وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة القادسية
كلية التربية
قسم الرياضيات

Path Connected in Topological Space

بحث تقدمت به الطالبة

زهراء عبد الامير محمد

الى عمادة كلية التربية / قسم الرياضيات وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اشراف

م. زينب عودة ابثينة

المقدمة

الفضاء التبولوجي يسمى متصل Connected اذا لم يكن X يكتب كأتحاد لمجموعتان مفتوحتان منفصلتان غير خاليتان وجزيئيتان من X. أي أن $X = u \cup v$ حيث u و v مجموعتان جزيئيتان مفتوحتان غير خاليتان من X و $u \cap v = \Phi$ فأن احدهما تكون خالية أما v أو u. وهذا يعني أن X تحوي مجموعة واحدة المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي تسمى متصلة Connected اذا كانت متصلة في الفضاء التبولوجي الجزئي.

وأكثر مثال متداول لمجموعة متصلة هي الفترة [1 , 0] أو بشكل اكثر تعميم (او اكثر عمومية) أي فترة مغلقة أو مفتوحة في R وأكثر الفضاءات التي تظهر متصلة يمكن برهنتها باستخدام خواص المجموعات المتصلة ومنها:-

- اذا كانت $f: X \longrightarrow y$ دالة مستمرة وكان X فضاء متصل فأن f(x) مجموعة متصلة.

- اذا كانت X مجموعة جزئية متصلة من X فأن $\bar{c}$ متصلة واي مجموعة جزئية بين c و $\bar{c}$ تكون متصلة.

- اذا كان c_i مجموعات جزئية متصلة في X وكان $\cap_{ii}\, c_i \neq \emptyset$ فأن $U_i c_i$ تكون متصلة.

ربما يكون البرهان معقد شيء ما بالنسبة لمجموعات مثل المجموعات المتكسرة في حالة كون مجموعاتها متصلة. وكمثال على ذلك اتصال حد مجموعات ماند لبروت (Connected endnees of the mondelbort) نسمي الفضاء التبولوجي X مسار متصل اذا كان لاي زوج من النقاط X و $\grave{X}$ في X بوجود مسار في X من $X \longrightarrow \grave{X}$ أو من $\grave{X} \longrightarrow X$ فأنه توجد دالة مستمرة بحيث ان: $P(1) = X^1$ ، $P(0) = X$ وبما أن $q(t) = P\,(1 - t)$ ايضاً مستمر حيث $q(0) = P(1) = X^1$ و $q(1) = P(0) = X$ ممكن ان نتصور المسار سيكون مباشر اي من X الى X^1 أو من X^1 الى X.

المجموعة الجزئية $X \subseteq y$ تسمى مسار متصل اذا كان لأي نقطتان في y ممكن أن يوجد مسار متصل يأخذ القيم داخل y تماماً المسار المتصل يتشارك بعض خواص الاتصال:-

- اذا كانت $f: X \longrightarrow y$ مستمرة و X مسار متصل فأن f(x) مسار متصل.

- اذا كان C_i مسار مجموعات جزئية من X متصل و $\cap_i c_i \neq \varphi$ فأن $U_i c_i$ هو مسار متصل.

- الضرب لمسار مجموعات متصل هو مسار متصل.

وبمقارنة هذه الخواص مع خواص الاتصال نرى ان احد تلك الخواص مفقودة وهي اي مجموعة تقع بين مسار مجموعة جزئية متصلة واتصالاتها هو مسار متصل في الحقيقة هذه الخاصية ليست صحيحة دائماً. فمثلاً الفضاء الاقليدي متصل وهو ايضاً مسار متصل والاعتقاد بأنه هو نفسه اي أن كل متصل هو مسار متصل قد تتحقق واحدة والاخرى ليس بالضرورة او ان الخاصيتان ليستا نفس الخاصية دائماً. أذ ان مسار الاتصال يتضمن الاتصال ولكن المعكوس غير صحيح ولا يتحقق وسنعطي مثال يوضح المجموعة المتصلة ليست بالضرورة تشكل مسار متصل.

وسنستخدم بعض الامثلة التي ستكون اشكال معمولة بتأني من مستقيمات مرتبطة في المستوي جميعها بنقطة اضافية لامتدادات غير منتهية.

بحثنا هذا تضمن فصلان، الفصل الاول ويتكون من البند الاول الذي احتوى على مفاهيم اولية والبند الثاني الذي احتوى على تعارف الفضاء المتصل أما الفصل الثاني ويتكون من البند الاول الذي قدمنا فيه بعض الخواص للفضاء المتصل والبند الثاني فقد تناولنا فيه العلاقة بين المسار المتصل والمسار الموضعي والبند الثالث فقد تناولنا فيه مسار التركيبات والمسار المتصل والعلاقة بينهما.

الفصل الاول

البند الاول

اوليات Primi

تعريف 1.1.1:

لتكن S اي مجموعة من الاعداد الحقيقية. اقل حد اعلى للمجموعة S ويرمز له بالرمز sup (s) وهو عدد يمكن ان ينتمي للمجموعة S أو لا ينتمي لها. او بكلمات اخرى اقل حد اعلى للمجموعة S هو عنصر في S اذا وفقط اذا كانت S تملك عنصر اعظم. واعظم حد ادنى للمجموعة S يرمز له inf (s).

مثال 1.1.2:

لتكن S = (1,2) لذلك sup(s) = 2 ولكن $Z \notin (1,2)$ و inf (s) = 1.

تعريف 1.1.3:

ليكن (X,T) فضاء تبولوجي، و $N \subset X$ و P نقطة في N. تسمى N جوار (neighbourhood) للنقطة P اذا وجدت مجموعة مفتوحة u بحيث $P \in u \subseteq N$

امثلة 1.1.4:

1- الفترة المغلقة [0,1] في R هي جوار للنقطة $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4},\frac{3}{4}) \subseteq [0,1]$

2- الفترة [0,1) ليست جوار لـ 1 $(0,1] \supseteq (\frac{1}{2},1) \notin 1$.

3- ليكن X = {a, b, c} و t = {φ,$\bar{x}$[a]} لاحظ أن [a] مجموعة مفتوحة في X وهي جوار النقطة a لأن

$a \in [a] \subseteq [a]$

تعريف 1.1.5:

ليكن (X,T) فضاء تبولوجي، ولتكن $A \subset X$:

1- نقول أن A مجموعة مغلقة اذا كانت A^c مجموعة مفتوحة.

2- يعرف الانغلاق للمجموع A بأنه التقاطع لكل المجموعات المغلقة التي تحتوي A. أي $\bar{A} \subseteq \cap$ Fi وحيث Fi مغلقة لكل i.

مثال 1.1.6:

اذا كانت $X = \{1, 2, 3\}$ وكانت $T = \{\varphi, X, [1],[2], [1,2]\}$ فأن المجموعات المغلقة هي $\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X, \emptyset$

Let $A = \{1,3\}$, $CL(A) = \{1,3\} \cap X= \{1,3\}$

$B = \{2\}$, $CL(A) = X \cap \{2,3\} = \{2,3\}$

تعريف 1.1.7:

لتكن y مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء التبولوجي (X,T) عائلة المجموعات $Ty \ =\{0\cap y : 0\in t\}$ من المجموعات الجزئية من y هي تبولوجيا على y تسمى تبولوجيا الفضاء الجزئي (sub space topology) او تبولوجيا نسبية (relative topology) على y بواسطة T، الفضاء التبولوجي (y, Ty) يسمى فضاء جزئي من (X, T).

مثال 1.1.8:

لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $T=\{\varphi, X, \{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ولتكن $y = \{a, d, e\}$ فأن $Ty =\{\varphi, y, \{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$

تعريف 1.1.9:

ليكن (X,T) فضاء تبولوجي، ولتكن A و B فضاءين جزئيين من X. نقول أن A و B هما separated اذا كان كل من A و B منفصلتان من الانغلاق لهما أي اذا كان

$(\underline{B} \cap CL_X (A)) \cup (\underline{A} \cap CL_X (B)) = \varphi$

ملاحظة 1.1.10:

Separated يعني احياناً أكثر من الانفصال disjoint أي أن شرط المجموعتان اقوى من القول انها مجاميع متصلة.

مثال 1.1.11:

ليكن $X = R$ المجموعتان $A = (-\infty, 0]$ و $B = (0, \infty)$ هما مجاميع منفصلة ولكن ليست Separated في R^2 المجاميع $A = \{(x,y) = x^2+y^2\leq 1\}$ و $B = \{(x,y) = (x-2)^2 + y^2<1\}$ منفصلتان disjoint.

تعريف 1.1.12:

تعريف الدالة هي علاقة رياضية تربط كل عنصر ينتمي الى المجال X بعنصر واحد فقط من مجالها المقابل y وتعرف بالشكل $f(x) = y$ $f: x \longrightarrow y$.

مثال 1.1.13:

مثال عن الدالة

$f(x): 2X\ ;\ \forall X \in Z$

تعريف 1.1.14:

المجموعة الجزئية S من القضاء التبولوجي (X, t) تسمى مغلقة مفتوحة (clopen) اذا كانت مغلقة ومفتوحة في (X,t).

امثلة 1.1.15:

1- في كل فضاء تبولوجي (X, t) المجموعات φ ، X هي مجاميع مغلقة ومفتوحة.

2- لتكن $X = \{a,b,c\}$ و $t = \{\varphi, X, [a]\ [b,c]\}$ المجاميع $[a]$ و $[b,c]$ هي مجاميع مغلقة ومفتوحة.

تعريف 1.1.16:

ليكن X و y فضائيين تبولوجيين ولتكن $f: \overline{X} \longrightarrow y$ دالة، تسمى f:-

1- دالة متباينة أو واحد لواحد (one tone أو injective) اذا كان $f(x_1)=f(x_2)$ يعطي $x_1 = x_2$ لكل x_2 و x_1 في X.

2- دالة شاملة (onto أو Surjective) اذا كان لكل $y \in Y$ يوجد $n \in X$ بحيث $f(x) = y$.

مثال 1.1.17:

لتكن Z ولتكن $f:Z \longrightarrow Z$ دالة معرفة بالشكل $f(z) = |z|$ لكل $Z \in Z$

f ليست متباينة لأن $f(1) = f(-1)$ و p ليست شاملة لأن لا يوجد $Z \in Z$ بحيث $f(z)= -1$.

تعريف 1.1.18:

لتكن X, Y فضائيين تبولوجيين، ولتكن $f:X \longrightarrow Y$ دالة:-

1- نقول أن f يملك نظير (inverse) اذا وجدت دالة $g: Y \longrightarrow X$ بحيث أن $g(f(x)) = x$ لكل $x \in X$ و $f(g(y)) = Y$ لكل $y \in Y$ تسمى g دالة النظير للدالة f.

2- اذا كانت $S \subseteq Y$ فأن $f^{-1}(S)$ تعرف بالشكل $f^{-1}(S)=\{x:x\in X,\ f(x)\in S\}$ المجموعة الجزيئية. $f^{-1}(S)$ من X تسمى الصورة العكسية (inverse image) للمجموعة S.

مثال 1.1.19:

لاحظ المثال السابق حيث $f(z) = |Z|$ لكل $Z \in Z$ حيث f لا يمتلك دالة نظير g و

$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1, -2, -3, 1,2,3\}$

$f^{-1}(\{-5,3,5,7,9\} = \{-3,-5,-7,-9,3,5,7,9\}$

تعاريف 1.1.20:

1- ليكن (X,t) و (Y,t) فضائيين تبولوجيين، نقول ان هذين الفضائيين هوميومورفك (homeomorphic) اذا وجدت دالة $f: X \longrightarrow Y$ تمتلك الخواص التالية:

- f دالة متباينة (أي $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow X_1 = X_2$).
- f دالة شاملة (أي لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = y$).
- لكل $u \in t_1$ فأن $f^{-1}(u) \in t$.
- لكل $v \in t$ فأن $f(v) \in t_1$.

2- ليكن (x,t) و (y,t) فضائيين تبولوجيين ولتكن $f: X \longrightarrow Y$ دالة تسمى f تماثل (homeomorphism) بين (x,t) و (Y,t_1) ويكتب بالشكل $(x,t) \cong (y,t_1)$.

مثال 1.1.21:

أي فترتين مفتوحتين غير خاليتين (a,b) و (c,d) هما هوميومورفك ولبيان ذلك:
لتكن $a,b \in R$ حيث $a< b$ ولتكن $f: (0,1) \longrightarrow (a,b)$ دالة معرفة بالشكل:

$$f(x) = a\,(1-x) + bx$$

f هي دالة متباينة وشاملة وصورة كل فترة مفتوحة في $(0,1)$ باستخدام f هي فترة مفتوحة في (a,b) أي أن فترة مفتوحة في $(a,b) = $ (الفترة المفتوحة في $(0,1)$) f ولكن كل مجموعة مفتوحة في $(0,1)$ هي اتحاد فترات مفتوحة في $(0,1)$ ولذلك المجموعة المفتوحة في $f^{-1}(a,b)$ هي مجموعة مفتوحة في $(0,1)$ لاحظ الشكل (1).

البند الثاني

الفضاء المتصل Connected Space

مبرهنة 1.2.1:

ليكن (x,t) فضاء تبولوجي، العبارات التالية تكون متكافئة:-

1- φ و X هما فقط المجموعات المغلقة والمفتوحة في X.

2- اذا كانت $X \supseteq A$ و $Fr\ A = \varphi$ فأن $A=\varphi$ أو $A = X$.

3- X ليست اتحاد لموجوعتان منفصلتان مفتوحتان غير خاليتان.

4- X ليست اتحاد لموجوعتان منفصلتان مغلقتان غير خاليتان.

5- X ليست اتحاد لموجوعتان منفصلتان غير خاليتان.

تعاريف 1.2.2:

1- الفضاء التبولوجي (x,t) يكون متصل (Connected) اذا تحقق اي شرط (الشروط جميعها) في المبرهنة 1.2.1 اذا كانت $C \subseteq X$ تسمى C مجموعة متصلة اذا كانت C متصلة في الفضاء التبولوجي الجزئي. اي أن الفضاء الجزئي $C \subseteq X$ يكون منفصل اذا كان ممكن كتابة C بالشكل $C = A \cup B$ حيث A و B مجموعتان منفصلتان أي $A \cap B = \varphi$.

2- ليكن (x,t) فضاء تبولوجي، يسمى X فضاء متصل اذا كانت المجموعات الجزئية المغلقة والمفتوحة من X هي فقط φ و X.

مبرهنة (القيمة المتوسطة) 1.2.3:

اذا كان X فضاء متصل و $f: X\longrightarrow R$ دالة مستمرة فأن $ran(f)$ متصل و $ran(f)$ هو فترة فأنه اذا كانت $a,b\in X$ وكان $f(a) < Z < f(b)$ فانه توجد نقطة $C \in X$ بحيث أن $f(c) = Z$.

مبرهنة 1.2.4:

لتكن $f: X\longrightarrow Y$ و $\Gamma = \{(x,y) \in XxY: y = f(x)\}$

فأذا كانت f مستمرة، فأن مخطط f يكافئ المنطلق لـ f. اي بصيغة اخرى مخطط الدالة المستمرة يكون متصل اذا وفقط اذا كان منطلقها متصل.

البرهان:

سنبرهن أن X يكافئ Γ. لتكن $h: X\longrightarrow \Gamma$ معرفة بالشكل $h(x)=(x,f(x))$ وهي دالة متباينة من X الى Γ. لتكن $a \in X$ ونفترض $(U \times V)\cap \Gamma$ مجموعة مفتوحة تحتوي $h(a)=(a,f(a))$ بما أن f دالة مستمرة و $f(a) \in V$. فأنه توجد مجموعة مفتوحة O في X تحتوي a ويكون $f(o) \subseteq V$. فأن $a \in U \cap O$ و $h(U\cap O) \subseteq (U\times V) \cap \Gamma$ وعليه تكون h مستمرة عند a. اذا كانت U مجموعة مفتوحة في X فأن: $h(U) = (U\times Y) \cap \Gamma$ دالة مفتوحة في Γ، لذلك تكون h مفتوحة لذلك تكون h متكافئة.

مبرهنة 1.2.5:

اذا كان $\forall \propto \in I$ و $C_{\propto}$ مجموعة جزئية مفتوحة من X وكان $\forall \propto \neq B \in I$ و $C \propto \cap C\beta \neq \varphi$ فأن $U [C_{\propto} : \propto \in I]$ تكون مستقلة.

البرهان:

اذا كانت $I = \varphi$ فأن $U [C_{\propto} : \propto \in I] = \varphi$ تكون متصلة اذا كانت $I \neq \varphi$ نأخذ $\propto_{\circ} \in I$ و $C_{\propto_{\circ}}$ مجموعة حيث $\forall \propto \in I$ و $C_{\propto} \cap C_{\propto_{\circ}} \neq \varphi$ و $C_{\propto}$ $C_{\propto_{\circ}}$ ليستا منفصلتان (Separated) فأن $U [C_{\propto} : \propto \in I]$ متصلة.

نتيجة 1.2.6:

$\forall n \in N$ و C_n مجموعة جزيئية متصلة من X و $C_n \cap C_{n+1} \neq \varphi$ فأن C_n $U_{n=}^{\infty}$ مجموعة مستقلة.

البرهان

لتكن $A_n = U_{k=1}^{n} C_k$ ومن المبرهنة (1.2.5) تكون A_n متصلة فأن:

$$\varphi \neq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

وأيضاً من المبرهنة (1.2.5) نحصل على $U_{n=1}^{\infty} C_n = U_{h=1}^{\infty} A_n$ تكون متصلة.

نتيجة 1.2.7:

لتكن $I \subseteq R$. فأن I متصلة اذا وفقط اذا كانت I فترة.

نتيجة 1.2.8:

$\forall\ n \in N$ تكون R^n متصلة.

البرهان

من النتيجة 1.2.7 تكون R متصلة، بما أن R^n ممكن أن تكتب كأتحاد المسارات خطية (لكل واحد مكافئ لـ R) من خلال نقطة الاصل ومن المبرهنة 1.2.5 تكون R^n متصلة.

تعريف 1.2.9:

لتكن X فضاء متصل أذا كانت $X-[P]$ غير متصل، فأن P تسمى نقطة قطع في X.

نتيجة 1.2.10:

لتكن $\forall\ xy \in X$، يوجد مجموعة متصلة $C_{xy} \subseteq X$ مع كون $x,y \in C_{xy}$. فأن X يكون فضاء متصل.

البرهان

اذا كان $X = \varphi$ فأن X يكون متصل. واذا كان $X \neq \varphi$ لتكن $a \in X$. ومن الفرض فأن هناك $\forall\ y \in X$ مجموعة متصلة C_{xy} تحتوي y, a . ومن المبرهنة (1.2.5) نحصل على $X = \cup [\ C_{ay}: y \in X]$ يكون متصل.

مثال 1.2.11:

لتكن C مجموعة جزئية معدودة من R^n حيث $n \geq 2$. فأن $R^n - C$ تكون فضاء متصل و هو فضاء لا يحتوي نقاط قطع في حالة $n \geq 2$. ولبيان ذلك:

نفرض ان x,y اي نقطتان في $R^n - C$ نأخذ الخط المستقيم L العمودي على قطعة المستقيم $\overline{xy}$ التي تربط x و y. $\forall\ p \in L$، لتكن C_p اتحاد قطع المستقيمان $\overline{xp} \cup \overline{py}$. C_p هي اتحاد الفترتين مع نقطة مشتركة بينهما. لذلك تكون C_p متصلة.

فأذا كانت $p^1 \neq p$ فأن $C_p{}^1 \cap C_p = [x,y]$ لذلك اذا كانت $Z \in C$ فأن Z يجب ان تكون على احدى C_p. لذلك (بما أن C مجموعة جزئية معدودة) فأنه يوجد $P^* \in L$ بحيث أن $C_{p*} \cap C = \varphi$. فأن $x,y \in C_{p*} \subseteq R^n - C$. ومن النتيجة (1.2.10) (مع كون $C_{xy} = C_{p*}$) يتبين ان $R^n - C$ فضاء متصل اي ان $R^n - C$ لا تمتلك اي نقاط قطع.

تعريف 1.2.12:

اذا كان $f: X\longrightarrow Y$ تماثل، فأن p نقطة قطع في X اذا كانت f(p) نقطة قطع في y. لذلك تكون الفضاءات المتكافئة (hemimorphic) لها نفس عدد نقاط القطع.

مثال 1.2.13:

R^n لا يكافئ R اذا كانت $n \geq 2$. بما أن كل $p\in R$ هي نقطة قطع. ومن المثال 1.2.11 بين أن R^n لا تحتوي نقاط قطع في حالة $n \geq 2$ لذلك R^n لا يكافئ R.

نتيجة 1.2.14:

ليكن (x, t) و (Y, t^1) فضائيين تبولوجيين. فأن XxY يكون متصل اذا وفقط اذا كان X و Y متصل.

البرهان

$\Leftarrow$) نفرض ان XxY فضاء متصل بما أن $XxY = \varphi$ يكون $X = T_X\,[XxY]$ لذلك يكون X صورة مستمرة لفضاء متصل. لذلك يكون X متصل. ونفس الشيء يكون Yمتصل.

$\Rightarrow$) نفرض أن X و Y فضائيين متصلين ونأخذ أي نقطتين (a,b) فيها و $(c,d)\in XxY$ فأن Xx[b] و [C]xY يكافئان النقطة (c,b) ومن مبرهنة 1.2.5 يكون $C=(Xx[b]) \cup ([C]xY)$ مجموعة متصلة تحتوي كلاً من (a,b) و (c,d) ومن النتيجة 1.2.10 يكون XxY فضاء متصل.

مبرهنة 1.2.15:

لتكن C و $C_\propto$ حيث $\propto \in I$ مجاميع جزئية متصلة من X ولكل $\propto$، $C_\propto$ و C ليستا منفصلتان (Separated). فأن $S = C\cup U_\propto C_\propto$ مجموعة متصلة.

نتيجة 1.2.16:

لتكن $C\subseteq X$ متصلة. اذا كانت $C \subseteq A \subseteq CL(c)$ فأن A متصلة.

البرهان

لتكن $a \in A$،[a] و C ليستا منفصلتان (Separated) ومن المبرهنة 1.2.15 تكون $A= C \cup U \{[a]: a \in A\}$ مجموعة متصلة.

الفصل الثاني

البند الاول

بعض الخواص للمسار المتصل

Some Properties of path Connected

قضية 2.1.1:

ليكن X فضاء تبولوجي فأذا كانت X مسار متصل فأن X يكون فضاء متصل.

البرهان

نفرض أن X مسار متصل وليس متصل. فأنه توجد مجموعتان منفصلتان مفتوحتان غير خاليتان هما G_1 و G_2 بحيث أن $x = G_1 \cup G_2$. بما أن $G_1 \neq [\ ] \neq G_2$ فأنه توجد $x \in G_1$ و $y \in G_2$ كذلك المجموعات G_1 و G_2 هي مجموعات منفصلة لذلك $x \neq y$. بما أن X مسار متصل . فانه يوجد مسار $f: [0,1] \rightarrow X$ بحيث أن $f(0)=x$ و $f(1)=y$. بما ان f مستمرة يكون $f^{-1}(G_1)$ و $f^{-1}(G_2)$ مجموعتان مفتوحتان في [0,1]. وبما أن $G_1 \cap G_2 = [\ ]$ يكون $f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2)$ مجموعتان خاليتان ولكن $X=G_1 \cup G_2$ يجب أن يكون $f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)=$ [0,1] لذلك يكون [0,1] ليست متصلة و هذا تناقض.

ملاحظة 2.1.2:

الفضاءات (0,1) و [0,1) لا يكون مع [0,1] Homeomorphic ، لأن:

بما أن [0,1] فضاء متراص لأنه مغلق وهو فضاء جزئي مغلق من R و (0,1) و [0,1) ليس متراص لانهما ليسا مغلقتان وبما أن X فضاء متراص و f دالة مستمرة . فأن f(x) يكون متراص لذلك [0,1] لا يكون Homeomorphic مع [0,1) أو مع (0,1) ولبيان أن (0,1) و [0,1] ليست Homeomorphic نفرض أنه يوجد تماثل $f: (0,1) \rightarrow [0,1]$ Homeomorphism ونفرض أن $a = f^{-1}(1)$ فأنه توجد a وحيدة لأن f متقابلة.

نأخذ قصر الدالة f على $(0,a) \cup (a,1)$ ونعوض القصر بالدالة g الدالة g هي تماثل لـ $(0,a) \cup (a,1)$ مع (0,1) وبما أن g هي تمثل القصر لدالة مستمرة لذلك تكون g^{-1} ايضاً تمثل قصر لدالة المستمرة. ولكن لا تكون $(0,a) \cup (a,1)$ و(0,1)

Homeomorphic لأن اول فضاء ليس متصل والثاني متصل وهذا يتناقض مع حقيقة خاصية الحفاظ على الاتصال.

قضية 2.1.3:

لتكن $S^1 = \{ x \in R^2 = ||x||_2 2)\}$ ولتكن $f: S^1 \longrightarrow R$ دالة مستمرة فأنه يوجد $n \in S^1$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$.

البرهان

نفرض أنه لا توجد $n \in S^1$ فيكون لدينا $\forall x \in S^1$ يكون $f(x) \neq f(-x)$. نأخذ الدالة $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$ بما أنه $f(x) \neq f(-x)$ لذلك $f(x) - f(-x) \neq 0$ لذلك تكون g دالة مستمرة من خلال الاستمرارية لـ f نلاحظ أن $\forall x \in S^1$ يكون $g(x) = \pm 1$.

وبما أن g دالة مستمرة و S^1 فضاء متصل لذلك يكون $g(S^1)$ متصل . ويكون أما $\forall x \in S^1$ يكون $g(x) = 1$ أو $\forall x \in S^1$ يكون $g(x) = -1$ لذلك يكون لدينا أما $\forall x$ يكون $f(x) > f(-x)$ أو $\forall x$ يكون $f(n) < f(-x)$ ولكن عندها سيكون

$$F(-(-x)) = f(x) > f(-x) > f(-(-x)) = f(x)$$

وهذا تناقض . لذلك يجب ان تكون $x \in S^1$ بحيث $f(x) = f(-x)$.

مبرهنة 2.1.4:

اذا كان X و Y مسارات متصلة فأن X xY يكون مسار متصل.

البرهان

لتكن (X_1,y_1) و (X_2,y_2) نقاط في X xY. بما أن X وY مسارات متصلة فأنه يوجد مسارات $X \longrightarrow f_1:[0,1]$ و $y \longrightarrow f_2:[0,1]$ بحيث أن $f_1(0)= x_1$ و $f_1(1) =y_2$ و $f_2(0) = y_1$ و $f_2(1) = y_2$.

تعرف دالة جديدة $g: [0,1] \longrightarrow X xY$ بالشكل: $g(s) = (f_1(s) , f_2(s))$ عندها يكون لدينا $g(0) = (x_1, y_1)$ و $g(1) = (X_2,y_2)$. بما أن الصورة لـ g محتواه في XxY ، بقي أن نبرهن أن g دالة مستمرة. نأخذ $S_\circ \in [0,1]$ ونفرض G هو اي جدار لـ $g(S_\circ)$ فأن $G = U_{\propto\in\wedge} U_\propto x V_\propto$ حيث $U_\propto \subseteq X$ و $U_\propto \subseteq Y$ و $\wedge$ مجموعة الدليل . نختار $\propto\circ \in \wedge$ بحيث ان $g(S_\circ) \in U_{\propto\circ} x V_{\propto\circ}$ ونأخذ $f_1^{-1}(U_{\propto\circ})$ ،

وبما أن $f_2^{-1}(U_{\propto\circ})$ دوال مستمرة وتلك المجموعات مفتوحة وتحوي $S_\circ$ لذلك $f_1^{-1}(U_{\propto\circ}) \cap f_2^{-1}(V_{\propto\circ})$ مجموعات جزئية فتوحة في [0,1] تحوي $S_\circ$ فنحصل على $g\,(f_1^{-1}(U_{\propto\circ}) \cap f_2^{-1}(V_{\propto\circ})) \subseteq U_{\propto\circ}\, x V_{\propto\circ} \subseteq G$ لذلك تكون g مستمرة.

ملاحظة 2.1.5:

اذا كانت $X \subseteq A$. فاذا كانت A مسار متصل فليس بالضرورة أن يكون $\bar{A}$ مسار متصل.

مثال / لتكن $A = \{ (x, \sin(\frac{1}{x})) ; x \in (0,1]\}$ بما أن

$$\bar{A} = (x, \sin(\tfrac{1}{x})) , x \in (0,1]\} \cup [0] X [-1,1]$$

و A مسار متصل لكن $\bar{A}$ لا تكون مسار متصل وعليه لا توجد طريقة للحصول على نقطة في [0] X [-1,1] لنقطة في A بينما $\sin(\frac{1}{x})$ يتذبذب ما لا نهاية من المرات عندما يقترب من x = 0 .

ملاحظة 2.1.6:

اذا كان X مسار متصل وكانت $f: X \to y$ دالة فليس بالضرورة أم يكون f(X) مسار متصل.

مثال 2.1.7:

ليكن X = y = [0,1] و f(0) = 0 و $f(n) = 1\ \forall x \in (0,1]$ فأن f(X) = [0,1] وهو لا يمثل مسار متصل كفضاء جزئي من [0,1].

مبرهنة 2.1.8:

اذا كان $\forall \propto \in \wedge$ و $A \propto \subseteq \underline{X}$ و $\cap_{\propto\in\wedge} A_\propto \neq \{\ \ \}$ فأن $\cap_{\propto\in\wedge} A_\propto$ يكون مسار متصل.

البرهان

لتكن $X, y \in \cap_{\propto\in\wedge} \wedge_\propto$ فأنه توجد $\propto_1 \in \cap$ و $\propto_2$ بحيث أن $x \in A \propto_1$ و $y \in A \propto_2$. اذا كانت $\propto_1 = \propto_2$ ولأن $A_{\propto 1}$ مسار متصل نلاحظ $\cap_{\propto\in\wedge} A_\propto \neq \{\}$. وهذا يعطينا $n_\circ \in A_{\propto 1} \cap A_{\propto 2}$ بما أن $A_{\propto 1}$ مسار متصل . فأنه يوجد مسار $f_1 = [0,1] \longrightarrow A_{\propto 1}$ بحيث أن $f_1(1) = x_\circ$ و $f_1(0) = x_1$

وبطريقة مشابهه يوجد مسار $f_2 = [0,1] \longrightarrow A_{\propto 2}$ بحيث أن $f_2(1) = y$ ، $f_2(0) = x_\circ$ لذلك ينشأ لدينا المسار $f = [0,1] \longrightarrow \cap_{\propto \in \Lambda} A_\propto$.

ويعرف بالشكل

$$f(n) = \begin{cases} f_1(2x) & if\ x \in [0,\frac{1}{2}] \\ f_2(2x-1) & if\ x \in [\frac{1}{2},0] \end{cases}$$

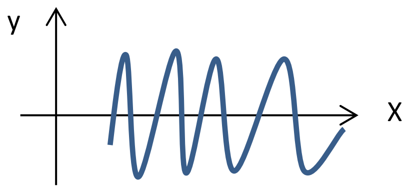
الدالة f مستمرة . لذلك يكون $\cup_{\propto \in \Lambda} A_\propto$ مسار متصل.

ملاحظة 2.1.9:

في بعض الاحيان يكون المسار المتصل والاتصال متكافئان وكمثال عن ذلك المجموعة الجزئية $I \subseteq R$ تكون متصلة اذا وفقط اذا كانت I فترة اذا وفقط اذا كانت I مسار متصل. ولكن عموماً المعكوسة للمبرهنة (2.1.8) لا يصلح لاحظ المثال التالي:

مثال 2.1.10:

لتكن $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ فأن $f(\frac{1}{n}) = 0$ $n \in N$ والمخطط يتذبذب اكثر وبسرعة اكثر بين 1^- , 1 وعندما $x \to 0^+$. جزء من المخطط في الشكل (3).



شكل (3)

حيث f دالة ليست مستمرة عند $X = 0$ ليكن مخطط قصر الدالة $g = f|\ [0,1]$. وبما أن g دالة مستمرة وحسب المبرهنة (1.2.4) فأن f مكافأ (Homeomorphic) الى (0,1] لذلك يكون f متصل ولأن $CIF = F\cup([0]\ X\ [-1,1])$ ومن النتيجة (1.2.6) يكون $F \cup A$ متصل لأي مجموعة $A \subset \{[0]\ X\ [-1,1]\}$. وعموماً $F_f = F \cup \{(0,0)\}$ ومخطط f متصل ولكن Γ_f ليست مسار متصل ولبيان ذلك سندعي انه لا يوجد مسار من (0,0) الى (1,0) ونبرهن أنه ليس مسار متصل . نفرض بالتناقض بأن $h: [0,1] \longrightarrow \Gamma_f$

هو مخطط من $(0,0)$ الى $(1,0)$ بالنسبة لـ $t \in [0,1]$ وتكتب $h(t) = (h_1(t), h_2(t)) \in \Gamma_f$ ، ولأن h مسار متصل فأن h_2, h_1 مستمرتان وبما أن $[0,1]$ فضاء متراص، h مستمرة ، لذلك ممكن أم نختار $\delta_1 > 0$ بحيث أن

$$|u-v| < \delta_1 \Longrightarrow d(h(u), h(v)) < 1 \to |h_2(v) - h_2(v)| < 1$$

فيكون $0 \in h^{-1}(0,0)$. لتكن $t^* = \sup h^{-1}(0,0)$ فأن $0 \le t^* < 1$. وبما أن $h^{-1}(0,0)$ مجموعة مغلقة لذلك $t^* \in h^{-1}(0,0)$ و $h(t^*) = (0,0)$ ممكن ان نتصور أن t^* هي اصغر وقت يقترب فيه المسار h لنقطة الاصل. نختار $\delta < \delta_1$ موجبة بحيث أن $0 \le t^* < t^* + \delta < 1$. وبما أن $h_1(t^*) = 0$ و $h_1(t^* + \delta) > 0$ ممكن أن نختار عدد موجب N بحيث $0 = h_1(t^*) \le \frac{2}{N+1} < \frac{2}{N} < h_1(t^* + \delta)$ ومن مبرهنة القيمة المتوسطة، توجد نقطتان $u,v \in (t^*, t^* + \delta)$ حيث $h_1(u)\, \frac{2}{N+1}$ و $h_1(v)\, \frac{2}{N}$ فأن $h_2(u) \sin \frac{(N+1)\pi}{2}$, $h_2(v) = \sin \frac{N\pi}{2}$ لذلك $|h_2(u) - h_2(v)| = 1$ وهذا تناقض لأن $|u - v| < \delta < \delta_1$ ولذلك $|h_2(u) - h_2(v)| < 1$.

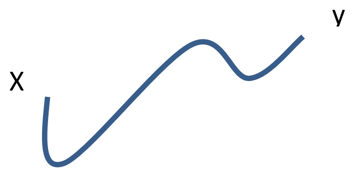
البند الثاني

المسار المتصل والمسار المتصل الموضعي

Path Connected and Locally path Connected

تعريف 2.2.1:

المسار (path) في X هو التطبيق المستمر $f: [0,1] \rightarrow X$ المسار يبدأ من نقطة البداية (initial point) $f(0)$ ونهايته عند نقطة النهاية (terminal point) $f(1)$ نقول أن f مسار من $f(0)$ الى $f(1)$.



شكل (4)

تعريف 2.2.2:

الفضاء التبولوجي X يسمى مسار متصل اذا كان لأي زوج من النقاط $x,y \in X$ ، يوجد مسار من النقطة x الى النقطة y في X.

ملاحظة/ يسمى X قوس متزن متصل ، اذا كان لأي زوج من النقاط x و y في X يوجد تماثل $f: [0,1] \rightarrow X$ معرف بالشكل $f(1) = y$ و $f(0) = n$ مثل هذا المسار f يسمى قوى من x الى y.

تعريف 2.2.3:

الفضاء (x,t) يسمى:-

1- متصل موضعي أو محلي (Locally Connected) اذا كان لأي نقطة $x \in X$ ولأي نقطة جوار N كنقطة x توجد مجموعة مفتوحة متصلة u بحيث أن $x \in u \subseteq N$

2- مسار متصل موضعي (Locally path Connected) اذا كان لأي نقطة $x \in X$ ولأي جوار N لنقطة x يوجد مسار مجموعة مفتوحة متصلة u بحيث أن $x \in u \subseteq N$

ملاحظة 2.2.4:

نقول أن u مسار متصل نعني به أن أي نقطتين في U ممكن ان يربطان بمسار في U . و المسار المتصل المحلي يعني أن النقاط القريبة ممكن ان تربط بمسارات قصيرة.

مثال 2.2.5:

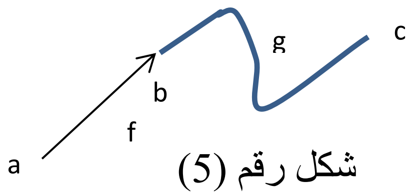
R^n فضاء متصل و هو ايضاً فضاء متصل محلي وفضاء مسار متصل محلي.

مبرهنة 2.2.6:

نفرض أن f مسار في الفضاء $\underline{X}$ من a الى b و g مسار من b الى c فأنه يوجد مسار h في $\underline{X}$ من a الى c.

البرهان:

بما أن f تنتهي عند بداية g لذلك ممكن أن نربط المسارين النهاية بالنهاية لنحصل على مسار من a الى c. ومن التعريف سيكون المسار h هي الدالة بالمنطلق [0,1] وللحصول على h نربط النقاط.



شكل رقم (5)

ونعرف $h: [0,1] \to X$ بالشكل $h(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ وبما أن f و g مسارات أي أنها مستمرة لذلك تكون h مستمرة.

مبرهنة 2.2.7:

اذا كان $\underline{X}$ فضاء متصل ومسار متصل محلي أو (موضعي) فأن $\underline{X}$ مسار متصل.

البرهان

اذا كان $X = \varphi$ بالنسبة لـ X $a \in X$ لتكن $C = \{x \in X : \exists \text{ path in X from a to x}\}$ فأن $C \neq p$ لأن $a \in C$ سنبرهن ان $C = X$ ؟

نفرض $x \in C$ لتكن f مسار في X من a الى x . نختار مجموعة مسار متصل مفتوحة U تحتوي x .لأي نقطة $y \in U$، يوجد مسار g في U من x الى y . من المبرهنة (2.2.6). يوجد مسار h في X من a الى y، تكون $y \in C$. لذلك $x \in U \subseteq C$ وعليه C تكون مجموعة مفتوحة.

نفرض $x \notin C$ ونختار مجموعة مسار متصل مفتوحة U تحتوي x . اذا كانت $y \in U$ ، فأنه يوجد مسار g في U من y الى x . لذلك لا يمكن أن يوجد مسار في X من a الى y . او عدا ذلك من المبرهنة (2.2.6) سيكون المسار هو h من a الى x في C . و $y \notin C$ لذلك يكون $x \in U \subseteq X - C$ فيكون C مجموعة مغلقة وعليه تكون C مغلقة مفتوحة.

بما أن X متصل و C مجموعة غير خالية مغلقة مفتوحة (clopen) فأن $C = X$ لذلك يكون X مسار متصل.

قضية 2.2.8:

المجموعة المفتوحة المتصلة O في R^n تكون مسار متصل.

البرهان

نفرض أن $x \notin O$ فأذا كانت N أي جوار لنقطة x في O فأن $x \in \text{into } N =$ $U \subseteq O$ وبما أن O مفتوحة في R^n و U مجموعة مفتوحة في O، فأن U ايضاً مفتوحة في R^n لذلك يوجد $\in > 0$ بحيث أن $B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq N$ وبما أن $B_\varepsilon(x)$ أي كرة في R^n فهي تمثل مسار مستقل . لذلك تكون U مسار متصل موضعي (محلي) ومن المبرهنة (2.2.7) تكون O مسار متصل.

البند الثالث

مسار التركيبات والمسار المتصل

Path Components and Path Connected

تعريف 2.3.1:

1- التركيب (Component) C للفضاء X هو أكبر فضاء جزئي متصل.

2- الفضاء الجزئي المتصل الأعظم يعني اذا كانت C متصلة وكانت $C \subseteq D \subseteq X$ حيث D متصلة فأن $C = D$.

مبرهنة 2.3.2:

ليكن X هو اتحاد لمركباته . مركبات مختلفة من X منفصلة وكل مركبة هي مجموعة مغلقة لهذا تكون متصلة.

البرهان

سنبرهن أن كل مركبة C_p مغلقة وبما أن $C_p \subseteq CL(C_p)$ و C_p متصلة وحسب نتيجة 1.2.16 ومن كون C فضاء اعظم متصل جزئي فأن $C = CL(C_p)$.

ملاحظة 2.3.3:

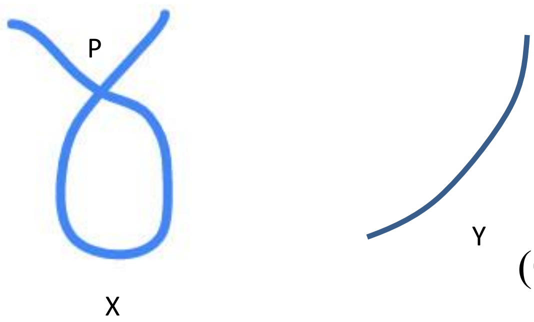
الفضاءات المتكافئة (homeomorphic spaces) لها نفس عد المركبات.

امثلة 2.3.4:

1- ليكن $X = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6] \subseteq R$. نلاحظ أن X يمتلك ثلاث مركبات هي: $[1,2], [3,4], [5,6]$ لكل $0 \leq p \leq 1$ يكون $Cp = [0,1]$. اذا كانت C مركبة في الفضاء X لها فقط عدد منتهي من المركبات فأن $X - C$ هي اتحاد لمركبات مغلقة أخرى منتهية لذلك تكون C مغلقة مفتوحة (clopen).

2- في R^2 $X = U_{n=1}^{2} B_{\frac{1}{4}}(n,0)$ لا تكافئ $y = U_{n=1}^{3} B_{\frac{1}{4}}(n,0)$ لأن X له مركبتان بينما لـ Y ثلاث مركبات.

3- المجموعتان X و Y في R^2 ليستا متكافئتان لأن X يحتوي نقطة قطع P حيث X – [p] له ثلاث مركبات بينما y لا يحتوي أي نقطة قطع كما موضح بالرسم.



شكل (6)

تعريف 2.3.5:

ليكن X فضاء و (~) علاقة تكافؤ على X تعرف بـ x~y اذا وجد فضاء جزئي متصل A⊆X حيث x,y ∈ A فأن (~) علاقة تكافؤ (equivalence relation) وصفوف التكافؤ تسمى مركبات متصلة لفضاء X.

مبرهنة 2.3.6:

1- ليكن Z⊆X فضاء جزئي متصل. فأن Z تقع في احدى المركبات المتصلة للفضاء X.

2- كل مركبة متصلة $C\subseteq \bar{X}$ تكون متصلة.

تعريف 2.3.7:

لتكن (~) علاقة على X معرفة بالشكل n~y اذا وجد مسار من x الى y فأن ~ علاقة تكافؤ (equivalence relation) وصفوف التكافؤ تسمى مركبات المسار للفضاء X.

نلاحظ أنه يوجد مسار $\delta = [a,b]\rightarrow X$ من x الى y اذا وفقط اذا وجد مسار $\delta = [0,1]\rightarrow X$ من x الى y وكمثال ($\delta(t) = \delta(a+t(b-a))$.

ملاحظة 2.3.8:

(~) علاقة تكافؤ لبرهان ذلك:

1- نبرهن انها انعكاسية (reflexivity): المسار الثابت $\delta = [0,1]\rightarrow X$ المعرف بـ $\delta(t) = n$ لكل $t \in [0,1]$ هو دالة مستمرة لذلك $x \sim x$.

2- نبرهن أنها متناظرة (Symmetry): نفرض x~y أي انه يوجد مسار $\delta=[0,1]\rightarrow X$ مع نقاط النهايات $\delta(0) = x$ و $\delta(1) = y$ فأن $\breve{\delta}=[0,1]\rightarrow X$ المعرف بالشكل $\breve{\delta}(t) = \delta(1-t)$ يكون مستمر لأن $t\rightarrow 1-t$ هو تماثل لـ

$\breve{\delta}(1) = \delta\ (0) = x$ و $\breve{\delta}(0) = \delta\ (1) = y$ له نقاط النهاية $\breve{\delta}$ و $[0,1] \leftarrow [0,1]$ فأن $x \sim y$.

3- نبرهن أنها متعدية (Transitivity) :

نفرض $y \sim x$ و $Z \sim y$ أي انه يوجد مسارات $\propto, \beta: [0,1] \to X$ من x الى y ومن y الى z تعرف مسار للمسارات $\propto$ و β بالشكل:

$$(\propto \beta)\ (t)2 \begin{cases} \propto (2t) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta\ (2\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

بالنسبة لـ $t = \frac{1}{2}$ يكون $\propto (1) = y = \beta\ (0)$

توضيح اكثر $\beta \propto_*$ يكون مستمر لأن القصر لمجموعات جزئية مغلقة $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ تكون مستمرة فيصبح $[0,1] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1]$ أخيراً $\beta \propto_*$ يمتلك نقاط نهاية $n = \propto (0) = (\propto_* \beta)\ (0)$ و $(\propto_* \beta)\ (1) = \beta\ (1) = z$ وهذا يبرهن أن $x \sim z$

نتيجة 2.3.9:

كل مسار مركب للفضاء X يحتوي مركبة متصلة من X أو بكلمات أخرى كل مركبة متصلة (منفصلة) هي اتحاد مركبات مسار .

البرهان

اذا كانت النقطتان x و y متصلتان بمسار $\delta = [a,b] \to X$ فأن كل من النقطتان تكونان تقعان في الفضاء الجزئي المتصل $\delta = [a,b] \subseteq X$.

نتيجة 2.3.10:

1- ليكن $Z \subseteq X$ فضاء مسار متصل جزئي فأن Z تقع في مركبة مسار واحدة لـ X.

2- كل مركبة مسار $C \subseteq X$ تكون مسار متصل.

المستخلص

درسنا في بحثنا هذا المسار المتصل والمسار المتصل الموضعي والفضاء المتصل والفضاء المتصل المحلي ووجدنا أن كل مسار متصل هو فضاء متصل وليس كل فضاء متصل ومسار متصل محلي يكون مسار متصل وأن R^n هو فضاء متصل وأن المجموعة المفتوحة المتصلة في R^n تكون مسار متصل وأنه توجد علاقة تكافؤ على المسار المتصلة.

المصادر

1- General topology , additional notes, Martin frank land. October 22, 2012.

2- Finite topological spaces, noted for Reu By J.P.MAY, summer, 2008.

3- The topology of path component spaces By Jeremy Brazas, October 26, 2012.

4- Topology without tears, by Sidney A. Norris, 2007.

5- Spaces that are connected but not path connected by Keith Conrad, research.

6- Homework set (Exercises) from Topology by Mitchel T. Keller, 17 June, 2005.