



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

بعض تطبيقات نظرية الاحتمال في سوق المال

بحث مقدم الى قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
جامعة القادسية كأستكمال جزئي لمتطلبات نيل درجة بكالوريوس علوم في
الرياضيات

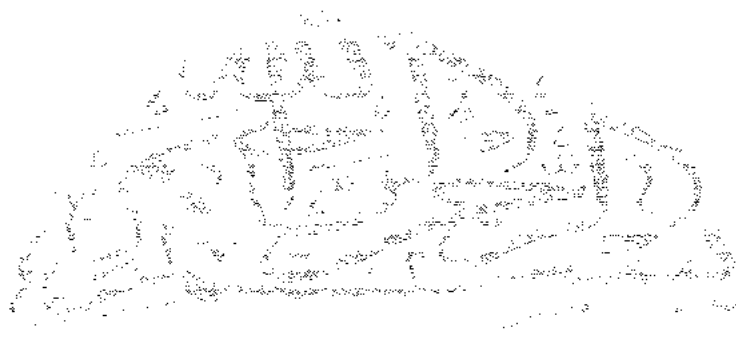
من قبل الطالبة:

بشينة حميد حسن

بإشراف د. إحسان جبار كاظم

٢٠١٧

١٤٣٨هـ



لَا يَنْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا
الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ عَمَّا لَمْ يُعَلِّمُوا بِمَا تَعْمَلُونَ خَيْرٌ ۖ

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة - صفحة

الإهداء

إلى من ضحوا بدمائهم الطاهرة من أجل السلام ...

أهل البيت ((عليهم السلام))

إلى من أوحى الله بهما برا وأحسانا ...

أبي وأمي

إلى كل من ضحى من أجل الحق والعلم ...

العلماء

إلى الذي لم يبخل علي بعلمه وإرشاده ...

أساتذتي الفاضل

إلى من رافقني سنوات الدراسة ...

أصدقائي وزملائي

والى من يقدر المجهود العلمي اهديه ثمره جهودي



أشكر الله سبحانه وتعالى على ما أمطاني ووفقني ومنحني القوة والسند لأتعلم وأجتهد
أقدم الشكر والامتنان والمحبة والتقدير إلى كل من ساندني ووثق معي طيلة حياتي
الجامعية وكل أساتذتي الأفاضل وأخص بالشكر والامتنان : الدكتور

(إحسان جبار كاظم)

على ما قدمه لي من دعم وترجيح

وكتلك اشكر كل من ساعد على إتمام هذا البحث وقدم لي المروءة ومد لي يد المساعدة
وزودني بالمعلومات اللازمة لإتمامه .. زملائي & زميلاتني

الخلاصة

تناولنا في هذا البحث بعض النماذج الرياضية المتعلقة في الرياضيات المالية والتي تعتبر من تطبيقات نظرية الاحتمال. حيث درسنا نموذج التسعير ذي الحدين ومشتقات الضمان ونموذج ذي الحدين متعدد الدوران.

المحتويات

الصفحة

الفصل الاول

١

١- نموذج ذي الحدين للتسعير

بدون موازنة

٢

٢- نموذج ذي الحدين ذو دورة

واحدة

١١

٣- قيمة المشتقة الأمن

الفصل الثاني

١

١- نموذج ذي الحدين متعدد

الدوران

المقدمة

أن الاقتصاد من المواضيع المهمة في حياة الإنسان العملية من هذا المنطلق كرسنا بعض الجهد لدراسة بعض النماذج الرياضية التي تضيف أسعار الأسهم والبورصة. حيث تناولنا نماذج متقطعة في الرياضيات المالية.

يتكون البحث من :-

الفصل الأول

تناول نموذج ذي الحدين للتسعير بدون موازنة والمشتقات الآمنة.

الفصل الثاني

تناول نموذج ذي الحدين المتعدد الدورات وأعطينا بعض الخواص و الأمثلة المتعلقة بالمواضيع.

الفصل الاول

**** نموذج ذي الحدين للتسعير بدون موازنة ****

The Binomial no-arbitrage pricing model

1- نموذج ذي الحدين للتسعير بدون موازنة (The Binomial No-Arbitrage pricing Model)

• افترضنا انك قمت بشراء مذكرة شملت خيار (option) عند $t=0$ تعطيه الحق لكن ليس الالتزام لشراء حصة واحدة من الاسواق المالية (stock) عند زمني T . زمني انتهاء (the time of expiration) بالسنة الواحدة سعر التنفيذ K (Strike price)

• اذا كان بإمكانك استكمال الخيار فقط عند زمني الانتهاء T . سميت هذا خيار "خيار النداء الاوروبي" (European call option)

• اذا كان بإمكانك استكمال الخيار فقط عند زمني T . سميت هذا الخيار "خيار النداء الامريكي" (American call option)

• خالك خيار النداء ليس ملزم لاستكماله.
• هكذا. اذا كان سعر السهم عند زمني T هو X_T فيقول المشتري

الخيار الاوروبي لدفع $(X_T - K)^+ = \max(0, X_T - K)$

$$= \begin{cases} X_T - K, & \text{if } X_T > K \\ 0, & \text{if } X_T \leq K \end{cases}$$

• لانك لا تعلم السعر X_T عند زمني $t=0$ عند تشتري النداء يظهر سؤال طبيعي:

ما هو استعدادك لدفع لتملك هذه المذكرة. هذا يعني ما هو السعر المعقول لهذا الخيار عند زمني $t=0$ ؟

• قد يصح المراجحة من الحالة التي يمكن للمشتغرات تحقق ربع صفحت دون تكبد أي خطر

2- نموذج ذي الحدين ذو دورة واحدة (one period Binomial Model)

لنكن

$$t_0 = \text{زمن بداية الدورة}$$

$$t_1 = \text{زمن نهاية الدورة}$$

$$S_0 = \text{سعر السهم الواحد عند } t_0$$

$$S_1 = \text{سعر السهم الواحد عند } t_1$$

$$S_1 = \begin{cases} S(H) & \text{إذا كانت تسعة السهم هو الارتفاع} \\ S(T) & \text{إذا كانت تسعة السهم هو الانخفاض} \end{cases}$$

نفترض أن $p(H) = p > 0$, $p(T) = q = 1 - p > 0$, $p \neq q$

S_1 معلوم عند زمن t_1 لكن ليس معلوم عند t_0 لذلك فهو كمية عشوائية

نفترض أن $u = \frac{S_1(H)}{S_0}$ وأن $d = \frac{S_1(T)}{S_0}$ حيث

$u > d$, u عامل الارتفاع (up-factor) و d عامل الانخفاض (down-factor)

$$S_0 = \begin{cases} S_1(H) = u S_0 \\ S_1(T) = d S_0 \end{cases}$$

Fig 1.1. 1 General one-period binomial model -

افترضنا أن r سعر فائده سوق المال استقار (أو اقترافا)
 1 دولار في سوق المال عند زفنا t_1 يستلم (او يتدين)
 $r+1$ دولار عند زفنا t_1

المراجعة (الموازنة) Arbitrage كاستراتيجية فنا جره تيد أيرون
 قال عند الزفنا t_0 . واحتمالية خسارة المال مساوية الى
 الصفر واحتمالية موجبه للوصول على المال عند t_1

الميزة الاساسية للسوق الفعال هي اذا كانت لا يمتلك موازنه

دعنا نتأمل المالنيز (الائمين)

حاله (1) : اذا كانت $d \geq 1+r$
 عند الزفنا t_0

- يمكن ان تيد أيرون قال

- تستقر m دولار عن سوق المال لشراء حصة فناسهم

عند الزفنا t_1

- فائده عن سوق الاسهم على الاقل dm دولار

- حصة فنا سوق المال هي $m(1+r)$ دولار

- بما أن $d \geq 1+r$ فان $dm \geq m(1+r)$

- صافي الفائده هو $(d-1-r)m \geq 0$

هذه مراجعة

حاله (II) : اذا كانت $u > 1 + r$

عند الزمن t_1

- يمكن ان يسجل السهم ب m دولار في سوق الاسهم
- استثمرت m دولار في سوق المال

عند الزمن t_1

- نحسب عن سوق الاسهم على الاكثر $u m$ دولار
 - نحسب عن سوق المال $m(1+r)$ دولار
 - بما ان $u \leq 1+r$ فان $u m \leq m(1+r)$
 - الربح الهائلي هو $m(1+r-u) \geq 0$
- هذه ملاحظة

وبالتالي فان المراجحة للسوق تكون بالتكامل

$$u < 1+r < d$$

والآن سندرس خيار الشراء الاوربي. لملك الخيار المك
ولكن ليس لشراء حصه واحده من الاسهم في وقت t_1
 K (Strike Price). افترض $S_1(H) < K < S_1(T)$

حاله (1):

عند الزمن t_1

نملك على الكتابية على عمله تم نحتاج ان نمارسه الخيار
عند $S_1(T) < K$

وبالتالي في الوقت ما يجب الخيار سيجعل

$$\max \{ S_1 - K, 0 \} = (S_1 - K)^+$$

السؤال الأساسي هنا "تفسير الخيار هو" كم الخيار أو ما هو سعر الخيار " قبل أن تعرفه. فإذًا كانت هذه المهمة أو الكتابة

قال 1-2 :

لكن $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$ وهو سعر السهم سيكون

$$S_0 = 4 \rightarrow \begin{cases} S_1 = u S_0 = 2 \times 4 = 8 \\ S_1 = d S_0 = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \end{cases}$$

كتابة

سيكون سعر السهم هو $K = 5$ والمالك $X_0 = 1.20$ دولار
 عند الزمان t_0 $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ الأسهم المالية

عند الوقت t_0 وأن $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ هو سعر السهم

$$\Delta_0 S_0 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

دولار هو سعر السهم

$$X_0 - \Delta_0 S_0 = 1.2 - 2 = -0.8 \text{ دولار}$$

لذلك لدينا ديون -0.8 من سوق المال
 في الزمان t_1 سيكون قيم من الدفتر t_1 لسوق التقدير
 سبب

$$(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = (1 + \frac{1}{4})(-0.8) = -1$$

في الزمان t_1 سيكون السعر

$$\frac{1}{2} S_1(H) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\frac{1}{2} S_1(T) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

سيكون سعر الأسواق الماليه عند الزمن t_1 هو

$$X_1(H) = \frac{1}{2} S_1(H) + (1-r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ = 4 - 1 = 3$$

و

$$X_1(T) = \frac{1}{2} S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ = 1 - 1 = 0$$

قيمه الخيار عند الزمن t_1 هو

$$(S_1(H) - K)^+ = \max(8 - 5, 0) = \max(3, 0) = 3$$

و

$$(S_1(T) - K)^+ = \max(2 - 5, 0) = \max(-3, 0) = 0$$

$$(S_1(H) - K)^+ = 3 = X_1(H) \quad \text{حيث}$$

و

$$(S_1(T) - K)^+ = 0 = X_1(T)$$

مثال 2-2 :

دراسة المثال 2-1 ، لنفترض أن سعر الخيار عند الزمن

t_0

يمكن لبائع الخيار أن يستقر

$$1.21 - X_0 = 1.21 - 1.20 = 0.01$$

دollar الكأسه الماليه

أنه بائع الخيار يشتقر $X_0 = 1.2$

وعند المثال 2-1

عند الزمن t_1

بائع الخيار سيحصل على ربح الفسوخه

$$0.01 \times (1+r) = 0.01 \times (1.25) = 0.0125$$

عن سوق المال. وبالتالي فإن النفعة للبائع الخيار لأنه لا يحتاج إلى المال في البداية وعما ظهر الحساب لديها ربح 0.0125 في الزمن 1

مثال 2.3

لدراسة مثال 2-1 افترضنا أن سعر الخيار هو 1.19 دولار في الزمن 0. المشتري الخيار يمكن أن يبيع أسهم $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ بحيث أن

$$\Delta_0 \times S_0 = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ دولار}$$

مشتري الخيار سيستخدم 1.19 دولار لشراء الخيار ووضع 0.80 دولار في العديد من الاسواق وفي حساب يفتح 0.01 دولار في الزمن 1

إذا كانت المهرج في الفعل والمشتري عن الخيار سوف يحتاج إلى 4 دولارات للممول كل (استقاده) $\frac{1}{2}$ حصة الأسهم للممول كل

$$(S_1(H) - K)^+ = (8 - 5, 0)^+ = (3, 0)^+ \\ \text{دولار} = 3$$

$$0.80 \times (1+r) = 0.80 \times (1.25) \\ \text{دولار} = 1$$

عن السوق التقديرية

و للممول كل الربح المتوقع

$$0.01 \times (1+r) = 0.01 \times (1.25)$$

$$0.0125 = \text{دولار الأسهم العاليه}$$

وإذا كانت هناك كتابة في العطاء فأذن المشتري عن الخيار
1 دولار للممول على استعادته $\frac{1}{2}$ حصة الأسهم
هذه هي النتيجة

ملاحظة 2-1

في المثال 2-1 قم بتكرار الخيار عن طريق التداول في
سوق الأسهم والمال. لذلك هو الفصح. ونحن نفترض 1.2 دولار
كما في سعر الخيار في الوقت t_0 . وفي المثال 2-2 - 2-3
ونحن نرى أنه جائزة الخيار لا يساوي 1.2 دولار

مثال 2-4

التفريق السوق المالي وحساب الأسهم وخيار التدارك الأوروبي
على سعر الأسهم $K = 98$ لنفترض عند الزمن t_0 أن $S_0 = 100$
وسعر $S_1(112)$ و $S_1(84)$. افترض أن الفائدة على
حساب البنك هو $r = 5\%$ نحن نريد المحول على سعر الخصم
في خيار السكالمه
المحول التالي هو للتفريق لا للتفريق لهذا الخيار يجب علينا توكيد
المعادلة

	t_0	t_1	t_1
الأحوال	1	1.05	1.05
الأسهم	100	84	112
الخيار	?	$(84 - 98)^+ = 0$	$(112 - 98)^+ = 14$

المطلوب :

للمتور على التفسير النتيجة لهذا يجب علينا تكوين المعادلة
قيمة الصفقة في الزمن $t_1 =$ قيمة الخيار في الزمن t_2
الساح للمدة على المال المفضل في السوق النقدية و
هو الميزان المستثمر

في سوق الادراج التالية توضح المعادلات الآتية

$$1.05a + 84b = 0$$

$$1.05a + 112b = 14$$

وبالتالي $a = -4$, $b = 0.5$ وهذا يعني أننا وضعنا 4 دولار

في البنك وشراء الأسهم في الزمن t_1 لهذا يكون

$$100 \times 0.5 = 50$$

بحيث أن سعر الخيار لا النتيجة هو 14 دولار أي سعر آخر
من سعر النتيجة

المادة (I) :

نفترض أن السعر هو 4 دولار في الزمن t_1 يسع 0.5 سهم

في الأسهم من قبل $50 = 100 \times 0.5$ دولار لشراء الخيار في

4 دولار و 45 دولار في الزمن t_1

إذا كانت هناك صورة في المعادلة والمشتري من خيار

للوصول على 45 دولار للوصول على استعادة 0.5 في حصة

الأسهم و 14 دولار عن الخيار للوصول على $47.25 = 45 \times 1.05$ دولار

في السوق النقدية إذاً منيج المبيع المصوح هو

$$52.5 = 14 + 48.25 \text{ دولار}$$

إذا كانت هناك كتابة في المعادلة فأنت المشتري من خيار

سوف يحتاج الك 45 دولار للوصول على استعادة 0.5 حصة الأسهم

للوصول على 0 دولار عن الخيار فهذه على $47.25 = 45 \times 1.05$

دولار سوق المال

للمحول على صبح الأربع المصنوح

$$48.25 + 0.42 = 5.25$$

هذا هو موقف المال

الحالة (II) ::

أفترض أن السعر هو 15 دولار لبسج الخيار في الوقت 0.
أفترض أن السعر هو 15 دولار عند الأوراق المالية و 36 دولار عند موقف المال.
سعر 0.5 من الأوراق المالية و 55 دولار
في الوقت 1

إذا كانت هناك كتابة في في العمله فأن بائع الخيار

- بائع 0.5 من الأوراق المالية بواسطة 65 دولار

- لناخذ $36.75 = 36 \times 1.05$ دولار في البنك

- لناخذ 14 دولار من المشتري للمحول على

$$14 - 36.75 = 6$$

$$5.25 = \text{دولار}$$

إذا كانت هناك صورة في العمله فأن بائع الخيار يكون

محمل على 0.5 من الأوراق المالية بواسطة 42 دولار

- لناخذ $36.75 = 36 \times 1.05$ دولار في البنك

- لناخذ 14 دولار من المشتري الخيار

$$\text{سوف نصل على } 5.25 = 36.75 - 0 - 42 \text{ دولار}$$

وهذه هي النتيجة

قيمة المشتقة الأصلية (Value of the Derivative Security)

ما هي (المشتقة) هي المشتقات عادة يأخذ شكل التحويلات اتفاقية لشراء أو بيع أصل أو سند (سلعة أو أدوات أو أسهم بسعر ثابت). وتلك التاريخ كانت المشتقة للأوراق المالية تأخذ أدوات تداولها في اليورومات تلك الأدوات العالمية الأخرى وتختلف قيمتها مع قيمة الأصول الأساسية التي يتم تداولها بشكل منفصل عن المشتقات والعقود الأجله والخيارات والعقائضات وصور الترتيب الذي يقوم طرفان باقراضه كل الطرف الآخر التبعيات المختلفة بالعملة المختلفة و/أو بأسعار فائدة مختلفة في بعض الأنواع السائفة عن المشتقات المستخدمة في العقود أو الهول كل الرافعة المالية وتسعى أيضاً مطابقة المستثمر من العائد من مشتق يعتمد على ما إذا كانت أول حدث في بعض الأحداث وهو المكان الذي يعتمد على المستثمر هذا واحد أو على أساس الأصول الأساسية.

المشتقات نفسها صوغت بين طرفين أو أكثر ويتم تحديد قيمتها عند تلك المصنوك الأكثر شيوعاً والتي تشمل الأسهم والسندات والسلع والعقودات وأسعار الفائدة. يمكن تعريف الرهنات للمشتقات كقودج ذيع فترة واحدة ذات الحدين بأنه ذات بعض المبلغ في $V_1(H)$ في زمن واحد إذا وملك الشائع في الصورة ويدفع مبلغاً $V_1(T)$ في زمن واحد وإذا كانت الشائع في الكتاب على سبيل المثال.

خيار الشراء الأوروبي تكون المدفوعات في زمن واحد وهي

$$(S_1 - K)^+$$

تكون المدفوعات في زمن واحد وهي

$$S_1 - K$$

أنه وفتح المشتقات في المقود الأول في زمن $t=1$ يعطينا
 $V_1(H)$ و $V_1(T)$ والمات نريد أن نجد فيه أذن المشتقة
 في الزمن $t=1$ هنا خلال تكرار ذلك كما في المثال 2-1
 لكن

1. التره الأوليه (العالم في الزمن صفر) $X_0 =$

حصة ذو أدنى ^{الاربع} التي سيتم شراؤها $\Delta_0 =$
 في الزمن صفر

في وقت صفته الأوراق العاليه والسوقه التقديرات في الزمن الواحد

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \quad \text{هو}$$

$$= (1+r)X_0 + \Delta_0 (S_1 - (1+r)S_0)$$

والمات نريد

$$X_1(H) = (1+r)X_0 + \Delta_0 (S_1(H) - (1+r)S_0)$$

$$X_1(T) = (1+r)X_0 + \Delta_0 (S_1(T) - (1+r)S_0)$$

والمات نريد اختيار X_0 و Δ_0

$$X_1(H) = V_1(H) \text{ و } X_1(T) = V_1(T)$$

والمات

$$X_1(H) = V_1(H)$$

$$\Rightarrow (1+r)X_0 + \Delta_0 (S_1(H) - (1+r)S_0) = V_1(H)$$

$$\Rightarrow X_0 + \Delta_0 \left(\frac{S_1(H)}{1+r} - S_0 \right) = \frac{V_1(H)}{1+r} \quad (3.1)$$

$$X_1(T) = V_1(T)$$

$$\Rightarrow (1+r)X_0 + \Delta_0(S_1(T) - (1+r)S_0) = V_1(T)$$

$$\Rightarrow X_0 + \Delta_0 \left(\frac{S_1(T)}{1+r} - S_0 \right) = \frac{V_1(T)}{1+r} \quad (3.2)$$

نضرب (3.1) في $\tilde{p}$ و (3.2) في $\tilde{q}$ حيث $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$

$$\tilde{p}X_0 + \tilde{p}\Delta_0 \left(\frac{S_1(H)}{1+r} - S_0 \right) = \frac{\tilde{p}V_1(H)}{1+r} \quad (3.3)$$

$$\tilde{q}X_0 + \tilde{q}\Delta_0 \left(\frac{S_1(T)}{1+r} - S_0 \right) = \frac{\tilde{q}V_1(T)}{1+r} \quad (3.4)$$

و نجمع (3.3) و (3.4) فنحصل على

$$(\tilde{p} + \tilde{q})X_0 + \Delta_0 \left(\frac{\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)}{1+r} - (\tilde{p} + \tilde{q})S_0 \right) = \frac{\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)}{1+r}$$

حيث $\tilde{p} + \tilde{q} = 1$

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)}{1+r} - S_0 \right) =$$

$$\frac{\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T)}{1+r} \quad (3.5)$$

$$S_0 = \frac{\tilde{p} S_1(H) + \tilde{q} S_1(T)}{1+r} \quad (3.6)$$

من (3.5) ع.ب.ع

$$X_0 = \frac{\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T)}{1+r} \quad (3.7)$$

من (3.6) ع.ب.ع

$$S_0 = \frac{\tilde{p} u S_0 + \tilde{q} d S_0}{1+r} \quad (3.8)$$

$$= \frac{S_0}{1+r} (\tilde{p} u + \tilde{q} d) \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{1+r} (\tilde{p} u + \tilde{q} d) = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+r} (\tilde{p} u +$$

$$(\tilde{q} d)) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{p} \left(\frac{u-d}{1+r} \right) + \frac{d}{1+r} = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$\hat{q} = 1 - \tilde{p}$$

$$= 1 - \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$= \frac{u-1-r}{u-d}$$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad 9$$

$$\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \quad (3.10)$$

و نطرح (3.2) من (3.1) فنحصل على

$$\Delta_0 \frac{S_1(H)}{1+r} - \Delta_0 \frac{S_1(T)}{1+r} = \frac{V_1(H)}{1+r} - \frac{V_1(T)}{1+r}$$

$$\Rightarrow \Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{(u-d) S_0} \quad (3.11)$$

المعادلة (3.11) تسمى صيغة دلتا القوط. وأن سعر العوازم في المشتقات في الزمن Zero و

$$V_0 = \tilde{p} \frac{V_1(H)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_1(T)}{1+r} \quad (3.12)$$

وأي سعر آخر سيكن أن يتغير العوازم

$$d < 1+r < u$$

$$(1+r) S_0 < p S_1(H) + q S_1(T) \Leftrightarrow$$

$$1+r < pu + qd$$

$$(1+r) S_0 = \tilde{p} S_1(H) + \tilde{q} S_1(T) \iff$$

$$\boxed{1+r = \tilde{p} u + \tilde{q} d}$$

و $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ بالاحتمالات المحايدة و p و q بالاحتمالات الفعلية
 نلاحظ إذن الاحتمالات المحايدة تكون
 $(1+r) S_0 \leq p S_1(H) + q S_1(T)$.

ونحن الاحتمالات المحايدة يكون

$$\begin{aligned} \tilde{p} S_1(H) + \tilde{q} S_1(T) &= \frac{1+r-d}{u-d} S_1(H) \\ &+ \frac{u-1-r}{u-d} S_1(T) \\ &= -\frac{1+r-d}{u-d} u S_0 + \frac{u-1-r}{u-d} d S_0 \\ &= \frac{S_0}{u-d} \left[u(1+r) - u d + u d - d(1+r) \right] \\ &= (1+r) S_0 \end{aligned}$$

المعادلة (3.12) صيغة التعبير السابق في واحد نموذج
 نتائج الحدود

ولا حظ أن صيغة أدنى المشتقات في الزمن Zero لا تقود
 على احتمال ارتفاع (p) أو تسلك (q) ولكن فقط تعتمد على حجم
 الاحتمالين (u و d)

الفصل الثاني

نموذج ذي الحدين متعدد الدوران

Multiperiod Binomial Model

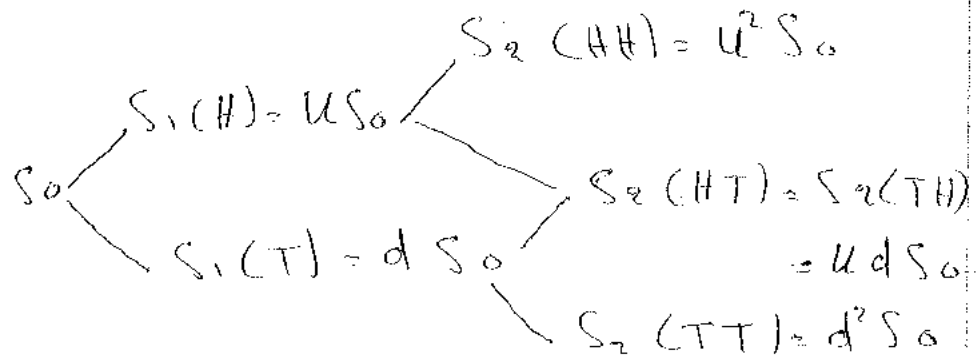
نموذج ذي الحدين متعدد السنوات (Multiperiod Binomial Model)

النظر في سعر السهم الأولي $S_0 > 0$ وفي كل فترة زمنية واحدة (بعد السهم الأولي) سعر السهم هو

$$S_1 = \begin{cases} S_1(H) = u S_0 & \text{إذا كان هناك صوره في الفله} \\ S_1(T) = d S_0 & \text{إذا كان هناك كتابه في الفله} \end{cases}$$

في زمن الثاني (بعد السهم الثاني) سعر السهم هو

$$S_2 = \begin{cases} S_2(HH) = u^2 S_0 & \text{إذا كان هناك رأسين في الفله} \\ S_2(HT) = S_2(TH) = du S_0 & \text{إذا كان صوره واحد في كلتيه} \\ S_2(TT) = d^2 S_0 & \text{إذا كان هناك صوره في كلتيه} \end{cases}$$



بأنه الخيار غير المؤمن t_0 يكون $V_0 = X_0$ دولار
 حيث نشتري Δ_0 آلف من سوق المال و $V_0 - \Delta_0 S_0$
 دولار من الاسواق المالية
 في t_1 يكون

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \quad (4.1)$$

$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \quad (4.2)$$

في t_2 ... نشتري Δ_1 آلف من الكرات المالية البقية
 نصف كل أول كرات $\Delta_1(H)$ و $\Delta_1(T)$ و $X_1 - \Delta_1 S_1$
 من الاسواق المالية حيث يكون
 في t_2

$$X_2 = V_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1)$$

$$V_2(HH) = \Delta_1(H) S_2(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)) \quad (4.3)$$

$$V_2(HT) = \Delta_1(H) S_2(HT) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)) \quad (4.4)$$

$$V_2(TH) = \Delta_1(T) S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T) S_1(T)) \quad (4.5)$$

$$V_2(TT) = \Delta_1(T) S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T) S_1(T)) \quad (4.6)$$

يفرج (4.4) و (4.3) و (4.6) و (4.5) في كل

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} \quad (4.7)$$

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} \quad (4.8)$$

الخطوة (4.8) و (4.7) نستخدم فيها دلتا العنق
نلاحظ

$$\tilde{p} S_2(HH) + \tilde{q} S_2(HT) = \frac{1+r-d}{u-d} u S_1(H) +$$

$$\frac{u-1-r}{u-d} d S_1(H) = \frac{S_1(H)}{u-d} \left[(1+r)u - du + du - d(1+r) \right] \\ = (1+r) S_1(H)$$

$$\tilde{p} S_2(TH) + \tilde{q} S_2(TT) = (1+r) S_1(T) \quad \text{والخطوة}$$

نقرب (4.3) في $\tilde{p}$ و (4.4) في $\tilde{q}$ سوف نحصل على

$$\begin{aligned} \tilde{p} V_2(HH) + \tilde{q} V_2(HT) &= \Delta_1(H) (\tilde{p} S_2(HH) + \tilde{q} S_2(HT)) \\ &\quad + (1+r) (X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)) \\ &= (1+r) \Delta_1(H) S_1(H) \\ &\quad + (1+r) (X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)) \quad (4.9) \\ &= (1+r) X_1(H) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_1(H) = \tilde{p} \frac{V_2(HH)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_2(HT)}{1+r} \quad (4.10)$$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{و} \quad \tilde{q} = \frac{d-1-u}{u-d}$$

نقرب (4.6) في $\tilde{p}$ و (4.6) في $\tilde{q}$ ونحصل سوف نكتب على

$$X_1(T) = \tilde{p} \frac{V_2(TH)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_2(TT)}{1+r} \quad (4.11)$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار أن $X_1 = V_1$ سوف نكتب على

$$V_1 = \tilde{p} \frac{V_2}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_2}{1+r}$$

$$V_1(H) = \tilde{p} \frac{V_2(HH)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_2(HT)}{1+r} \quad (4.12)$$

$$V_1(T) = \tilde{p} \frac{V_2(TH)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_2(TT)}{1+r} \quad (4.13)$$

نضع المعادله (4.12) و (4.13) بمفرده المعادلات المعادله

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}$$

$$V_0 = \tilde{p} \frac{V_1(H)}{1+r} + \tilde{q} \frac{V_1(T)}{1+r}$$

سيكون لدينا ثلاث انواع من المعادلات المتواليه
 $\{\Delta_0, \Delta_1\}$ حصه العليه التبادليه للأ سهم
 $\{X_0, X_1, X_2\}$ ربح العليه التبادليه
 $\{V_0, V_1, V_2\}$ سعر مستقبه ضمان العليه التبادليه

أيضا $\underline{w}_n = w_1, w_2, \dots, w_n$ نلاحظ

$$w_i = T \text{ أو } w_i = H \quad \text{و}$$

$$\underline{w}_N = w_1, w_2, \dots, w_N$$

$$\underline{w}_n H = w_1, w_2, \dots, w_n H$$

$$\underline{w}_n T = w_1, w_2, \dots, w_n T$$

مبرهنه 1-1. التكرارات في نموذج ذي الحدين المقعدد الزمان
(Replication in the Multiperiod Binomial Model)

التكرار في نموذج N متعدد المراحل يكون $0 < d < 1+r < u$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{و} \quad \tilde{q} = \frac{d-1-u}{u-d}$$

نلاحظ $\{V_0, V_1, \dots, V_N\}$ سعر مساق الأصل حيث V_n تكون محاسباً عشوائياً في وقت n ، $n = 0, 1, \dots, N$

$$\boxed{V_n(\underline{w}_n) = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} V_{n+1}(\underline{w}_{n+1}) + \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{n+1}T) \right]} \quad \text{نعرفة}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-14)$$

نلاحظ أن كل V_n يمكن وصفه على أنه الصلة ونعرفه فيه ذلك القوط ب

$$\boxed{\Delta_n(\underline{w}_n) = \frac{V_{n+1}(\underline{w}_{n+1}) - V_{n+1}(\underline{w}_{n+1}T)}{S_{n+1}(\underline{w}_{n+1}) - S_{n+1}(\underline{w}_{n+1}T)}}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-15)$$

نعرّف $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ سلسلة القيمة

$$X_0 = V_0, X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-16)$$

$$X_N(\underline{\omega}_N) = V_N(\underline{\omega}_N), \forall \underline{\omega}_N$$

البرهان :

سوف نبرهن بطريقة الاستقراء (بإم-ي)

1- عن عبارة 4-1 تكون $X_0 = V_0$

2- تكون $X_n(\underline{\omega}_n) = V_n(\underline{\omega}_n) \forall \underline{\omega}_n$

3- يجب أن نشيّد $X_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) = V_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) \forall \underline{\omega}_{n+1}$

من المعادلة (4-16)

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) &= \Delta_n(\underline{\omega}_n) S_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) + (1+r)(X_n(\underline{\omega}_n) - \Delta_n(\underline{\omega}_n) S_n(\underline{\omega}_n)) \\ &= (1+r)X_n(\underline{\omega}_n) + \Delta_n(\underline{\omega}_n)(S_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) - S_n(\underline{\omega}_n)) \end{aligned} \quad (4-17)$$

من المعادلة (4-16)

$$\begin{aligned} \Delta_n(\underline{\omega}_n) &= \frac{V_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) - V_{n+1}(\underline{\omega}_{nT})}{S_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) - S_{n+1}(\underline{\omega}_{nT})} \\ &= \frac{V_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) - V_{n+1}(\underline{\omega}_{nT})}{(1+d)S_n(\underline{\omega}_n)} \end{aligned}$$

من المعادلة (4-17) نحصل على

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) &= (1+r)X_n(\underline{\omega}_n) + \Delta_n(\underline{\omega}_n) S_n(\underline{\omega}_n)(1+r) \\ &= (1+r)V_n(\underline{\omega}_n) + \frac{V_{n+1}(\underline{\omega}_{n+1}) - V_{n+1}(\underline{\omega}_{nT})}{(1+d)S_n(\underline{\omega}_n)} S_n(\underline{\omega}_n)(1+r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S_n(\underline{w}_n)(1+r) \\
 &= (1+r) V_n(\underline{w}_n) + \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{nH}) - \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{nT}) \\
 &= \tilde{p} V_{n+1}(\underline{w}_{nH}) + \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{nT}) + \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{nH}) \\
 &\quad - \tilde{q} V_{n+1}(\underline{w}_{nT})
 \end{aligned}$$

من معادلات $u=1$ نحصل على

$$= V_{n+1}(\underline{w}_{nH})$$

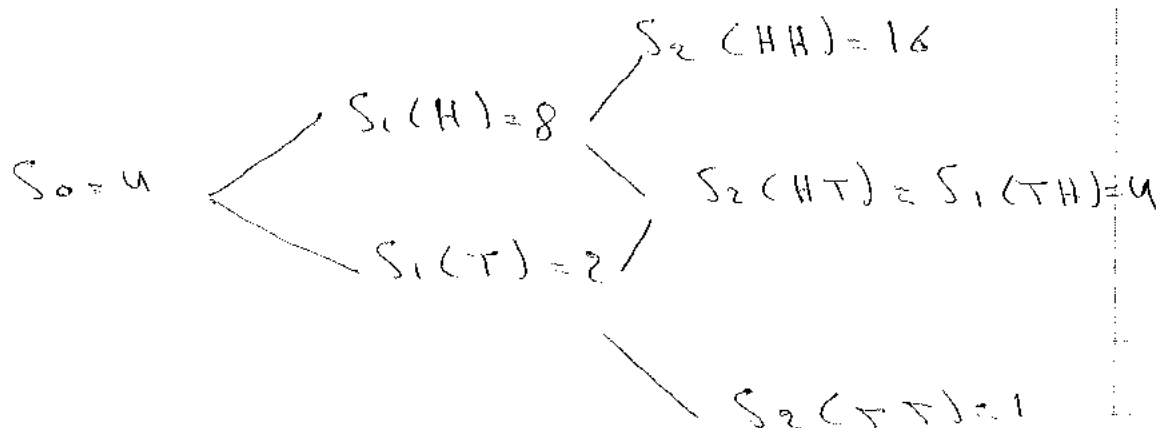
وبالفعل $X_{n+1}(\underline{w}_{nT}) = V_{n+1}(\underline{w}_{nT}) = 0$

مثال 1-1 نموذج ذي الحدين ذي البورثيا

نفرض $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} = \frac{2-1-\frac{1}{4}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



والنظر في المشتق الأول خيار السداد الأوروبي

$$V_2 = [S_2 - 3]^+$$

في الزمن t_2 في الزمن t_2 يكون

$$\begin{aligned}
 V_2(HH) &= [S_2(HH) - 3]^+ = [16 - 3]^+ = 13 \\
 V_2(HT) &= [S_2(HT) - 3]^+ = [4 - 3]^+ = 1 \\
 V_2(TH) &= [S_2(TH) - 3]^+ = [4 - 3]^+ = 1 \\
 V_2(TT) &= [S_2(TT) - 3]^+ = [1 - 3]^+ = 0
 \end{aligned}$$

عند الزمن t_1 يكون

$$\begin{aligned}
 V_1(H) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(HH) + \tilde{q} V_2(HT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 13 + 0.5 \times 1) = 5.6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_1(T) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(TH) + \tilde{q} V_2(TT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 1 + 0.5 \times 0) = 0.4
 \end{aligned}$$

و أخيراً عند الزمن t_0

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 5.6 + 0.5 \times 0.4) \\
 &= 2.4
 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن سعر الخيار في الزمن t_0 هو 2.4 دولار. وبإستخدام هذه القيمة المقوة فإننا

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{5.6 - 0.4}{8 - 2} = 0.868$$

عند الزمن t_0

فإن الخيار يكون $X_0 = 2.4$ دولار

$$\Delta_0 = 0.868 \text{ مقدار الأسهم}$$

$$\Delta_0 S_0 = 0.868 \times 4 = 3.468 \text{ دولار}$$

$$X_0 - \Delta_0 S_0 = 2.4 - 3.468 = -1.068$$

عند الزمن t_1

من وقت المال خلفه على

$$(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = -1.668 \times 1.25$$

$$\text{دو } = -1.334$$

إذا كان هناك صوبه في العمل فأن سوف الامم يكون

$$\Delta_0 S_1(H) = 0.868 \times 8 = 6.936$$

وبالتالي فأن النتيجة

$$X_1(H) = V_1(H) = -1.334 + 6.936 = 5.6$$

إذا كان هناك كتابة في العمل فأن سوف الامم يكون

$$\Delta_0 S_1(T) = 0.868 \times 2 = 1.734$$

والنتيجة تكون

$$X_1(T) = V_1(T) = -1.334 + 1.734$$

$$\text{دو } = 0.4$$

مثال 2-2 : نموذج ذي الحدين ذي الثلاث دورات

(Three-Period Binomial Model)

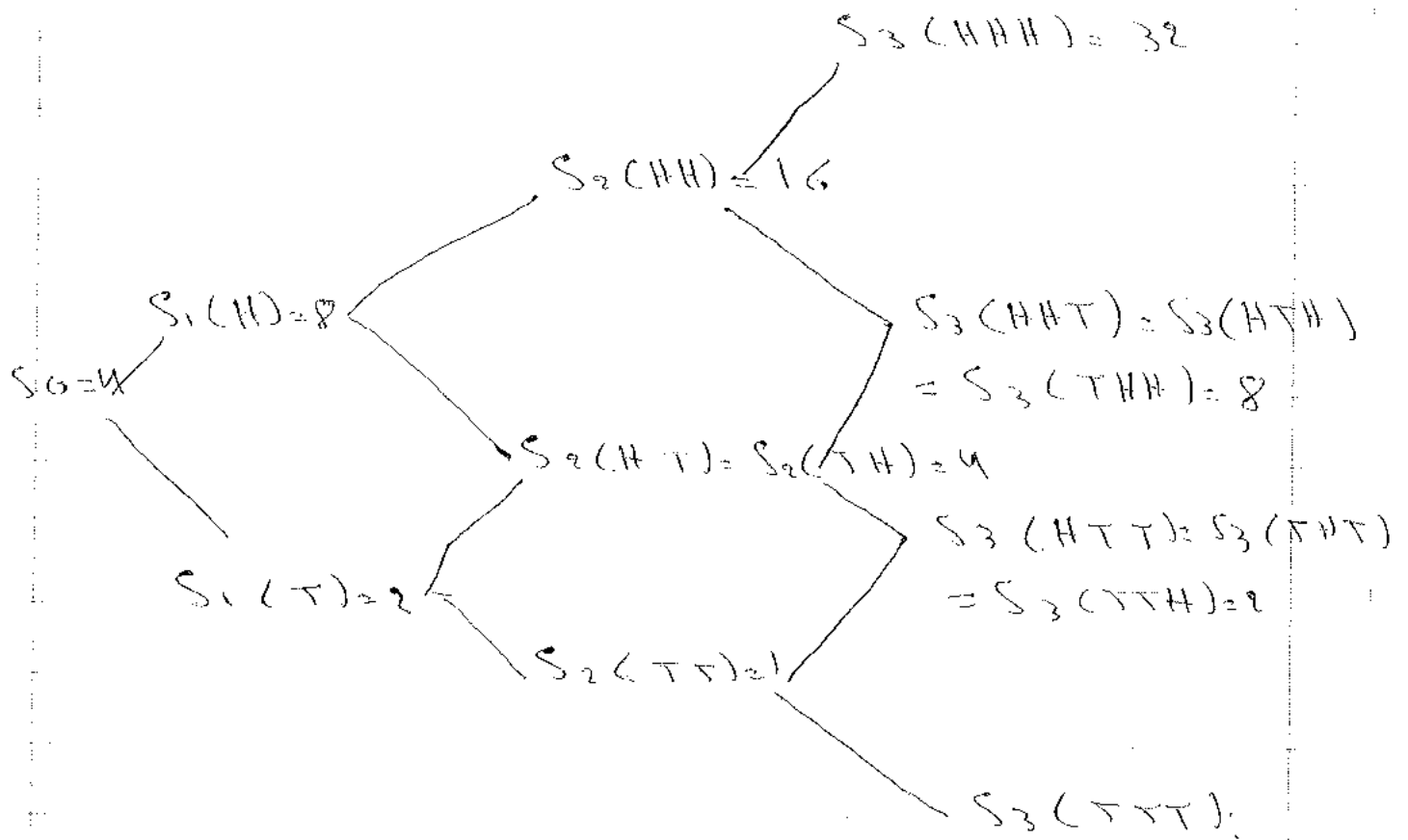
نفرض $r = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$, $u = 2$, $S_0 = 4$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} = \frac{2-1-\frac{1}{4}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

واختيار المشتك هو خيار الاسترجاع الدفع عند الزمن t_3

$$V_3 = \max_{0 \leq n \leq 3} (S_n) - S_3 \quad \text{كم دفع}$$



عند الزمن t_3

$$V_3(HHH) = \max \{ S_0, S_1(H), S_2(HH), S_3(HHH) \} - S_3(HHH) \\ = S_3(HHH) - S_2(HH) = 32 - 16 = 16$$

$$V_3(HHT) = \max \{ S_0, S_1(H), S_2(HT), S_3(HHT) \} - S_3(HHT) \\ = S_2(HT) - S_3(HHT) = 4 - 8 = -4$$

$$V_3(HTH) = \max \{ S_0, S_1(H), S_2(TH), S_3(HTH) \} - S_3(HTH) \\ = S_1(H) - S_3(HTH) = 8 - 8 = 0$$

$$V_3(THH) = \max \{ S_0, S_1(T), S_2(TH), S_3(THH) \} - S_3(THH) \\ = S_1(T) - S_3(THH) = 2 - 8 = -6$$

$$V_3(HTT) = \max \{ S_0, S_1(H), S_2(HT), S_3(HTT) \} - S_3(HTT) \\ = S_1(H) - S_3(HTT) = 8 - 2 = 6$$

$$V_3(TTH) = \max \{ S_0, S_1(T), S_2(TT), S_3(TTH) \}$$

$$- S_3(TTH) = S_2(TH) - S_3(THT) = 4 - 2 = 2$$

$$V_3(TTH) = \max \{ S_0, S_1(T), S_2(TT), S_3(TTH) \}$$

$$- S_3(TTH) = S_0 - S_3(TTH) = 4 - 2 = 2$$

$$V_3(TTT) = \max \{ S_0, S_1(T), S_2(TT), S_3(TTT) \}$$

$$- S_3(TTT) = S_0 - S_3(TTT) = 4 - 0.5 = 3.5$$

عند الزمن t_2

$$V_2(HH) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(HHH) + \tilde{q} V_3(HHT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 0 + 0.5 \times 8) = 3.2$$

$$V_2(HT) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(HTH) + \tilde{q} V_3(HTT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 6 + 0.5 \times 6) = 2.4$$

$$V_2(TH) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(THH) + \tilde{q} V_3(THT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 6 + 0.5 \times 2) = 0.8$$

$$V_2(TT) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(TTH) + \tilde{q} V_3(TTT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 2 + 0.5 \times 3.5) = 2.2$$

عند الزمن t_1

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(HH) + \tilde{q} V_2(HT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 3.2 + 0.5 \times 2.4) = 2.24$$

$$V_1(T) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(TH) + \tilde{q} V_2(TT))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 2.2) = 1.2$$

وآخيراً عند الزمن t_0

$$V_0 = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 \times 2.24 + 0.5 \times 1.2)$$

$$= 1.376$$

وبهذا فإن سعر الخيار عند الزمن t_0 هو 1.376

وباستخدام صيغة دلتا - القوط نحصل على

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{2.24 - 1.2}{8 - 2} = 0.1733$$

عملية النسخ المتماثل

عند الزمن t_0

يكون الخيار $V_0 = X_0 = 1.376$ دولار

- $\Delta_0 = 0.1733$ فدا الأسهم

$$\Delta_0 S_0 = 0.1733 \times 4 = 0.6933 \text{ دولار}$$

$$X_0 - \Delta_0 S_0 = 1.376 - 0.6933 = 0.6828$$

سوق المال

عند الزمن t_1

من سوق المال نحصل على

$$(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 0.6828 \times 1.25 = 0.8533$$

إذا كانت هناك موه في العمل فإن سوق الأسهم

$$\Delta_0 S_1(H) = 0.1733 \times 8 = 1.3868$$

وبالنسبة تكون

$$X_1(H) = V_1(H) = 1.3868 + 0.8533$$

$$= 2.24 \text{ دولار}$$

إذا كان هناك كتابه في العمل . فإن سوق الأسهم يكون

$$\Delta_0 S_1(T) = 0.1733 \times 2 = 0.3466 \text{ دولار}$$

والنتيجة تكون $X_1(T) = V_1(T) = 0.3466 + 0.8533$

$$= 1.2 \text{ دولار}$$

ملاحظة 1-1

نفرض أنه 100 هي أكثر الفترات في نموذج تسامح الكدين
 تم لدينا نتائج العمل حيث V_{100} لا يتم حساباً الفعلية
 على سبيل المثال 2-1

ملاحظة 2-1

النظر في ثلاثة الفترات في النموذج على سبيل المثال
 1-2 تحمل المشتقة الآن في خيار النداء الأمريكي وضع
 الخيار مع سعر الاضراب $K=5$ ووقت انتهاء $T=t_3$
 $V_3 = (5 - S_3)^+$ بينما أن سعر الخيار يعتمد على (سهم الحالة)
 لذلك يكون دالة الحالة
 $V_n = U_n(S_n)$
 ونلاحظ

$$V_3(HHH) = (5 - S_3(HHH))^+ = (5 - 32)^+ = 0$$

$$V_3(HHT) = (5 - S_3(HHT))^+ = (5 - 8)^+ = 0 = V_3(HTH) = V_3(THH)$$

$$V_3(HTT) = (5 - S_3(HTT))^+ = (5 - 2)^+ = 3 = V_3(THT) = V_3(TTH)$$

$$V_3(TTT) = (5 - S_3(TTT))^+ = (5 - 0.5)^+ = 4.5$$

نلاحظ أن $V_3(S)$ هو سعر الخيار في الزمن t_3 من فوق الأسهم
 عند ما الوقت t_3

$$V_3 = V_3(S) = \begin{cases} 0, & \text{if } S = 32, 8, \\ 3, & \text{if } S = 2, \\ 4.5, & \text{if } S = 0.5, \end{cases}$$

عند الزمن t_2

$$V_2(S) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(uS) + \tilde{q} V_3(dS))$$

$$= \frac{4}{5} (0.5 V_3(2S) + 0.5 V_3(0.5S))$$

$$= \frac{2}{5} (U_3(2S) + U_3(0.5S))$$

حيث

$$U_2(16) = \frac{2}{5} (U_3(32) + U_3(8)) = 0$$

$$U_2(4) = \frac{2}{5} (U_3(8) + U_3(2)) =$$

$$= \frac{2}{5} (0 + 3) = 1.2$$

$$U_2(1) = \frac{2}{5} (U_3(2) + U_3(0.5))$$

$$= \frac{2}{5} (3 + 4.5) = 3$$

عند الزمن t_1

$$U_1(S) = \frac{2}{5} (U_2(2S) + U_2(0.5S))$$

$$\Rightarrow U_1(8) = \frac{2}{5} (U_2(16) + U_2(4))$$

$$= \frac{2}{5} (0 + 1.2) = 0.48$$

$$\Rightarrow U_1(2) = \frac{2}{5} (U_2(4) + U_2(1)) =$$

$$= \frac{2}{5} (1.2 + 3) = 1.68$$

أخيراً، عند الزمن t_0

$$U_0(S) = \frac{2}{5} (U_1(2S) + U_1(0.5S))$$

$$\Rightarrow U_0(4) = \frac{2}{5} (U_1(8) + U_1(2))$$

$$= \frac{2}{5} (0.48 + 1.68)$$

$$= 0.864$$

دلت على أن سعر الخيار عند الزمن t_0 هو 0.864 وباتخاذ

سيفه دلنا - القبول - هناك

$$\delta_n(S) = \frac{U_{n+1}(4S) - U_{n+1}(S)}{4S - S}$$

$$= \frac{U_{n+1}(2S) - U_{n+1}(0.5S)}{1.5S}$$

ملاحظة 1-2

الأمثلة التالية توضح قيم الخيار عند سعر السهم الحالي
حيث يكون عند $t=0$ في n دالة

$$S_0, S_1, \dots, S_n$$

$$U_n = U_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$$

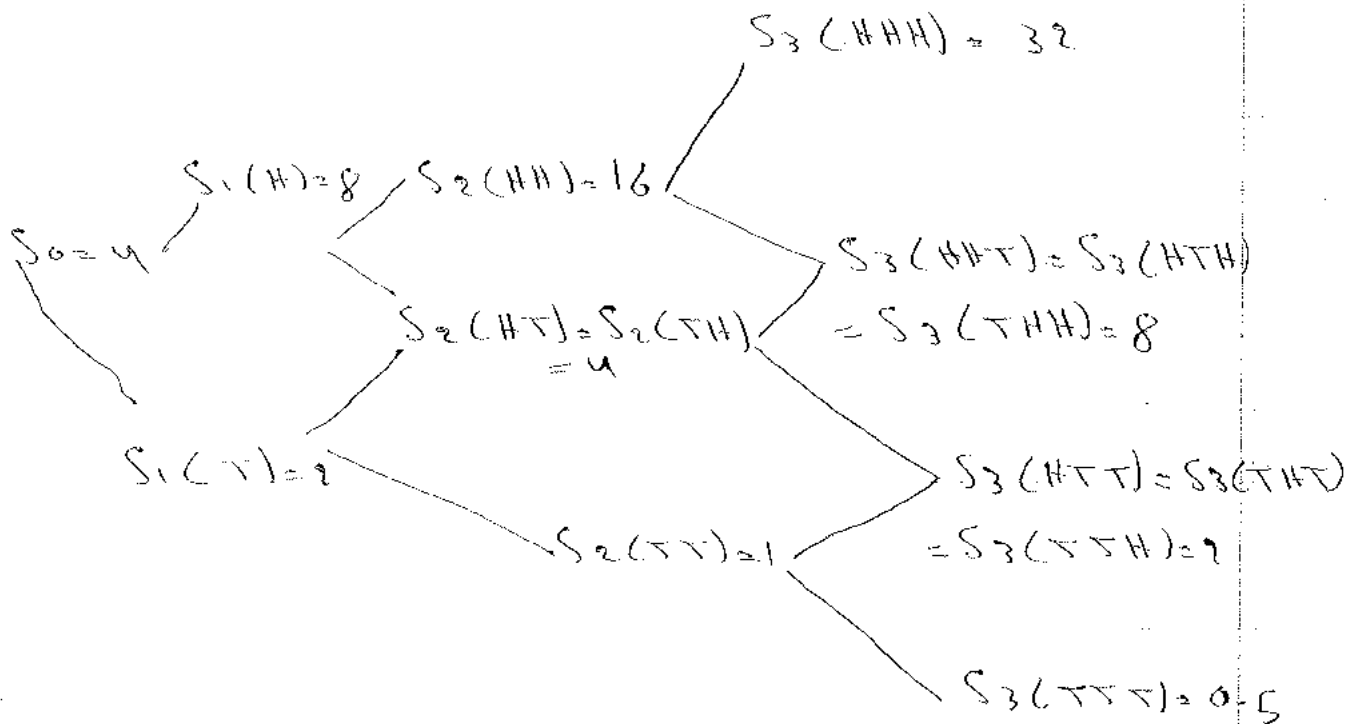
مثال 2-2

لتفرض $u = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{9}$, $K = 2$, $S_0 = 4$ حيث

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \text{ و } \tilde{q} = 1 - \tilde{p} = \frac{1}{2}$$

والنظر في فترة الزمن موجبة (استمرار العوازل في

$$U_3 = \max_{0 \leq n \leq 3} (S_n) - S_3 \text{ الوقت } t_3$$



$$M_n = \max_{0 \leq n \leq 3} S_n \text{ حيث}$$

$$(S_3, M_3) = (32, 32), (8, 16), (8, 8), (2, 8)$$

$$(2, 4), (0.5, 4)$$

عند الزمن t_3

$$U_3(S, M) = M - S$$

$$U_3(32, 32) = 0, U_3(8, 16) = 8, U_3(8, 8) = 0,$$

$$U_3(2, 8) = 6, U_3(2, 4) = 2$$

$$U_3(0.5, 4) = 3.5$$

عند الزمن t_2

$$U_2(S, M) = \frac{1}{1+r} \left[U_3(uS, \max(M, uS)) + U_3(dS, M) \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[U_3(2S, \max(M, 2S)) + U_3(0.5S, M) \right]$$

حيث أن

$$U_2(16, 16) = \frac{2}{5} \left[U_3(32, 32) + U_3(8, 16) \right] = \frac{2}{5} [0 + 8] = 3.2$$

$$U_2(4, 8) = \frac{2}{5} \left[U_3(8, 8) + U_3(2, 8) \right] = \frac{2}{5} [0 + 6] = 2.4$$

$$U_2(4, 4) = \frac{2}{5} \left[U_3(8, 8) + U_3(2, 4) \right] = \frac{2}{5} [0 + 2] = 0.8$$

$$U_2(1, 4) = \frac{2}{5} \left[U_3(2, 4) + U_3(0.5, 4) \right] = \frac{2}{5} [2 + 3.5] = 2.2$$

عند الزمن t_1

$$U_1(8, 8) = \frac{2}{5} \left[U_2(16, 16) + U_2(4, 8) \right]$$

$$= \frac{2}{5} [3.2 + 2.4] = 2.24$$

$$U_1(2, 4) = \frac{2}{5} \left[U_2(4, 4) + U_2(1, 4) \right] = \frac{2}{5} [0.8 + 2.2] = 1.2$$

تقدير سعر الخيار في الزمن 0

$$U_0(u) = \frac{2}{5} [U_1(8,8) + U_1(2,4)] = \frac{2}{5} [2 - 2u + 1.2] = 1.376$$

باستخدام صيغة دلتا التحوط

$$\varepsilon_n(S, u) = \frac{U_{n+1}(2S, \max(M, 2S)) - U_{n+1}(0.5S, u)}{1.6S}$$

مثال 3.2

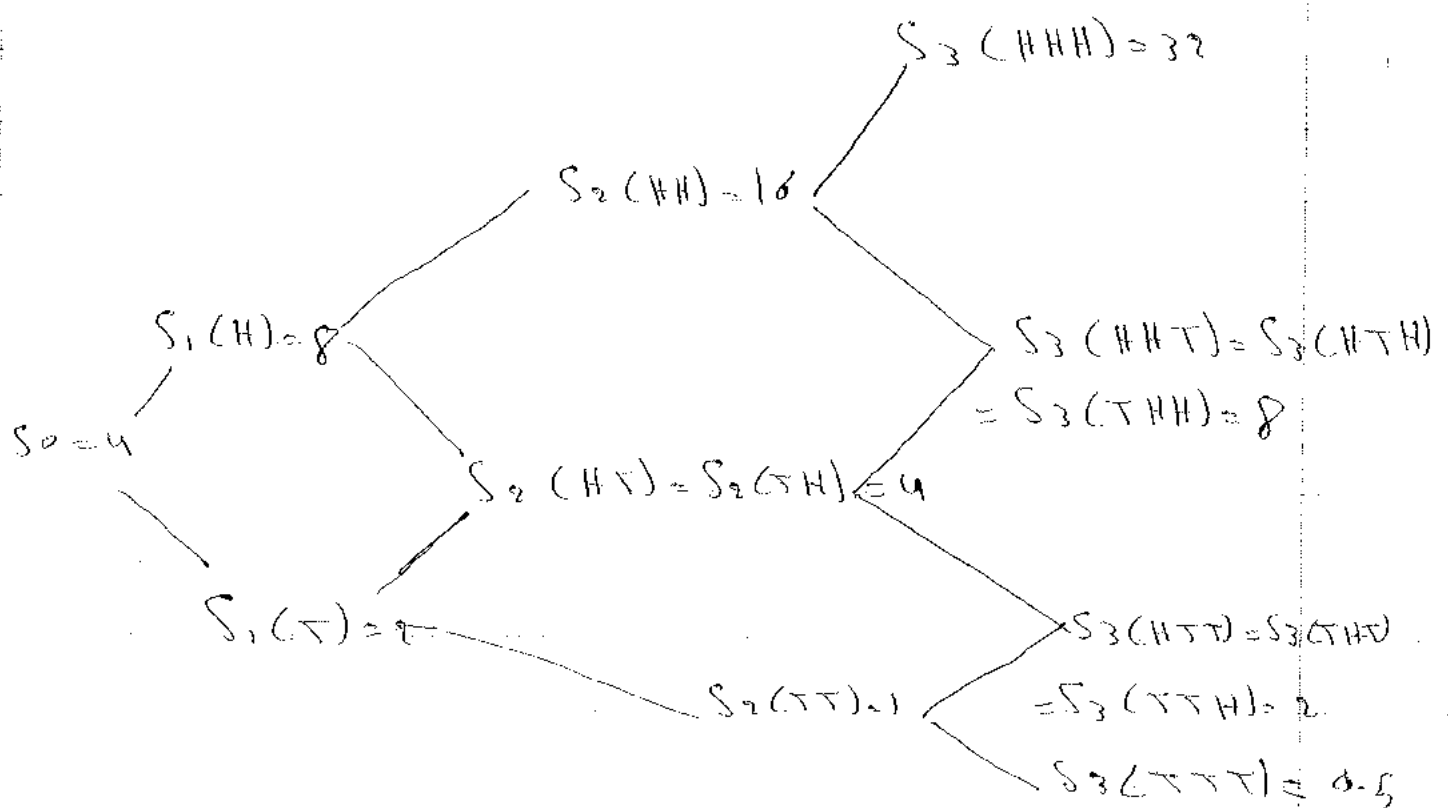
لنفرض $\tilde{p} = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$, $u = 2$, $S_0 = 4$

$$\tilde{q} = 1 - \tilde{p} = \frac{1}{2}$$

$X_n = S_0 + S_1 + \dots + S_n, n = 0, 1, 2, 3$ لا حظ

قيمة سعر الخيار $K = 4$ عند الزمن 3

$$U_3 = \left(\frac{1}{u} X_3 - 4 \right)^+$$



في وقتيه الخيار عند $t=0$
الحالة الأولى:

عند الزمن t_3 تكون قيمه الخيار

$$U_3(HHH) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(H) + S_2(HH) + S_3(HHH) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 60 - u \right)^+ = 11$$

$$U_3(HHT) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(H) + S_2(HH) + S_3(HHT) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 36 - u \right)^+ = 5$$

$$U_3(HTH) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(H) + S_2(HT) + S_3(HTH) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 24 - u \right)^+ = 2$$

$$U_3(HTT) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(H) + S_2(HT) + S_3(HTT) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 18 - u \right)^+ = 0.5$$

$$U_3(THH) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(T) + S_2(TH) + S_3(THH) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 18 - u \right)^+ = 0.5$$

$$U_3(THT) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(T) + S_2(TH) + S_3(THT) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 12 - u \right)^+ = 0$$

$$U_3(TTH) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(T) + S_2(TT) + S_3(TTH) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 9 - u \right)^+ = 0$$

$$U_3(TTT) = \left(\frac{1}{u} (S_0 + S_1(T) + S_2(TT) + S_3(TTT) - u) \right)^+ \\ = \left(\frac{1}{u} \times 7.5 - u \right)^+ = 0$$

عند الزمن t_2

$$U_2(HH) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} U_3(HHH) + \tilde{q} U_3(HHT)) \\ = \frac{u}{5} (0.5 \times 11 + 0.5 \times 5) = 6.4$$

$$U_2(HT) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p} U_3(HTH) + \tilde{q} U_3(HTT)) \\ = \frac{u}{5} (0.5 \times 2 + 0.5 \times 0.5) = 1$$

$$\begin{aligned}
 V_2(TH) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(THH) + \tilde{q} V_3(THT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0) = 0.2 \\
 V_2(TT) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_3(TTH) + \tilde{q} V_3(TTT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 0 + 0.5 \times 0) = 0
 \end{aligned}$$

عند الزمن t_1

$$\begin{aligned}
 V_1(H) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(HH) + \tilde{q} V_2(HT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 6.4 + 0.5 \times 1) \\
 &= 2.96
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_1(T) &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_2(TH) + \tilde{q} V_2(TT)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 0.2 + 0.5 \times 0) \\
 &= 0.08
 \end{aligned}$$

أخيراً، عند الزمن t_0

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{1+r} (\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T)) \\
 &= \frac{4}{5} (0.5 \times 2.96 + 0.5 \times 0.08) \\
 &= 1.216
 \end{aligned}$$

لذا سعر الخيار عند الزمن t_0 هو 1.216 دولاراً
 صفيه دلالة القوة الحركية

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 &= \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{2.96 - 0.08}{8 - 2} \\
 &= 0.48
 \end{aligned}$$

الحالة الثانية .

عندما $U_n(S, y)$ و y سعر الخيار في الزمن n هو

$$y_n = y \text{ و } S_n = S$$

حيث

$$U_3(S, y) = \left(\frac{1}{u} y - u\right)^+$$

$$U_n(S, y) = \frac{\hat{p}}{1+r} U_{n+1}(uS, y + uS) + \frac{\hat{q}}{1+r} U_{n+1}(dS, y + dS)$$

$$= \frac{2}{5} (U_{n+1}(2S, y + 2S) + U_{n+1}(0.5S, y + 0.5S))$$

ففيه الخيار في الزمن t_3

$$U_3(S, y) = \begin{cases} 11 & \text{if } S = 32, y = 60 \\ 5 & \text{if } S = 8, y = 36 \\ 2 & \text{if } S = 8, y = 24 \\ 0.5 & \text{if } (S = 8, y = 18) \text{ or } (S = 2, y = 18) \\ 0 & \text{if } (S = 2, y = 12) \text{ or } (S = 2, y = 9) \\ & \text{or } (S = 0.5, y = 7.5) \end{cases}$$

ففيه الخيار في الزمن t_2

$$U_2(16, 28) = \frac{2}{5} (U_3(32, 60) + U_3(8, 36)) = \frac{2}{5} (11 + 5) = 6.4$$

$$U_2(4, 16) = \frac{2}{5} (U_3(8, 24) + U_3(2, 18)) = \frac{2}{5} (2 + 0.5) = 1$$

$$U_2(4, 10) = \frac{2}{5} (U_3(8, 18) + U_3(2, 12)) = \frac{2}{5} (0.5 + 0) = 0.2$$

$$U_2(1, 8) = \frac{2}{5} (U_3(2, 4) + U_3(0.5, 7.5)) = \frac{2}{5} (0 + 0) = 0$$

قيمة الخيار في الزمن t_1

$$U_1(8, 12) = \frac{2}{5} (U_2(16, 28) + U_2(4, 16)) = \frac{2}{5} (6.4 + 1) = 2.96$$

$$U_1(2, 6) = \frac{2}{5} (U_2(4, 10) + U_2(1, 8)) = \frac{2}{5} (0.2 + 0) = 0.08$$

أخيراً . قيمة الخيار في الزمن t_0

$$U_0(4, 4) = \frac{2}{5} (U_1(8, 12) + U_1(2, 6)) = \frac{2}{5} (2.96 + 0.08) = 1.216$$

باستخدام صيغة دلتا - التحوط نصل إلى

$$\Delta_n(S, y) = \frac{U_{n+1}(2S, y+2S) - U_{n+1}(0.5S, y+0.5S)}{(u-d)S}$$

Then

$$\begin{aligned} \Delta_0(4, 4) &= \frac{U_1(8, 12) - U_1(2, 6)}{1.5 \times 4} \\ &= \frac{2.96 - 0.08}{6} = 0.48 \end{aligned}$$

المصادر

1. Stochastic calculus for finance I: the binomial Asset pricing model by steven E. shreve , spinger , 2004
2. Stochastic calculus for finance II: continuous time model by steven E. shreve , spinger , 2004
3. Brownian motion calculus by ubbo f wiersema , john wiley & sons , ltd 2008
4. Basic sytochastic process by Adzistaw Brrzezniak and Tomasz zastawniak , Springer 1999