



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب و الرياضيات
قسم / الرياضيات الطبية

تأثير الهايدرو داينميكا الممغنطة وخصائص

الجدار على النقل التموجي لمائع وليامسون

خلال وسط مسامي

بحث مُعد من قبل الطالبتين

ساره ضياء نعمه و زهراء فؤاد خضير

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في
علوم الرياضيات الطبية من كلية علوم الحاسوب والرياضيات

بإشراف

الأستاذ المساعد الدكتور

ضياء غازي صالح

2017

الإهداء

إلى من جرح الكائن فارغاً ليسقيني قطرة حب، إلى من كدت أنامله ليقدح لنا لحظة سعادة إلى من حمص
الأسواق من دربي لمهد لي طريق العلم إلى القلب الكبير

والدري العزيز

إلى من أَرْضَعَنِي الحب والخاف إلى رمز الحب وبلسم الشفاء إلى القلب الناصع بالبياض

والدري الحبيبة

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البرئة إلى رياحين حباتي

أخوتي

الشكر والتقدير

نتقدم بجزيل الشكر والتقدير والاستاغا الى المتصرف

الاستاذ المساعد الدكتور ضياء غازي صالح

لما منحه لنا من وقت وجهده وتوجيه وارشاده وتشجيعه

كذلك نتقدم بجزيل الشكر الى اساتذتنا الكرام وكل من ساهم في تعليمنا

الفهرست

(1)		ماخص
(1)		المقدمة
(4)		الفصل الأول
(4)		التعاريف الأساسية وخصائص الموتع
(6)		المعاملات الحاكمة
(10)		الفصل الثاني
(13)		المقطع الاول (حل المسألة)
(14)		المقطع الثاني (النتائج والمنقشة)
(17)		المقطع الثالث (ظاهرة السوارات)
(21)		ملاحظات ختامية
(22)		المصادر

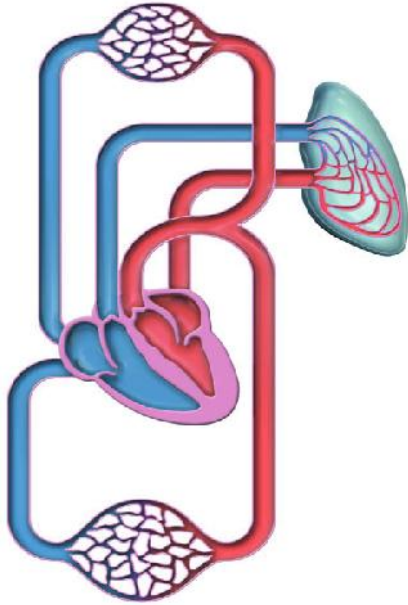
ملخص

هذا البحث يهتم بدراسة التدفق التموجي لمائع وويليامسون خلال وسط مسامي تحت تأثير الهيدروداينميكيا الممغنطة و خصائص الجدار و يتم تحقيق افتراضات العدد رينولدز للطول الموجي تحت الاثار المجتمعة للطول الموجي و يجري هذا التحقيق في اطار الموجة للإشارة المتحركة بسرعة هذه الموجة. و جرت العديد من الاضطرابات بحدود العدد ويسنبريج ($we < 1$) حيث تستخدم للحصول على سرعة عالية ومجرى دالة تيار التدفق. والاثار المترتبة على التوصيل الحراري هي:

عدد كرشوف، عدد دارسي، المغناطيسية، الصلابة، صلابة الجدار و الزوجة اثناء ضخ معاملات القوة على السرعة، درجة الحرارة لمجرى دالة تيار التدفق.

المقدمة

ميكانيكا الموائع تدرس الموائع سواء بالحركة او بالركود وتصف كل من للسوائل والغازات كالموائع. نطاق ميكانيكا الموائع واسع، ولها العديد من التطبيقات في مجال الهندسة والأنشطة البشرية. ومن الأمثلة على ذلك الدراسات الطبية للتنفس وتدفق الدم، وعلم المحيطات، والهيدرولوجيا، وتوليد الطاقة. وقد اكتسبت دراسة التدفق التموجي قدرا كبيرا من الاهتمام بسبب تطبيقات واسعة في وسائل نقل البول من الكلى إلى المثانة حيث يغير القطر الوعائي الصغير الدموي من الكيموس في الجهاز الهضمي، وهكذا عليها، شكل (١-١)



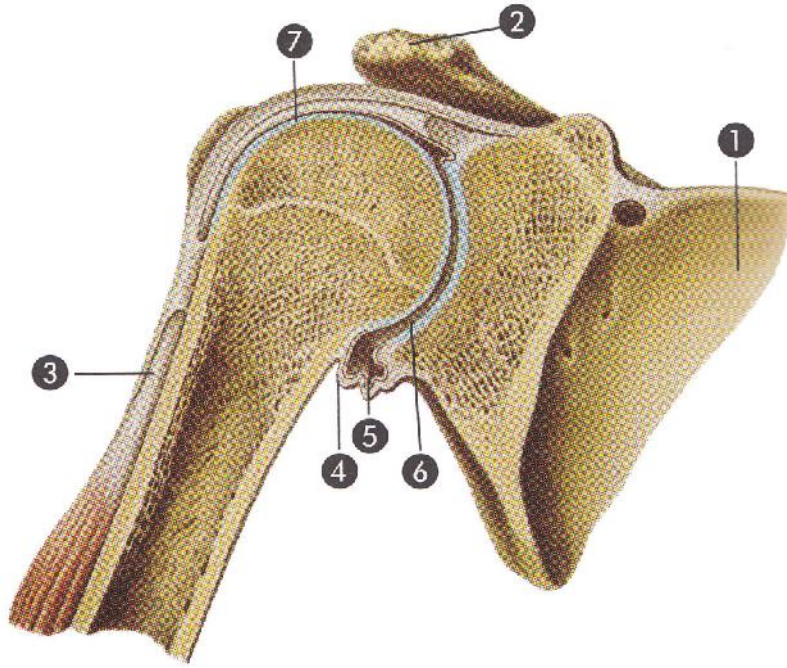
شكل (١-١)

الدورة الدموية

الدورة الدموية

الدورة الدموية

مفاصل الانسان: شكل (١-٢) هو تحميل خشوة بشكل حيوي كما في الغضروف المفصلي الذي يحمل السائل الزلالي مثل زيوت التشحيم. عندما يتم انشاء غشاء السائل يكبس غشاء الحركة الذي يكون قادر على توفير حماية كبيرة لسطح غضروف المفصل. الكتف و الورك و الركبة و الكاحل تكون محشوة تحمل المفاصل الزلالية في جسم الانسان وهذه المفاصل لديها انخفاض في معامل الاحتكاك و ارتداء قليلة و السائل الزلالي العادي هو لزج عديم السائل النيوتوني و عموماً يكون واضح و مصفر.



هيكل تخطيطي لمفصل الكتف شكل (٢-١)

- ١- عظم الكتف (لوح الكتف).
- ٢- الاخرم (يميز بتقديم تفسيرات على عظم الكتف مع الترقوة (عظمة الترقوة)).
- ٣- وتر للعضلة ذات الراسين (اثنان من راس العضلة للذراع).
- ٤- كبسولة المفصل.
- ٥- غشاء الزلالي.
- ٦- المفاصل تحتوي على تجاويف فيها سائل زلالي.
- ٧- غضروف مفصلي من ريجاتي ٢٠٠٠.

العمل ينقسم الى فصلين: الفصل الاول، هو تمهيدي يستعرض الادبيات ذات الصلة مثل العمل القائم على انواع من تدفق للسوائل، معادلات نافير-ستوكس، المغناطيسية. الفصل الثاني، يتعلق بنموذج التدفق التموجي لسائل ويليامسون خلال وسط مسامي تحت التأثير المشترك لل MHD و خصائص الجدار. حيث جذب التدفق التموجي على اهتمام عدد من الباحثين بسبب التطبيقات الواسعة في علم وضائف الاعضاء والصناعة بشكل خاص ووقوع هذه التدفقات سائد جداً في الاجهزة البايولوجية على سبيل المثال نقل البول من الكلى الى المثانة و حركة البويضة في قناة فالوب و ايضا مرور الطعام من خلال المريء و غيرها. اما في التطبيقات الصناعية تحدث هذه التدفقات في ضخ الدم من جهاز القلب الى جهاز الرئة و ايضا نقل المواع المسببة للتآكل وهي الاحماض.

منذ ذلك الحين وكانت اول الاعمال الرائدة هي ليثم [1] و شبايرو و اخرون [2] العدد التحليلي و العدد التجريبي لـ فونغ و ياه [3] جافرين [4] براون و هانغ [5]. والعديد من الباحثين الذين درسو التدفق التموجي لمختلف السوائل وقد تم الابلاغ عنها تحت مختلف الشروط مع الاشارة الى بعض الحالات الفسلوجية و الميكانيكية. اعتبر العديد من الباحثين ان المائع يتصرف مثل المائع النيوتوني لفسلجة

الحركة التموجية من ضمنها تدفق الدم في الشرايين لكن بعض النماذج لا تستطيع ان تكافئ تدفق الدم مادام المائع نيوتوني غير طبيعي. التدفق التموجي لمائع غير نيوتوني يستخدم لة المعادلة الاساسية من الرتبة الثانية و ايضا تم التحقيق عنه من قبل صديقي و اخرون [6]. هنالك حقيقة مثيرة للاهتمام في ابتلاع الطعام هي حركة الغذاء بسبب الحركة التموجية حيث الطعام يتحرك من الفم الى المعدة حتى عندما يكون الشخص راسا على عقب حيث يكون البلعوم عبارة عن انبوب عظمي طويل يبدأ من الرقبة مقابل حدود طويلة من الغضروف الموجود تحت تفاحة ادم و يمتد من الطرف الادنى من البلعوم الى فتحة القلب الى فتحة القلب من المعدة. عملية بلع الطعام ياخذ فترة بسبب عملية الانقباض لجدران المريء الضغط بسبب الانقباض الانعكاسي الذي يمارس على الجزء الخلفي للمضغة اما الجزء الامامي يمر بتجارب الاسترخاء و هكذا تستمر المضغة بالتحرك قدما.

الاقباضات بشكل خاص غير متناظرة و هذا يعني الانكماش (الاقباض) هو صفر في التجاويف و العصارات وهي اعجوبة بعدم السماح اي جزء من مضغة الطعام بالانزلاق الى الجزء الامامي وهذا يعني ان التدفق التموجي هو مهم للبشر ميثرا وبرلساد [7] درس تأثير خصائص الجدار على تدفق بوسيلي تحت الاقباضات. لاشميري واخرون [8] درس اجزاء ضخ الحركة التموجية لمائع في قناة طرفية يسهل اختراقها. ريثود و اخرون [9] درس تأثير خصائص الجدار على MHD والتدفق التموجي للسائل المغبر.

ويعتبر النموذج الرياضي لدراسة التدفق التموجي لمائع ويليامسون تحت تأثير المغناطيسية و خصائص الجدار عبر وسط مسامي ينتج تحليل لمختلف معاملات القيم تسمى عدد كرشوف، عدد دارسي، الموصلية الحرارية، المغناطيسية، الصلابة، اللزوجة اثناء الضخ عبر وسط مسامي

الفصل الاول

مفاهيم اولية و تعاريف اساسية

المقدمة

في هذا الفصل لمحة تاريخية عن مساهمات هامه لفهم تطور ميكانيكية السوائل و يعطي المفاهيم الابتدائية التعاريف الاساسية التي سيتم استخدامها في عملنا الذي سنعرضه

1-1 التعاريف الاساسية و خصائص الموائع :

يحتوي هذا القسم على بعض التعاريف الهامه المتعلقة بخصائص للسائل.

ميكانيكية الموائع [10]

كلمة المائع يعني مادة ذات جزئيات تتغير بسهولة المواقف النسبية موضوع ميكانيكية الموائع يتعامل مع سلوك المائع عندما يتعرف لنظام القوة.

- 1- احصائي: انها تتعامل مع عناصر السوائل الدالة بالنسبة لبعضها البعض.
- 2- معادلات الحركة: تتعامل مع تأثير الحركة اي ترجمة الدوران و التشويه على العناصر.
- 3- حيوية: نتعامل مع تأثير تطبيقات القوة على عناصر السوائل.

الكتلة [11]

حيث m و V الكتلة و الحجم على التوالي.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

الضغط [11]

$$P = \frac{\text{Force}}{\text{area}} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{mc}{A}$$

حيث a هو التعجيل

وضيفة التيار

تعرف بانها وضيفة عدديه للمكان و الزمان مثل ذلك التشتت الجزئي حيث اي اتجاه يعطي السرعة بالاتجاه العمودي على الاتجاه السابق يعتمد رياضياً بواسطة ψ حيث $\psi = \psi(t, s) = \psi(t, z, y, x)$

لبعدين، تدفق غير منتظم يعطي

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = \frac{-\partial \psi}{\partial x}$$

حيث U و V هي مركبات السرعة في اتجاه x و y على التوالي.

السوائل النيوتونية وغير النيوتونية [12]

ينص قانون نيوتن للزوج أن إجهاد القص من عنصر السوائل على طبقة يتناسب طرديا مع معدل الضغط. $\frac{du}{dy} \propto \alpha^2$ ، والتي قد تكون مكتوبة على النحو التالي:

$$^2 = \left\langle \frac{du}{dy} \right\rangle$$

حيث $\frac{du}{dy}$ تمثل نسبة تشوه القص من نسبة إجهاد القص وغالبا ما تسمى تدرج السرعة. والعلاقة العامة بين إجهاد القص وسرعة التدرج (معدل إجهاد القص) للسوائل غير نيوتونية قد تكون مكتوبة على النحو التالي:

$$^2 = A \left(\frac{du}{dy} \right)^n + B$$

حيث A, B و n هي الثوابت. بالنسبة للسوائل نيوتن $B = 0, A = \eta$ و $n = 1$.

التدفق الثابت والغير مستقر

التدفق يعتبر ثابتا عندما يعتمد تدرج سرعة فقط على إجهاد القص، وهي وظيفة واحدة صغيرة للقيمة، هذا يعني ان الزمن لا يعتمد على السوائل، أيضا خصائص السائل لا تعتمد على الزمن، أو غيرها من النواحي، والتدفق غير مستقرة.

تدفق القابل للانضغاط والغير قابل للانضغاط

ميكانيكا الموائع تتعامل مع كل للسوائل المنضغطة والغير منضغطة، السوائل مع كثافة ثابتة ومتغيرة. على الرغم من أنه لا يوجد شيء من هذا القبيل في الواقع بمثابة السائل غير قابل للانضغاط، يتم تطبيق هذا المصطلح حيث التغير في كثافة مع ضغط صغير بحيث تكون ضئيلة. هذا هو الحل عادة مع كل السوائل والغازات، أيضا، يمكن أن تعتبر غير قابل للانضغاط كما هو الحال في اختلاف ضغط صغير بالمقارنة مع الضغط المطلق.

التدفق الرقائقي والمضطرب

تدفق الرقائقي على جزيئات السائل تتحرك على طول مسارات سلسلة في الصفحه أو طبقات، مع طبقة واحدة تنزلق بسلاسة أكثر من الطبقة المجاورة وتكون قيم عدد رينولدز (٢٠٠٠-٠)، وعندما قول أن هذا تدفق هو التدفق المضطرب إذا كانت جزيئات السائل التحرك في أجزاء غير منتظمة جدا وعندما عدد رينولدز أكبر من (٤٠٠٠)، ونحن قول أن هذا تدفق الانتقال إذا كانت قيم عدد رينولدز بين (٤٠٠٠-٢٠٠٠).

٢-١ المعادلات الحاكمة

يحتوي هذا القسم على بعض المعادلات الحاكمة لحركة الموائع.

معادلة الاستمرارية [11]

المعادلة العامة للاستمرارية والتطبيقات على أي نوع من التدفق ولأي سائل قابل للانضغاط أو الغير قابل للانضغاط هو:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

إذا كان السائل هو غير قابل للانضغاط ($\rho = \text{ثابت}$)

ومعادلة الاستمرارية قد تكون مكتوبة على النحو التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

في بعدين، تأخذ معادلة الاستمرارية النموذج:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

لبعد واحد، تأخذ معادلة الاستمرارية النموذج الاتي بأجله - x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

معادلات نافير ستوكس في الاحداثيات الديكارتية

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \right\}$$

حيث u, v, w هي مركبات في x, y, z على التوالي، (F_x, F_y, F_z) هي قوه الجسم في x, y, z على التوالي،
 v هي سرعه الحركيه و $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ مؤثر لابلاس في الاحداثيات القطبيه

الوسط المسامي

معادلات نافير ستوكس للوسط المسامي معطى كالاتي

$$\circ \frac{D\bar{U}}{Dt} = \circ \bar{F} - \nabla \bar{p} + \ll \nabla^2 \bar{U} - \frac{\ll}{k} \bar{U}$$

حيث k هي النفاذيه.

الهيدروداينمكا الممضا [13]

معادلات نافير ستوكس لل MHD تمثل:

في المحور السيني:

$$\circ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \circ F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \ll \nabla^2 u + (J \times B)_x$$

في المحور الصادي:

$$\circ \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \circ F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \ll \nabla^2 v + (J \times B)_y$$

المحور z:

$$\circ \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \circ F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \ll \nabla^2 w + (J \times B)_z$$

حيث $(J \times B)_x$ هي مركبات قوه لورينتز (القوه المغناطيسية) في الاتجاه السيني، B المجال المغناطيسي،
 J الكثافة الحالية او التوصيل الحالي و μ اللزوجة الديناميكية.

ابعاد المعلمات [14]

اذا كان هنالك عدد من متغيرات المعرفة التي تؤثر على مشكله التدفق يمكن ترتيبها في معلمات ذات ابعاد غير مناسبه من خلال طريقه تحليل الابعاد من التجارب الحاكمة، قد تكون المعلمات ذات اهميه قليله يمكن التخلص منها وبالتالي تركنا اهم المعايير التي لها تأثير اكبر بكثير على هذه الظاهرة

هنالك بعض المعلمات الهامه للأعداد اللابعديه في ميكانيكيه السوائل:

عدد رينولدز

عدد رينولدز يرمز لها Re

$$Re = \frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}} = \frac{\rho ca}{\mu}$$

حيث ρ ، c ، a ، و μ تمثل الكثافة، سرعه موحده ، بعد القناه وديناميكية اللزوجة على التوالي.

عدد برنولي

عدد برنولي هو النسبة بين خصائص انتقال الجزيئات لذلك فهو خاصيه السوائل ويعتمد على هندسه التدفق ويرمز له pr حيث هو لابعدي ويمثل النسبة بين اللزوجة الحركية وانتشار الحرارة ويعطى كالآتي:

$$Pr = \frac{\mu}{K} = \frac{\mu / ^\circ}{K / ^\circ c_p} = \frac{\mu c_p}{K}$$

عدد شميت

عدد شميت يرمز له بالرمز Sc يتعلق بانتشار اللزوجة الى انتشار الكتلة ويعطى كالآتي:

$$Sc = \frac{\mu}{D} = \frac{\mu}{D}$$

حيث D هو معامل انتشار الكتلة حيث تمتلك ابعاد L^2T^{-1} .

عدد كرشوف

عدد كرشوف يرمز له Gr هو يقيس الطفو او تأثير الحمل الحراري في التدفق ويعطى كالآتي:

$$Gr = \frac{g a^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}$$

حيث T_0 هي درجة الحرارة في مركز الخط، T_1 هي درجة الحرارة على الجدار، g التعجيل بسبب الجاذبية α المعامل الخطي لتوسيع الحراري للمائع، c سرعه الموجه على التوالي.

عدد دارسي

في السائل الدائنيكي خلال وسط مسامي حيث يرمز لعدد دارسي Da ويعرف كالآتي:

$$Da = \frac{k}{a^2}$$

حيث K هو النفاذية خلال الوسط و a قطر الجسيمات

الفصل الثاني

تأثير الهايدروداينميك الممغنطة وخصائص الجدار على القل التموجي

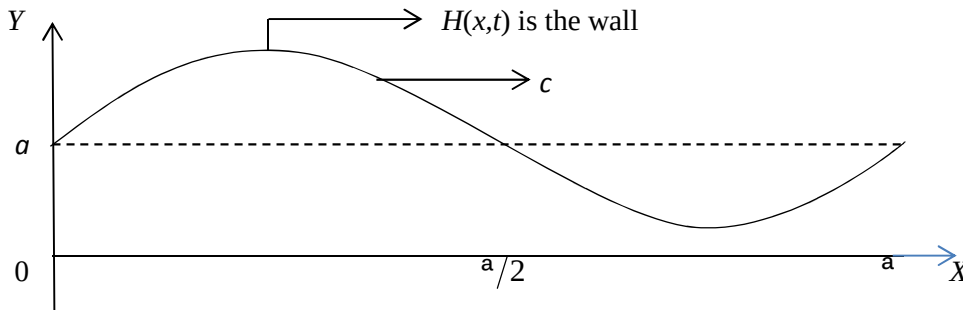
لمائع وليامسون خلال وسط مسامي

المقدمة

درسنا في هذا الفصل تأثير الهايدروداينميك الممغنطة وخصائص الجدار على القل التموجي لمائع وليامسون خلال وسط مسامي في قناة غير المتماثلة. وتم تحليل نتائج مختلفة في قيم المعلمات ومنها ، عدد دراسي، التوصيل الحراري، المغناطيس، وصلابة، صلابة وقوات التخميد لزجة من جدار القناة من خلال وسط مسامي.

١-٢ النموذج الرياضي

يعتبر التدفق التموجي لمائع وليامسون الغير قابل للانضغاط في قناة مرنة مع المرونة الناجمة عن انتقال وتكاثر موجة جيبية مع ثابت للسرعة على طول الجدران للقناة.



شكل ١. الشكل الهندسي للمسألة

تشوه الجدار معطى في المعادلة الاتية

$$H(\bar{x}, \bar{t}) = a - \phi \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (\bar{x} - c\bar{t}) \quad (1)$$

حيث $H, x, t, \phi, \lambda, c$ تمثل الاهتزاز المستعرض للجدار ،تنسيق محوري ،الزمن ،نصف عرض القناة، لتساع الموجة، الطول الموجي وسرعة الموجة على التوالي.

٢-٢ المعادلات الاساسية

المعادلات الاساسية الحاكمة لمائع وليامسون اللانيوتوني والغير قابل للانضغاط يعطي كلاتي:

معادلة الاستمرارية هي

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

(2)

معادلة الزخم هي

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \rho g \alpha (T - T_0) - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu_0}{k} \bar{u}, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} - \frac{\mu_0}{k} \bar{v} \quad (4)$$

معادلة درجة الحرارة هي

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \quad (5)$$

المعلمة المغناطيسية، T درجة الحرارة، C_p الحرارة النوعية عند ضغط ثابت، k التوصيل الحراري، Φ ثابت الحرارة المضلفة او الممغطة.

المعادلة الاساسية لنموذج مائع ويليامسون هي

$$\bar{\tau} = -[\mu_\infty + (\mu_0 + \mu_\infty)(1 - \Gamma \dot{\gamma})^{-1}] \dot{\gamma} \quad (6)$$

حيث τ موثر الجهد الاضلفي، μ_∞ المعادلة اللانهائية للزوج القص، μ_0 المعمل الصفري للزوج القص، Γ هو الزمن الثابت و y يعرف في

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} = \sqrt{\frac{1}{2} \Pi} \quad (7)$$

هنا π هو التآبب الثاني لمؤثر الاجهاد.نحن نعتبر المعادلة الاساسية (6) الحالة التي $\mu_\infty = 0$ و $\Gamma Y < 1$ حتى تتمكن من كتابة

$$\bar{\tau} = -\mu_0 (1 + \Gamma \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (8)$$

المعادلة اعلاه تصبح نموذج نيوتن في حالة $F=0$ السرعة و درجة الحرارة في وسط القناة و جدارها معطى كلاتي

$$T=T_0 \text{ at } Y=0, \quad T=T_1 \text{ at } Y=h$$

حيث T_0 هي درجة الحرارة في مركز الخط، T_1 درجة الحرارة على جدار قناة التدفق التموجي و يمكن التعبير عن المعادلة الحاكمة لحركة ومرونة الجدار كلاتي

$$L^* = \bar{p} - \bar{p}_0 \quad (9)$$

 L^* هو المؤثر الذي يستخدم لتمثيل حركة امتداد لزوج قوة الضخ للغشاء

$$L^* = -\kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + C \frac{\partial}{\partial t} \quad (10)$$

حيث k هو توتر الغشاء المرن، m_1 الكتلة لكل وحدة مساحة، C معامل لزوجة قوة الضخ

لستمرار عند $H=Y$ و لستخدام معادلة الزخم

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} L^*(\bar{h}) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} - \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \rho g \alpha (T - T_0) - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu_0}{k} \bar{u} \quad (11)$$

٣-٢ العوامل اللابعدية

لتبسيط المعادلات الحاكمة للحركة نستعرض المؤثرات اللابعدية الاتية

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{\lambda}, y = \frac{\bar{y}}{a}, \delta = \frac{a}{\lambda}, u = \frac{\bar{u}}{c}, v = \frac{\bar{v}}{c \delta}, t = \frac{c \bar{t}}{\lambda}, \phi = \frac{\bar{\phi}}{a}, We = \frac{\Gamma c}{a}, Da = \frac{k}{a^2}, \\ p = \frac{a^2 \bar{p}}{\mu_0 \lambda c}, Gr = \frac{g p a^2 \alpha (T_1 - T_0)}{c \mu_0^2}, \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, M^2 = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\mu_0}, \beta = \frac{a^2 \Phi}{k(T_1 - T_0)}, \\ Re = \frac{\rho c a}{\mu_0}, Pr = \frac{\mu_0 c_p}{k}, \tau_{xx} = \frac{\lambda}{\mu_0 c} \bar{\tau}_{xx}, \tau_{xy} = \frac{a}{\mu_0 c} \bar{\tau}_{xy}, \tau_{yy} = \frac{\lambda}{\mu_0 c} \bar{\tau}_{yy}, \dot{\gamma} = \frac{a \bar{\gamma}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

حيث σ هو طول القناة، we عدد ويسنبارغ، Da عدد دارسي، Re عدد رينولدز، Gr عدد كرشوف، θ ابعاد درجة الحرارة، M المعاملة المغناطيسية، β ابعاد مصادر درجة حرارة المعاملة، Pr عدد براندتل، وبتعويض معادلات (١٢) نحصل على المعادلات اللابعدية مع شروطها الحدودية

$$h(x, t) = 1 - \phi \cos^2 \pi(x - t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$Re \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\rho g a^2 \alpha (T - T_0)}{\mu_0 c} \theta - M^2 u - \frac{1}{Da} u \quad (15)$$

$$Re \delta^3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \delta^2 \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{\delta^2}{Da} v \quad (16)$$

$$\frac{Re \delta Pr}{(T_1 - T_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (\theta(T_1 - T_0) + T_0) = \delta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \beta \quad (17)$$

$$\delta^2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + Gr \theta - \left(M^2 + \frac{1}{Da} \right) u - Re \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = E_1 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + E_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial t^2} + E_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \quad (18)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} = -2[1 + We \dot{\gamma}] \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -[1 + We \dot{\gamma}] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} = -2[1 + We \dot{\gamma}] \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2 \delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \delta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

الشروط الحدودية

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = v = \theta = 0 \quad \text{at } y = 0 \\ u = 0, \theta = 1 \quad \text{at } y = h \end{aligned} \quad (20)$$

٢-٤ على المسألة

من الصعوبة إيجاد الحل العام للمعادلات من ١٤ إلى ١٨ بشكل العامة لذلك سنفرض العدد الموجي اللابعدى σ يكون صغير وهذا يؤدي الى $\sigma \ll 1$

سنعتبر الطول الموجي طويل تقريباً و بالتالي المعادلات من ١٣ إلى ١٨ تصبح

$$h(x, t) = 1 - \phi \cos^2 \pi(x - t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-[1 + We \frac{\partial u}{\partial y}] \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Gr \theta - (M^2 + \frac{1}{Da})u \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \beta = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-[1 + We \frac{\partial u}{\partial y}] \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Gr \theta - (M^2 + \frac{1}{Da})u = E_1 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + E_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial t^2} + E_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \quad (26)$$

ودالة التدفق المرافقة $(u = \partial \psi / \partial y, v = -\partial \psi / \partial x)$ مع الشروط الحدودية , $\psi = 0$ عندما $Y = 0$. الحل الدقيق لمعادلة ٢٥ مع الشروط الحدودية يعطى في معادلة ٢٠

$$\theta = \frac{y}{h} + \frac{\beta}{2}(hy - y^2) \quad (27)$$

المعادلة ٢٤ تبين ان P يعتمد على X فقط المعادلة ٢٦ هي غير خطية ومغلقة من الصعب الحصول على حلها

مسائل القيم المقيدة هي مقبولة الحل وسهلة التحليل في هذه الحالة تصبح المعادلة خطية ويمكن حلها ومع ذلك هنالك Γ اقتراح صغير يستخدم تقنية الاضطرابات لحل المسائل الغير خطية وفقاً لذلك نحن نكتب

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + We u_1 + We^2 u_2 + O(We^3) \\ \psi &= \psi_0 + We \psi_1 + We^2 \psi_2 + O(We^3) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

نستبدل المعادلات ٢٨ في معادلة ٢٦ مع الشروط الحدودية تساوي القوى لـ We نحصل على

A- النظم الصفري We^0

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (M^2 + \frac{1}{Da})u_0 - Gr \theta = - \left(E_1 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + E_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial t^2} + E_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right) \quad \text{and} \quad \psi_0 = \int u_0 dy \quad (29)$$

شروط الارتباط المقيد هو:

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{y=0} = u_0(h) = 0 \quad \text{and} \quad \psi_0 = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (30)$$

B- نظام الترتيب الاول WE¹

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (M^2 + \frac{1}{Da})u_1 = -2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad \text{and} \quad \psi_1 = \int u_1 dy \quad (31)$$

شرط الارتباط المقيد هو:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=0} = u_1(h) = 0 \quad \text{and} \quad \psi_1 = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (32)$$

C- نظام الترتيب الثاني WE²

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + (M^2 + \frac{1}{Da})u_2 = -2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad \text{and} \quad \psi_2 = \int u_2 dy \quad (33)$$

شرط الارتباط المقيد هو:

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = u_2(h) = 0 \quad \text{and} \quad \psi_2 = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (34)$$

و اخيراً فان حلول الاضطراب يصل الى الشرط الثاني لـ U و تعطى بمعادلة :

$$u = u_0 + We u_1 + We^2 u_2 \quad (35)$$

$$\psi = \psi_0 + We \psi_1 + We^2 \psi_2 \quad (36)$$

٥-٢ نتائج ومناقشة

في هذا القسم نناقش النتائج العددية و الحسابية لهذه المسائل الغير قابله للانضغاط اللانيوتونية للتدفق التموجي لنموذج مائع ويليامسون من خلال وسط مسامي تحت تاثير MHD وخصائص جدار عبر الرسوم التوضيحية، التقيمات العددية من النتائج التحليلية يتم عرض بعض النتائج الهامه بيانياً في الشكل من ٢ الى ١٦. برنامج (Mathematica) يستخدم لمعرفة النتائج و الرسوم التوضيحية العددية والتحليلية حول معادلة الزخم و درجة الحرارة و يتم الحصول عليها باستخدام تقنية الاضطراب جميع الحلول التي تم الحصول عليها تمت مناقشتها بيانياً تحت اشكال مختلفة ذات معاملات موجوده في هذا القسم ظاهرة بلعة المضغعة هي ايضاً ادرجت خلال الرسوم البيانية بسيطة ومختلفة المعاملات الفيزيائية ولستناداً على معادلة ٣٥ شكل من ٢ الى ٦ يوضح تأثيرات المعاملات $\emptyset, Da, M, \beta, Gr, We$ على السرعة. E_1, E_2, E_3

شكل (٢) يوضع اثار المعاملات E_1, E_2 على توزيع سرعة الدالة U مقابل Y. تبين ان سرعة الملف U تزداد مع زيادة التأثيرات لكل المعاملين E_1, E_2 عندما $IyI < 0.8643$ كما بلوغ الارتفاع الاقصى

لها عندما $y=0$ و سرعة المائع تبدأ بالزيادة و تميل بان تكون ثابتة في جدران التدفق التاموجي بشكل خاص بواسطة شروط حدودية خلال .

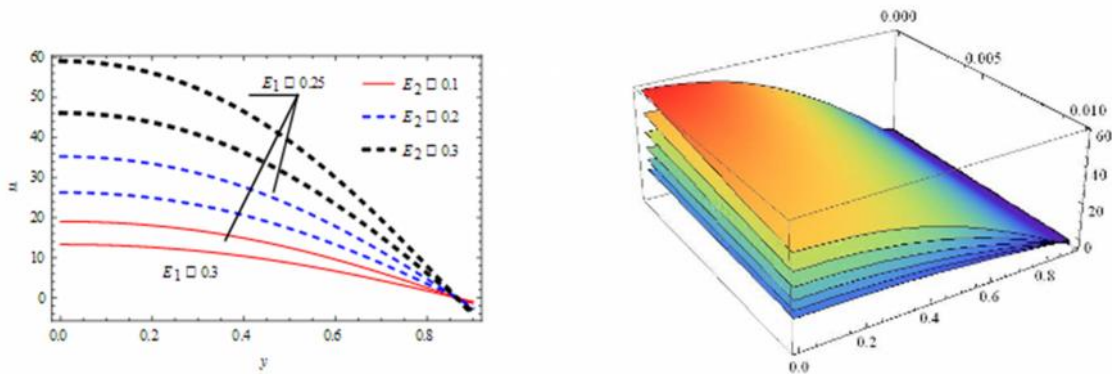
شكل (٣) يمكن للمرء ان يتصور هنا تناقص السرعة مع زيادة في E_3 في حين ملف السرعة يزداد مع زيادة معاملات We عندما $IyI < 0.8643$.

للشكل (٤) يتضمن سلوك U تحت اختلاف Gr, β حيث ان U تذهب الى الاسفل مع زيادة التأثيرات لكل المعاملين β, Gr و عندما $IyI < 0.8643$

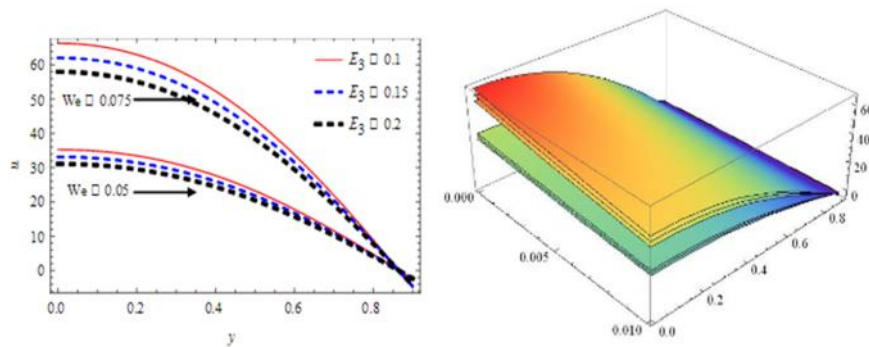
شكل (٥) يوضح تأثيرات المعاملين M و Da على ملف السرعة حيث نصف انخفاض السرعة مع زيادة Da بينما ملف السرعة يزداد مع زيادة M عندما $IyI < 0.8643$

شكل (٦) تظهر انخفاض توزيع الرعة مع زيادة $\emptyset$ وايضا عندما $\emptyset = 0.15$, $U > 0$, عندما $IyI < 0.8643$ و $U(0.8643) = 0$

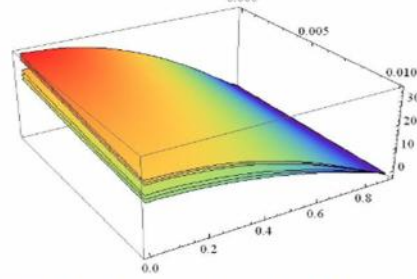
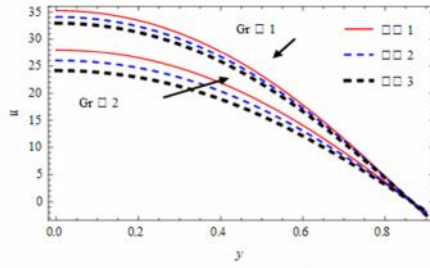
$U > 0$, $\emptyset = 0.175$ عندما $|y| < 0.8191$ و $U(0.8191) = 0$ و $\emptyset = 0.225$, $U > 0$, عندما $IyI > 0.7965$ و $U(0.7965) = 0$, وفقاً لما تحدده شروط التقيد



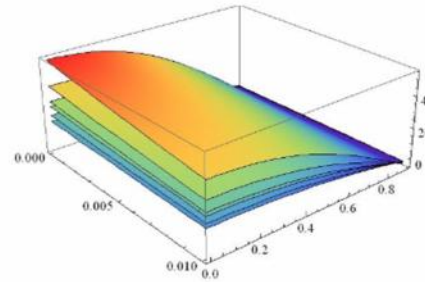
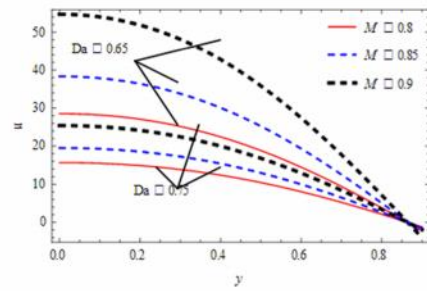
شكل (٢) ملف السرعة لمختلف القيم E_2 و E_1 مع $M=0.9$, $Da=0.7$, $\beta=1$, $\emptyset=0.15$, $Gr=1$, $E_3=0.1$, $We=0.05$, $t=0.1$, $x=0$



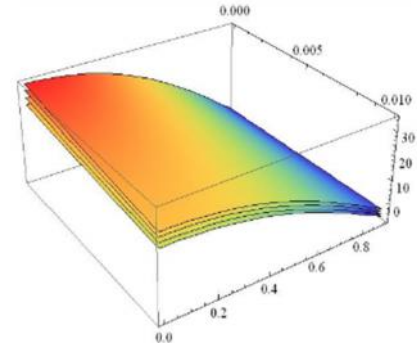
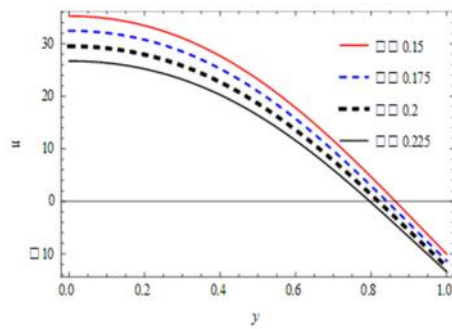
شكل (٣) ملف السرعة لمختلف القيم E_3 و We مع $M=0.9$, $Da=0.7$, $\beta=1$, $Gr=1$, $\emptyset=0.15$, $E_2=0.2$, $E_1=0.3$, $T=0.1$, $X=0$



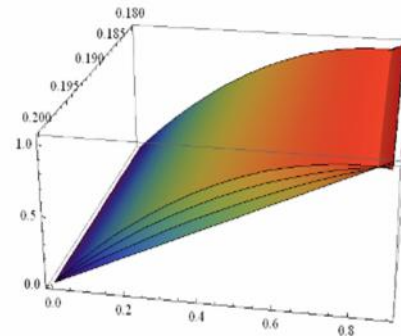
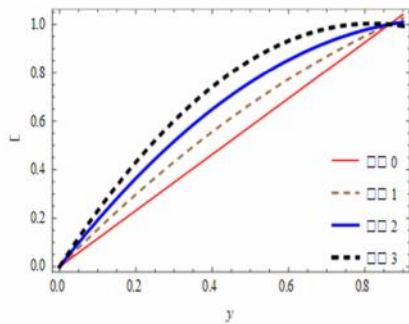
شكل (ع) ملف السرعة لمختلف القيم β مع Gr , $M=0.9$, $Da=0.7$, $\phi=0.15$, $E_3=0.1$, $E_2=0.2$, $E_1=0.3$, $We=0.05$, $T=0.1$, $X=0$



شكل (و) ملف السرعة لمختلف القيم Da و M مع $\beta=1$, $Gr=1$, $\phi=0.15$, $E_3=0.1$, $E_2=0.2$, $E_1=0.3$, $We=0.05$, $T=0.1$, $X=0$



شكل (٦) ملف السرعة لمختلف قيم ϕ مع $M=0.9$, $Da=0.7$, $\beta=1$, $Gr=1$, $E_3=0.1$, $E_2=0.2$, $E_1=0.3$, $We=0.05$, $T=0.1$, $X=0$

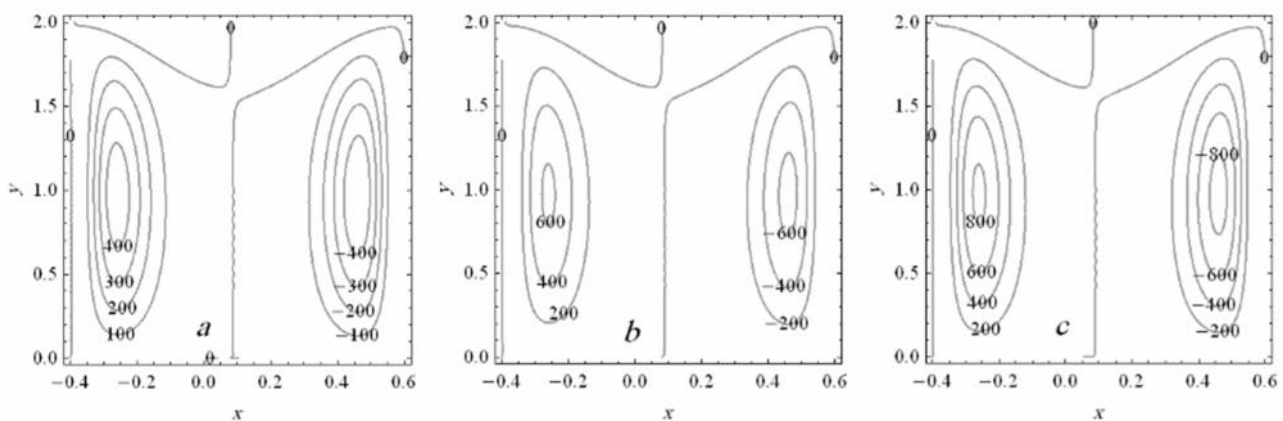


شكل (٧) توزيع درجات الحرارة لمختلف قيم β مع $\phi=0.15$, $T=0.1$, $X=0$

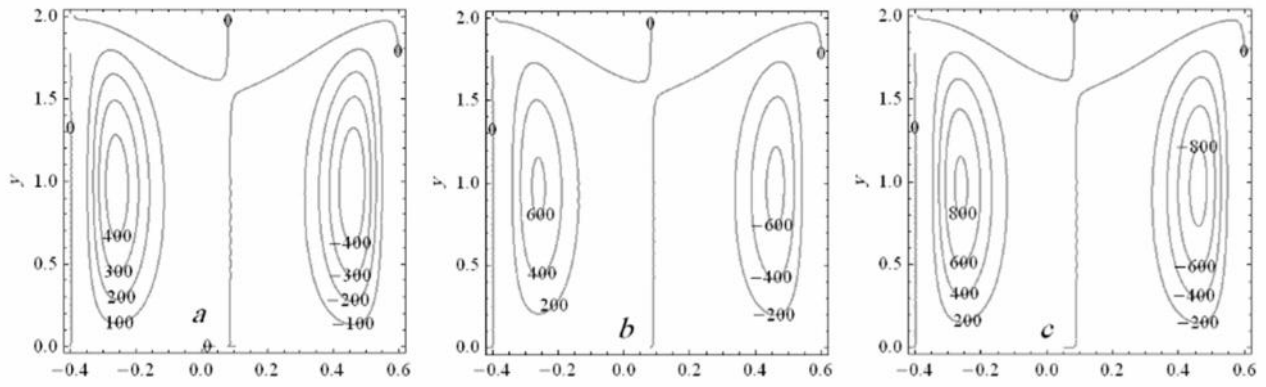
يعتمد على معادلة (٢٧) حيث شكل (٧) يظهر تأثير المعاملة β على وظيفة توزيع درجة الحرارة θ حيث درجة الحرارة تزداد بزيادة β عندما $0.8643 < |Y|$ و $\theta = 1$ عند $Y = h = 0.8643$ كما هو محدد من قبل الشروط الحدودية.

٦-٢ ظاهرة السوارات

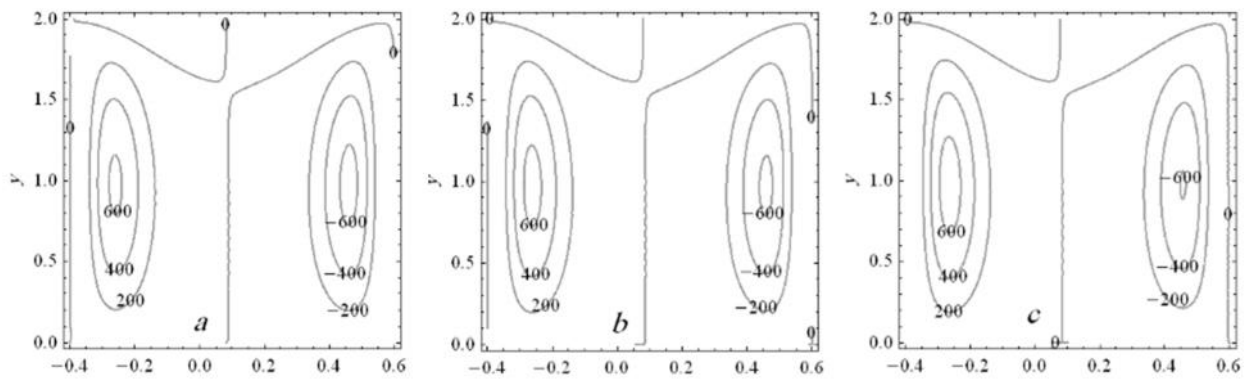
التشكل الداخلي لمضغة السوائل (سوار) بواسطة طريق مغلق بسيط بدعى بالمحاصرة وهذه المضغة يتم دفعها جنباً الى جنب بواسطة التدفق التموجي للموجة و يعتمد على معادلة (٣٦) بحث التأثيرات $\theta, We, M, Da, \beta, Gr, E_1, E_2, E_3$ على المحاصرة حيث نستطيع اننشاهدها خلال شكل من ٨ الى ١٦ حيث نشاهد المضغة تتحرك قريب الجدران شكل (٨) يظهر زيادة في حجم محاصرة المضغة مع زيادة E_1 شكل (٩) يرسم تأثيرات E_2 على المحاصرة حيث يزداد حجم محاصرة المضغة مع زيادة في E_2 شكل (١٠) يظهر زيادة في حجم محاصرة المضغة من الجاه اليسرى مع زيادة في E_3 حيث يتناقص حجم محاصرة المضغة في اليمين E_3 تأثير عدد كرشوف Gr على المحاصرة يوضح في الشكل (١١) ونستطيع ان نتم انخفاض حجم محاصرة المضغة في الجاه اليسرى للقناة عندما Gr يزداد حيث يكون سلوكها عكسياً في الجانب الايمن للقناة شكل (١٢) يظهر انخفاض حجم محاصرة المضغة من الجاه اليمنى مع زيادة في β حيث يزداد حجم محاصرة المضغة من الجاه اليمنى مع زيادة في β تأثير عدد دارسي Da على المحاصرة يوضح في الشكل (١٣) يظهر انخفاض حجم محاصرة المضغة مع زيادة في Da شكل (١٤) تبين ان تأثير M على المحاصرة حيث تظهر زيادة في حجم محاصرة المضغة مع زيادة في M تأثير عدد ويسنبريج We على المحاصرة يوضح في الشكل (١٥) يظهر زيادة حجم محاصرة المضغة مع زياده في We و تأثير θ على المحاصرة يوضح في الشكل (١٦) نحن نلاحظ ان حجم محاصرة المضغة تزداد مع زيادة θ



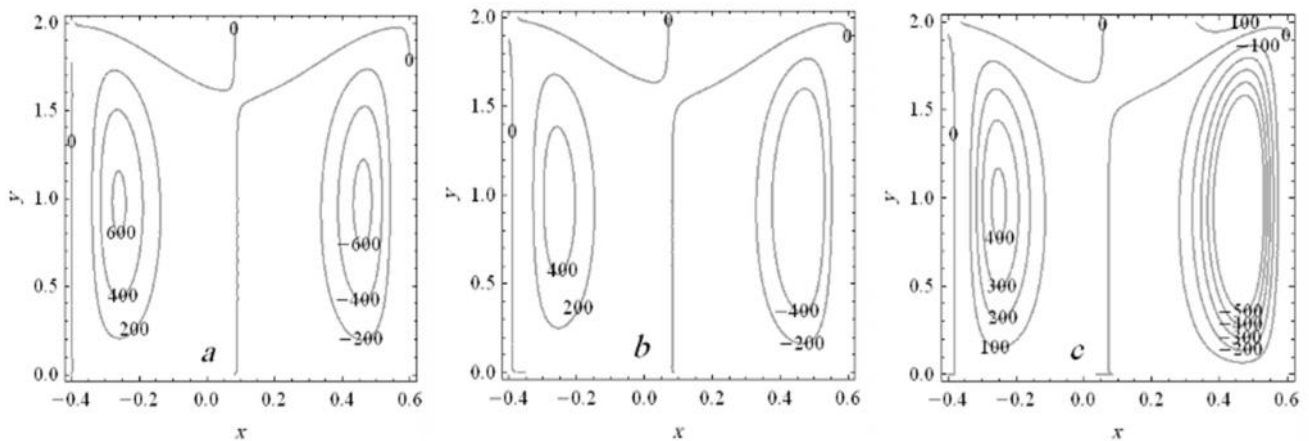
شكل (٨) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة لـ E_1 (a) $E_1 = 0.25$ (B) $E_1 = 0.3$ و (C) $E_1 = 0.35$ عند $\beta = 1$, $\theta = 0.15$, $Gr = 1$, $M = 0.9$, $Da = 0.8$, $E_3 = 0.1$, $E_2 = 0.2$, $We = 0.05$, $E_2 = 0.2$, $E_3 = 0.1$, $Da = 0.8$, $M = 0.9$, $Gr = 1$, $\theta = 0.15$, $\beta = 1$



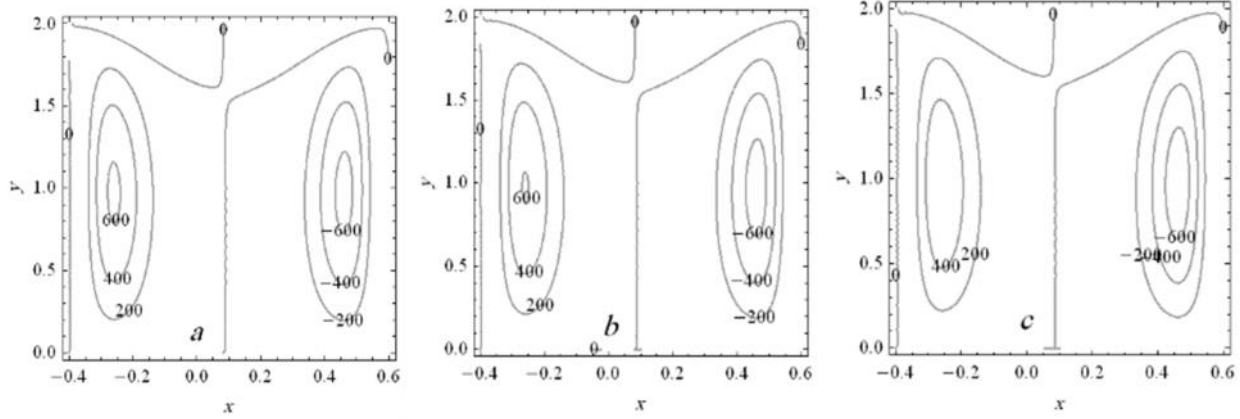
شکل (٩) تخطيط مبسط لثلاثة قيم مختلفة E_2 (a) $E_2=0.15$ (b) $E_2=0.2$ (c) $E_2=0.25$ عند $\beta=1, \phi=0.15, Gr=1, M=0.9, Da=0.8, E_3=0.1, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



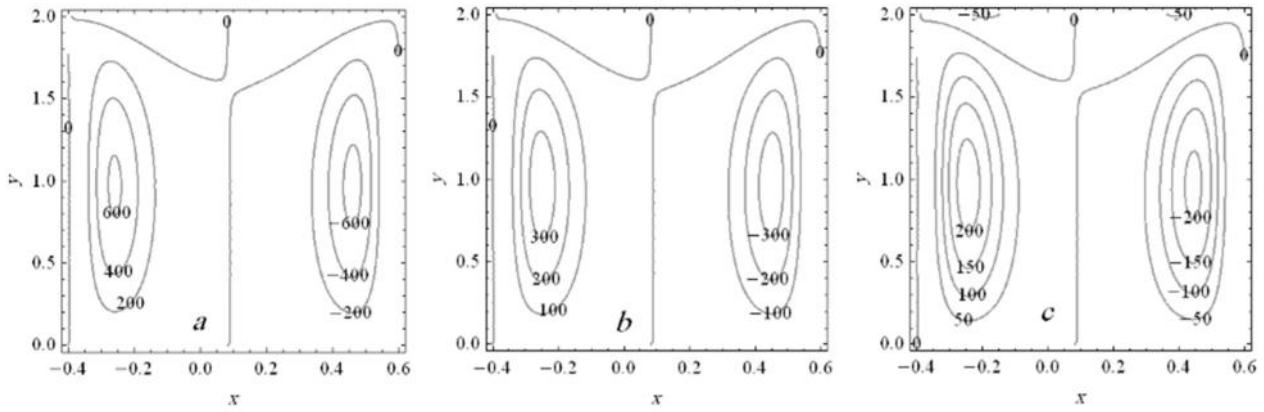
شکل (١٠) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة E_3 (a) $E_3=0.1$ (b) $E_3=0.15$ (c) $E_3=0.2$ عند $\beta=1, \phi=0.15, Gr=1, M=0.9, Da=0.8, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



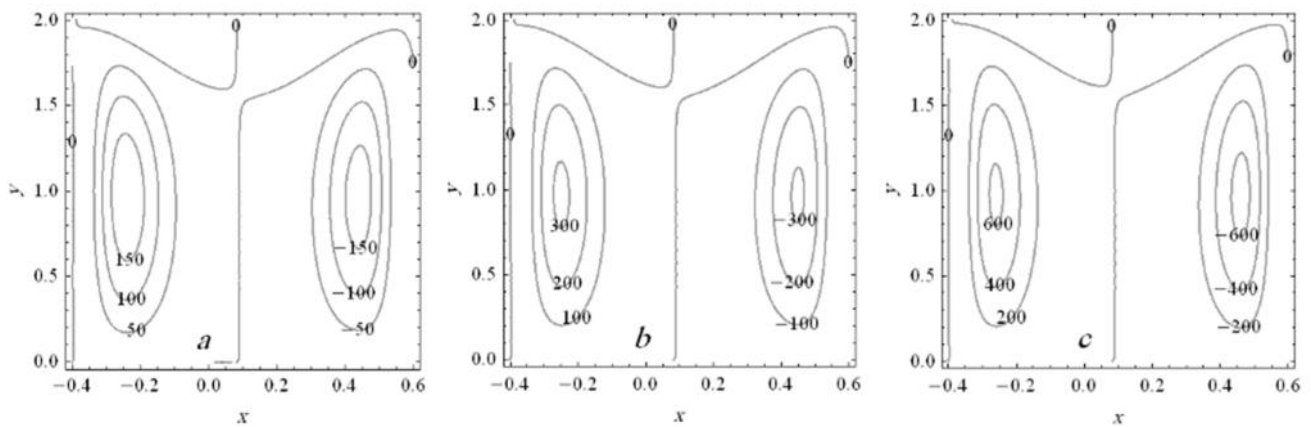
شکل (١١) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة Gr (a) $Gr=1$ (b) $Gr=2$ (c) $Gr=3$ عند $\beta=1, \phi=0.15, m=0.9, Da=0.8, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



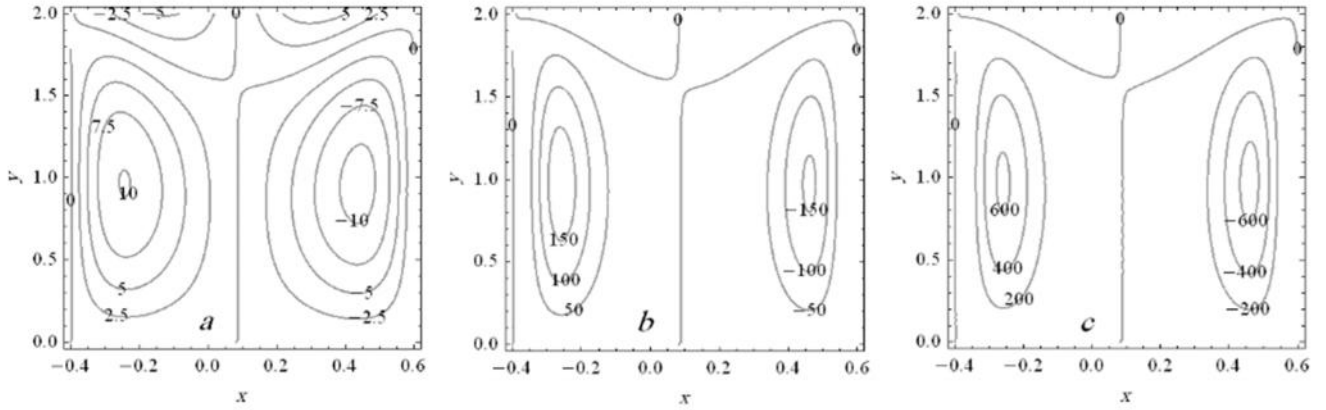
شكل (١٢) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة β (a) $\beta=1$ (b) $\beta=2$ (c) $\beta=3$ عند $\phi=0.15, Gr=1, M=0.9, Da=0.8, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



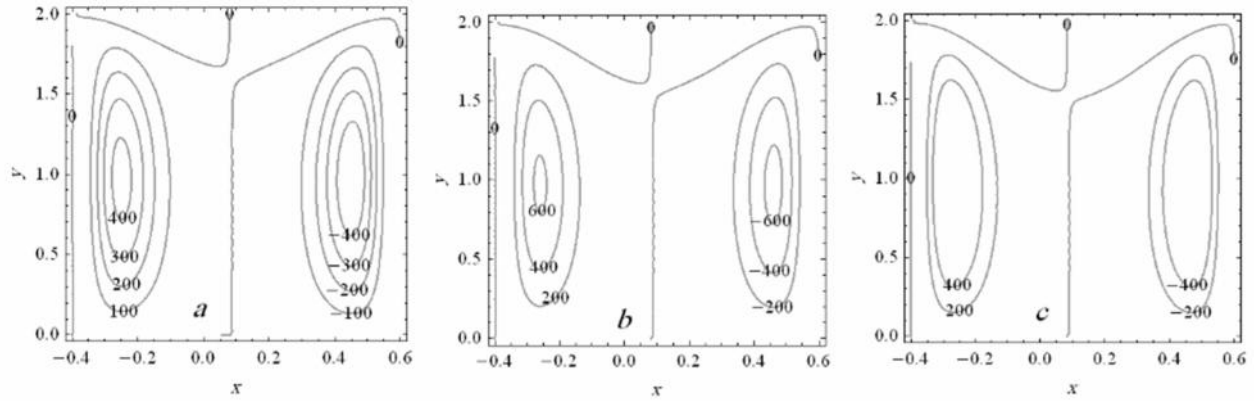
شكل (١٣) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة Da (a) $Da=0.8$ (b) $Da=0.85$ (c) $Da=0.9$ عند $\beta=1, \phi=0.15, Gr=1, M=0.9, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



شكل (١٤) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة M (a) $M=0.8$ (b) $M=0.85$ (c) $M=0.9$ عند $\beta=1, \phi=0.15, Gr=1, Da=0.8, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$



شكل (١٥) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة We (a) $We=0$ (b) $We=0.025$ (c) $We=0.05$ عند $\beta=1, \phi=0.15, M=0.9, Da=0.8, Gr=1, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, T=0.1$



شكل (١٦) تخطيط مبسط لثلاث قيم مختلفة ϕ (a) $\phi=0.175$ (b) $\phi=0.15$ (c) $\phi=0.125$ عند $\beta=1, Gr=1, M=0.9, Da=0.8, E_3=0.1, E_2=0.2, E_1=0.3, We=0.05, T=0.1$

٧-٢ ملاحظات ختامية

تتناول الدراسة الحالية مع التأثير المشترك لـ MHD و جدار الخصائص على انتقال التدفق التموجي لمائع ويليامسون لقناه ذو بعدين خلال وسط مسامي نحصل على حل تحليلي للمسائل تحت الطول الموجي الطويل وانخفاض افتراضات عدد رينولدز ،سلسله الاضطرابات في عدد ويسنبرج ($We < 1$) حيث يستخدم للحصول على اشكال واضحة امام السرعة ووظيفه التيار لكل طول موجي واحد ،ينتج تحليل لمختلف القيم للمعاملات ذات الصلة تدعى ،عدد كرشوف ، عدد دارسي ،الموصلية الحرارية ،الصلابة ،المغناطيسية وقوه لزوجه الضخ لجدار القناه خلال وسط مسامي من خصائص الجدار ونوع السائل حيث نشاهد المضغه تتحرك قرب جوانب الجدران

النتائج الاساسيه نستطيع ان نلخصها كالآتي:

- ١- محور السرعة يزداد مع زيادة في E_1, E_2, We, M عندما $Iy > 0.8643$ وعلاوه على ذلك انخفاض محور السرعة مع زيادة في E_3, Gr, Da, β, ϕ

- ٢- زياده في حجم محتصره المضغه مع زياده $E_1 E_2 M We \emptyset$ في حين ان انخفاض حجم محاصره المضغه يتناقص مع زياده في Da
- ٣- زياده في حجم محاصره المضغه من الجهه اليسرى مع زياده في E_3 حيث انخفاض حجم محاصره المضغه في الجهه اليسرى للقناه عندما تزداد β, Gr حيث يتصرف بشكل عكسي في الجانب الايمن للقناه
- ٤- زياده معامل درجة الحرارة مع زياده قيمه الموصلية الحراريه β

- [1] Latham T .W., Fluid motions in peristaltic pump, M. Sc. Thesis, Cambridge, Mass: MIT Press, 1966.
- [2] Shapiro A.H., Jaffrin M.Y., Weinberg S.L., Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number, J. Fluid Mech., .37, pp. 799-825, 1969.
- [3] Fung Y.C., Yih C.S., Peristaltic transport , Trans. ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 669 675, 1968.
- [4] Jaffrin M.Y., Inertia and streamline curvature effect son peristaltic pumping, Int . J. Eng. Sci., 11, pp. 681-699, 1973.
- [5] Brown T .D., Hung T .K., Computational and experiment al investigations of two- dimensional nonlinear peristaltic flows, J. Fluid Mech., 83, pp. 249-272, 1977.
- [6] Siddiqui A.M., Provost A., Peristaltic pumping of a second-order fluid in a planar channel, Rheol. Act a, 30, pp. 249-262, 1991.
- [7] Mitra T K, Prasad SN, Journal of Biomechanics, 6, pp. 681-693, 1973
- [8] Lakshminarayana P , Sreenadh S, Sucharit ha G, Advances in Applied Science Research, 3(5), pp.2890-2899, 2012.
- [9] Rathod VP , Pallavi Kulkarni, Advances in applied Science Research, 2(3), pp. 265-279, 2011
- [10] Bahrami M., (2009); Introduction and Properties of Fluids, Simon Fraser University, spring.
- [11] Michael L. W., David Rubin and Erhard Krempl, (2010); Introduction To Continuum Mechanics, fourth edition, Elsevier Inc, USA.
- [12] Robert F. W., (1973); Introduction to Fluid Mechanics, McDonald Alan T., New York, John Wiley, N. D.
- [13] Robert P. H., (1967); An introduction to Magnetohydrodynamics, The Whitefriars Press, Ltd, London and Ton bridge
; Fluid Mechanics, McGraw-Hill, Inc., New York [14] White F. B., (1994)