



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات الطبية

نماذج رياضية في النمو الاحيائي

بمقدمة مقدمة

الى جامعة القادسية/ كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات/ قسم الرياضيات
الطبية كاستكمال جزئي لنيل شهادة بكالوريوس علوم في الرياضيات الطبية

من قبل الطالبة

آسيا جبار جمعة

بإشراف

الدكتور احسان جبار كاظم

٢٠١٧م

١٤٣٨هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

هل اتى على الانسان حين من الدهر لم يكن شيئا مذكورا (١) انا

خلقنا الانسان من نطفة امشاج نبتليه فجعلناه سميعا بصيرا (٢)

صدق الله العظيم

سورة الانسان (١)-(٢)

الإهداء

الى من جرع الكاس فارغا ليسقيني قطرة حب .. الى من كلت
انامله ليقدّم لنا لحظة سعادة .. الى من حصد الاشواك عن دربي
ليمهد لي طريق العلم .. الى القلب الكبير
والذي العزيز

إلى من سهرت الليالي ، واحتضنتني ولم تبخل علي
والدتي الغالية
إلى من وقف إلى جانبي ، وتعب من أجلي
زوجي العزيز

إلى كل من مد يد العون والمساعدة ولو بحرف واحد
أهدي هذا الجهد المتواضع ...

شكر وتقدير

في مثل هذه اللحظات يتوقف العقل ليفكر قبل ان يخط الحروف ليجمعها في كلمات فتتبعثر الأحرف وعبثا ان يحاول تجميعها في سطور كثيرة تمر في الخيال ولا يبقى لنا في نهاية المطاف الا قليلا" من الذكريات وصور تجمعنا برفاق كانوا الى جانبنا فواجب علينا شكرهم ووداعهم .

أتقدم بجزيل الشكر والامتنان للدكتور (احسان جبار كاظم) على مساعدته لي من خلال اشرافه على بحثي وتزويدي بالمعرفة والعطاء لإنجاز هذا العمل .

المستخلص

تناولنا في هذا البحث مسألة مهمة في علم الاحياء و الطب وهي
مسألة النمو الاحيائي حيث درسنا هذه المسألة باستخدام نماذج
معادلات تفاضلية اعتيادية. واعطينا العديد من الامثلة لمسائل نمو
مختلفة

المقدمة

ان النمو الاحيائي من تطبيقات الرياضيات المهم في علوم الحياة و الطب. فلذلك ركزنا اهتمامنا في هذا الفصل على هذا الموضوع المهم. وتناولنا عدد من الامثلة الواقعية المرتبة بالنمو الاحياء في عدد من فروع علم الاحياء (الانسان، النباتات، والبكتريا) بالاضافة الى دراسة بعض الحالات الخاصة نظريا.

يتكون هذا البحث من فصلين.

الفصل الاول تناول هندسة المعادلات التفاضلية الاعتيادية و صور طور المعادلات و حلولها.
الفصل الثاني تناول المعادلة التفاضلية الاعتيادية التي تصف النمو الاحيائي حيث اعطينا نموذجين رئيسيين وبين ان النموذج الاول يوجه بعض المشاكل التي تجعل منه غير واقعي عندما يكون الزمن كبير بما فيه الكفاية. واعطينا بعض الامثلة الواقعية و الاشتقاقات النظرية المتعلقة بنموذج النمو القياسي المعطاة في هذا الفصل.

المحتويات

الفصل الاول: هندسة المعادلات التفاضلية ١

1.1 الحقول المتجهية Vector Fields ١

1.2 حلول المعادلات التفاضلية ٥

الفصل الثاني : النمو الاحيائي ٩

2.1 نموذج النمو الخطي ٩

2.2 نموذج النمو الغير خطي ١٠

2.3 مسائل متنوعة في النمو الاحيائي ١٤

المصادر ٣١

الفصل الاول

هندسة المعادلات التفاضلية

مقدمة

في هذا الفصل عرضنا دراسة وتصنيف تركيب المسارات في مستوي الطور للمعادلات التفاضلية بصورة عامة باستخدام اسلوب بونكاريه 'Poincare' ولهذا سنحتاج الى عرض مفهوم الحقل الاتجاهي.

1.1 الحقول المتجهية Vector Fields

تعريف 1.1.1 (الحقل الاتجاهي). لتكن U مجموعة مفتوحة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ فان اي دالة

تسمى حقلا متجهيلا يا على U . وتسمى U مستوي الطور. هنا سنتعتبر $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات. وعليه فان X تربط مع كل عنصر x في U متجها هو $X(x)$. وسنفترض في دراستنا بان مركبات الحقول المتجهية التي نتعامل معها عبارة عن دوال مستمرة هي و مشتقاتها الجزئية الاولى. لذا عندما نذكر عبارة حقلا متجهي فان صفة استمرارية الباشتقات الجزئية متحققة ضمنا الا اذا نص على خلاف ذلك.

تعريف 1.1.2 (خطوط تساوي الميل) لتكن X حقلا متجهيا معرف على المجموعة الجزئية المفتوحة U . اي ان

فان مجموعة نقاط U التي يكون فيها الحقل المتجهي ثابتا (اي ذي قيمة واحدة) تسمى خطوط تساوي الميل (isocline).

لكل قيمة k في $\mathbb{R}$ نعرف

مثال 1.1.3 تأمل المجموعة U . واضح ان مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. ولنعرف على النحو

$$), \forall (x, y) \in U.$$

اذن X حقلا متجهي على U وان

$$\text{---} \}, \mathcal{T}_0 = \{(x, 0): x > 0\}, \mathcal{T}$$

اما شكل خطوط تساوي الميل فانها تحدد من الدالة — كما في الشكل 2.1 ادناه

شكل 2.1

لتكن $(x, y) \in T_k$ ، فان $K(x, y) = kH(x, y)$ اذن $X(x, y) = H(x, y)(1, k)$. لذا فان اتجاه المتجه $X(x, y)$ يتحدد من قيمة k واسارة $H(x, y)$. ففي حالة

$$X(x, y) = (\log x, xy)$$

تكون النقاط التي تقع على يمين الخط $x = 1$ متجه نحو اليمين (اي ذات مركبة اولى موجبة) بينما تكون النقاط التي تقع على يسار الخط $x = 1$ متجه نحو اليسار (اي مركباتها الاولى سالبة) وذلك لان $\log x$ قيمة سالبة اذا كان $0 < x < 1$.

مثال 1.1.4 لتكن U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$. ولتكن $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ دالة معرفة على النحو

$$X(x, y) = (4x(y - 1), y(x + y^2)) = (H(x, y), K(x, y))$$

اذن X حقل متجهي على U . كما ان T_∞

$$T_k = \{(x, y): y(x + y^2) = 4kx(y - 1)\}$$

لذا فان

$$T_0 = \{(x, 0): y(x + y^2) = 0\} = \{(x, y): y = 0 \text{ or } y^2 = -x\}$$

$$T_{1/4} = \{(x, y): y^3 = -x\}, \quad T_\infty = \{(x, y): x = 0 \text{ or } y = 1\}.$$

لاحظ الشكل 1.2.

الشكل 1.2

وكما هو الحال في مثال 1.1.3 فان اتجاه المتجهات يمكن تحديده من اشارات مركبات الحقل المتجهي.

تعريف 1.1.5 (المنحنى) لتكن U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ و $I = (a, b)$ فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وليكن $r: I \rightarrow U$ دالة قابلة للتفاضل، فإن r تسمى منحنى في U .

مثال 1.1.6 لتكن $U = \mathbb{R}^2$ و $I = \mathbb{R}$ فترة مفتوحة. لنعرف المنحنى $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ على النحو

$$r(t) = (t^2, t^3).$$

من المناسب ان نعتبر المنحنى عبارة عن حركة نقطة عند تغير الزمن. وبذلك فان سرعة حركة النقطة في الزمن t تحسب من $\dot{r}(t) = (2t, 3t^2)$. وانه من الصعوبة بمكان ان نرسم هذه الحركة لكن من الممكن رسم مجموعة النقاط التي تمر بها النقطة المتحركة كما في الشكل 1.3

الشكل 1.3

من المهم و الافضل ان ننظر الى المنحنى على انه دالة وليس مجموعة نقاط. ومن الممكن ان يكون المنحنى املس بمعنى انه قابل للتفاضل الى مالانهاية من المرات لكن رغم ذلك ان مجموعة النقاط التي تقتفي اثرها الدالة ذات شكل مفتل اي ذي رؤوس مدببة. ولكي يمكننا تفسير المعادلات من النوع $\dot{x} = X(t, x)$ حيث يظهر t ظهورا صريحا وليس ضمنا في الجانب الايمن من المعادلة (اي $X(t, x)$) تفسيرنا معتمدا على التمثيل الهندسي فانه يجب ادخال مفهوم الحقل المتجهي المعتمد على الزمن (time-dependent vector field). وذلك باضافة محور اخر الى محاور مستوي الطور الموسع.

تعريف 1.1.7 (الحقل المتجهي المعتمد على الزمن) ليكن U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. فان الدالة (القابلة للتفاضل)

$$X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

تسمى **حقل متجهي معتمد على الزمن**. كما نعرف

$$X^*: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

على النحو $X^*(y) = (X(y), 1)$ لكل $y \in U$. وبهذا فان X^* حقل متجهي على U وان U هو مستوي الطور التابع لهذا الحقل المتجهي. كما يسمى U ميتوي الطور الموسع للحقل المتجهي X .

مثال 1.1.8 اذا كان $U = \{(x, t): t \neq 0\}$ فان U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ لنعرف $X: U \rightarrow \mathbb{R}$ على النحو $X(x, t) = x/t$. ان X حقل متجهي معتمد على الزمن. وهذا يعين الحقل المتجهي المعروف على مستوي الطور الموسع الاتي: $X^*(x, t) = (\frac{x}{t}, 1)$.

باستخدام خطوط تساوي الميل يمكننا دراسة اتجاهات هذا الحق اذ ان

$$\mathcal{T}_k = \{(x, t) \in U : X(x, t) = k\} = \{(x, t) : t = 0, x = kt\}$$

في هذا المثال تكون اتجاهات الحقل هي بامتداد خطوط تساوي الميل. لاحظ الشكل 2.4

الشكل 2.4

مثال 1.1.9 اذا كان $U = \mathbb{R}^2$ و ان $X(x, t) = ax + \cos \omega t$ ، فان الحقل المتجهي المعروف على مستوي الطور الموسع هو $X^*(x, t) = (ax + \cos \omega t, 1)$ وان خطوط تساوي الميل هي

$$\mathcal{T}_k = \{(x, t) \in U : x = (k - \cos \omega t)/a\}$$

التي تظهر في شكل 1.5

الشكل 1.5

الشيء المهم في هذا الحقل الاتجاهي هو انه دوري و دورته تساوي $2\pi/\omega$ لذا نستنتج ان الشريحة المحصورة بين $t = 0$ و $t = 2\pi/\omega$ يتكرر فيها الحقل كل $2\pi/\omega$ وحدة زمنية كما نلاحظ في الشكل 2.5.

1.2 حلول المعادلات التفاضلية

1.2.1 تعريف

(a) ليكن X حقل متجهي معرف على مجموعة مفتوحة

U في $\mathbb{R}^n$. وليكن $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى في U معرف على فترة مفتوحة I . فاذا كان

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad \forall t \in I \quad (1.1)$$

فان x يسمى حل للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$.

(b) ليكن $x_0 \in U$ عنصرا في U و $t_0 \in I$. فيسمى المنحنى x حل لمسألة القيمة الابتدائية

$$\dot{x} = X(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

إذا تحققت المعادلة (1.1) بالإضافة الى الشرط $x(t_0) = x_0$.

وعليه فان المعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x)$ هي عبارة عن علاقة بين حقل متجهي X و مجموعة من المنحنيات x في مستويات الطور التابعة لهذه المنحنيات بحيث ان هذه المنحنيات تحقق المعادلة (1.1). و بأسلوب مشابه يمكننا اعطاء تعريف الحقول الاتجاهية المعتمدة على الزمن.

1.2.2 تعريف

(a) ليكن X حقل متجهيا معتمد على الزمن معرف على مجموعة U مفتوحة في $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. وان

$x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى في $\mathbb{R}^n$ بحيث ان $(x(t), t) \in U$ لكل $t \in I$. وهذا الشرط يضمن ان

$X(x(t), t)$ يكون معرفا لكل $t \in I$. فاذا كان

$$\dot{x}(t) = X(x(t), t), \quad \forall t \in I \quad (1.3)$$

فان x يسمى حل للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x, t)$.

(a) اذا كانت النقطة $(x_0, t_0) \in U$ فان x يسمى حل

لمسألة القيمة الابتدائية

$$\dot{x}(t) = X(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

اذا كان x حل للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(x, t)$ ويحقق الشرط $x(t_0) = x_0$ فالمعادلة التفاضلية

(1.3) هي عبارة عن علاقة بين منحنيات في $\mathbb{R}^n$ وحقل متجهي معتمد على الزمن بحيث ان هذا الحقل

يحقق الشرط (1.3).

المعادلات التفاضلية المشتقة من حقول متجهية كما في تعريف (1.2.1) (اي المعادلات ذات الصيغة

$\dot{x} = X(x)$ حيث ان الزمن غير ظاهر بشكل صريح) تسمى معادلات تفاضلية مستقلة بذاتها

(Autonomous Differential Equation) و المعادلات التفاضلية ذات الصيغة $\dot{x}(t) = X(x, t)$

اي المعادلات المشتقة من التعريف (1.2.2) – الحقول المتجهية المعتمدة على الزمن (تسمى معادلات

تفاضلية غير ذاتية (Non-autonomous Differential Equation).

سنرى في الخطوة اللاحقة العلاقة بين حلول المعادلة

$$\dot{x}(t) = X(x, t)$$

و حلول المعادلة

$$\dot{y}(t) = X^*(y)$$

من التعريف (1.2.2) نرى ان حل المعادلة الاولى هو عبارة عن منحنى في $\mathbb{R}^n$ بينما من التعريف (2.2.1) نرى ان حل المعادلة الثانية هو عبارة عن منحنى في $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. الان اي نقطة y في $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ من الممكن التعبير عنها بالصيغة $y = (x, \tau)$ حيث ان x في $\mathbb{R}^n$ و τ في $\mathbb{R}$. اذن

$$X^*(y) = (X(x, \tau), 1)$$

لذا فان

$$\dot{y}(\tau) = X^*(y)$$

$$(\dot{x}, \dot{t}) = (X(x, \tau), 1) \quad (1.5)$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة (1.5) بالصيغة

$$\dot{x} = X(x, \tau), \quad \dot{t} = 1 \quad (1.6)$$

ليكن x حل لمسالة القيمة الابتدائية (1.4). فلنعرف y على النحو

$$y(t) = (x(t), t)$$

فان y حل لمسالة القيمة الابتدائية

$$\dot{y} = X^*(y), y(t_0) = (x_0, t_0) \quad (1.7)$$

وذلك لان

$$\dot{y}(t) = (\dot{x}(t), 1) = (X(x(t), t), 1) = X^*(x(t), t) = X^*(y(t))$$

بالاضافة الى

$$y(t_0) = (X(x_0), t_0) = (x_0, t_0).$$

الان بالعكس، لنفرض ان $y = (x, \tau)$ حل لمسالة القيمة الابتدائية (1.7). اذن

$$\dot{y}(t) = (\dot{x}, \dot{t}) = X^*(x(t), \tau(t)) = (X(x(t), \tau(t)), 1)$$

وان $(x(t_0), \tau(t_0)) = (x_0, t_0)$ ، وعليه فان

$$\dot{x}(t) = X(x(t), \tau(t)), \quad \dot{t}(t) = 1$$

وان τ هو حل للمعادلة $\dot{\tau}(t) = 1$ و $\tau(t_0) = t_0$ لذا فان $\tau(t) = t$. ان

$$\dot{x}(t) = X(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

اي ان x هو حل لمسألة القيمة الابتدائية (1.4).

مثال 1.2.3 تأمل الامثلة الاتية على (2.4) وحلولها، نعطي

$$\dot{x} = X(t, x), \quad D, x(t), I$$

في كل حالة (C و C^* ثابتان حقيقيان):

- (a) $\dot{x} = x - t, D = \mathbb{R}^2, x(t) = 1 + t + Ce^t, I = \mathbb{R};$
- (b) $\dot{x} = x, D = \mathbb{R}^2, x(t) = (C - t)^{-1}, I = (-\infty, C)$
 $x(t) = 0, \quad I = \mathbb{R}$
 $x(t) = (C^* - t)^{-1}, I = (C^*, \infty)$
- (c) $\dot{x} = -x/t, D = \{(t, x): t \neq 0\}, x(t) = C/t, I = (-\infty, 0);$
 $x(t) = C^*/t, I = (0, \infty);$
- (d) $\dot{x} = 2x^{1/2}, D = \{(t, x): x \geq 0\}, x(t) = 0, I = (-\infty, C)$
 $x(t) = (C - t)^2, I = (C, \infty)$
 $x(t) = 0, \quad I = \mathbb{R};$
- (e) $\dot{x} = 2xt, D = \mathbb{R}^2, x(t) = Ce^{t^2}, I = \mathbb{R};$
- (f) $\dot{x} = -x/\tanh t, D = \{(t, x): t \neq 0\}, x(t) = C/\sinh t, I = (-\infty, 0)$
 $x(t) = C^*/\sinh t, I = (0, \infty).$

ان وجود الحلول يحدد بخواص X .

قضية 1.2.4 اذا كانت X دالة مستمرة في مجال مفتوح، $D^* \subseteq D$ فان لأي $(t_0, x_0) \in D^*$ ، يوجد حل $x(t), t \in I$ للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ بحيث ان $t_0 \in I$ وان $x(t_0) = x_0$.
على سبيل المثال، تأمل المعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = 2|x|^{1/2}, \quad (2.8)$$

حيث ان $D = \mathbb{R}^2$. اي زوج (t_0, x_0) حيث $x_0 \geq 0$ يعطى $(t_0, x(t_0))$ عندما يكون $x(t)$ هو الحل

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, C) \\ (C - t)^2, & t \in (C, \infty) \end{cases} \quad (2.9)$$

وان $C = t_0 - \sqrt{x_0}$. بطريقة مماثلة يمكن ان نجد الحل للزوج (t_0, x_0) عندما $x_0 < 0$.

لاحظ ان القضية 2.2.4 لا تتضمن امكانية كون $x(t_0) = x_0$ لاكثر من حل واحد $x(t)$. على سبيل المثال هناك عدد غير منته من الحلول للمعادلة التفاضلية (1.2) تحقق $x(t_0) = x_0$ ، هي كل حل من الصيغة (2.9) عند $C > t_0$ و الحل $x(t) \equiv 0$.

ان القضية الاتية تعطي الشرط الكافي لكل زوج في D^* بان يحدث في حل واحد و واحد فقط للمعادلة (1.4).

قضية 1.2.5 اذا كانت X و $\partial X/\partial x$ مستمرتان في مجال مفتوح، $D^* \subseteq D$ ، فانه لاي $(t_0, x_0) \in D^*$ ، يوجد حل وحيد $x(t)$ للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = X(t, x)$ بحيث ان $x(t_0) = x_0$.

لاحظ انه، على الرغم من ان $X = 2|x|^{1/2}$ مستمرة على $D = \mathbb{R}^2$ لكن

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{cases} |x|^{-1/2}, & x > 0 \\ -|x|^{-1/2}, & x < 0 \end{cases}$$

تكون مستمرة على $D^* = \{(t, x): x \neq 0\}$ فقط، وهي غير معرفة عند $x = 0$. نلاحظ ان الزوج $(t_0, 0), t_0 \in \mathbb{R}$ في عدد غير منته من الحلول للمعادلة التفاضلية $\dot{x} = 2|x|^{1/2}$.

من جانب اخر، $X(t, x) = x - t$ و $\partial X/\partial x = 1$ مستمرتان خلال المجال $D = \mathbb{R}^2$. اي زوج (t_0, x_0) يحدث في حل واحد و واحد فقط من حلول $\dot{x} = x - t$ ، وليكن

$$x(t) = 1 + t + Ce^t \quad (1.10)$$

عندما $C = (x_0 - t_0 - 1)e^{-t_0}$.

الفصل الثاني

النمو الإحيائي

2.1 نموذج النمو الخطي

المسألة الأساسية في علم الأحياء هي التي تتضمن النمو، فيما إذا كان هذا النمو هو نمو الخلية، أو العضو، أو الإنسان، أو النبات، أو السكان.

إن المعادلة التفاضلية الأساسية للنمو والاضمحلال هي :

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \quad (1)$$

حيث تنص هذه المعادلة على أن معدل تغير الكمية y بالنسبة للزمن يتناسب مع y إذا كان ثابت التناسب α موجبا و y موجبة فإن dy/dt يكون موجبا، و y تكون متزايدة. في هذه الحالة نبحث عن نمو y ، والمسألة هي إحدى مسائل النمو (growth). من ناحية أخرى، إذا كانت α سالبة و y موجبة، فإن dy/dt يكون سالبا و y تكون متناقصة والمسألة هنا هي مسألة اضمحلال (decay). إن حل المعادلة (1) يعطى بـ

$$y = ce^{\alpha t} \quad (2)$$

حيث c ثابت اختياري. نلاحظ من هذا أن النمو يحدث إذا كانت $\alpha > 0$ بينما يحدث الاضمحلال [أو الانكماش (shrinkage)] إذا كانت $\alpha < 0$.

الخلل الواضح في معادلة (1) والحل المناظر (2) هو أنه إذا كانت $\alpha > 0$ فيكون لدينا $y \rightarrow \infty$ عندما $t \rightarrow \infty$ وعليه بمرور الزمن يصبح النمو غير محدود. إن هذا يناقض الواقع لأننا نعلم أنه بعد مرور زمن معين يتوقف نمو الخلية أو الفرد، بينما حسب المعادلة يصبح الحجم كبير جدا. والسؤال الطبيعي الذي يطرح نفسه هو فيما إذا كان في الإمكان تحويل المعادلة (1) لنجعلها تناظر تلك الحقائق الإحيائية. لنلاحظ إذا كان في الإمكان إن نصوغ المسألة رياضيا.

الصياغة الرياضية.

لتوضيح هذه الأفكار نفرض إن y تمثل ارتفاع إنسان (أو تمثل أشياء أخرى مثل حجم خلية) من الطبيعي إن نفرض إن معدل تغير الارتفاع يعتمد على الارتفاع بطريقة أكثر صعوبة من طريقة التناسب البسيطة كالتى في (1). وهكذا يجب إن يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) \quad \text{عندما } t = 0 \quad y = y_0, \quad (3)$$

حيث تمثل y_0 الارتفاع عند زمن معين $t = 0$ ، و F دالة مناسبة لكن غير معلومة الآن. لكن هذه الدالة غير ملائمة لانه اذا كانت قيمة α موجبة يكون النمو غير محدودة بمرور الزمن و اذا كانت α سالبة يصبح النمو صفرا بمرور الزمن ز هاتان الحالتان غير واقعيتين.

2.2 نموذج النمو الغير خطي

بما إن الدالة الخطية $F(y) = \alpha y$ غير مناسبة فيجب إن نجرب تقريبا من مرتبة أخرى مقدما بالدالة التربيعية $F(y) = \alpha y - \beta y^2$ ، حيث نختار $\beta > 0$ لكي نمنع النمو لـ y كما هو مطلوب من الواقع. المعادلة التفاضلية (3) تصبح عندئذ

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \quad \text{عندما } t = 0, y = y_0 \quad (4)$$

يجب التأكد من إن هذه المعادلة لا تقدم إلا نموذجا رياضيا نأمل إنه يصف الحقائق الاحيائية للنمو وإذا كان النموذج لا يعطي نتائج تتفق مع الواقع فيجب إن يعاد النظر فيه.

الحل:

بما إن المعادلة (٤) هي معادلة منفصلة ، فيكون لدينا :

$$\int \frac{dy}{y(\alpha - \beta y)} = t + c \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = dt$$

أي أن :

$$\int \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y} \right] dt = t + c \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + c \quad (5)$$

باستخدام الشرط $y = y_0$ عندما $t = 0$ فإن :

$$c = \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

وهكذا فإن (5) تصبح :

$$\frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

نحل لأجل y فنجد إن :

$$y = \frac{\alpha / \beta}{1 + \left(\frac{\alpha / \beta}{y_0} - 1 \right) e^{-\alpha t}} \quad (6)$$

إذا أخذنا الغاية لـ (6) عندما $n \rightarrow \infty$ ، نلاحظ ، عندما $\alpha > 0$ فإن أعظم قيمة لـ y تكون

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

وهذه تبين إنه توجد غاية لنمو y كما هو مطلوب من الحقائق الاحيائية وتشير إلى صحة نموذجنا الرياضي.

كما مبين في (7) إن القيمة العظمى هذه تمثل بـ $y_{\max}$:

لاستخدام النتيجة (6) نفرض إن قيمة y المناظرة للزمن $t = 1, t = 2$ (باستخدام وحدات معينة من الزمن) تكون

معطاة بـ y_2, y_1 . عندئذ من (6) نلاحظ إن :

$$y_1 = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1 \right) e^{-\alpha}}, \quad y_2 = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1 \right) e^{-2\alpha}}$$

أو

$$\frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}) = \frac{1}{y_1} - \frac{e^{-\alpha}}{y_0}, \quad \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha}) = \frac{1}{y_2} - \frac{e^{-2\alpha}}{y_0}, \quad (8)$$

لتحديد $\alpha, \beta/\alpha$ بدلالة y_2, y_1, y_0 يمكننا إن نستمر كما يلي: نقسم المعادلة الثانية على المعادلة الأولى في (8) لكي نحذف β/α . فنحصل على

$$1 + e^{-\alpha} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{e^{-2\alpha}}{y_0}}{\frac{1}{y_1} - \frac{e^{-\alpha}}{y_0}} \quad (9)$$

بالاختصار نحصل على:

$$e^{-\alpha} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)} \quad (10)$$

إذا عوضنا هذا في المعادلة الأولى لـ (8)، نجد إن :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_1^2 - y_0 y_2}{y_1(y_0 y_1 - 2 y_0 y_2 + y_1 y_2)} \quad (11)$$

يمكن استخدام (10)، (11) لكتابة المعادلة (6) بدلالة قيم مختارة لـ y_2, y_1, y_0 ، إن المفيد إن نلاحظ إن القيمة الحدية (limiting value) لـ y تكون :

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2 y_0 y_2 + y_1 y_2)}{y_1^2 - y_0 y_2} \quad (12)$$

لتوضح ذلك ببعض الأمثلة عن كيفية استخدام تلك النتائج

مثال (1)

الارتفاع الوسيطي بالإنجات لأطفال ذكور في اعمار مختلفة مبينة في الجدول (1-1). استخدم البيانات (data) المعطاة للتنبؤ عن الارتفاع الوسيطي للذكور البالغين عند النمو المتكامل

جدول (1-1) الارتفاع الوسيطي لأطفال ذكور بأعمار مختلفة

العمر	الارتفاع (in)
عند الولادة	19.4
سنة واحدة	31.3
سنتان	34.5
ثلاث سنوات	37.2
أربع سنوات	40.3
خمس سنوات	43.9
ست سنوات	48.1
سبع سنوات	52.5
ثمان سنوات	56.8

الحل :

لتغطية المجموعة الكاملة للبيانات المعطاة في الجدول ، نفرض إن $t = 0,1,2$ تتناظر الأعمار عند الولادة، أربع سنوات ، ثمان سنوات على التعاقب. عندئذ يكون لدينا

$$y_2 = 56.8, \quad y_1 = 40.3, \quad y_0 = 19.4$$

بتعويض تلك القيم في معادلة (12) تعطي القيمة 66.9 in ، أو خمسة أقدام وسبعة إنجات وهو الارتفاع الوسطي المطلوب.

مثال (2)

من مكتب إحصاء السكان (census) ، إن سكان الولايات المتحدة الأمريكية للسنوات (1900-1960) معطى بالجدول (1-2). استخدم المعلومات المعطاة لتحديد:

- الحد النظري الأعلى لسكان الولايات المتحدة الأمريكية.
- عدد السكان المتوقع في سنة 1990
- عدد السكان في سنة 1870

جدول (1-2) سكان الولايات المتحدة الأمريكية

السنة	عدد السكان (بالملايين)
1900	76.0
1910	92.0
1920	105.7
1930	122.8
1940	131.7
1950	151.1
1960	179.3

الحل:

لتغطية المجموعة الكاملة للمعلومات المعطاة في الجدول ، فرض إن $t = 0,1,2$ تناظر السنوات 1960 ، 1900 ، 1930 على التعاقب. عندئذ يكون لدينا

$$y_2 = 179.3, \quad y_1 = 122.8, \quad y_0 = 76.0 \quad (13)$$

(a) بتعويض تلك القيم في (12) نحصل على :

$$y_{\max} = 346.3$$

أي إن أكبر عدد لسكان الولايات المتحدة الأمريكية سيكون حوالي 346 مليوناً.

(b) بتعويض القيم (13) في معادلة (10) نجد إن

$$e^{-\alpha} = 0.5117$$

باستخدام هذا والنتيجة 3. $\alpha/\beta = 346$ من الفرع (a) ، نجد من (6) إن

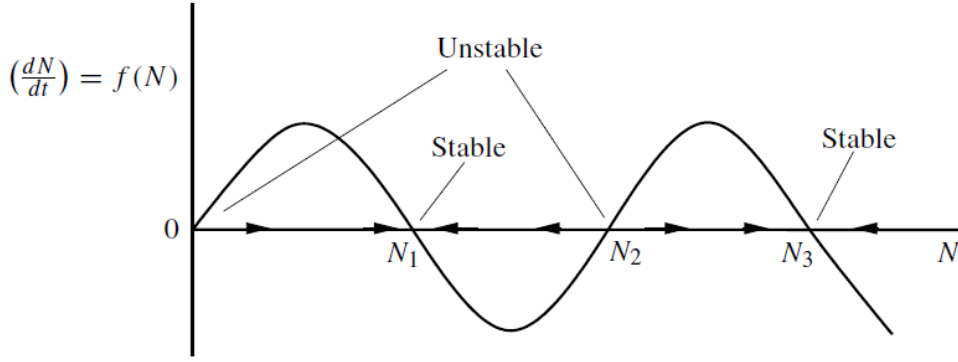
$$y = \frac{346.3}{1 + (3.557)e^{-0.6678t}} \quad \text{أو} \quad y = \frac{346.3}{1 + (3.557)(0.5117)^t} \quad (14)$$

بما إن السنة 1990 **تناظر** $t = 2$ ، نحصل بتعويض هذه القيمة لـ t في (14) نحصل على النتيجة $y = 234.5$ اذن عدد السكان المتوقع في سنة 1990 هو حوالي 234 مليوناً.

(c) السنة 1870 **تناظر** $t = 0$ بوضع هذه القيمة لـ t في (14) نجد إن $y = 43.6$.

من الجدير بالملاحظة إن عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية الحقيقي بموجب مكتب إحصاء السكان كان 39.8 مليوناً.

إن الأمثلة المذكورة آنفاً تبين إن النموذج الرياضي (4) المعبر عنه بالمعادلة (6) هو القانون الممكن للنمو الإحيائي (أو حتى النمو في مجالات أخرى مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد). كما بينا الآن إن أي قانون يوضع للوصف الرياضي للطبيعة (مثل قانون نيوتن أو قانون كرشوف) يجب إن يتفق مع الدليل التجريبي و إلا يجب تغييره. من المفيد إن يكون عندنا معيار (criteria) نتوقع بموجبه اتفاق المعادلة (6) مع الواقع. من ذلك ملاحظة الرسم البياني لـ (6) كما مبين في الشكل (1-1) إن هذا الرسم يكشف إنه



شكل (1-1)

عندما تتزايد t من الصفر فإن y تتزايد من y_0 وتقترب تدريجياً إلى $y_{\max}$. المنحني له ميل متزايد من $t = 0$ إلى الزمن المناظر للنقطة p وبعدها يكون ميله متناقص. إذن نقطة p نقطة انقلاب (point of inflection) ويتم الحصول عليها بموجب الطرائق الاعتيادية لحساب التفاضل والتكامل بوضع المشتقة الثانية $d^2y/dt^2 = 0$. إن هذه المنحني الذي بشكل S يسمى غالباً بمنحني النمو النسبي (logistic curve) ويستعمل بصورة واسعة في علوم الحياة (gration) عنها.

2.3 مسائل متنوعة في النمو الاحيائي

١- نريد كتابة معادلة منحني النمو النسبي الى البيانات في الجدول ١٠١

$$y_0 = 19.4, \quad y_1 = 40.3, \quad y_2 = 56.8$$

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha t}}$$

$$\alpha, \beta \text{ وعليه } t^{-\alpha} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)}$$

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha t}}$$

الآن لإيجاد قيمة α :

$$e^{-\alpha t} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)}$$

$$e^{-\alpha t} = \frac{(19.4)[56.8 - 40.3]}{(56.8)[40.3 - 19.4]}$$

$$= \frac{(19.4)(16.5)}{(56.8)(20.8)} = \frac{320.1}{1181.44} = 0.2709$$

$$\ln e^{-\alpha} = \ln 0.2709 \Rightarrow -\alpha = 1.306$$

α/β لإيجاد قيمة

$$\alpha/\beta = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)}{y_1^2 - y_0 y_2}$$

$$= \frac{40.3(19.4 \times 40.3 - 2(19.4 \times 56.8 + 40.3 \times 56.8))}{(40.3)^2 - 19.4 \times 56.8} = 47.351$$

$$Y_0 = \frac{47.351}{1 + \left(\frac{47.351}{19.4} - 1 \right)}$$

t = 0

$e^0 = 1$

$$= \frac{47.351}{1 + 1.4407} = 19.3999$$

$$Y_1 = \frac{47.351}{1 + (1.4407) * 0.2709}$$

t = 1

$$y = \frac{47.351}{1.3903} = 34.0579$$

$$y_2 = \frac{47.351}{1 + (1.4407) * e^{-(1.306) 2}}$$

t = 2

$$= \frac{47.351}{1+(1.4407)*0.07338}$$

$$= \frac{47.351}{1.10572} = 42.8237$$

٢- a- : تحقق من دقة النتائج في المثال التوضيحي

b (المثال التوضيحي 2 بمقارنة النتائج المحسوبة مع البيانات الحقيقية .

الحل

a :-

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-\alpha t}} \quad t = 0$$

$$= \frac{66.9}{1 + \left(\frac{66.9}{19.4} - 1 \right) e^{-\alpha(0)}} \quad e^{-\alpha t} = e^0 = 1$$

$$= \frac{47.351}{1+(2.4485)} = 19.4 = y_0$$

$$\therefore e^{-\alpha t} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)} = \frac{19.4(56.8 - 40.3)}{56.8(40.3 - 19.4)}$$

$$= \frac{19.4(16.5)}{56.8(20.9)} = \frac{320.1}{1187.12} = 0.2696$$

$$t = 1$$

$$y_{(1)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)}$$

$$= \frac{66.9}{1.6601} = 40.2984 > 31.3$$

$$t = 2$$

$$y_{(2)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^2}$$

$$= \frac{66.9}{1.1780} = 56.7928 > 34.5$$

$$y_{(3)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^3}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.01959)}$$

$$= \frac{66.9}{1.04798} = 63.8371 > 37.2$$

$$y_{(4)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^4}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.00528)}$$

$$= \frac{66.9}{1.0129} = 66.0457 > 40.3$$

$$y_{(5)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^5}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.00142)}$$

$$= \frac{66.9}{1.00348} = 66.6676 > 43.9$$

$$y_{(6)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^6}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.000383)}$$

$$= \frac{66.9}{1.00094} = 66.8373 > 48.1$$

$$y_{(7)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^7}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.000103)}$$

$$= \frac{66.9}{1.000253} = 66.8831 > 52.5$$

$$y_{(8)} = \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.2696)^8}$$

$$= \frac{66.9}{1+(2.4485)(0.0000278)}$$

$$= \frac{66.9}{1.000068} = 66.90 > 56.8$$

b)

$$e^{-\alpha} = 0.5117$$

$$1 - y_0 = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha t}}$$

$$e^{-\alpha t} = e^0 = 1$$

$$= \frac{346.3}{1 + \left(\frac{346.3}{76} - 1\right)(0.5117)^0}$$

$$= \frac{346.3}{1+3.557} = 75.999 < 76.0$$

$$2 - y_{(1)} = \frac{346.3}{1+(3.557)*(0.5117)^1}$$

$$3- y_{(2)} = \text{_____}$$

$$y_{(3)} = \text{_____}$$

$$y_{(4)} = \text{_____}$$

$$y_{(5)} = \text{_____}$$

$$y_{(6)} = \frac{346.3}{1+(3.557)*(0.5117)^6}$$

$$= \frac{346.3}{1 + (3.557) * (0.0148)}$$

$$= \frac{346.3}{1.0528} = 328.938 > 179.3$$

3 - الجدول 1.5 يبين النمو لمستعمرة بكتيريا في عدد من الايام مقاسا حجمها بالسنتيمترات المربعة :-

(a) جد معادلة للمساحة بدلالة الزمن .

(b) باستخدام المعادلة التي يتم الحصول عليها في (a) قارن القيم المحسوبة للمساحة مع القيم الحقيقية .

(c) ما اعظم حجم نظري للمستعمرة ؟ هل تتوقع مثل وجود هذا الحجم واقعا ؟ اشرح ذلك .

جدول 1.5 نمو مستعمرة بكتيريا

العمر (ايام)	0	1	2	3	4	5	6
المساحة	1.20	3.43	9.64	19.8	27.2	33.8	37.4

* معادلة المساحة هي نفسها معادلة النمو
sol :-

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-\alpha t}}$$

$$\therefore e^{-\alpha t} = \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2(y_1 - y_0)} = \frac{1.20(37.4 - 19.8)}{37.4(19.8 - 1.20)}$$

$$= \frac{21.12}{695.6} = 0.0304$$

$$\alpha/\beta = \frac{y_1(y_0y_1 - 2y_0y_2 + y_1y_2)}{y_1^2 - y_0y_2}$$

$$= \frac{19.8(1.20 \cdot 19.8 - 2(37.4)(1.20) + 19.8 \cdot 37.4)}{(19.8)^2 - (37.4)(1.20)}$$

$$= \frac{19.8(23.76) - 89.76 + 740.52}{392.04 - 44.88}$$

$$= \frac{19.8(23.76) - 89.76 + 740.52}{347.16}$$

$$= \frac{13355.496}{347.16} = 38.4707$$

b)

$$1 - y_{(0)} = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1\right)e^{-\alpha(0)}}$$

$$e^0 = 1$$

$$y_{(0)} = \frac{38.4707}{1 + \left(\frac{38.4707}{1.20} - 1\right)}$$

$$= \frac{38.4707}{1 + (45.16484)}$$

$$= \frac{38.4707}{46.16484} = 0.8333 < 1.20$$

$$y_{(1)} = \frac{38.4707}{1 + \left(\frac{38.4707}{1.20} - 1\right) 0.0304}$$

$$= \frac{38.4707}{2.3730} = 16.2118 > 3.43$$

$$y_{(2)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484) e^{-(3.4933)2}}$$

$$-\alpha = \ln(0.0304) = -3.4933$$

$$y_{(2)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484)(0.0009)}$$

$$= \frac{38.4707}{1.0417} = 36.9292 > 9.64$$

$$y_{(3)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484) e^{-(3.4933)3}}$$

$$= \frac{38.4707}{1 + (45.16484)(0.000028)}$$

$$= \frac{38.4707}{1.0012} = 38.4083 > 19.8$$

$$y_{(4)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484)0.0000008541}$$

$$= \frac{38.4707}{1.00003857} = 38.4692 > 27.2$$

$$y_{(5)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484)2.596 \times 10^{-8}}$$

$$= \frac{38.4707}{1.000001172} = 38.4706 > 33.8$$

$$y_{(6)} = \frac{38.4707}{1 + (45.16484)0.8 \times 10^{-9}}$$

$$= \frac{38.4707}{1.0000000357} = 38.470698 > 37.4$$

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} = \alpha/\beta = 38.4707 \quad \text{C)}$$

٤- سنشتق النتيجة من (10) ، (11) ثم جد (12) ؟

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-\alpha t}} \quad (6)$$

$$y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

معطاة بـ y_2, y_1 ، $t = 1$ ، $t = 2$

$$y_1 = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-\alpha}} , \quad y_2 = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_1} = \beta/\alpha \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) e^{-\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\beta/\alpha) \left[1 + \left(\frac{\beta/\alpha}{y_0} - 1 \right) e^{-\alpha} \right] &= \frac{1}{y_1} \\ \Rightarrow \beta/\alpha - \beta/\alpha e^{-\alpha} &= \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_0} e^{-\alpha} \\ \Rightarrow \beta/\alpha - (1 - e^{-\alpha}) &= \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_0} e^{-\alpha} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ينتج} \\ \beta/\alpha - (1 - e^{-2\alpha}) = \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_0} e^{-\alpha} \end{array} \right] \quad (8)$$

لتحديد قيمة $\beta/\alpha, \alpha$ بدلالة y_0, y_1, y_2 تسيير كما يلي :-

نحصل على

على معادلة

نقسم المعادلة

$$1 + e^{\alpha} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_0} e^{-2\alpha}}{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_0} e^{-\alpha}} \quad (9)$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{\frac{y_0 - y_2 e^{-2\alpha}}{y_2 y_0}}{\frac{y_0 - y_1 e^{-\alpha}}{y_1 y_0}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{\frac{y_0 - y_2 e^{-2\alpha}}{y_2}}{\frac{y_0 - y_1 e^{-\alpha}}{y_1}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{y_1(y_0 - y_2 e^{-2\alpha})}{y_2(y_0 - y_1 e^{-\alpha})}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{y_1 y_0 - y_1 y_2 e^{-2\alpha}}{y_2 y_0 - y_2 y_1 e^{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{y_1 y_0 - y_1 y_2 e^{-2\alpha}}{y_2 y_0 - y_2 y_1 e^{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{y_1 y_0 - y_1 y_2 e^{-2\alpha} - y_2 y_0 + y_2 y_1 e^{-2\alpha}}{y_2 y_0 - y_2 y_1 e^{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow y_2 y_0 e^{-2\alpha} - y_2 y_1 e^{-2\alpha} = y_1 y_0 - y_1 y_2 e^{-2\alpha} - y_2 y_0 + y_2 y_1 e^{-2\alpha}$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha} (y_2 y_0 + y_2 y_1) = y_1 y_0 - y_2 y_0$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{y_1 y_0 - y_2 y_0}{y_2 y_0 - y_2 y_1}$$

ومنها نجد ..

$$\Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{y_0(y_1 - y_2)}{y_2(y_0 - y_1)} \quad (10)$$

إذا عوضنا معادلة (10) في معادلة (8) نجد ان

$$(\beta/\alpha) \left(1 - \frac{y_0(y_1 - y_2)}{y_2(y_0 - y_1)}\right) = \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_0} \frac{y_0(y_1 - y_2)}{y_2(y_0 - y_1)}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) \left(1 - \frac{y_0(y_1 - y_2)}{y_2(y_0 - y_1)}\right) = \frac{y_0 y_2 (y_0 - y_1)}{y_1 y_0 y_2 (y_0 - y_1)} - \frac{y_1 y_0 (y_1 - y_2)}{y_0 y_2 (y_0 - y_1)}$$

$$= \frac{y_0 y_2 y_0 - y_0 y_2 y_1 - y_1 y_0 y_1 + y_1 y_0 y_2}{y_1 y_0 y_2 y_0 - y_1 y_0 y_2 y_1}$$

$$= \frac{y_2 y_0^2 - y_0 y_1^2}{y_1 y_2 y_0^2 - y_0 y_2 y_1^2}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) \left(\frac{y_2(y_0 - y_1) - y_0(y_1 - y_2)}{y_2(y_0 - y_1)} \right) = \frac{y_2 y_0^2 - y_0 y_1^2}{y_1 y_2 y_0^2 - y_0 y_2 y_1^2}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2 y_0^2 - y_0 y_1^2}{y_1 y_2 y_0^2 - y_0 y_2 y_1^2} \cdot \frac{y_2(y_0 - y_1)}{y_2 y_0 - y_2 y_1 - y_0 y_1 - y_0 y_2}$$

$$\Rightarrow (\beta/\alpha) = \frac{y_2 y_0^2 - y_0 y_1^2}{y_1 y_2 y_0^2 - y_0 y_2 y_1^2} \cdot \frac{y_2(y_0 - y_1)}{2y_2 y_0 - y_2 y_1 - y_0 y_1}$$

$$\Rightarrow \beta/\alpha = \frac{y_2 y_0^2 - y_0 y_1^2}{y_1(2y_2 y_0 - y_2 y_1 - y_0 y_1)}$$

ومن هنا نجد ان

$$\Rightarrow \beta/\alpha = \frac{y_1^2 - y_2 y_0}{y_1(y_0 y_1 - 2y_2 y_0 + y_2 y_1)}$$

يمكن استخدام (10) او (11) لكتابة المعادلة (6) بدلالة قيم مختارة لـ y_2, y_1, y_0

من المفيد ان نلاحظ ان القيمة الحدية لـ y

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2y_2 y_0 + y_2 y_1)}{y_1^2 - y_2 y_0} \quad (12) \text{ هي :}$$

٥- سنجد النتيجة (7) مباشرة من المعادلة التفاضلية (4) .

الحل // بما ان المعادلة (4) هي معادلة منفصلة فيكون لدينا :-

$$\frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} dt = t + c \quad \text{أو} \quad \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = t + c \quad \text{أي أن}$$

$$\frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + c$$

أو

$$\int \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y} \right] dt = t + c \quad (5)$$

باستخدام الشرط $y = y_0$ عندما $y = 5$ فإن

$$C = \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

وهكذا فإن (5) تصبح

$$C = \frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

نحل لأجل y فنجد أن

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-\alpha t}} \quad (6)$$

إذا أخذنا الغاية لـ (6) عندما $t \rightarrow \infty$ نلاحظ عندما $\alpha > 0$ فإن اعظم قيمة لـ y تكون

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

٦- بين أن نقطة الانقلاب لمنحني النمو النسبي تكون عند $y = \alpha / 2 / \beta$ والقيمة المناظرة لـ t

تكون عند

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha - 2\beta y$$

نجعل $0 = \frac{d^2 y}{dt^2}$ لكي نحصل على نقطة الانقلاب

$$\alpha - 2\beta y = 0 \Rightarrow y = \frac{\alpha}{2\beta}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{2\beta} \Rightarrow \frac{2\beta dy}{\alpha} = dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot 2\beta y = t + C$$

ومنها

$$\frac{1}{\alpha} [2\beta y] = t + C \quad y = y_0 \cdot t = t_0 \quad \text{عندما}$$

$$\frac{1}{\alpha} [2\beta y] = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\beta y}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\alpha} [2\beta y] - \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot 2\beta y = t + \frac{1}{\alpha} [2\beta y_0] - \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

$$2\beta y = \alpha t + 2\beta y_0 - \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

$$y = y_0 \quad , \quad t = t_0$$

$$\alpha t_0 = 2\beta y_0 - 2\beta y_0 + \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

$$t_0 = \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right)$$

٧- سنبين ان معادلة المنحني النمو النسبي يمكن ان تكتب كما يلي :-

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

حيث ان t_0 هو الزمن المناظر لنقطة الانقلاب .

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) \quad (1)$$

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) \quad (2)$$

$$\alpha t = \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) \quad (3)$$

$$\alpha t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 \right) \quad (4)$$

بالطرح

$$\alpha t - \alpha t_0 = 0$$

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + e^{-0}} \rightarrow y = \frac{\alpha/\beta}{2} \rightarrow y = \alpha/2\beta$$

٨- بين كيف تعدل (4) لتمثل نمو السكان لمدينة اذا كانت هناك هجرة الى المدينة

بمعدل ثابت حل مسألة القيمة الابتدائية الناتجة .

الحل :-

- المسألة الأساسية في علم الأحياء هي التي تنظم النمو فيما اذا كان هذا النمو هو

خلية ، او عضو او انسان او سكان او نبات .

- ان المعادلة الأساسية للنمو والاضمحلال هي :-

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \quad (1)$$

حيث تنص هذه المعادلة على ان معدل تغير الكمية y بالنسبة للزمن يتناسب مع y .

- اذا كان ثابت التناسب موجب α والـ y موجب فيكون :
 $\frac{dy}{dt}$ موجب و y تكون متزايدة (اي زيادة نمو السكان والهجرة الى المدينة بمعدل غير ثابت) .
- في هذه الحالة نبحث عن نمو السكان y لمدينة واذا كانت هناك هجرة بمعدل ثابت .

- من ناحية اخرى اذا كانت α سالبة و y موجبة فان $\frac{dy}{dt}$ يكون سالب و y متناقضة والمسألة هنا تكون مسألة اضمحلال (تستخدم الهجرة الى المدينة).
- ان حل المعادلة (1) يعطى بـ

$$y = C e^{-\alpha t} \quad (2)$$

حيث C ثابت اختياري

نلاحظ من هذا ان الهجرة تحدث اذا كانت $0 < \alpha$ بينما يحدث النزوح عنها اذا كانت $0 > \alpha$ والخلل الواضح في معادلة رقم (1) والحل المناظر في معادلة (2) هو اذا كان $\alpha > 0$ فيكون لدينا $y \rightarrow \infty$ عندما $t \rightarrow \infty$ وعليه بمرور الزمن يصبح النمو غير محدد ، ان هذا يناقض الواقع لأننا نعلم ان الهجرة بعد مرور زمن معين تتوقف ، بينما حسب المعادلة يصبح العدد كبير جدا .

٩- حل مسألة (7) اذا كانت هجرة الى المدينة ونزوح عنها .

الحل :-

لتوضيح الافكار في س7 نفرض ان y تمثل هجرة السكان (لمدينة معينة) ومن الطبيعي ان نفرض ان معدل تغير الهجرة يعتمد على الهجرة بطريقة اكثر صعوبة من طريقة التناسب البسيطة كالتي في المعادلة رقم (1) وهكذا يجب ان يكون لدينا :

$$\frac{dy}{dt} = F(y) \quad (1)$$

حيث ان $y = y_0$ عندما $t = 0$ حيث تمثل y_0 الهجرة عند زمن معين
 في $t = 0$ F دالة مناسبة لكن غير معلومة لحد الآن ، بما ان الدالة الخطية $F = \alpha y$
 $F(y)$ غير مناسبة فيجب ان نجرب تقريبا من مرتبة اخرى مقدا بالدالة التربيعية βy^2
 $F(y) = \alpha y - \beta y^2$. حيث نختار $\beta > 0$ لكي نمنع الهجرة لـ y كما هو مطلوب من الواقع
 المعادلة التفاضلية (3) تصبح عندئذ :

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \quad (4)$$

* يجب التأكد ان هذه المعادلة لا تقدم الا نموذجا رياضيا نأمل انه يصف الاحيائية للهجرة والنزوح
 واذا كان النموذج لا يعطي نتائج تتفق مع الواقع فيجب ان ينعاد النظر فيه .
 وبما ان المعادلة (4) هي معادلة منفصلة فيكون لدينا :-

$$\frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = dt \quad \text{ومنها} \quad \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = t + c , \quad \text{اي ان}$$

$$\frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + c$$

او

$$\int \frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y} \quad (5)$$

باستخدام الشرط $y = y_0$ عندما $y = 0$ فان :

$$C = \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

وهكذا فان (5) تصبح :

$$\frac{1}{\alpha} [\ln y - \ln(\alpha - \beta y)] = t + \frac{1}{\alpha} [\ln y_0 - \ln(\alpha - \beta y_0)]$$

نحل لأجل y فنجد ان :

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + (\frac{\alpha/\beta}{y_0} - 1)e^{-at}} \quad (6)$$

وإذا أخذنا الغاية لـ (6) عندما $t \rightarrow \infty$ نلاحظ عندما $\alpha > 0$ فان اعظم قيمة لـ y تكون :

$$y_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

وهذه تبين أن توجد غاية للهجرة y كما هو مطلوب من الحقائق الإحيائية .

[1] J.D. Murray" Mathematical Biology I. An Introduction"Third Edition 2001 Superstock.

[2] J.D. Murray" Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications" Third Edition 2003 J.D. Murray

.

[3] M.R. Spiegel, "Applied Differential Equations", Prentice Hall Inc. Englewood Cliff, New Jersey, Third Edition(1981).