



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات الطبية

حول النمو الاحيائي التصادفي

بحث مقدم

الى جامعة القادسية/كلية علوم الحاسوب و الرياضيات/ قسم الرياضيات الطبية كاستكمال جزئي لنيل
شهادة البكلوريوس في الرياضيات الطبية

من قبل الطالبة

تقى كريم هادي

باشراف

الدكتور إحسان جبار كاظم

٢٠١٧ م

١٤٣٨ هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

اقرأ باسم ربك الذي خلق (١) خلق الانسان من علق (٢) اقرأ وربك الاكرم

(٣) الذي علم بالقلم (٤) علم الانسان ما لم يعلم (٥)

صدق الله العظيم

(سورة العلق (١) - (٥))

الاهداء

الى من بلغ الرسالة وادى الامانة ونصح الامة الى نبي الرحمة و نور العالمين سيدنا محمد (ص)

الى من كلله الله بالهيبة و الوقار الى من علمني العطاء بدون انتظار

الى من احمل اسمه بكل افتخار ارجو من الله ان يمد في عمره ليرى ثمار قد حان

قطافها بعد طول انتظار و ستبقى كلماته نجما اهتدي بها اليوم و في الغد و الى

الابد (والدي العزيز)

الى ملاكي في الحياة الى سر الوجود الى من كان دعائها سر نجاحي الى التي

حنتها الايام من اجل رعايتي (والدتي العزيزة)

الى من رافقونا منذ ان حملنا حقائب صغيرة ومعا سرنا الدرب خطوة بخطوة

ومازالو يرافقوني حتى الان (اخوتي واخواتي)

الى من تحلو بالاخاء و تميزوا بالوفاء الى ينابيع الصدق الصافي الى من معهم سعدت

وبرفقتهم سرت في دروب الحياة (اصدقائي)

الشكر والتقدير

"كن عالما . . . فان لم تستطع فكن متعلما . . . فان لم تستطع فاحب العلماء"

بعد رحلة بحث واجتهاد تكلل بانجاز هذا البحث نحمد عز وجل ع نعمته التي منا بها علينا فهو العلي
التقدير

كما لايسعني الا ان اخص باسمى عبارات الشكر والتقدير الدكتور احسان جبار كاظم لما قدمه لي من
جهد ونصح ومعرفة طيلة انجاز هذا البحث .

المستخلص.

تناولنا في هذا البحث دراسة بعض النماذج التصادفية لمسألة النمو الاحيائي حيث قدمنا معادلات تفاضلية تصادفية تصف النمو الاحيائي بدلا من المعادلات التفاضلية الحتمية. حيث تكون الاولى اكثر دقة و واقعية من الثانية .

مقدمة

يعتبر النمو الاحيائي من المسائل المهمة في حياة الانسان و الكائنات الحية بشكل عام. لذلك قمنا بدراسة هذا الموضوع المثير للاهتمام باستخدام نماذج تصادفية بدلا من النماذج الحتمية. حيث تكون النماذج التصادفية اكثر دقة و واقعية و تساعدنا في التنبؤ بنمو الكائنات الحية على المدى البعيد بشكل دقيق.

يتكون البحث من ثلاثة فصول.

تناول الفصل الاول بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس

اما الفصل الثاني فتناول التكاملات التصادفية مع بعض الامثلة التي توضح كيفية اجراء التكاملات التصادفية و حل المعادلات التصادفية.

اما الفصل الثالث و الاخير ، فقد تناول بعض النماذج التصادفية التي تصف النمو الاحيائي.

المحتويات

الفصل الأول : بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس 1

1.1 فضاء القياس 1

1.2 الفضاءات الاحتمالية المتقطعة 6

1.3 التوقع الرياضي 11

1.4 التوقع الشرطي 13

الفصل الثاني : التكاملات التصادفية 17

2.1 مقدمة 18

2.2 المعادلات التفاضلية التصادفية و صيغة ايتو 19

2.3 المعادلات التفاضلية التصادفية و حلولها 25

الفصل الثالث: النمذجة التصادفية في بعض المسائل الطبية 27

3.1 النموذج الرياضي 27

3.2 مسألة (النظم التصادفية للمجتمعات) 31

المصادر 36

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس

1.1 فضاء القياس Measure Space

دعنا نبدأ بتذكير البعض من التعاريف والمفاهيم الأساسية الأولية في نظرية القياس التي نتفعلنا في دراسة هذا المقرر.

1.1.1 تعريف (الحقل المتكامل σ - filed)

لتكن $\mathcal{F}$ عائلة مجموعات جزئية من مجموعة Ω . تسمى العائلة $\mathcal{F}$ حقل (field) إذا تحققت الشروط الآتية:

$$\Omega \in \mathcal{F} (a)$$

$$(b) \text{ إذا كانت } A \in \mathcal{F} , \text{ فإن } A^c \in \mathcal{F} \text{ (حيث } A^c = \Omega - A \text{)}$$

$$(c) \text{ إذا كان } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \text{ فإن } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

إذا استبدلنا الشرط (c) بالشرط الآتي:

$$(d) \text{ إذا كان } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ فإن } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

فعندئذ تسمى العائلة $\mathcal{F}$ حقل من النمط σ - أو حقل متكامل (σ -field).

1.1.2 ملاحظة.

إذا كان $\mathcal{F}$ حقل (حقل متكامل) على Ω فإن

$$\emptyset \in \mathcal{F} (a)$$

$$(b) \text{ إذا كان } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \text{ فإن } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \text{ (إذا كان } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ فإن)}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \text{)}$$

1.1.3 أمثلة

(a) لتكن Ω مجموعة غير خالية ولتكن $\mathcal{F}$ عائلة كل المجموعات الجزئية من Ω (هذا يعني ان $2^\Omega := \mathcal{F}$) فان $\mathcal{F}$ حقل متكامل على Ω و هو اكبر حقل متكامل على Ω .

(b) لتكن Ω مجموعة غير خالية فان العائلة $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ تكون حقل متكامل على Ω وهو اصغر حقل متكامل على Ω .

(c) لتكن Ω مجموعة غير خالية و لتكن A مجموعة غير خالية جزئية فعلية من Ω (هذا يعني $\emptyset \neq A \subsetneq \Omega$) فان العائلة $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ اصغر حقل متكامل يحتوي A .

1.1.4 ترميز

لتكن $\mathcal{S}$ عائلة من المجموعات الجزئية من Ω ، إن اصغر حقل متكامل يحتوي عناصر $\mathcal{S}$ يرمز له بالرمز $\sigma(\mathcal{S})$ ويسمى أحيانا اصغر حقل متكامل على $\mathcal{S}$.

1.1.5 أمثلة

(a) لتكن Ω مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. لتكن $\mathcal{F}$ عائلة تحتوي على جميع الاتحادات

المنتهية للفترات شبه المغلقة-من اليمين (إن الفترات شبه المغلقة- من اليمين لها الشكل

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b, -\infty \leq a < b < \infty\}$$

من اجل الملائمة سنعتبر الفترة (a, ∞) شبه مغلقة من اليمين لـ $-\infty \leq a < \infty$. هذا

الافتراض ضروري لان $(-\infty, a] \in \mathcal{F}$ ، واذا كان $\mathcal{F}$ حقلا فيجب ان تنتمي المكمل

(a, ∞) الى $\mathcal{F}$). يمكن أن نبين أن الشروط (a)-(c) من تعريف 1.1.1 متحققة. وعليه

تكون العائلة $\mathcal{F}$ حقلا. لكن $\mathcal{F}$ لا تمثل حقلا متكاملا لان $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ لكل

$$n = 1, 2, \dots \text{ وان } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1) \notin \mathcal{F}.$$

(b) لتكن Ω مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$. إن عائلة الاتحادات

المنفصلة المنتهية من الفترات شبه مغلقة من اليمين تكون حقل على $\bar{\mathbb{R}}$ لكنها ليست حقلا

متكاملا. هنا الفترات التي تكون شبه مغلقة من اليمين يكون لها الشكل

$$(a, b] := \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a < x \leq b, -\infty \leq a < b \leq \infty\}$$

من اجل الملائمة سنعتبر الفترة $\{-\infty, b\} := \{x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq \infty\}$ شبه مغلقة من اليمين لـ $-\infty \leq a < \infty$. (في هذه الحالة هذا الافتراض ضروري لان $(b, \infty] \in \mathcal{F}$ وعليه يجب ان تكون المكملة $[-\infty, b]$ تنتمي إلى $\mathcal{F}$.

1.1.6 ترميز

إذا كانت $\mathcal{C}$ عائلة مجموعات جزئية من Ω وان $A \subset \Omega$. سنعرف العائلة $\mathcal{C} \cap A$ على النحو $\mathcal{C} \cap A := \{B \cap A : B \in \mathcal{C}\}$. اذا كان $\sigma(\mathcal{C}) := \mathcal{F}$ اصغر حقل متكامل على $\mathcal{C}$ ، سنفرض ان

$$\sigma_A(\mathcal{C} \cap A) = \mathcal{F} \cap A$$

حيث إن $\sigma_A(\mathcal{C} \cap A)$ اصغر حقل متكامل من المجموعات الجزئية من A على $\mathcal{C} \cap A$ بمعنى آخر إن A تعتبر المجموعة الشاملة بدلا عن Ω .

1.1.7 تعريف

لتكن $\mathcal{F}$ حقل متكامل على المجموعة Ω . يسمى الزوج $(\Omega, \mathcal{F})$ فضاء قابل للقياس (measurable space). وفي هذه الحالة نسمي عناصر $\mathcal{F}$ مجموعات قابلة للقياس.

1.1.8 تعريف

ليكن $(\Omega, \mathcal{F})$ فضاء قابل للقياس. تسمى الدالة $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ قياس (measure) على $\mathcal{F}$ إذا كان

$$\mu(A) \geq 0 \text{ لكل } A \in \mathcal{F} \quad (a)$$

(b) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة منتهية او غير منتهية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى (أي إن $A_n \cap A_m = \emptyset$ لكل $n \neq m$ في $\mathcal{F}$ فان $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

إذا كان $\mu(\Omega) = 1$. فنسمي μ قياس احتمالي (probability measure). في هذه الحالة نرمز لـ μ بالرمز $\mathbb{P}$.

1.1.9 تعريف

إن فضاء القياس (measure space) هو الثلاثي $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ حيث Ω مجموعة غير خالية، $\mathcal{F}$ حقل متكامل من مجموعات جزئية من Ω و μ قياس على $\mathcal{F}$. إذا كان μ قياس احتمالي فإن الثلاثي $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ يسمى فضاء احتمالي. وفي هذه الحالة نكتب $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ للدلالة على الفضاء الاحتمالي وعندها تسمى Ω فضاء العينة (sample space) و تسمى عناصر $\mathcal{F}$ حوادث (events) وسندرس الفضاءات الاحتمالية في الفصل القادم بشيء من التفصيل.

1.1.10 تعريف

لتكن Ω مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. فإن اصغر حقل متكامل من مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ يسمى حقل بوريل المتكامل (Borel σ -field) إذا احتوى على كل الفترات من الصيغة $(a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$. ويرمز لهذا الحقل المتكامل بالرمز $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ وتسمى عناصره مجموعات بوريل (Borel sets).

1.1.11 ملاحظات

- (a) إن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ هو اصغر حقل متكامل يحتوي على كل الفترات في $\mathbb{R}$.
- (b) إذا كانت $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، فإن $\mathcal{B}(E) := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B \subset E\}$ وهذا يتزامن مع $\{A \cap E : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

1.1.12 تعريف

ليكن كل من $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ و $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ فضاء قابل للقياس. تسمى الدالة $f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ دالة قابلة للقياس (measurable function) إذا كان $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ لكل $A \in \mathcal{F}_2$.

1.1.13 قضية

تكون الدالة $f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ لكل $A \in \mathcal{C}$ حيث $\mathcal{C}$ عائلة مجموعات جزئية من $\mathcal{F}_2$ تحقق $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$.

1.1.14 ملاحظة

إذا كانت $f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ دالة قابلة للقياس فهذا لا يؤدي الى ان $f(A) \in \mathcal{F}_2$ لكل $A \in \mathcal{F}_1$.

1.1.15 تعريف

تسمى الدالة $f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ or $(\bar{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$ قابلة للقياس بوريليا (Borel measurable) إذا كانت قابلة للقياس بالنسبة الى $\mathcal{F}$ و $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (او $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^n)$).

1.1.16 تعريف

تسمى الدالة $f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$ بسيطة (simple) إذا كانت قابلة للقياس بوريليا و تاخذ عدد منتهى فقط من القيم المختلفة. او بشكل مكافئ تكون f دالة بسيطة اذا كان بالامكان كتابتها على شكل مجموع منتهى $\sum_{i=1}^m x_i I_{A_i}$ حيث A_i مجموعات منفصلة في $\mathcal{F}$ و I_{A_i} الدالة المميزة للمجموعة A_i ، ليس بالضرورة ان تكون x_i مختلفة.

1.1.17 قضية

إذا كان كل من $f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ و $g: (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ دالة قابلة للقياس فان $g \circ f: (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ دالة قابلة للقياس.

1.2 الفضاءات الاحتمالية المتقطعة Discrete Probability Spaces

إذا كان فضاء العينة Ω مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية قابلة للعد، فلا تظهر صعوبة القياس النظرية. نأخذ $\mathcal{F}$ على أنها مجموعة كل المجموعات الجزئية من Ω ونبني الاحتمالات بالطريقة القانونية الآتية:

لتكن $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ ولتكن أعداد غير سالبة مجموعها يساوي 1. إذا كانت $A \subset \Omega$ نعرف

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

بصورة خاصة،

$$\mathbb{P}\{\omega_i\} = p_i$$

فان $\mathbb{P}$ قياس احتمالي، وتحسب احتمالية الحادثة A ببساطة بإضافة احتمالات النقاط المفردة من A .

إذا كانت Ω مجموعة قابلة للعد، فان $\mathcal{F}$ تحتوي على جميع المجموعات الجزئية من Ω ، وان $\mathbb{P}$ معرف كما مر أعلاه، فيسمى الثلاثي $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضاء احتمالي متقطع (Discrete Probability Space).

إن نظرية الاحتمال الكلاسيكية تتعامل مع حالة خاصة عندها يكون $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ وان $p_i = \frac{1}{n}$ ، حيث $i = 1, 2, \dots, n$. في هذه الحالة،

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\text{عدد نقاط } A}{\text{عدد نقاط } \Omega}$$

وعليه لإيجاد $\mathbb{P}(A)$ نقوم بعدد النتائج المطلوبة ونقسمها على النتائج الكلية.

1.2.1 تعريف

(a) يقال لحادثتين A و B بأنهما مستقلتان إذا كان $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(b) يقال عن حقلين متكاملين $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ بأنهما مستقلان إذا كان A و B مستقلان لكل $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{G}$.

1.2.2 تعريف

ان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادثة B عندما تكون الحادثة A وقعة يعرف على النحو

$$\mathbb{P}(B/A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \mathbb{P}(A) > 0$$

1.2.3 تعريف

المتغير العشوائي (random variable) X على الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ هو دالة قابلة للقياس بوريليا من Ω الى $\mathbb{R}$. ونكتب $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

في بعض المواضع يكون من الملائم ان نسمح للمتغير العشوائي X ان ياخذ القيمتين $\pm\infty$ ، يقال ان X متغير عشوائي موسع (**extended random variable**) اذا كان دالة قابلة للقياس بوريليا من Ω الى $\bar{\mathbb{R}}$. ونكتب $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.

1.2.4 تعريف

اذا كان X متغير عشوائي على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فالقياس الاحتمالي المتولد بواسطة X هو القياس الاحتمالي $\mathbb{P}_X$ على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ المعطى على النحو

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}\{\omega: X(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ان الأعداد $\mathbb{P}_X(B)$ حيث $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ تحدد كلياً المتغير العشوائي X بمعنى انها تزودنا باحتمالات كل الحوادث التي تتضمن X . من المفيد ان نعلم ان هذه المعلومات مأسورة بدوال أحادية من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$.

1.2.5 تعريف

ان دالة توزيع (**distribution function**) المتغير العشوائي X هي الدالة $F := F_X$ من $\mathbb{R}$ الى $[0,1]$ المعطاة بـ

$$F(x) := \mathbb{P}\{\omega: X(\omega) \leq x\}, x \in \mathbb{R}$$

1.2.6 ملاحظة

بما إن، لـ $a < b$ ، $F(b) - F(a) = \mathbb{P}\{\omega: a < X(\omega) \leq b\} = \mathbb{P}_X(a, b]$ ،
اذن F دالة توزيع مقابلة إلى قياس ليبيك-استلجس.

1.2.7 تعريف

ليكن X متغير عشوائي على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. نقول ان X بسيط (simple) إذا كان X يأخذ عدد منتهى فقط من القيم الممكنة، ويسمى متقطع (discrete) إذا كانت مجموعة قيم X منتهية او غير منتهية قابلة للعد.

1.2.8 ملاحظة

إذا كان X متغير عشوائي متقطع، فان خواص X تتحدد كلياً بواسطة الدالة الاحتمالية p_X ، المعرفة على النحو

$$p_X(x) = \mathbb{P}\{\omega: X(\omega) = x\}, x \in \mathbb{R}$$

بشكل واضح،

$$\mathbb{P}_X(B) = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

إن هذا المجموع محدود لان $p_X = 0$ ما عدا عند x_n .

وعليه المتغير العشوائي المتقطع يمكن إن يحدد بالمجموعة القابلة للعد $\{x_n: n = 1, 2, \dots\}$ من الاعداد الحقيقية و مجموعة الاحتمال $\{p_n: n = 1, 2, \dots\}$ حيث $p_n \geq 0$ ،
 $\sum_n p_n = 1$ ، حيث p_n تعمل كـ $\mathbb{P}\{\omega: X(\omega) = x_n\}$.

1.2.9 تعريف

يقال إن المتغير العشوائي X مستمر بشكل مطلق (*absolutely continuous*) اذا وجد دالة قيمة حقيقية غير سالبة f قابلة للقياس بوريليا على $\mathbb{R}$ بحيث ان

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

نسمي f كثافة (density) أو دالة كثافة (density function).

بما إن $F(x) \rightarrow 1$ عندما $x \rightarrow \infty$ ، يكون لدينا $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$.

إذا كان X مستمر بشكل مطلق مع كثافة f يتبع إن

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x) dx, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

1.2.10 تعريف

يقال إن المتغير العشوائي X مستمر (continuous) إذا كانت دالة توزيعه F مستمرة على كل $\mathbb{R}$. وبشكل مكافئ يكون X مستمر إذا كان $\mathbb{P}\{\omega: X(\omega) = x\} = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1.2.11 أمثلة

سنعطي هنا بعض الأمثلة المهمة حول دوال الكثافة.

(1) دالة الكثافة المنتظمة (uniform density) على $[a, b]$:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

(2) دالة الكثافة الاسية (exponential density)

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

حيث $\lambda > 0$.

(3) دالة الكثافة الاسية ذات الجانبين (Two-sided exponential density)

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$$

(4) دالة الكثافة الطبيعية (normal density)

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

1.2.12 ملاحظة

سنختصر $\{\omega: X(\omega) \in B\} \rightarrow \{X \in B\}$ ، لاحظ ان هذه المجموعة تمثل $X^{-1}(B)$ الصورة العكسية للمجموعة $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ تحت تأثير المتغير العشوائي X .

بالمثل سنختصر $\{\omega: a < X(\omega) \leq b\} \rightarrow \{a < X \leq b\}$.

1.2.13 تعريف

المتجه العشوائي ذو البعد n (n -dimensional random vector) على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ هو تطبيق قابل للقياس بوريلىا من Ω الى $\mathbb{R}^n$.

1.2.14 قضية

اذا كان $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ وان $X_i = p_i \circ X$ ، حيث p_i هو دالة الاستقاط من $\mathbb{R}^n$ على الفضاء الاحداثي ذي الدليل i ، فان X قابل للقياس بوريلىا اذا وفقط اذا كان X_i قابل لقياس بوريلىا لكل i .

وعليه يمكن ان نعتبر المتجه العشوائي هو النوني المرتب $(X_1, \dots, X_n)$ من المتغيرات العشوائية.

1.2.15 تعريف

(a) لتكن $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. نقول بان $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة (independent random variables) اذا كان لكل $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ يكون لدينا

$$\mathbb{P}\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in B_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n \in B_n\}$$

ان الفارزة في التعبير $\mathbb{P}\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\}$ تعني "و". وعليه

$$\mathbb{P}\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{(X_1 \in B_1) \cap \dots \cap (X_n \in B_n)\}$$

(b) يقال عن مغير عشوائي X و حقل متكامل $\mathcal{F}$ بانهما مستقلان اذا كان

$$\mathbb{P}\{(X \in A) \cap B\} = \mathbb{P}\{(X \in A)\}\mathbb{P}(B)$$

حيث ان A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية وان $B \in \mathcal{F}$.

1.2.16 ملاحظات

- (a) اذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فذلك تكون $X_1, \dots, X_k$ لكل $k < n$.
- (b) ان استقلالية المتغيرات العشوائية الموسعة يمكن ان تعرف كما في التعريف 2.1.15 مع استبدال الحقل المتكامل $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ بالحقل المتكامل $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. بالحقيقة، افترض ان

$$X_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$$

دالة عشوائية لكل $i = 1, 2, \dots, n$ ، حيث Ω_i اي مجموعة اعتباطية وان $\mathcal{F}_i$ حقل متكامل على Ω_i . فيقال ان $X_1, \dots, X_n$ دوال عشوائية مستقلة اذا كان

$$\mathbb{P}\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in B_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n \in B_n\}$$

لكل $B_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}_n$.

- (c) لتكن $\{X_i: i \in I\}$ عائلة من الدوال العشوائية حيث I مجموعة اعتباطية. يقال ان $\{X_i: i \in I\}$ اذا كانت اي عائلة جزئية منتهية $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_n}\}$ مستقلة.

1.2.17 مبرهنة

لتكن $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. لتكن F_i دالة توزيع المتغير العشوائي X_i لكل $i = 1, 2, \dots, n$ و لتكن F دالة توزيع المتجه العشوائي $X = (X_1, \dots, X_n)$. فتكون المتغيرات العشوائية $X_1, \dots, X_n$ مستقلة اذا وفقط اذا كان

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

1.3 التوقع الرياضي Mathematical Expectation

اذا كان X متغير عشوائي بسيط على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، ياخذ القيم $x_1, \dots, x_n$ مع الاحتمالات $p_1, \dots, p_n$. اذا اعيدت تجربة عشوائي بشكل مستقل N من المرات، حيث ان N عدد كبير جدا، سيأخذ المتغير العشوائي X القيمة x_i ما يقارب $N p_i$ من المرات، لذلك سيكون الوسط الحسابي لقيم X في N من المشاهدات

$$\frac{1}{N} [N_{p_1} x_1 + N_{p_2} x_2 + \dots + N_{p_n} x_n] = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

تقريباً. هذا شكل معقول للقيمة المتوسطة للمتغير العشوائي X . إذا كان X يمثل على النحو $\sum_{i=1}^n p_i I_{B_i}$ ، حيث أن B_i مجموعات منفصلة في الحقل المتكامل $\mathcal{F}$ ، فيمكن أن نمثل القيمة المتوسطة على النحو $\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(B_i)$ ، التي هي $\int_{\Omega} X d\mathbb{P}$.

1.3.1 تعريف

(a) إذا كان X متغير عشوائي مستمر على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فإن توقع (expectation) المتغير العشوائي X يعرف على النحو

$$E(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

بشرط أن التكامل موجود. لذلك يقال أن X قابل للتكامل إذا كان $E(X) < \infty$.

(b) إذا كان X متغير عشوائي مستمر على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فإن توقع (expectation) المتغير العشوائي X يعرف على النحو

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

بشرط أن المجموع موجود.

(c) إن تباين (variance) المتغير العشوائي X يعرف على النحو

$$Var(X) := E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1.3.2 مبرهنة

لتكن $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. إذا كان $X_i > 0$ لكل i أو $E(X_i) < \infty$ لكل i ، فإن $E(X_1, \dots, X_n)$ موجود ويساوي $E(X_1) \dots E(X_n)$.

1.3.3 تعريف

ليكن X و Y متغيران عشوائيان بتوقع منتهي، ونفترض كذلك إن $E(XY)$ منتهي أيضا (بصورة خاصة، إذا كان X و Y يمتلكان عزم ثاني منتهي، فحسب متراجحة كوشي-شوارتز يكون $E(XY)$ منتهي أيضا) فإن التباين المشترك (covariance) للمتغيرين العشوائيين X و Y يعرف على النحو

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

1.3.4 ملاحظة

إذا كان المتغيران العشوائيان مستقلان، فإن $Cov(X, Y) = 0$ لكن العكس ليس صحيحا دائما (تأمل $X = \cos \theta$, $Y = \sin \theta$ حيث θ هي التوزيع المنتظم بين 0 و 2π).

1.3.5 مبرهنة

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية حيث $E(X_i) < \infty$ لكل $i = 1, \dots, n$ وان $E(X_i X_j) < \infty$ لكل i, j وان $i \neq j$ ، فإن

$$Var(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n Cov(X_i, X_j)$$

وعليه إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة عن بعضها البعض فإن $Cov(X_i, X_j) = 0$ لكل $i \neq j$ ، وبالنتيجة يكون لدينا

$$Var(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

1.4 التوقع الشرطي Conditional Expectation

سنأمل الآن التوقع الشرطي. ليكن X و Y متغيران عشوائيان على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، نسال عن إمكانية تعريف التوقع للمتغير العشوائي Y إذا كان $X = x$ معطى، يكتب $E(Y/X = x)$.

بشكل حدسي، ان $E(Y/X = x)$ يَجِبُ أَنْ يَعْكَسَ المدى البعيد للقيمة المتوسطة للمتغير العشوائي Y في متتابعة من التجارب المستقلة عندما ننظر فقط الى المشاهدات التي تحدث فيها الحادثة $\{X = x\}$. إذا كان X و Y متغيران عشوائيان متقطعان واعطينا $X = x$ ، فان الاحتمال الشرطي لحادثة متضمنة Y محكوم بمجموعة الاحتمالات الشرطية $p(y/x) = \mathbb{P}\{Y = y/X = x\}$. اذن الشكل المعقول للتوقع الشرطي $E(Y/X = x)$ هو $\sum_y y p(y/x)$ بالمثل، إذا كان (X, Y) مستمر بشكل مطلق، وان $h = h(y/x)$ هو الكثافة الشرطية للمتغير Y عند وقوع $X = x$ ، سيكون $E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y/x) dy$. ما نريده هو الحصول على إطار عام يتضمن الحالات الخاصة. ليكن Y متغير عشوائي (او متغير عشوائي موسع) على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، وليكن $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ دالة عشوائية. ان تعريفنا العام للاحتمال الشرطي مفصل على نسخة مبرهنة الاحتمال الكلي:

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap B) = \int_A \mathbb{P}(B/X = x) d\mathbb{P}_x(x)$$

توجد عبارة لها ارتباط وثيق بـ "مبرهنة التوقع الكلي" يمكن أن تطور حدسيا كالاتي. إن احتمالية وقوع المتغير X بالقرب من x هي $d\mathbb{P}_x(x)$ ، اذا اعطي $X = x$ ، فان معدل قيمة Y التي نبحث عنها، التي هي $E(Y/X = x)$ من المعقول ان نامل بان التوقع الكلي يمكن إيجاده بإضافة كل الاسهامات:

$$E(Y) = \int_{\Omega'} E(Y/X = x) d\mathbb{P}_x(x)$$

لتطوير هذه الإضافة، نستبدل Y بـ $YI_{\{X \in A\}}$ ، حيث $A \in \mathcal{F}'$. اذا كان $x \in A$ ، فنتوقع ان

$$E(YI_{\{X \in A\}}/X = x) = E(Y/X = x)$$

لان $X(\omega) = x \in A$ يؤدي إلى ان $I_{\{X \in A\}}(\omega) = 1$. إذا كان $x \notin A$ فنتوقع ان

$$E(YI_{\{X \in A\}}/X = x) = 0$$

باستبدال Y بـ $YI_{\{X \in A\}}$ في أعلاه نجد ان

$$E(YI_{\{X \in A\}}) = \int_{\Omega'} E(YI_{\{X \in A\}}/X = x) d\mathbb{P}_x(x)$$

أو

$$\int_{\{X \in A\}} Y d\mathbb{P} = \int_A E(Y/X = x) d\mathbb{P}_x(x)$$

بالحقيقة ، إن هذا المتطلب أساسي في تحديد $E(Y/X = x)$.

1.4.1 مبرهنة

ليكن Y متغير عشوائي موسع على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، وليكن $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ دالة عشوائية. إذا كان $E(Y)$ موجود، فتوجد دالة $g: (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ بحيث لكل $A \in \mathcal{F}'$

$$\int_{\{X \in A\}} Y d\mathbb{P} = \int_A g(x) d\mathbb{P}_x(x)$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت h دالة أخرى بنفس المواصفات، فإن $g = h$ تقريبا بالنسبة إلى $\mathbb{P}_x(x)$.

1.4.2 نتيجة

إذا كان X دالة عشوائية على $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ وان $B \in \mathcal{F}$ ، فإن

$$E(I_B/X = x) = \mathbb{P}(B/X = x)$$

تقريبا بالنسبة إلى $\mathbb{P}_x(x)$.

دعنا نقارن التعريف العام مع المفهوم الحدسي في حالات خاصة.

1.4.3 أمثلة

(a) ليكن X متغيرا عشوائيا يأخذ قيم معدودة $x_1, x_2, \dots$ فقط (افترض ان $\mathbb{P}\{X = x_i\} > 0$)

(. فإن

$$\mathbb{P}(B / X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \{X = x_i\})}{\mathbb{P}\{X = x_i\}}, B \in \mathcal{F}$$

وعليه يجب أن نتوقع إن

$$E(I_B / X = x_i) = \frac{1}{\mathbb{P}\{X = x_i\}} \int_{\{X=x_i\}} I_B d\mathbb{P}$$

الإجراء من الدوال المميزة إلى الدوال البسيطة غير السالبة إلى الدوال القابلة للقياس غير السالبة إلى دوال قابلة للقياس لا على التعيين، يجعلنا نعتقد انه إذا كان $E(Y)$ موجود، فإن

$$E(Y / X = x_i) = \frac{1}{\mathbb{P}\{X=x_i\}} \int_{\{X=x_i\}} Y d\mathbb{P}, i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

في حالة خاصة عندما يكون Y متغير عشوائي متقطع، فإن (1) تفترض إن تكون أبسط صيغة. إذا كان Y يأخذ القيم $y_1, y_2, \dots$ نجد إن (باستخدام خاصية الجمع المعداد للتكامل)

$$\begin{aligned} E(Y / X = x_i) &= \sum_i y_i \frac{\mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_i\}}{\mathbb{P}\{X = x_i\}} \\ &= \sum_i y_i \mathbb{P}\{Y = y_i / X = x_i\} \end{aligned} \quad (2)$$

(b) لتكن $B \in \mathcal{F}$ ، وافترض ان $\mathbb{P}(B) > 0$. اذا كان $E(Y)$ موجود، نعرف التوقع الشرطي (conditional expectation) للمتغير Y عند وقوع B ، كالآتي. ليكن $X = I_B$ وضع $E(Y/B) = E(Y/X = 1)$. ان هذه حالة خاصة من (a)، نجد ان

$$E(Y/B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B Y d\mathbb{P}$$

بكلام آخر،

$$E(Y/B) = \frac{E(YI_B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (3)$$

الفصل الثاني

التكاملات التصادفية

2.1 مقدمة:

سندرس التكاملات من الصيغة $\int_a^t f(s, \omega) ds$ و الصيغة $\int_a^t g(s, \omega) dB(s, \omega)$ ، حيث ان f و g عمليتين تصادفيتين على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. اذا كان f و g تحققان شروط مناسبة وهما عمليتان تصادفيتان في فضاء هلبرت H_{SP} ، فان التكاملات يكونان عمليتين تصادفيتين في فضاء هلبرت هذا. سنوضح خواص هذه التكاملات في البنود اللاحقة عندما ننقاش المعادلات التفاضلية التصادفية. نكتب المعادلات التفاضلية التصادفية بصيغة التكاملات التصادفية، التكاملات التصادفية اساسية في دراسة المعادلات التفاضلية التصادفية. سنفترض في هذا البحث ان التكاملات هي عناصر من فضاء هلبرت H_{SP} . ان هذه الفرضية هي جسر تربط المعادلات التفاضلية التصادفية و التكاملات التصادفية.

نعرف اولا التكاملان $J(f) = J(f)(\omega) \equiv \int_a^b f(s, \omega) ds$ و $J(f)(t) = J(f)(t, \omega) \equiv \int_a^t f(s, \omega) ds$ ، حيث $a \leq t \leq b$ ان هذه التكاملات هي تطبيقات من فضاءات هلبرت H_{SP} الى H_{RV} او من H_{SP} الى H_{SP} على التوالي. هذا يعني انه بالنسبة الى $f \in H_{SP}$ ، التكامل الاول هو متغير عشوائي في H_{RV} بينما في التكامل الثاني يكون عملية تصادفية في H_{SP} .

سنفترض في هذا البند ثلاثة شروط على العملية التصادفية f بالاضافة الى كون $f \in H_{SP}$

الشرط (c1): $f(a) \in H_{RV}$. ان $\|f(a)\|_{RV}^2 = E|f(a)|^2 \leq k_1, k_1 > 0$.

الشرط (c2): $\|f(t_1) - f(t_2)\|_{RV}^2 = E|f(t_1) - f(t_2)|^2 \leq k_2|t_1 - t_2|$ لأي $t_1, t_2 \in [a, b], k_2 > 0$

الشرط (c3): f ليست متزايدة على $[a, b]$. هذا يعني ان $f(t, \omega)$ لاتعتمد على الزمن t' حيث $t' > t''$.

تعريف 2.1.1 [8]

لتكن $f_m(t, \omega) := \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)$ ، حيث $f_i^{(m)} \in H_{RV}$ لكل i و m متتابعة من دوال الخطوة في S_{SP} . ان التكامل $\int_a^b f_m(s) ds$ يرمز بـ $J(f_m)$ ويعرف على النحو

$$J(f_m) = \int_a^b f_m(s) ds := \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i).$$

ملاحظة 2.1.2 [8] :

$$J(f_m) \in H_{RV} \quad (i)$$

$$\{J(f_m)\}_{m=1}^{\infty} \text{ متتابة كوشي في } H_{RV}. \quad (ii)$$

تعريف 2.1.3 [8]:

لتكن $f \in H_{SP}$ وان $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ متتابة في S_{SP} بحيث ان

$$\|f_m - f\|_{SP} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow \infty,$$

فان التكامل $\int_a^b f(s) ds$ يرمز له بالرمز $J(f)$ ويعرف على النحو

$$J(f) = \int_a^b f(s) ds := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(s) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i).$$

بشكل مماثل يمكننا ان نعرف التكاملات من الصيغة

$$J(f) = J(f)(t, \omega) \equiv \int_a^t f(s, \omega) ds, \quad a < t < b$$

حيث ان $f \in H_{SP}$. بالرغم من ذلك، هذا التكامل ينقل عملية تصادفية في H_{SP} الى عملية تصادفية اخرى في H_{SP} . وللاختصار

$$I(f) = I(f)(\omega) \equiv \int_a^b f(s, \omega) dB(s, \omega) \quad \text{و}$$

$$I(f)(t) = I(f)(t, \omega) \equiv \int_a^t f(s, \omega) dB(s, \omega) \quad \text{حيث } a \leq t \leq b.$$

هذان التكاملان هما تطبيقان من فضاء هيلبرت H_{SP} الى H_{RV} او H_{SP} الى H_{SP} على التوالي. هذا يعني، اذا كان $f \in H_{SP}$ فان التكامل الاول هو متغير عشوائي في H_{RV} بينما التكامل الثاني هو عملية تصادفية في H_{SP} . لنفترض ان $f \in H_{SP}$ تحقق الشروط (c1)، (c2) و (c3).

تعريف 2.1.4 (تكاملات ايتو التصادفية) [8]:

لتكن $f \in H_{SP}$ تحقق الشروط (c1)، (c2) و (c3). ان التكامل $\int_a^b f(t) dB(t)$ يعرف على النحو

$$I(f) := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(t) dB(t)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}) (B(t_{i+1}^{(m)}) - B(t_i^{(m)}))$$

حيث $t_i^{(m)} := a + i \left(\frac{b-a}{m} \right)$ و التقارب في الفضاء H_{RV} .

تعريف 2.1.5 (تكاملات إيتو التصادفية) $(\int_a^t f(s) dB(s))$

ليكن $f \in H_{SP}$ يحقق الشروط (c1)-(c3). فان التكامل $\int_a^t f(s) dB(s)$ يعرف على النحو

$$I(f)(t) := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(t) dB(t)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i^{(m)}) (B(t_{i+1}^{(m)}) - B(t_i^{(m)}))$$

حيث ان $t_i^{(m)} := a + i \left(\frac{t-a}{m} \right)$ و يتقارب في الفضاء H_{RV} .

ملاحظة 2.1.6 [8]

ان تكامل إيتو I هو تطبيق من فضاء هلبرت H_{SP} الى H_{SP} ، هذا يعني $I: H_{SP} \rightarrow H_{SP}$

مبرهنة 2.1.7 [8]

لأي $f, g \in H_{SP}$ و لأي ثابت c يكون لدينا

$$I(f + g) = I(f) + I(g); (a)$$

$$I(cf) = cI(f); (b)$$

$$E(I(f)) = 0; (c)$$

$$E|I(f)|^2 = \int_a^b E|f(t)|^2 dt. (d)$$

2.2. المعادلات التفاضلية التصادفية و صيغة إيتو:

سنأمل في هذا البند العملية التصادفية الآتية

$$X(t) = X(a) + \int_a^t f(s) ds + \int_a^t g(s) dB(s), \text{ for } a \leq t \leq b \quad (2)$$

حيث ان $f, g \in H_{SP}, X(a) \in H_{RV}$ و ان f, g يحققان الشروط (c1)-(c3).

ملاحظة 2.2.1 [8]:

(a) بما ان $\int_a^t f(s) ds \in H_{SP}$ و ان $\int_a^t g(s) dB(s) \in H_{SP}$ ، ان $X \in H_{SP}$

(b) اذا كانت f (او g) تحقق الشروط (c1)-(c3)، فان

$$\|f(t)\|_{RV} \leq \|f(t) - f(a)\|_{RV} + \|f(a)\|_{RV} \leq k_2^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}} + \|f(a)\|_{RV}$$

حيث ان $a \leq t \leq b$.

$$E|f^2(t)| \leq 2k_2(b-a) + \|f(a)\|_{RV}^2, \leq t \leq b$$

لذلك

(c) $X(t)$ عملية تصادفية مستمرة في H_{RV} ، $a \leq t \leq b$.

(d) مسارات عينة مستمرة بالاحتمالية على $[a, b]$. هذا يعني

$$\mathbb{P}(|X(t_2) - X(t_1)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } |t_2 - t_1| \rightarrow 0.$$

تعريف 2.2.2 [8]:

اذا كان X يحقق (3)، يقال ان X يحقق المعادلة التفاضلية التصادفية

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dB(t) \text{ for } a \leq t \leq b. \quad (3)$$

الان، من اجل كتابة نص صيغة ايتو نحتاج الشرطين الاتيين:

الشرط (c4): للدالة $G: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، يوجد ثابت غير سالب k_3 بحيث ان لاي $t_1, t_2 \in [a, b]$ و لاي $X \in H_{SP}$ فان

$$E|G(t_2, X(t_2)) - G(t_1, X(t_1))|^2 \leq k_3(|t_2 - t_1| + E|X(t_2) - X(t_1)|^2).$$

الشرط (c5): للدالة $G: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، اذا كان $X(a) \in H_{RV}$ فان $G(a, X(a)) \in H_{RV}$.

مبرهنة 2.2.3 (صيغة ايتو) [8]:

ليكن $X \in H_{SP}$ يحقق (3) لكل $t \in [a, b]$ ، حيث ان f و ان g يحققان (c1)-(c3) و ان $\|f^2(t)\|_{RV}, \|g^2(t)\|_{RV} \leq k_4$ لكل $t \in [a, b]$. لتكن F دالة بالمتغيرين t و x . افترض ان $F(t, x)$ تمتلك المشتقات المستمرة

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x \partial t}, \quad t \in [a, b], \quad x \in \mathbb{R}$$

وان الدالة F و تلك المشتقات تحقق الشرطين (c4) و (c5). افترض ايضا ان الدوال

$$f(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, g(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{1}{2} g^2(t) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}$$

تحقق الشرطين (c4) و (c5).

ليكن

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + f(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad \tilde{g}(t, x) = g(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}.$$

فان F تحقق المعادلة التفاضلية التصادفية

$$dF(t, X(t)) = \tilde{f}(t, X(t))dt + \tilde{g}(t, X(t))dB(t). \quad (4)$$

مثال 2.2.4 (تبسيط تكامل ايتو) [8]:

تأمل التكامل التصادفي $\int_0^t s dB(s)$. ليكن $dX(t) = dB(t)$ لذلك $g = 1$ و $f = 0$. ليكن $F(t, x) = tx$. باستخدام صيغة ايتو ،

$$\int_0^t d(sB(s)) = \int_0^t B(s)ds + \int_0^t s dB(s).$$

اذن

$$\int_0^t s dB(s) = tB(t) - \int_0^t B(s)ds.$$

مثال 2.2.5 (ايجاد تكامل ايتو) [8]

تأمل التكامل التصادفي $\int_0^t B(s)dB(s)$. ليكن $dX(t) = dB(t)$ لذلك $g = 1$ و $f = 0$. ليكن $F(t, x) = \frac{1}{2}x^2$. حسب صيغة ايتو

$$\int_0^t d(\frac{1}{2}B^2(s)) = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B(s)dB(s).$$

اذن

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}(B^2(t) - B^2(0)) - \frac{t}{2}.$$

مثال 2.2.6 (تبسيط التكاملات التصادفية الثنائية)

ليكن $dX(t) = B(t)dt$ و $X(0) = 0$. فان $f = B$ و $g = 0$. لتكن $F(t, x) = tx$. باستخدام صيغة ايتو،

$$d(tX(t)) = (X(t) + tB(t))dt$$

لذلك،

$$tX(t) = \int_0^t X(s)ds + \int_0^t sB(s)ds.$$

لكن $X(t) = \int_0^t B(s)ds$. لذلك ، استخدم مثال 4.4،

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s B(z)dzds &= t \int_0^t B(s)ds - \int_0^t sB(s)ds \\ &= (t+1) \int_0^t B(s)ds - tB(t). \end{aligned}$$

مثال 2.2.7 (التراكم الثابت constant drift)

تأمل المعادلة التفاضلية التصادفية

$$dX(s) = \mu ds + \sigma dB(s), \quad X(0) = x_0$$

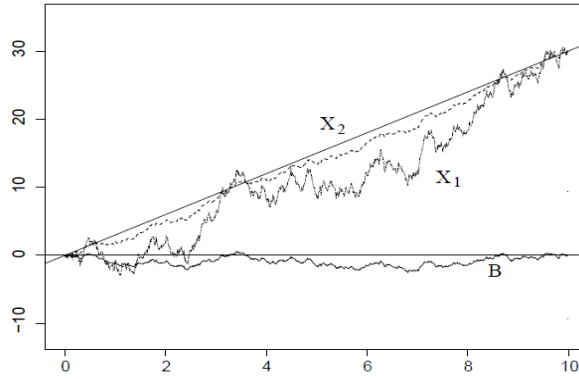
هذا يعني ان التراكم يكون ثابت ، $\mu = f(x)$. حل المعادلة التفاضلية التصادفية هو العملية التصادفية

$$X(t) = x_0 + \mu t + \sigma B(t)$$

والذي يمكن ان نحصل عليه بكتابة المعادلة في صيغة تكامل ايتو. لاحظ انه في هذه الحالة نحصل على تعبير مهم لتزايد X :

$$X(t+h) - X(t) = h\mu + \sigma(B(t+h) - B(t)).$$

في الشكل 2 نرسم على البيان نفسه مساراً للتراكم الثابت للمعادلة التفاضلية التصادفية مع $\mu = 3$ ، $\sigma = 4$ (المسار X_1) ومسار اخر لـ $\mu = 3$ ، $\sigma = 1$ (المسار X_2)، نرسم الحركة البروانية B التي تحدد المسارين على البيان نفسه .



الشكل 2: مسارات الحل للمعادلة التفاضلية التصادفية المعطاة. المسار الاول X_1 ، يقابل المعلمات المختارة $\mu = 3$ ، $\sigma = 4$ ، المسار الثاني X_2 ، يقابل $\mu = 3$ ، $\sigma = 1$. كلا المسارين محددان بالحركة البروانية B . كذلك يتضمن متوسط الحلول، $E[X(t)] = \mu t$ (الخط المستقيم).

مبرهنة 4.8 (التكامل بالتجزئة) [59]:

نفرض ان $f(s, \omega)$ مستمرة و مقيدة التغيرات بالنسبة الى $s \in [0, t]$ ، لكل ω تقريباً. فان

$$\int_0^t f(s) dB(s) = f(s)B(s) - \int_0^t B(s) df(s).$$

صيغة ايتو متعددة البعد 4.9 [59]:

ليكن

$$B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), \dots, B_m(t, \omega))$$

يرمز للحركة البروانية ذات البعد m . اذا كان كل من العمليتين $u_i(t, \omega)$ و $v_{ij}(t, \omega)$ يحققان الشروط المعطاة في تعريف () لكل $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ فيمكن ان نكون n من عمليات ايتو الاتية

$$\begin{aligned} dX_1 &= u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_m \\ &\vdots \\ dX_n &= u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_m \end{aligned}$$

او بصيغة المصفوفات

$$dX(t) = udt + vdB(t),$$

حيث ان

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}, dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}.$$

تسمى العملية $X(t)$ عملية ايتو ذات البعد n .

مبرهنة 4.10 (صيغة ايتو العامة) [59]:

ليكن $dX(t) = udt + vdB(t)$ عملية ايتو ذات البعد n كما مر اعلاه . ليكن

$$F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_p(t, x))$$

تطبيق من الصنف C^2 من $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ الى $\mathbb{R}^p$. فان العملية $Y(t) = F(t, X(t))$ هي احدى عمليات ايتو، مركبتها الـ k ، Y_k ، تعطى على النحو

$$dY_k = \frac{\partial F_k(t, X)}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F_k(t, X)}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F_k(t, X)}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j$$

$$\text{حيث } dB_i dB_j = \delta_{ij} dt, dB_i dt = dt dB_i = 0$$

بجانب تكامل ايتو التصادفي، التكامل التصادفي الاكثر شيوعاً هو تكامل "ستراتونوفيك" (Stratonovich integral).

تعريف 4.11 (تكامل ستراتونوفيك) [59]:

تكامل ستراتونوفيك يعرف كالاتي

$$\int_a^b f(t) \circ dB(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (f(t_i^{(m)}) + f(t_{i+1}^{(m)})) (B(t_{i+1}^{(m)}) - B(t_i^{(m)}))$$

حيث ان الرمز "o" يشير الى ان التكامل هو تكامل ستراتونوفيك.

ملاحظة 4.12 [59]

في المجموع $\frac{1}{2} (f(t_i^{(m)}) + f(t_{i+1}^{(m)}))$ و $(B(t_{i+1}^{(m)}) - B(t_i^{(m)}))$ غير محتمل ان يكونان مستقلين. بالنتيجة ، ان تكاملي ايتو و ستراتونوفيك على الاغلب لهما قيميتين مختلفتين. تأمل، على سبيل المثال، التكاملان

$$\int_0^t B(s) dB(s) \text{ and } \int_0^t B(s) \circ dB(s).$$

حسب مثال 4.5 ، نعلم ان قيمة تكامل ايتو هي

$$\int_0^t B(s) dB(s) = \frac{1}{2} (B^2(t) - B^2(0)) - \frac{t}{2}.$$

الان تأمل تكامل ستراتونوفيك. حسب تعريف تكامل ستراتونوفيك اعلاه

$$\begin{aligned} \int_0^t B(s) \circ dB(s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (B(t_{i+1}^{(m)}) + B(t_i^{(m)})) (B(t_{i+1}^{(m)}) - B(t_i^{(m)})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (B^2(t_{i+1}^{(m)}) - B^2(t_i^{(m)})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (B^2(t) - B^2(0)) \\ &= \frac{1}{2} (B^2(t) - B^2(0)). \end{aligned}$$

اذن لهذا التكامل التصادفي

$$\int_0^t B(s) dB(s) - \int_0^t B(s) \circ dB(s) = -\frac{t}{2}.$$

2.3. المعادلات التفاضلية التصادفية وحلولها:

ان معادلة ايتو التفاضلية التصادفية على الفترة $[0, T]$ لها الصيغة

$$\frac{dX(t, \omega)}{dt} = f(t, X(t, \omega)) + g(t, X(t, \omega))W(t), f(t, x), g(t, x) \in \mathbb{R} \quad (5)$$

حيث $W(t)$ "ضوضاء خفيفة" (white noise) ذات بعد 1. اندراج ايتو للمعادلة (5) هو العملية التصادفية $X(t, \omega)$ التي تحقق التكامل التصادفي

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t f(s, X(s, \omega)) ds + \int_0^t g(s, X(s, \omega)) dB(s, \omega) \quad (6)$$

لكل $t \in [0, T]$ و $X(0, \cdot) \in H_{RV}$ او بالصيغة التفاضلية

$$dX(t, \omega) = f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dB(t, \omega) \quad (7)$$

لكل $t \in [0, T]$ و $X(0, \cdot) \in H_{RV}$. لذلك، للوصول من (5) الى (7) نستبدل $W(t)$ بـ

$$\frac{dB(t, \omega)}{dt} \text{ في (5) و نضرب بـ } (dt).$$

ان الدالة f عادة ماتسمى معامل التراكم للمعادلة التفاضلية التصادفية بينما g تشير الى معامل الانتشار. يفترض ان الدالتين f و g غير متناقصتين و تحققان الشرطين (c6) و (c7) ادناه لبعض $k \geq 0$.

الشرط (c6):

$$|f(t, x) - f(s, y)|^2 \leq k(|t - s| + |x - y|^2), \quad 0 \leq t, s \leq T, x, y \in \mathbb{R}.$$

الشرط (c7):

$$|f(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}.$$

ملاحظة 5.1 [59]:

افترض ان f و g دالتين تحققان الشرطين (c6) و (c7). فان

(a) ليكن $u(t) := f(t, X(t, \omega))$. اذا كان $X(t, \omega) \in H_{SP}$ ، فحسب الشرط (c7) يكون

لدينا $u(t) \in H_{SP}$. الشيء نفسه يتحقق بالنسبة الى الدالة g .

(b) ليكن $t_1 \in [0, T]$ و $\varepsilon > 0$ ، فان

$$\|f(t_1, X) - f(t_1, Y)\|_{SP} < \varepsilon \text{ عندما } \|X - Y\|_{SP} < \delta := \varepsilon/k^{1/2}.$$

(c) ليكن $X \in H_{SP}$ و $\varepsilon > 0$ ، فان

$$\|f(t_1, X) - f(t_2, X)\|_{SP} < \varepsilon \text{ عندما } |t_1 - t_2| < \delta := \varepsilon/kT.$$

وعليه يكون الشرطان (c6) و (c7) ملائمين في تطبيق صيغة ايتو عندما $X \in H_{SP}$.

مبرهنة 5.2 (مبرهنة الوجود و الوجدانية للمعادلات التفاضلية التصادفية) [59]:

ليكن $T > 0$ و ان

$$b(\cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \sigma(\cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

دالتين قابلتين للقياس تحققان

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (8)$$

لبعض الثوابت C ، (حيث $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) بحيث ان

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (9)$$

لبعض الثوابت D . ليكن Z متغير عشوائي الذي يكون مستقل عن الحقل المتكامل $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ المتولد

بواسطة $B_s(\cdot), s \geq 0$ ، بحيث ان $E[|Z|^2] < \infty$. فان المعادلة التفاضلية التصادفية

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, t \in [0, T], X_0 = Z \quad (10)$$

لها حل و حيد $X_t(\omega)$ مستمر في t يحقق الخاصية $X_t(\omega)$ متوافق مع التصفية $\mathcal{F}_t^Z$ المتولدة بواسطة

Z و ان $B_s(\cdot); s \leq t$ و

$$E \left[\int_0^T |X_t|^2 \right] < \infty \quad (11)$$

الفصل الثالث

النمذجة التصادفية في بعض المسائل الطبية

Stochastic Modeling with Applications

النظم الديناميكية العشوائية (Random dynamical systems) وتكتب للاختصار RDS لها تطبيقات واسعة في مختلف حقول المعرفة. ان الهدف من هذا الفصل هو بيان كيفية نمذجة الظواهر التصادفية وتقديم بعض التطبيقات في علوم الحياة و الطب.

سندرس هنا الظواهر التي تكون قيمها معلومة في الوقت الحاضر لكنها تتغير في المستقبل. على سبيل المثال:

- (i) عدد الخلايا السرطانية،
- (ii) عدد الافراد المصابين بمرض العوز المناعي المكتسب HIV.

3.1 النموذج الرياضي (Mathematical Model):

افترض ان عند زمن t الكمية التي تكون محل الاهتمام هي $x(t)$. لننامل فترات زمنية قصيرة dt خلالها تتغير الكمية $x(t)$ الى $x(t) + dx(t)$. نستخدم الترميز dt للتغير الصغير في اي كمية واقعة في هذه الفترة نفترض ان تكون ذات تغيير صغيرة جدا).

حسب التعريف يكون نسبة النمو الاصلي عند t هو $dx(t)/x(t)$. كيف يمكننا نمذجة هذا النسبة؟ اذا كان $x(t)$ معطى عند الزمن t ، نسبة التغير حتمي (deterministic)، وليكن $R := R(x(t), t)$ ، فان

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = R(x(t), t)dt. \quad (1)$$

هذه تعطي المعادلة التفاضلية الاعتيادية الحتمية

$$\frac{dx(t)}{dt} = R(x(t), t)x(t) \quad (2)$$

على اية حال، نسبة التغير بشكل عام يكون غير حتمي كما في الاجيال المتعاقبة للعديد من التساؤلات و الشكوك، على سبيل المثال النظم غير المؤكدة المتعلقة بالتوزيع البيئي. لنمذجة هذه الشكوك، نركب

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \text{التغير العشوائي} + \text{التغير الحتمي} \quad (3)$$

يمكن نمذجة التغير الحتمي على النحو

$$\bar{R}dt := \bar{R}(x(t), t)dt \quad (4)$$

حيث ان $\bar{R} := \bar{r}(x(t); t)$ نسبة معدل التغير المعطى بـ $x(t)$ في الزمن t . لذلك

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \bar{R}(x(t), t)dt + \text{التغير العشوائي} \quad (5)$$

كيف يمكننا نمذجة التغير العشوائي؟

على اية حال، التغير العشوائي يتم الحصول عليه من خلال العديد من القضا المستقلة. حسب مبرهنة الغاية المركزية المعروفة يمكن ان يمثل هذا التغير بالتوزيع الطبيعي بمتوسط صفر و تباين $V^2 dt$ ، بشكل اكثر دقة:

$$VN(0, dt) = N(0, V^2 dt) = \text{التغير العشوائي} ; \quad (6)$$

حيث $V = V(x(t); t)$ هو الانحراف المعياري لنسبة التغير لـ $x(t)$ عند الزمن t ، وان $N(0, dt)$ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر و تباين dt . اذن

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \bar{R}(x(t), t)dt + V(x(t); t)N(0, dt). \quad (7)$$

الطريقة المثلى لنمذجة $N(0, dt)$ هو اعتبارها كعملية لاستخدام الحركة البروانية (عملية وينر) $B(t)$ ($t > 0$) (انظر الفصل الثاني). يمكن كتابة النموذج التصادفي على النحو

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \bar{R}(x(t), t)dt + V(x(t); t)dB(t) \quad (8)$$

او

$$dx(t) = \bar{R}(x(t), t)x(t)dt + V(x(t); t)x(t)dB(t) \quad (9)$$

والتي تكون معادلة تفاضلية تصادفية.

3.2 مسألة [59]:

تأمل نموذج النمو البسيط

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), N(0) = N_0 \text{ (ثابت)} \quad (10)$$

حيث $N(t)$ يمثل حجم المجتمع عند الزمن t ، و $a(t)$ نسبة النمو عند الزمن t . ربما يكون $a(t)$ غير معلوم بشكل كامل، لكن معروف توزيعه العشوائي، لذلك

$$a(t) = r(t) + \text{"noise"},$$

حيث اننا لا نعلم السلوك الدقيق لحد الضوضاء، نعلم فقط توزيعه الاحتمالي. نفرض ان الدالة $r(t)$ ليست عشوائية. لحل معادلة (10) في هذه الحالة، نفترض ان

$$a(t) = r(t) + \alpha W(t), W(t) = \text{white noise}, \alpha = \text{constant}.$$

دعنا نفترض ان

$$r(t) = r = \text{constant}.$$

حسب اندراج ايتو (11) من الفصل الثاني تكون هذه المعادلة مكافئة الى (هنا $g(t, x) = \alpha x$)

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \quad (11)$$

او

$$\frac{dN_t}{N_t} = r dt + \alpha dB_t.$$

اذن

$$\int_0^t \frac{dN_t}{N_t} = rt + \alpha B_t \quad (B_0 = 0) \quad (12)$$

سنستخدم صيغة ايتو للدالة

$$g(t, x) = \ln x; x > 0$$

لايجاد قيم التكامل الذي على الطرف الايسر

$$\begin{aligned} d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t} \cdot dN_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N_t^2} \right) (dN_t)^2 \\ &= \frac{1}{N_t} \cdot dN_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N_t^2} \right) (dN_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \cdot \alpha^2 N_t^2 dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

اذن

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

لذلك من (12)

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t$$

أو

$$N_t = N_0 \exp[(r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t]. \quad (13)$$

ان اندراج ستراتونوفك للمعادلة (11)

$$d\bar{N}_t = r\bar{N}_t dt + \alpha\bar{N}_t \circ dB_t,$$

سيعطي الحل

$$\bar{N}_t = N_0 \exp(rt + \alpha B_t) \quad (14)$$

كلا الحلين N_t و $\bar{N}_t$ عملية تصادفية من النوع

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \alpha B_t) \quad (\mu, \alpha \text{ constants}).$$

ان مثل هذه العمليات تدعى حركات برونانية هندسية (*geometric Brownian motions*).

3.2 ملاحظة

إذا كان B_t مستقلة عن N_0 فان

$$E[N_t] = E[N_0]e^{rt}, \quad (15)$$

هذا يعني عدم وجود ضوضاء في a_t .

البرهان.

نفترض ان $Y_t = e^{\alpha B_t}$ و نطبق صيغة إيتو:

$$dY_t = \alpha e^{\alpha B_t} dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha B_t} dt$$

أو

$$Y_t = Y_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds.$$

بما ان $E[\int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s] = 0$ ، نحصل على

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t E[Y_s] ds$$

هذا يعني

$$\frac{d}{dt} E[Y_t] = \frac{1}{2}\alpha^2 E[Y_t], E[Y_0] = 1,$$

اذن

$$E[Y_t] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t},$$

لذلك نحصل على $E[N_t] = E[N_0]e^{rt}$

على اية حال، بالنسبة الى حل ستراتونوفيك تعطي الحسابات نفسها

$$E[\bar{N}_t] = E[N_0]e^{(r+\frac{1}{2}\alpha^2)t}.$$

3.3 مسألة (النظم التصادفية للمجتمعات (Stochastic Dynamics of Populations):

في هذه المسألة تعديل المعادلة (11) من اجل الحصول على نموذج ملائم. ليكن x يمثل طول انسان (او اي شيء اخر حجم خلية مثلا). ليكن

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \text{"noise"}, x(0) = x_0 \quad (16)$$

حيث x_0 تمثل عدد سكان مدينة عند الزمن $t = 0$ و ان F اي دالة ملائمة لكنها غير معلومة الان. بما ان الدالة الخطية $F(x) = \alpha x$ ليست ملائمة لان في هذه الحالة اذا كان $\alpha > 0$ فيصبح عدد السكان غير محدود عندما يكون الزمن غير محدود، و اذا كان $\alpha < 0$ فيصبح عدد السكان صفرا عندما يكون الزمن غير محدود. وهاتان الحالتان غير واقعتين. وعليه يجب ان نجرب تقريب اخر. افترض ان

$$F(x) = \alpha x - \beta x^n, n \geq 2.$$

نختار $\beta > 0$ من اجل تحديد نمو x كما هو مطلوب في الواقع. هنا نفترض ان " الضوضاء " تمثل نمو سكان مدينة اذا كانت هناك نزوح الى المدينة او هجرة منها. افترض ان B_1 تشير الى عملية وينر التي تمثل نزوح السكان الى المدينة و B_2 تشير الى عملية وينر التي تمثل هجرة السكان من المدينة. فان B_1 و B_2 هما عمليتي وينر مستقلتين. اذا كانت المعلمتين α و β في $\alpha x - \beta x^n, n \geq 2$ تضطرب بالضوضاء النقية للكثافتين σ_1 و σ_2 ، على التوالي، نحصل على

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\alpha x(t) - \beta x^n(t)) + \sigma_1 x(t) W_t^1 - \sigma_2 x(t) W_t^2$$

او

$$dx(t) = (\alpha x(t) - \beta x^n(t))dt + \sigma_1 x(t) \circ dB_1(t) - \sigma_2 x^n(t) \circ dB_2(t) \quad (17)$$

لاحظ ان dB_t/dt يسمى ضوضاء نقية (white noise).

لحل (17) سنستخدم التحويل $y = x^{1-n}/(1-n)$. فالمعادلة (17) تصبح

$$dy(t) = (1 - n)\alpha y(t)dt - \beta dt + (1 - n)\sigma_1 y(t) \circ dB_1(t) - \sigma_2 \circ dB_2(t) \quad (18)$$

وحلها هو

$$y(t; y_0) = e^{(1-n)(\alpha t + \sigma_1 B_1(t))} \left(y_0 + \int_0^t e^{(1-n)(\alpha s + \sigma_1 B_1(s))} (-\beta ds + \sigma_2 \circ dB_2(s)) ds \right) \quad (19)$$

يرجع التحويل بواسطة $x = [(1 - n)y]^{\frac{1}{1-n}}$ الذي يعطي التعبير الصريح الآتي للنظام الديناميكي العشوائي المحلي من النمط C^∞ للمعادلة التفاضلية التصادفية الأصلية

$$\varphi(t, \cdot)x = \frac{x e^{(\alpha t + \sigma_1 B_1(t))}}{[1 + (n-1)x^{n-1} \int_0^t e^{(n-1)(\alpha s + \sigma_1 B_1(s))} (\beta ds - \sigma_2 \circ dB_2(s)) ds]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (20)$$

وعليه النظام الديناميكي العشوائي المحلي من النمط C^∞ للمعادلة التفاضلية التصادفية

$$dx(t) = (\alpha x(t) - \beta x^n(t))dt + \sigma x(t) \circ dB(t) \quad (21)$$

يعطى بالصيغة الصريحة الآتية

$$x \mapsto \varphi_\alpha(t, \cdot)x = \frac{x e^{(\alpha t + \sigma B(t))}}{[1 + (n-1)x^{n-1} \int_0^t e^{(n-1)(\alpha s + \sigma B(s))} ds]^{\frac{1}{n-1}}} \quad (22)$$

للمزيد من التفاصيل انظر [7].

3.4 مسألة (النموذج القياسي للنمو)

ليكن $S(t)$ يمثل النمو (العشوائي) لمجتمع عند $t > 0$. النموذج القياسي يفترض أن $\frac{dS}{S}$ ، معدل التغير النسبي للنمو، يستتبط طبقا للمعادلة التفاضلية التصادفية

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dB(t)$$

حيث ان $\alpha > 0$ و σ ثابتان غير عشوائيين. يسمى α ثابت التراكم و يسمى σ ثابت القابلية بكلام اخر

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), S(0) = S_0 \quad (23)$$

حيث S_0 هو النمو الابتدائي. باستخدام صيغة ايتو نحصل على

$$\begin{aligned} d \ln S(t) &= \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2(t)}{S^2(t)} \\ &= \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t) \end{aligned}$$

بالنتيجة يكون لدينا

$$S(t) = S_0 e^{\sigma B(t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}.$$

لاحظ ان النمو موجب دائما. و بما ان (23) تؤدي الى ان

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \alpha S(s) ds + \int_0^t \sigma S(s) dB(s)$$

و ان $E[\int_0^t \sigma S(s) dB(s)] = 0$ ، نرى ان

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \alpha E[S(s)] ds$$

اذن

$$E[S(t)] = S(0)e^{\alpha t}, t > 0.$$

ان القيمة المتوقعة لنمو المجتمع تتفق مع الحل الحتمي للمعادلة (23) عندما $\sigma = 0$.

3.5 مثال

ليكن الحجم الابتدائي لمجتمع هو 40 مليون نسمة، توقع الزيادة 16% و نسبة عدم الاستقرار 20%. جد التوزيع الاحتمالي لـ $\ln S$ في ستة اشهر حيث ان S يمثل حجم المجتمع في اي زمن.

الحل. لدينا

$$\ln S(T) \sim N(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma}{2} \right) T, \sigma^2 T)$$

و عليه يكون

$$\ln S(0.5) \sim N(3.759, 0.20)$$

تذكر انه اذا كان المتغير العشوائي X يتوزع توزيعا طبيعيا بمعدل μ و تباين σ^2 ، فان دالة الكثافة الاحتمالية هي

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

اذن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $X = \ln S$ هي

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{\left(x - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

3.6 مثال

ليكن $S(t)$ يمثل حجم مجتمع، وافترض انه يمتلك تفاضل تصادفي. و ليكن نمو المجتمع هو $R(t)$ معرف بالعلاقة

$$dR(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}.$$

فاذا كان النمو غير مؤكد. كون المعادلة التفاضلية التصادفية التي تصف حجم المجتمع الحل.

$$dS(t) = S(t)dR(t) \text{ ان } dR(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}$$

بما ان النمو غير مؤكد لذلك يكون عبارة عن حاصل جمع ثابت r مع ضوضاء، اي ان

$$R(t) = r + \sigma \frac{dB(t)}{dt},$$

هذا يعني ان

$$R(t) = \Delta t \approx r\Delta t + \sigma(B(t + \Delta t) - B(t))$$

لذلك

$$dR(t) = rdt + \sigma dB(t)$$

ان حجم المجتمع $S(t)$ هو الاسية التصادفية بنمو $R(t)$ ،

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp\{R(t) - \frac{1}{2}[R, R](t)\} \\ &= S(0) \exp\{\sigma B(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}. \end{aligned}$$

المصادر

- [1] E. Allen, " Modeling with Itô Stochastic Differential Equations", Springer (2007).
- [2] L. Arnold "Random Dynamical Systems", Springer-Verlag Berlin Heidelberg Germany (1998).
- [3] L. Arnold ,Random dynamical systems, Springer, Berlin (Corrected 2nd printing)(2003).
- [4] L. Arnold ,Random Dynamical Systems:Unfolding the Dynamics of Stochastic Differential Equations, Rome, Italy ENOC 2011, 24-29 July 2011.
- [5] J.D. Murray" Mathematical Biology I. An Introduction"Third Edition 2001 Superstock.
- [6] J.D. Murray" Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications" Third Edition 2003 J.D. Murray .
- [7] M.R. Spiegel, "Applied Differential Equations", Prentice Hall Inc. Englewood Cliff, New Jersey, Third Edition(1981).
- [8] B. Øksendal, " Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 16th ed.(2003).