد حقيقي

$$T(A+B) = T((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3))$$

$$= T((a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3))$$

$$= ((a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3))$$

$$= (a_1+a_2, a_3) + (b_1+b_2, b_3)$$

$$= T(A) + T(B)$$

(4)

، $\forall r \in \mathbb{R}$ ، $\forall a_1, a_2, a_3 \in V$ ،

$$T(rA) = T(ra_1, ra_2, ra_3)$$

$$= (ra_1 + ra_2, ra_3)$$

$$= (r(a_1 + a_2), ra_3)$$

$$= r(a_1 + a_2, a_3)$$

$$= r T(A)$$

نتنتج من هذا أن الدالة T تحقق الشرطين أعلاه وعليه تكون تحويلًا خطيًا.

مثال (2.3) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ العرفه التاليه
برهنه على ان الداله

$$T(x, y) = xy + 1$$

ليست داله خطيه
البرهان:

$$B = (b_1, b_2), \quad A = (a_1, a_2) \quad \text{ليكن}$$

$$T(A+B) = T(a_1+b_1, a_2+b_2)$$

$$= (a_1+b_1)(a_2+b_2) + 1$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + 1$$

$$T(A) + T(B) = (a_1a_2 + 1) + (b_1b_2 + 1) \quad \text{ليكن}$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 + 2$$

$$T(A+B) \neq T(A) + T(B) \quad \text{وهذا أصبح واضحاً أن}$$

ليس يمكن ان يكون A, B الداله زوج من المتجهات في $\mathbb{R}^2$

ملاحظة: أن المبرهن التالي يبين الخصائص البسيطة للتحويل الخطي

مبرهن (4.2)

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا بين الفضاءين V, W على حقل F فإن

$$(أ) \quad T(0) = 0$$

(ب) لأي مجموعة متناهية $A_1, A_2, \dots, A_n \in V$ ولأي مجموعة أعداد قياسية يكون لدينا

$$T(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n) = x_1 T(A_1) + \dots + x_n T(A_n)$$

حيث أن $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$ البرهان:

$$(أ) \quad 0 \cdot A = 0 \text{ لأي } A \in V \text{ فنعلم } A \in V \text{ عليه يكون } 0 \cdot 0 = 0$$

وبالتالي وحسب الشرط (2) من تعريف التحويل الخطي

يكون لدينا:

$$T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$$

(ب) حسب الشرط الأول من تعريف (1.2) نستنتج:

$$T(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) = T(x_1 A_1) + \dots + T(x_n A_n)$$

أما الشرط الثاني من التعريف فيعطي النتيجة المطلوبة

لأن

$$\forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$T(x_k A_k) = x_k T(A_k)$$

ملحوظة: أن البرهان التالي يوضح أن التحويلات الخطية ليست دالة عادية وكذلك فإن قوائم فضاءات المتجهات ليست مجموعة جزئية عادية. فمجرد معرفتنا للقيم التحويلية الخطية على عناصر القاعدة تكون قد حددت التحويل، الخطي وعرفنا قسماً على جميع عناصر الفضاء.

مبرهنة (5.2)

إذا كان V فضاء متجهات، متناهية البعد وكانت $\{A_1, \dots, A_n\}$ قاعدة لـ V فإن كل مجموعة $\{B_1, \dots, B_n\}$ متكونة من n من المتجهات المستقلة في W يوجد تحويل خطي وحيد $T: V \rightarrow W$ يحقق:

$$T(A_1) = B_1, \dots, T(A_n) = B_n$$

ولديه أعداد قياسية $x_1, \dots, x_n$ يكون:

$$T(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) = x_1 B_1 + \dots + x_n B_n$$

البرهان:

$$T: V \rightarrow W$$

سنبرهن أولاً أنه يوجد تحويل خطي

يحقق الشرطين أعلاه

هذا الغرض نأخذ $A \in V$ أنه متجه.

بيان المجموعات $\{A_1, \dots, A_n\}$ تكون قاعدة لـ V بالضرورة إذن توجد أعداد قياسية وحيدة $x_1, \dots, x_n$ حيث

$$A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$T(A) = x_1 B_1 + \dots + x_n B_n$$

فقد عرفنا دالت $T: V \rightarrow W$

ولغرض التحقق من الدالت أعلاه تكون تحويلاً خطياً نأخذ (A, C) أي متجه في V

ولنفرض أن $A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$ و $C = y_1 A_1 + \dots + y_n A_n$

$$A + C = (x_1 + y_1) A_1 + \dots + (x_n + y_n) A_n$$

$$= x_1 B_1 + y_1 B_1 + \dots + x_n B_n + y_n B_n$$

$$= (x_1 B_1 + \dots + x_n B_n) + (y_1 B_1 + \dots + y_n B_n)$$

$$= T(A) + T(C)$$

ليكن r أي عدد قياسي

$$rA = (rx_1) A_1 + \dots + (rx_n) A_n$$

أذن

$$T(rA) = (rx_1) B_1 + \dots + (rx_n) B_n$$

$$= r(x_1 B_1 + \dots + x_n B_n)$$

$$= rT(A)$$

بهذا نكون نكون قد برهننا على أن الدالت تكون تحويلاً خطياً وفقاً للشروط المذكورة

مثلاً هذا التحويل يكون وحيداً لأنه لو كان $S: V \rightarrow W$ أي

تحويلاً خطياً وفقاً للشروط

$$S(A_1) = B_1, \dots, S(A_n) = B_n$$

$$S(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) = x_1 S(A_1) + \dots + x_n S(A_n)$$

$$= x_1 B_1 + \dots + x_n B_n$$

وبالتالي يحقق الشرط الثاني ويكون مساوياً لـ T

تعريف (6.2)

لنرى فضاء متجهات V ، W على الحقل F نفسه، ولين
 نولين $S, T: V \rightarrow W$ يمكن تعريف دالة

$$S+T: V \rightarrow W \text{ بالصيغة } (S+T)(A) = S(A) + T(A)$$

وكذلك فانك لا بد قياسي $r \in F$ يمكن تعريف دالة $rT: V \rightarrow W$
 بالصيغة

$$(rT)(A) = rT(A)$$

مثال (7.2)

اذا كان $S, T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نولين خطيين معرفين بالصيغة:

$$S(x, y) = (x, 2y), \quad T(x, y) = (y, 0)$$

نجد المعادلات التالية $2S, -5T, S+T, 2S-5T$
 حل:

$$(2S)(x, y) = 2S(x, y) = (2x, 4y) \quad \text{من التعريف أعلاه يتبع}$$

$$(-5T)(x, y) = (-5)T(x, y) = (-5y, 0)$$

$$\begin{aligned} (2S-5T)(x, y) &= 2S(x, y) + (-5T)(x, y) \\ &= (2x, 4y) + (-5y, 0) \\ &= (2x-5y, 4y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S+T)(x, y) &= S(x, y) + T(x, y) = (x, 2y) + (y, 0) \\ &= (x+y, 2y) \end{aligned}$$

3- مصفوفة التحويل الخطي (Matrix of a linear transformation)

في هذا البند سنوضح العلاقة بين المثلثات في طوبولوجيا المصفوفات

فإذا كان كل من V و W فضاءات متجهية منتظمة البعد n والـ m على التوالي
نفسه بحيث أن

$\dim V = m$ و $\dim W = n$ وإذا كان $T: V \rightarrow W$ في ويلي

خطياً فإنه يمكن أن يكون مصفوفة $m \times n$ عناصرها في F

وتعتبر أعمدة المصفوفة T التي ويليها T

وعند القواعد المختارة في كل من V و W وعلى النحو التالي:

لنعتبر أن $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ قاعدة في V وأن $B = \{B_1, \dots, B_n\}$

قاعدة في W التي لكل i يكون $T(A_i)$ متجهاً في

W وبالتالي يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $B_1, \dots, B_n$ وبطريقة
واحدة فقط

$$T(A_1) = a_{11}B_1 + \dots + a_{1n}B_n$$

$$T(A_2) = a_{21}B_1 + \dots + a_{2n}B_n$$

$$T(A_m) = a_{m1}B_1 + \dots + a_{mn}B_n$$

(1.3)

إذا وضحنا:

$$M_T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فيكونت المصفوفة

علاقة بين المصفوفة بالـ T ويليها T

وبالقواعد H و K هو مصفوفة التحويل التالي:

مبرهنة (2.3) 1

إذا كان $X = (x_1, \dots, x_m)$ متجهاً أساسياً لـ AEV بالنسبة للقاعدة $T(A)$ بالنسبة $H = \{A_1, \dots, A_m\}$ و $Y = (y_1, \dots, y_n)$ متجهاً أساسياً لـ $T(A)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \dots, B_n\}$ فإننا نعرف التحويل الخطي

$T: V \rightarrow W$ بالنسبة إلى القواعد H و S والمصفوفة M_T في

$$T(A_1) = a_{11}B_1 + \dots + a_{1n}B_n$$

$$T(A_2) = a_{21}B_1 + \dots + a_{2n}B_n$$

$$T(A_m) = a_{m1}B_1 + \dots + a_{mn}B_n$$

$$Y = X M_T \quad \text{وفقاً}$$

البرهان :-

إذا كان $X = (x_1, \dots, x_m)$ متجهاً أساسياً لـ A بالنسبة للقاعدة

$$A = x_1 A_1 + \dots + x_m A_m \quad \text{فإن } H = \{A_1, \dots, A_m\}$$

بما أن $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي فإنه يكون

$$T(A) = x_1 T(A_1) + \dots + x_m T(A_m)$$

الآن نعوّض عن كل $T(A_k)$ بـ $k=1, \dots, m$ كما يساوي
و حسب أساس S نحصل على :

$$T(A) = x_1 \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} B_j \right) + \dots + x_m \left(\sum_{j=1}^n a_{mj} B_j \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^m x_k a_{kj} \right) B_j$$

(12)

لكن $T(A)$ يملك متجهات أساسيات $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$

بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \dots, B_n\}$ أن $T(A) = Y_1 B_1 + \dots + Y_n B_n$

$$\sum_{j=1}^n Y_j B_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m x_k a_{kj} \right) B_j \quad \text{إذا}$$

بما أن كل متجه في W يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات القاعدة S فعلينا نستنتج أن:

$$Y_j = \sum_{k=1}^m x_k a_{kj} \quad \forall j=1, \dots, n$$

وعندما نكتب المصفوفات نحصل على

$$(Y_1, \dots, Y_n) = (X_1, \dots, X_m)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y = X M_T$$

وهذا يعني أن

البرهان أعلاه أعبرنا المتجهات Y, X على أنها مصفوفات $1 \times n$ و $1 \times m$ على التوالي

بما أن متجه الأساسيات بالنسبة لقاعدة معينة يعين اتجاه

المتجه بصورة كلية فإن المبرهنات أعلاه تؤكد أن معرفات

مصفوفات التحويل الخلفي تعطي معرفات التحويل الكلي وكما

موضح في المثال أعلاه

مثال (3-3):
 ليكن $T: R^2 \rightarrow R^3$ في ولاءاً مفرداً بالصيغة:
 $T(x, y) = (x, x+y, 2x-y)$

جد المصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية لـ R^2 و R^3
 الحل:

القاعدة الطبيعية لـ R^2 تتكون من المتجهات
 $A_1(1, 0)$ و $A_2(0, 1)$
 والقاعدة الطبيعية لـ R^3 تتكون من المتجهات
 $B_1(1, 0, 0)$ و $B_2(0, 1, 0)$ و $B_3(0, 0, 1)$

لغرض حساب مصفوفة التحويل الخطي T نتبع الخطوات
 المذكورة في (1-3)

$$T(A_1) = T(1, 0) = (1, 1, 2) = (1)B_1 + (1)B_2 + (2)B_3$$

$$T(A_2) = T(0, 1) = (0, 1, -1) = (0)B_1 + (1)B_2 + (-1)B_3$$

بذلك تكون المصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية

كما يلي

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال (4.3) :
 $T: P_2(R) \rightarrow P_2(R)$ دالة فوقية الشوكية في $P_2(R)$
 المعرفة بالمعادلة : $T(a+bx) = ax + bx^2$

اولاً : بالنسبة للقواعد الطبيعية $P_2(R)$ اقاعدة
 المكونة من المتجهات

$$A_1 = 2, A_2 = 1-x$$

وقاعدة $P_2(R)$ المكونة من المتجهات

$$B_1 = -1, B_2 = 3x, B_3 = 2x^2$$

$$T(1) = 1 \cdot x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$T(x) = x^2 = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

وبذلك تكون دالة فوقية T بالنسبة للقواعد الطبيعية كما يلي :

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فتخرج دالة فوقية T بالنسبة للقواعد الجديدة كما يلي :

$$T(A_1) = T(2) = 2x = 0 \cdot B_1 + (2/3) B_2 + 0 \cdot B_3$$

$$T(A_2) = T(1-x) = x - x^2 = 0 \cdot B_1 + (1/3) B_2 + (1/2) B_3$$

وبذلك تكون دالة فوقية T بالنسبة للقواعد
 المعطاة كما يلي

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4- تحويل لابلاس الخطي :

تعريف (1-1)

يمكن القول بأن تحويل لابلاس هو عبارة عن تحويل رياضي

خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة

تغير مركب يسمى متغير لابلاس كما يمكن به تحويل المعادلات

التفاضلية (أو التفاضلية - التفاضلية)

إلى معادلات رياضية يمكن تبسيطها وافتقارها والتعامل معها بسهولة

ويمكن كتابته تحويل لابلاس كما يلي :

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

حيث أن :

(أ) $F(s)$: الدالة المعولة بدلالة الكميات المركبة $(s = \sigma + j\omega)$

(ب) $f(t)$: الدالة الأصلية بدلالة الزمن

(2) L : رمز تحويل لابلاس
كما أن تحويل لابلاس العكسي يمكن تحويله كما يلي

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}(L(f(s))) = f(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

وتبين أن تحويل لابلاس العكسي المعطى بالمعادلة السابقة يمكن إجراءه على جميع الدوال ولكن مع بعض التحفظات لأن جداول لابلاس يعطي عناوين الدوال الزمنية عند معرفة الدوال المركبة .

خصائصها ونظرياتها في تحويل لابلاس:

هناك عدد كبير من النظريات المتعلقة بتحويل لابلاس والتي من شأنها أن تساعد

في دراسة نظريات النظم التي تظهر كما تسهل، لتصور العلاقات

في تحويل لابلاس لبعض الدوال الزمنية والمعادلات التفاضلية ومن أهم هذه النظريات:

(أ) النظرية الخطية: $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$

(ب) نظرية التناسب: $L(Af(t)) = A L(f(t))$

(ج) نظرية التراكب: $L(f(t) + g(t)) = F(s) + G(s)$

(د) تحويل تفاضل الدالة: $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$

حيث أن $f(0)$ هي القيمة الابتدائية.

حيث أن: $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$

(هـ) تحويل دالة الدالة: $L\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{(\int_0^t f(t) dt)_{t=0}}{s}$

$L\left(\int_0^t \int_0^t f(t) dt dt\right) = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{(\int_0^t f(t) dt)_{t=0}}{s} + \frac{(\int_0^t \int_0^t f(t) dt dt)_{t=0}}{s}$

(و) قانون الزحف في مجال الزمن:

$$L(f(t-T)) = e^{-sT} F(s)$$

(ز) قانون الانزياح في مجال s :

$$L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

(2) تغيير سلم محور الزمن:

$$L(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(ب) قانون القيمة الابتدائية:

إذا كانت $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ موجودة فإن يمكن أن يكون الحد من القيمة

القيمة الابتدائية

لـ $f(t)$ بالحد من التالي: $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

(ج) قانون القيمة النهائية:

إذا كانت $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ موجودة فإن يمكن أن يكون الحد من القيمة

النهائية لـ $f(t)$ بالحد من التالي: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

مثال: (2-4)

أوجد تحويل لابلاس للدالة $x(t)$ حيث تعريف تحويل لابلاس

$$X(t) = \begin{cases} A e^{at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

الحل:

لدينا تحويل لابلاس للدالة $x(t)$ حيث تعريف تحويل لابلاس

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} A e^{-(s-a)t} dt \end{aligned}$$

$$X(s) = \left. \frac{A}{s-a} e^{-st} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{s-a}$$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة تحويل لابلاس: (3-4)

نبرهنه، الفرض سوف نخدمنا بإيجاز أهم تطبيقات تحويل لابلاس الأهم

حل المعادلات التفاضلية الخطية والذي يتم فيه الحصول على الحل الكلي

دفعه وامره ومن الجانب الآخر حساب الشروط من الشروط الأولية

لأنه إلى النهاية تدخل فيه الشروط الأولية ومنه إلى ظهور الحدود،

وذلك أثناء إجراء تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية،

فلو افترضنا صورة عامة للمعادلة التفاضلية كما يلي:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

مع إعطاء الشروط الأولية للدالة $y(t)$ وتفاضلها الدول الثاني، إلى

وفقاً رتبة المعادلة التفاضلية (كم الشروط الأولية يساوي رتبة المعادلة

التفاضلية) وبإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فأنه يمكن الوصول

إلى

تحويل لابلاس للدالة على الصورة العامة وذلك به السبيل كالآتي:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

ويكون الحل النهائي هو تحويل لابلاس العكسي للدالة المحولة (أي المعادلة

السابقة وذلك باستعانة بجداول لابلاس العكسي ومفكوك الكسور

الجزئية كالآتي:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(s)}{A(s)} \right]$$

مثال (4-1)
أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5 y(t) = 5 x(t)$$

$$y(0) = 1, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2$$

الحل /
أولاً نريد تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية المعطاة والتحويل بالشروط الأولية أثناء إجراء التحويل ينتج:

$$\left(s^2 Y(s) - s y(0) - \frac{dy(0)}{dt} \right) + 4(s Y(s) - y(0)) + 5 Y(s) = 5 X(s)$$

$$(s^2 Y(s) - s - 2) + 4(s Y(s) - 1) + 5 Y(s) = 5 X(s)$$

$$(s^2 + 4s + 5) Y(s) = 5 X(s) + s + 6$$

فلو افترضنا ان $X(s)$ عبارة عن دالة خطوة

او دالة واحد، فالتحويل لابلاس لها يساوي: $X(s) = \frac{1}{s}$

وبالتالي تصبح المعادلة كالتالي:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

نكون أقطاب هذه الدالة هي $s = 0$ و $s = -2 \pm j$

وبالتالي يجب تكون:

$$Y(s) = \frac{a_1 s + a_2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{a_3}{s}$$

وباستخدام لرق حساب المتوالت نجد أن: $a_1=0, a_2=2, a_3=1$

وبما أن تحويل لابلاس العكسي هو الحل النهائي للمعادلة، لتفاضلية

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{(s+2)^2 + 1}$$

وتحويل الدالة إلى الزمن باستخدام جدول التحويل ينتج الدالة
الزمنية التالية:

$$y(t) = 1 + 2e^{-2t} \sin t$$

$$, t \geq 0$$

الذي سوف نستخدم المعادلات التفاضلية والتحول اللابلاس في حل المسائل التطبيقية (الفيزياء والكيمياء والهندسة)

5- التطبيقات:

اولاً الفيزياء:

تطبيق (5-1):

بسم كتلة 64 باوند يسقط من السكون تحت تأثير الجاذبية
الحرية وتؤثر عليه أيضاً قوة مقاومة الهواء
 $P = 8V$ حيث V السرعة بالقدم/ثانية عند V بدلالة الزمن t ،
أستعمل أن $g = 32$ قدم/ثانية
الحل/

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل على:

$$\frac{64}{32} X'(t) = 64 - 8X(t)$$

$$X'(t) + 4X(t) = 32$$

وهذه المعادلة خطية ويمكن حلها هكذا $X=0, t=0$

$$X = Ce^{-4t} + 8 \quad \text{وبالتالي}$$

$$0 = Ce^{-4(0)} + 8$$

$$\therefore C = -8$$

$$X(t) = 8 - 8e^{-4t}$$

اما في لابلاس

$$X(0) = 0$$

$$sX(s) + 4X(s) = 32$$

ومن ثم

$$X(s) = \frac{32}{s(s+4)} = \frac{8}{s} - \frac{8}{s+4}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي فيحصل على:

$$X(s) = 8 - 8e^{-4t}$$

لانياً الكيما:

تطبيق: (2-5)

يحتوي مستودع في البداية على (100 g) من المواد الحية
يحتوي على، طبل واحد من الملح، ينساب محلول ملح
أخر يحتوي على، طبل واحد من الملح لكل جالون إلى
المستودع ليعدل 3 جالون/دقيقة عندما $t=0$ ولتفرض
الكمية يخرج من المخزن المتزج جيداً من المستودع لتفرض
المعدل.

أوجد كمية الملح في المستودع عند أي لحظة t

الحل:

لدينا $\alpha = 1$, $b = 1$, $v = 100$, $e = f = 3$

وبالتالي تصبح المعادلة

$$\frac{dx}{dt} + 0.03x = 3$$

ويكون هذا هو المعادلات التفاضلية الخطية هو

ويمكن حل هذه المعادلة التفاضلية، فليكن

$$x = C e^{-0.03t} + 100$$

عند $t=0$, $x=0$

$$0 = C e^0 + 100, C = -99$$

ويمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$x = 100 - 99 e^{-0.03t}$$

اما في لابلاس $sX(s) - x(0) + 0.03x(s) = \frac{1}{s}$

عند $x(0) = 0$

$$x(s)(s + 0.03) = \frac{1}{s} + 0$$

$$x(s) = \frac{1}{s(s+0.03)} + \frac{0}{s(s+0.03)}$$

$$\frac{100}{s} = \frac{100}{s+0.03} + \frac{1}{s+0.03}$$

$$L^{-1}\left(\frac{100}{s(s+0.03)}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+0.03}\right) = 100 - 100e^{-0.03t} + e^{-0.03t}$$

$$= 100 - 100e^{-0.03t} + e^{-0.03t}$$

$$= 100 - 99e^{-0.03t}$$

تطبيق: (3-5)

يُضَوَّكُ مستودع سعة 50-80 على 10 جالونات من المياه العذبة،

يُنشَأُ جُلُودُ مِلْحِي يُضَوَّكُ عَلَى رَحِيلٍ وَأَصْفُ الْمِلْحِ لِكُلِّ جَالُونٍ إِلَى الْمُسْتَوْدَعِ بِمَعْدَلٍ 4 جالون/دقيقة

عندما $t=0$ وفي نفس اللحظة يخرج المخلوط المُرَّجُ مِلْحاً مع المستودع بمعدل 2 جالون/دقيقة

الحل

نصِّحُ المعادلة فيما هنالك على الصورة:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{10+2t}x = 4$$

وهي معادلة خطية ويكون حلها

$$x = \frac{40t + 4t^2 + C}{10 + 2t}$$

عندما $t=0$, $x=0$ فإن $C=0$

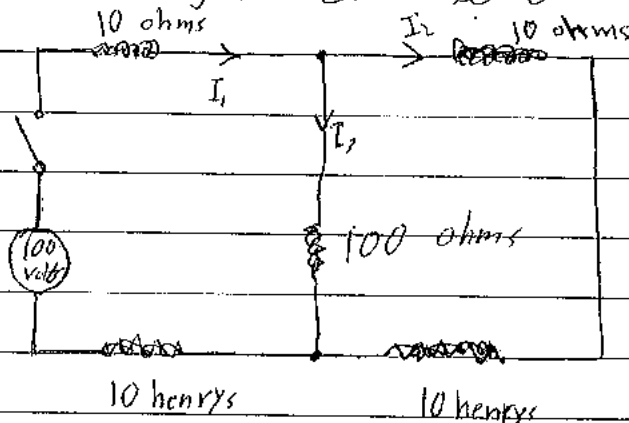
$$x = \frac{40t + 4t^2}{10 + 2t} \quad \text{فتصبح}$$

مثالاً الهندسة (4-5)

تطبيق:

في السلك الموصل يكون: $I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$

عن I_1, I_2, I_3 في الدارة $t \text{ sec}$ إغلاق الدارة



يُطبق قانون كرسوف على الدارة اليسرى في حل على:

$$10 I_1(t) + 10 I_2(t) + 10 I_3'(t) = 100$$

$$10 I_2(t) + 10 I_2' - 10 I_3(t) = 0$$

وبالدسة كانت بأن

$$I_1(t) = I_2(t) = I_3(t)$$

في حل على

$$2 I_1(t) - I_2(t) + I_3'(t) = 10$$

$$2 I_2(t) - I_1(t) + I_2'(t) = 0$$

$$2 I_1(s) - I_2(s) + s I_1(s) = \frac{10}{s}$$

$$2 I_2(s) - I_1(s) + s I_2(s) = 0$$

$$(2+s) I_1(s) - I_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$(2+s) I_2(s) - I_1(s) = 0$$

$$[-1 + (2+s)^2] I_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$I_2(s) = \frac{10}{s[(2+s)^2 - 1]}$$

$$I_2(t) = 10e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-2)(s^2-1)} \right]$$

$$= 10e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{6} \frac{1}{(s+1)} \right]$$

$$= 10e^{-2t} \left(\frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{6} \right)$$

$$= \frac{5}{3} (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$$

که آن را

$$= \frac{10}{3} (2 - 3e^{-t} + e^{-3t}) +$$

$$-\frac{5}{3} (3e^{-t} - 3e^{-3t})$$

$$= \frac{5}{3} (4 - 3e^{-t} - e^{-3t})$$

$$I_3(t) = i_1(t) - I_2(t)$$

$$= \frac{5}{3} (4 - 3e^{-t} - e^{-3t}) - \frac{5}{3} (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$$

$$= \frac{10}{3} (1 - e^{-3t})$$

الذين تمكنوا من التعرف على حل المعادلات التفاضلية بالطرق الجبرية
و حل المعادلات التفاضلية
بمروية لا بد من سبب كل من فصل وتم مقارنة الحل بالطريقتين
وتأخذها المقارنة بالطريقتين

1- ان الطريقة لا بد من مستوى على ظهورات حل أقل من الطريقة الجبرية
مما يساعد في تقليل نسبة الخطأ

2- هذه المقارنة مع الخواص التي تساعد في حل المسائل حيث ان هناك
صيغة مبرهنة لاسكارو للحل
خلافاً عن الطريقة الجبرية حيث لكل مسألة طريقة محددة مختلفة
عن الأخرى في الحل.

3- إمكانية استخدام تحويل لا بد من حل المسائل التقنيات
الفيزيائية والكهربائية والهندسية والكيميائية

المصادر باللغة الانكليزية

- 1- Birkhoff and maklaue : A survey of modern Algebra (MAC MiLLAN) 1965
- 2- S.linear Algebra (Addison – Wesley) 1973
- 3- Maclane , birkoff ; Algebra (MacmilAN) 1971
- 4- Mostow and Sampson : Linear Algebra (Mc Graw – Hill) 1969.
- 5- Smith L : Linear Algebra (Spring – verlag) 1978

المصادر باللغة العربية

- ١- هوارد انتون : الجبر الخطي المبسط (الطبعة الثانية) wiley ArABOOK
- ٢- سيمور ليشتنز : نظريات ومسائل في الجبر الخطي سلسلة وملخصات سشوم (دالر ماكجر وهيل للنشر) 1976

3- أ.د. حسن مصطفى العويضي - العادلات التفاضلية -

دار النشر مكتبة الرشيد - الطبعة الأولى (1427هـ) - 2006

4- سلسلة شوم في العادلات التفاضلية - ريتشارد بيرسون

- ترجمة فائزة فوق العادة - الطبعة الأولى 1407هـ