دراسة في نموذج صف الانتظار (M/D/1) عند عدم تحقيق فروض عملية بواسون مع تطبيق عملي

احمد نعيم فليح • رحيم جبار ظاهر••

الملخص:

يهدف البحث الى تقييم او تحسين ورفع كفاءة نظام الخدمة في قسم الإنتاج /مرحلة بناء الإطار التابع لشركة إطارات الديوانية من خلال تطبيق نظرية صفوف الانتظار التي لاتحقق فروض عملية بواسون حيث تم التأكد من ان توزيع وقت الخدمة في المرحلة الإنتاجية المسماة ببناء الإطار غير معلوم لذلك لم تتحقق فروض عملية بواسون وبالتالي تطبيق نموذج (M/D/1) تحت عدم تحقق شروط عملية بواسون.

المقدمة

تعتمد النماذج الرياضية في صفوف الانتظار اعتمادا كليا على التوزيعات التكرارية الفعلية لمعدلات الوصول والخدمة وكذلك التوزيعات النظرية لغرض إجراء الاختبارات الإحصائية المعروفة. ومن التوزيعات التي يكثر استخدامها في صفوف الانتظار هو توزيع بواسون والتوزيع الاسي. ولكن في الحياة العملية واثناء تطبيقنا لصفوف الانتظار على إحدى المشاكل المدروسة قد نلاحظ ان هناك نموذج لصفوف الانتظار تكون فيها عملية الوصول او (و) عملية المغادرة لا تتبع هذه التوزيعات لذلك يقال بان نموذج صف الانتظار لا يحقق فروض عملية بواسون.

وتهدف هذه الدراسة لتطبيق النموذج $(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$ الذي لا يحقق فروض عملية بواسون حيث تم تطبيق هذا النموذج في شركة إطارات الديوانية قسم الإنتاج في المرحلة الإنتاجية المسماة بناء الإطار معتمدين على البيانات التي تم تجميعها والمتمثلة بعدد الإطارات القادمة من قسم المواد نصف المصنعة ، ويعتبر الإطار بشكل عام من السلع المهمة في حياة المواطن وانخفاض نوعيتها يتسبب بخطورة حياة المستهلك ولكي تكون نوعية الإطار جيد يجب ان تتم العملية الانتاجية حسب المواصفات المحددة لها. ومن هنا جاء الاهتمام بدراسة إمكانية تطبيق صفوف الانتظار لزيادة كفاءة العملية الإنتاجية للإطار ذي الحجم (28-14) زراعي كبير من خلال إعادة لتصميم نظام الخدمة في المعمل .

ومن خلال الزيارات الميدانية التي قام بها الباحث الى شركة إطارات الديوانية والتي من خلالها تم الاطلاع على كفاءة نظام الخدمة في قسم الإنتاج حيث تبين للباحث إمكانية تطبيق نموذج صف الانتظار $(M/D/1)$ في المرحلة الإنتاجية المسماة بناء الاطار لوجود ماكنة بناء واحدة فقط بهدف التأكد من كفاءة الاداء في هذه المرحلة الإنتاجية باستخدام النموذج $(M/D/1)$.

• مدرس قسم الاحصاء كلية الادارة والاقتصاد جامعة القادسية

•• مدرس قسم الاحصاء كلية الادارة والاقتصاد جامعة القادسية

حيث تبين للباحث ان وقت الخدمة في ماكنة بناء الإطار لا يتوزع وفقا للتوزيع الاسي بعد الاستفادة من السادة مسئولي الوجبات الانتاجية لذلك فانه سيتم تطبيق صفوف الانتظار التي لاتحقق فروض عملية بواسون.

الجانب النظري

1- دور توزيع بواسون والتوزيع الاسي في نظرية صفوف الانتظار [1]

من التوزيعات التي يكثر استخدامها في نظرية صفوف الانتظار هي توزيع بواسون Poisson و التوزيع الاسي Exponential فعلى فرض ان لدينا صف انتظار فيه الحوادث الواصلة والمغادرة خلال فترة زمنية معينة يتم السيطرة عليها من خلال الشروط الاتية:-

1- احتمال الحادثة (وصول او مغادرة) بين الزمن t و t+s يعتمد فقط على طول الفترة الزمنية s ، هذا يعني الاحتمالية لاتعتمد على t او عدد الحوادث الظاهرة خلال الفترة الزمنية (0 , t) وهذه تدعى بالاضافات الساكنة المستقلة.

2- احتمال ظهور حادثة معينة (وصول او مغادرة) خلال فترة زمنية قصيرة h هو موجب واقل من او يساوي الواحد الصحيح .

3-على الأغلب حادثة واحدة يمكن ان تظهر (وصول او مغادرة) خلال فترة زمنية قصيرة h أي لا يمكن حدوث اكثر من حادثة خلال فترة زمنية قصيرة جدا.

ان الشروط السابقة تصف عملية تكون فيها عدد الحوادث خلال فترة زمنية معطاة تتبع توزيع بواسون وان الفترة الزمنية بين الحوادث المتعاقبة (زمن الانتظار) تتبع التوزيع الاسي وفي مثل هذه الحالة يمكن ان نقول بان هذه الشروط تمثل عملية بواسون.

لنفرض ان $p_n(t)$ [2] يمثل احتمال ان n من الحوادث تظهر في الفترة الزمنية (0 , t) ، فانه سيكون لـ $p_n(t)$ طبقا للشرط (1) في أعلاه إضافات ساكنة ومستقلة وبالتالي فان احتمال عدم ظهور حادثة $(n=0)$ في الفترة (t+h) سيكون:

$$p_0(t+h) = p_0(t).p_0(h) \qquad \text{........(1)}$$

حيث ان $p_0(t)$ يمثل عدم حدوث حادثة في الزمن (t) من العلاقة بين توزيع بواسون والتوزيع الاسي نجد انه لا تحدث حادثة في الفترة $[0,t)$ اذا وفقط اذا كان زمن الانتظار (T) للحادثة الاولى يحقق ان $(T>t)$ لهذا يكون :

$$P(T>t) = P_0(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \qquad \text{..........(2)}$$

وان:

$$1-P(T \le t)=e^{-\lambda t}$$
$$\therefore\ P(T \le t)=1-e^{-\lambda t}$$
$$\frac{\partial \Pr(T \le t)}{\partial t}=\lambda e^{-\lambda t}$$
$$P(T \ge t)=P_0(t)=\lambda e^{-\lambda t} \quad ; \quad t>0 \quad ...(3)$$

وبهذا نجد ان توزيع $p_n(t)$ هو توزيع بواسون

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad ; \quad n=0,1,2,3,.... \quad .... (4)$$

ونستنتج من هذا انه اذا كان توزيع الفترة الزمنية بين الحوادث المتعاقبة هو توزيع اسي بمعدل $\frac{1}{\lambda}$ فان توزيع عدد الحوادث في الفترة الزمنية المعطاة يجب ان يتبع توزيع بواسون بمعدل ظهور λ والعكس صحيح.

2- صفوف الانتظار التي لاتحقق شروط عملية بواسون [3]

عند دراسة نماذج صفوف الانتظار والتي تكون فيها عملية الوصول او المغادرة لا تتبع شروط عملية بواسون فان تحليل مثل هذه النماذج يكون صعبا جدا . حيث ينصح باستخدام اسلوب المحاكاة لتوليد البيانات وبالتالي تحليل مثل هذه النماذج لكننا سوف نعتمد في دراستنا هذه على النموذج $(M/D/1)$ الذي لانحتاج فيه الى عملية محاكاة للبيانات.

هذا النموذج يتصف بانه لا يحقق شروط عملية توزيع بواسون أي ان توزيع عدد الوحدات الواصلة لايتبع توزيع بواسون او (و) توزيع وقت الخدمة للوحدات الواصلة لا يتبع التوزيع الاسي.

ان النموذج $(GD/\infty/\infty)$: $(M/D/1)$ فيه يكون توزيع وقت الخدمة يمكن ان يتبع دالة توزيع احتمالية عامة بمعدل E(t) وتباين Var(t). ان دراسة هذا النموذج توفر فقط معلومات عن إمكانية حساب كل من l_q , l_s , w_q , w_s .

لنفرض الان ان λ هو معدل الوصول لنموذج خدمة بقناة خدمة واحدة وان E(t) و Var(t) تمثلان معدل وتباين وقت الخدمة وقد تبين باستخدام مفاهيم نظرية الاحتمال وتحليل سلاسل ماركوف ان العدد المتوقع للعملاء (وحدة) في النظام للنموذج $(GD/\infty/\infty)$: $(M/D/1)$ يمكن حسابه من خلال المعادلة الاتية :-

$$l_s=\lambda E(t)+\frac{\lambda^2[(E(t))^2+Var(t)]}{2[1-\lambda E(t)]} \quad ....(5)$$

حيث ان $\lambda E(t)<1$ وان الصيغة (5) تعرف بصيغة (p-k).

من الصيغة (5) يمكن حساب المقاييس الآتية:-

$$w_s = \frac{l_s}{\lambda} \quad \text{....(6)}$$

$$l_q = l - \lambda E(t) \quad \text{....(7)}$$

$$w_q = \frac{l_q}{\lambda} \quad \text{....(8)}$$

حيث ان معدل الخدمة هو

$$\mu = \frac{1}{E(t)}$$

وان معدل الوصول الفعال هو

$$\lambda eff = \lambda \quad \text{...(9)}$$

في الحالات التي نفترض بها ان وقت الخدمة تقريبا ثابت فان $Var(t) = 0$ وان صيغة (p-k) الخاصة بعدد العملاء في صف الانتظار تصبح بالشكل الاتي:-

$$l_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \quad \text{...(10)}$$

حيث ان

$$\rho = \frac{\lambda}{M}$$

وان M هو معدل الخدمة الثابت.
وبالتالي فان وقت الخدمة المتوقع هو :

$$w_s = \frac{l_s}{\lambda}$$

وان العدد المتوقع للعملاء (وحدات) في الطابور هو:

$$l_q = l_s - \rho \quad \text{....(11)}$$

وان وقت الخدمة المتوقع في الطابور هو :

$$w_s = \frac{l_q}{\lambda} \quad \text{....(12)}$$

الجانب التطبيقي

1- وصف البيانات

قام الباحث بتطبيق هذا البحث في معمل إطارات الديوانية قسم الانتاج حيث يوجد هناك اربع مراحل إنتاجية لتصنيع الاطار وهي تحضير العجينة ، تصنيع المواد النصف المصنعة ، بناء الاطار وكبس الاطار وقد قام الباحث بتطبيق هذا البحث في المرحلة الانتاجية الثالثة المسماة ببناء الاطار وعلى الماكنه الخاصة ببناء الاطار ذي الحجم (28- 14) زراعي حيث لاحظ الباحث امكانية تطبيق النموذج $(M/D/1)$في هذه المرحلة واعتمد الباحث على البيانات التي تمثل عدد الاطارات الواصلة لمرحلة بناء الاطار من مرحلة المواد النصف مصنعة حيث كان للباحث جدول يومي وكما في الشكل الآتي:

جدول رقم (1)
يمثل عدد الاطارات الواصلة لمرحلة
بناء الاطار لمدة اسبوع (وجبة عمل واحدة)

الوقت من الساعة الى الساعة	عدد الاطارات (الوصول)					
	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
7.30	1	1	1	3	4	3
8.30	1	6	4	6	2	2
9.30	2	1	1	2	3	3
10.30	1	1	1	3	4	3
11.30	1	1	3	3	5	4
12.30	1	6	3	2	6	
1.30	2	5	3	4	5	
2.30	2	5	6	6	6	

وهذا يعني ان الباحث استمر بتسجيل اعداد الاطارات الواصلة لمكائن بناء الاطار ولمدة (45) ساعة (اسبوع واحد) بهدف الحصول على المعلومات الكافية والجدول رقم (2) يبين جدول التوزيع التكراري لعدد الاطارات الواصلة لمرحلة بناء الاطار بشكله النهائي .

جدول رقم (2)
التوزيع التكراري لاعداد الاطارات الواصلة

عدد الوصول (اطار)	التكرار الفعلي (ساعة)
1	12
2	7
3	10
4	5
5	4
6	7

المجموع	**45**

اما البيانات المتعلقة بوقت الخدمة للاطار ذي الحجم (28-14) زراعي الحجم الكبير في ماكنة بناء الاطار فقد لاحظ الباحث من خلال العملية الانتاجية والاستفسار من السادة المسؤولين (المهندسين) بان وقت الخدمة هو وقت ثابت لكل اطار وكان بمقدار (15) دقيقة لكل اطار حيث ان الماكنة الواحدة تعالج في الساعة اربعة اطارات .

2- استخدام اختبار مربع كاي لحسن المطابقة.

قام الباحث باستخدام البرنامج الجاهز QSB لمعرفة مدى ملائمة البيانات التي تمثل اعداد الاطارات الواصلة لمرحلة بناء الاطار لتوزيع بواسون من خلال اختبار χ^2 لحسن المطابقة، وقد كانت نتائج الاختبار كما موضح بالجدول الاتي:

جدول رقم (3)

اختبار حسن المطابقة لاعداد الإطارات

05-02-2002	Mu=3.0667	Sigma=1.7761	No. points=45	No. cells=7
11:54:55	Max.=6.4167	Min.=0.5833	Range =5.8333	Cell width=0.8333
No.	From value	To value	Actual Frequency	Expected frequency
1	0.5833	1.4167	12	0
2	1.4167	2.2500	7	9.8555
3	2.2500	3.0833	10	10.0745
4	3.0833	3.9167	0	7.7238
5	3.9167	4.7500	5	4.7373
6	4.7500	5.5833	4	2.4213
7	5.5833	6.4167	7	0
	Skewness=0.3906	Kurtosis=-1.1176	Alpha = 0.0500	Deg. Frdm.=5
	Chi-square=	9.5956	Critical value =	11.0704
	Poisson	Distribution	Chi-square Test	Is passed!!

	**The cell width	May be too small	Or the number of data	May be to small.**

ونلاحظ من الجدول ان البيانات التي تمثل اعداد الاطارات الواصلة تتبع توزيع بواسون بمعدل وصول ($\lambda = 3.06$) بالساعة.
وحيث اننا لاحظنا ان وقت الخدمة في مكائن بناء الاطار هو قيمة غير متغيرة (أي تقريبا قيمة ثابته) أي ان وقت الانتظار لايمكن التكهن باتباعه لاحدى التوزيعات الاحتمالية حيث كان وقت الخدمة لكل اطار تقريبا عدد ثابت وهو (15) دقيقة فهذا يعني عدم تحقق شروط عملية بواسون والتي تتمثل بان توزيع اعداد الاطارات الواصلة تتبع توزيع بواسون و (او) ان توزيع وقت الخدمة يتبع التوزيع الاسي.

3- تطبيق النموذج $(M/D/1)$

ان هذا النموذج يعني ان هناك مقدم خدمة واحد وتوزيع وقت الخدمة هو توزيع عام غير معروف وان توزيع اعداد الواصلين لتلقي الخدمة هو توزيع بواسون . وقبل البدء بتطبيق معادلات هذا النموذج يجب ايجاد معامل الانتفاع او ما يسمى بكثافة المرور (ρ) حيث ان :-

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

علما ان

$\lambda = 3.06$ اطار/ ساعة

$\mu = \frac{60}{15} = 4$ اطار/ساعة

$\rho = \frac{3.06}{4} = 0.765$ اطار/ساعة

حيث نلاحظ ان الشرط ($\rho < 1$) قد تحقق وهذا يعني ان (0.77) من الزمن المتاح لماكنة بناء الاطار ذي الحجم (28-14) زراعي كبير هو زمن مستخدم.
سنقوم الان بحساب مقايس النموذج (M/D/1) وذلك بالشكل الاتي:-

1- باستخدام المعادلة (10) نلاحظ ان العدد المتوقع للاطارات في النظام هو:-

$$l_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = 0.765 + \frac{(0.765)^2}{2(1-0.765)} = 2.020 \approx 2$$

من المعادلة (11) نلاحظ ان وقت انتظار الاطار الواحد المتوقع في النظام هو :-

$$w_s = \frac{l_s}{\lambda} = \frac{2}{3.06} = 0.653$$ **ساعة**

= 39.18 ≈ 39 دقيقة

١- وفق المعادلة (12) نحسب العدد المتوقع للاطارات في صف الانتظار كما ياتي:-

$$l_q = l_s - \rho = 2 - 0.765 = 1.255 \approx 1$$ اطار

من المعادلة (13) نحسب وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار وهو :-

$$w_q = \frac{l_q}{\lambda} = \frac{1.255}{3.06} = 0.410$$ ساعة

$= 24.607 \approx 25$ دقيقة

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

١- ان زمن انتظار الاطار لتلقي الخدمة بمكائن بناء الاطار في صف الانتظار (w_q) هو (25) دقيقة وهو وقت طويل جدا مقارنتا بالعدد الكبير للعجنات التي تصل من قسم تصنيع المواد النصف مصنعة.

٢- ان زمن انتظار الاطار في النظام (w_s) هو (39) دقيقة وهو وقت طويل جدا.

٣- عدد الاطارات المتوقع في النظام (l_s) هو (2) اطار.

٤- عدد الاطارات المتوقع في الصف (l_q) هو واحد اطار.

٥- من المقاييس اعلاه نلاحظ بان النموذج (M/D/1) وضح لنا بان العملية الانتاجية لمرحلة بناء الاطار كفوءة ومنضبطة وفقا لمقاييس الشركة.

التوصيات

بناءا على النتائج التي توصلنا اليها نوصي بما يلي :

١- زيادة عدد قنوات الخدمة المتمثلة بمكائن بناءالاطار لتكون اكثر من ماكنة وبالتالي تقليل زمن الانتظار في الصف (w_q)

٢- عند زيادة عدد المكائن فهذا يعني رفع كفاءة النظام وتقليل وقت الانتظار.

٣- نوصي باجراء عمليات الصيانة المستمرة للماكنة الوحيدة المتوفرة في مرحلة بناء الاطار.

المصادر:

1- الربيعي ، فاضل محسن و صلاح حمزة (2000) " مقدمة في العمليات التصادفية "مديرية دار الكتب للطباعة والنشر – بغداد

2- ذنون ، باسل يونس (1989) " الاحتمالية والمتغيرات العشوائية" جامعة الموصل – كلية العلوم ، مطبعة جامعة الموصل.

3- Taha , H. (1987) “Operation Research an introduction” ; Fourth edition , Macmillian publishing company , USA.