تأثير القيم الشاذة على التنبؤ باستخدام طريقة التمهيد الأسي الأحادي التكيفي

دراسة مقارنة بين الطريقة التقليدية وطريقة دالة الطيف

طاهر ريسان دخيل(*)

علي جواد كاظم(**)

الملخص

لا يخفى على احد مدى تأثير القيم الشاذة على طرائق التنبؤ كافة وضمنها طريقة التمهيد الاسي التكيفية ففي هذا البحث تم دراسة تأثير هذه القيم في طريقتين تعنى بإيجاد القيمة المثلى لثابت التمهيد التكيفي α, والذي يستخدم في طريقة التمهيد الأسي التكيفية Adaptive Single Exponential smoothing وهاتان الطريقتان هما الطريقة التقليدية والتي تستخدم ضمن مجال الزمن Time Domain وطريقة دالة الطيف والتي تستخدم ضمن مجال الترددات Frequency Domain حيث كان مجال الدراسة ضمن السلاسل الزمنية ولنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) أو نموذج ماركوف Markov Model عندما تكون السلسة مستقرة أو غير مستقرة وعند أحجام عينات مختلفة .

المقدمة Introduction

إن الهدف من السلسلة الزمنية Time Series هو لاكتشاف نمط الظاهرة المدروسة وذلك بتسجيل قيمتها الماضية والتغيرات التي تطرأ عليها خلال الزمن كي تمهد لنا طريق دراسة هذه التغيرات وسيكون بمقدورنا إحصائيا التنبؤ بشكل دقيق ومعرفة المؤثرات التي تؤثر على تطور الظاهرة وتبعاً لكيفية عمل طريقة التنبؤ فأن قسم أو جزء من طرائق التنبؤ بالسلاسل الزمنية يسمى بالطرائق التنبؤية التمهيدية Smoothing Forecasting Method وفي هذا النوع يتم تمهيد Smooth أو تنعيم السلسلة الزمنية وذلك باستخدام حد يدعى بحد التمهيد α وحسب نوع التمهيد فانه يمكن تقسيم الطرائق إلى نوعين هما :-

- الطرائق التمهيدية باستخدام حد تمهيد ثابت ، وفي هذه الحالة فان حد التمهيد يكون ثابتاً عند جميع عمليات التنبؤ ، ومن الطرائق التي تستخدم حد تمهيد ثابت ، طريقة التمهيد الاسي الأحادية Single Exponential Smoothing وطريقة هولت – ونتر Holt-Winter Method .

(*) مدرس الاحصاء /جامعة القادسية / كلية الإدارة والاقتصاد /قسم الاحصاء

(**) مدرس الإحصاء/ جامعة القادسية / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

- الطرائق التمهيدية باستخدام حد تمهيد متغير وهذه الطرائق هي عكس الطرائق السابقة، اذ يتغير حد التمهيد من فترة إلى أخرى ، ومن الطرائق التي تستخدم حد تمهيد متغير، طريقة التمهيد الآسي الأحادية التكيفية Single Adaptive Exponential Smoothing .

هدف البحث Purpose of Study

يهدف هذا البحث إلى دراسة مقارنة بين الطريقة التقليدية Classical Method وطريقة تحليل الطيف Spectral Analysis باستخدام منفذي Tukey Window و Parzan Window لحساب قيمة ثابت التمهيد التكيفي α_t وذلك عند وجود قيم شاذة Outlier valuesفي نموذج ماركوف Markov Model بغية معرفة أفضلية الطريقتين في حساب التنبؤات المستقبلية وباستخدام سلاسل زمنية مستقرة وغير مستقرة وعند أحجام عينات مختلفة ، وقد استخدمت المحاكاة Simulation لتحقيق هذا الغرض .

طريقة التمهيد الآسي الأحادية التكيفية (ASES) [1][3][4][5]

Adaptive Single Exponential Smoothing

إن طريقة التمهيد الآسي (SES) Single Exponential Smoothing أحد طرائق التنبؤ بالتمهيد الاسي Exponential Smoothing التابعة للسلاسل الزمنية Time Series والتي تعتمد بشكل أساسي على تحديد قيمة ثابت التمهيد α الذي تقع قيمته بين الصفر والواحد ومن ثم التنبؤ باستخدام المعادلة التالية

$$F_{t+1} = \alpha\, x_t + (1-\alpha)\, F_t \cdots\cdots\cdots 1$$

إذ أن $t = 1,2,\ldots\ldots T$

F_t ، F_{t+1} هي القيم التنبؤية عند الزمن t و $t+1$ على التوالي

x_t هي المشاهدات الحقيقية عند الزمن t

وبالاعتماد على هذه الطريقة فانه يتم اختيار حد التمهيد α ويكون قيمة ثابتة لكل عمليات التنبؤ التي يتم إجراءها ،هذه القيمة الثابتة وحسب رأي هذه الطريقة ستؤثر على قيم متوسطات مربعات الأخطاء MSE مما يعطي تأثيراً واضحاً لهذا الثابت . أما طريقة التمهيد الآسي الأحادية التكيفية (ASES) فتتعامل مع هذا الحد ليس كثابت وإنما كمتغير يعتمد على دالة معينة والتي تعتمد بدورها على الزمن t ، وبذلك فان معادلة التنبؤ الخاصة بهذه الطريقة هي كما يلي:-

$$F_{t+1} = \alpha_t x_t + (1-\alpha_t)\, F_t \cdots\cdots\cdots 2$$

وأن جميع الحدود هي كما ذكرت في المعادلة (1)

وقد دأبت الدراسات في ابتكار طرق لحساب α_t منها :

الطريقة التقليدية لحساب α_t [1][3]

يمكن الحصول على α_t والتي تتطلبها المعادلة رقم 2 من خلال المعادلة التالية

$$\alpha_{t+1} = \left|\frac{A_t}{M_t}\right| \cdots\cdots\cdots 3$$

إذ أن

$$A_t = \beta e_t + (1-\beta)\, A_{t-1} \cdots\cdots\cdots 4$$

$$M_t = \beta\,|e_t| + (1-\beta)\, M_{t-1} \cdots\cdots\cdots 5$$

$$e_t = x_t - F_t$$

إذ أن β ثابت تقع قيمته بين الصفر والواحد الصحيح ويتم اختياره بحيث يجعل MSE اقل ما يمكن.

ونلاحظ من خلال المعادلتين (4) و (5) أن هناك قيم ابتدائية يجب الحصول عليها كي يتم البدء باستخدام هذه الطريقة ، لذلك يمكن أن تعطى القيم الأولية التالية وعندما يكون t =1وكما يلي:

$$F_{t+1} = F_{1+1} = F_2 = x_1$$

هذا يعني أن القيمة الأولية للتنبؤ عند الفترة $t+1=2$ يمكن أن تكون القيمة الحقيقية للمشاهدة الأولى x_1.

أما قيم α_i الأولية i=1,2,3,4 فيمكن أن تعطى مساوية إلى قيمة الثابت βفلو كان $\beta = 0.4$ فان $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta = 0.4$ أما قيم A_1 و M_1 الأولية فيمكن وضعها مساوية إلى الصفر والواحد على التوالي.

طريقة الطيف لحساب α_t Spectral Method to calculat α_t [2][6]

لقد أقترح الباحثان Shapiro وRao عام 1970 طريقة لحساب ثابت التمهيد التكيفي α_t حيث تعتمد هذه الطريقة على دالة الطيف Spectral Function ،فعلى فرض أن x_t و $t = 1,2,\cdots,T$ هي سلسلة زمنية ،إذن يمكن تعريف دالة كثافة الطيف كالأتي

$$f_x(w) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k \;\; e^{iwk} \cdots\cdots\cdots 6$$

i هو عدد خيالي

γ_k هي دالة التباين المشترك لـــ x_t

w هي التردد والتي تقع ضمن الفترة $(0,\pi)$

T طول السلسلة الزمنية

وعلى فرض أن السلسلة الزمنية x_t مستقرة فان المقدر للطيف يمكن أن يكون بالشكل الأتي

$$\hat{f}_x(w)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-M}^{M}\lambda_k C_k\, e^{iwk}\,\cdots\cdots 7$$

إذ أن

C_k هي دالة التباين المشترك لـــ x_t

λ_k هي المنفذ Window الذي يتم اختياره بشكل مناسب

وان $M<T$ تسمى نقطة البتر Truncation Point

أما إذا كانت x_t غير مستقرة فان الطيف يمكن أن يقدر داخل كل منفذ Window متراكب .

وإذا افترض أن السلسلة الزمنية مستقرة في كل منفذ Windowوبطول ثابت على سبيل المثال إذا كانت السلسلة الزمنية x_t ، t = 1,2,…T حيث أن T = 60 وتم اخذ q = 15 من المنافذ ، إذن سيكون كل منفذ يحتوي على T - q + 1= 46 من المشاهدات ، ويقدر الطيف لكل من $x_1,x_2,\cdots,x_{46}$ و $x_2,x_3,\cdots,x_{47}$ والى أن نصل إلى $x_{15},x_{16},\cdots,x_{60}$ ولكل منفذ من هذه المنافذ سوف يقدر الطيف عند مجموعة من الترددات والذي يكون نصف عدد البيانات .

وحسب رأي Shapiro و Rao فان التغيرات في تركيب السلسلة الزمنية سيكون واضحا من خلال الفروقات في القيم المطلقة للوغاريتم الأطياف المتتابعة هذا يعني $|\ln\hat{f}_t(w_k)-\ln\hat{f}_{t+1}(w_k)|$ وفي أدناه الآلية التي استخدمها Shapiro و Rao عام 1970 حيث تم استخراج الأوساط المتحركة لثلاثة قيم من $\ln\hat{f}_t(w_k)$ وكالاتي

$$\delta_{tk}=\frac{1}{3}\left[\ln\hat{f}_{t-2}(w_k)+\ln\hat{f}_{t-1}(w_k)+\ln\hat{f}_t(w_k)\right]-\ln\hat{f}_t(w_k)\cdots\cdots 8$$

ومن ثم يتم اختيار القيمة الأكبر من قيم تمهيد الطيف وبغض النظر عن الإشارة أي أن

$$\Delta t=Max_k|\delta_{tk}|\cdots\cdots 9$$

فإذا كانت قيمة Δt صغيرة بالمقارنة مع الانحراف المعياري الخاص بها فان هذا يتضمن بأنه لا تظهر تغيرات واضحة في تركيب السلسلة الزمنية وبالتالي فان القيمة الواطئة من ثابت التمهيد هي الأفضل.أما إذا كانت قيمة Δt كبيرة بالمقارنة مع الانحراف المعياري الخاص

بها فان قيمة ثابت التمهيد التكيفي يجب أن تزداد تصاعدياً نحو الواحد ، وقد استخدم Shapiro وRao الطريقة التالية لتحديد قيمة ثابت التمهيد التكيفي α_t

$$\beta_t = b + c(\Delta t/\sigma)^2 \cdots\cdots\cdots 10$$

إذ أن

σ هو الانحراف المعياري لـ δ_{tk}

c,b تحدد من الشرطين التاليين

$b + r_1^2 c = 0.67$ و $b + r_2^2 c = 0.095$

بحيث أن

$$\alpha_t = Max\left[0.1, Min\left((\exp(\beta_t) - 1), 1\right)\right] \cdots\cdots\cdots 11$$

r_1 تمثل قيمة $\frac{\Delta t}{\sigma}$ التي ترفع التغير في α_t نحو 0.95

r_2 تمثل قيمة $\frac{\Delta t}{\sigma}$ التي تبقي α_t عند 0.1

بحيث يتم اختيار r_2, r_1 بالاعتماد على التوزيع التقريبي لـ Δt

فقد اثبت كل من Shapiro وRao عام 1970 أن

$$p(\Delta t < \chi) = Exp\left(-n\, P\left(|\delta_{tk}| > \chi\right)\right) \cdots\cdots\cdots 12$$

حيث أن χ هو جذر المقدار χ^2

وان n هو عدد نقاط التردد في كل منفذ وبما أن $\ln \hat{f}_t(w_k)$ يتوزع توزيع طبيعي تقريبي ،إذ يكون δ_{tk} والذي يمثل التركيبة الخطية لقيم $\ln \hat{f}_t(w_k)$ هو أيضاً يتوزع توزيع طبيعي تقريبي ، وان المقدار $\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2}$ يتوزع توزيع مربع كاي تقريبي بدرجة حرية واحدة .

ولإيجاد قيمة χ بحيث أن $P(\Delta t < \chi) = 0.99$ فانه يمكن الملاحظة من معادلة رقم 12 أن

$$P\left(|\delta_{tk}| > \chi\right) = \frac{-\ln(0.99)}{n} \cdots\cdots\cdots 13$$

وهذا يتضمن أن

$$P\left[\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2} > \frac{\chi^2}{\sigma^2}\right] = \frac{-\ln(0.99)}{n} \cdots\cdots\cdots 14$$

إذ يمكن تحديد قيمة مربع كاي وذلك بالاعتماد على قيمة n .

ومن هنا فانه يتم اختيار r_1 لتمثل النقطة $\frac{\chi}{\sigma}$ وهذا يعني بان α_t ستبدأ بـ 0.95 عندما $P(\Delta t < \chi) = 0.99$.

أما r_2 فيتم اختيارها اقل من $\frac{\chi}{\sigma}$ والتي تبقي α_t عند 0.1 عندما $P(\Delta_t > \chi) = 0.99$.

كذلك يمكن كتابة المعادلة التالية من خلال المعادلة رقم 12

$$P(|\delta_{tk}| > \chi) = \frac{-\ln(0.01)}{n} \cdots\cdots\cdots 15$$

ومن هنا فان r_2 هي أدنى من $\frac{\chi}{\sigma}$ بحيث أن

$$P\left(\frac{\delta_{tk}^2}{\sigma^2} > \frac{\chi^2}{\sigma^2}\right) = \frac{-\ln(0.01)}{n} \cdots\cdots\cdots 16$$

ويمكن اختيار عدد نقاط الترددات بحيث أن

$$0 \le \frac{-\ln(0.99)}{n} \le 1 \qquad , \qquad 0 \le \frac{-\ln(0.01)}{n} \le 1$$

وبعد تحديد قيمة α_t من خلال المعادلة رقم 11 فانه يمكن إيجاد التنبؤ بموجب طريقة التمهيد الاسي التكيفي لـ x_{t+1} وحسب المعادلة رقم (2)

منافذ الطيف Spectral Windows [1][7]

لقد رأينا من خلال دالة الطيف Spectral Function والموصوفة في المعادلة رقم 7 بأنها تتطلب حساب ما يسمى بالمنفذ Window والذي هو ببساطة عبارة عن مجموعة من الأوزان يتم اختيارها وفق دوال مقترحة من قبل بعض الباحثين . وسيتم شرح منفذين فقط وهما اللذان استخدما في هذا البحث وهما :-

* منفذ Tukey (Tukey Window) ، حيث يمكن تمثيل هذا المنفذ ضمن دالة وبالشكل الآتي

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)\right) \qquad k = 0,1,\cdots M \qquad \cdots\cdots\cdots 17$$

* منفذ Parzen (Parzen Window) حيث يمكن تمثيل هذا المنفذ ضمن دالة وبالشكل التالي

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{k}{M}\right)^3 & 0 \le k \le \frac{M}{2} \\ 2\left(1 - k/M\right)^3 & M/2 \le k \le M \end{cases} \cdots\cdots\cdots 18$$

وان M تسمى نقطة البتر Truncation Point ويتم اختيارها بشكل مناسب بحيث يجب أن لا تكون صغيرة وبالتالي فان الخصائص المهمة لـ $f(w)$ يمكن أن تختفي ولا أن تكون كبيرة جداً بحيث لا يصبح هناك داعي لاستخدام دالة الطيف Spectral Function لعدم تأثير التمهيد لهذه الدالة، ولقد اقترح الباحث C.Chatfield أن يتم اختيار نقطة البتر بحيث تكون $M = 2\sqrt{n}$

المحاكاة Simulation

لقد تم استخدام المحاكاة لغرض إيجاد قيم MSE وذلك بعد إيجاد التنبوات لسلاسل زمنية مستقرة متمثلة بقيم $\phi = 0.1, 0.8$ وغير مستقرة متمثلة بقيم $\phi = 1.1$ وعند أحجام العينات التالية n= 20, 40 ,80 لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) أو نموذج ماركوف Markov Model التالي

$$x_t = \phi x_{t-1} + e_t$$

وقد تم تلويث حد الخطأ العشوائي e_t بنسب 10% و 20% من توزيعات مستمرة هي توزيع مربع كاي بالمعلمة T والتي تمثل حجم العينة ،والتوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{3}$ ، والتوزيع اللوغارتمي الطبيعي بالمعلمتين $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ وقد تم إعادة التجربة 1000 لضمان استقرار النتائج المستحصلة وسوف نشير في تحليل النتائج إلى المصطلحات التالية بالاختصارات المقابلة لها وهي

المختصر	الإشارة إلى
C	الطريقة التقليدية
T	طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey
P	طريقة الطيف باستخدام منفذ Parzen
الحالة الأولى	عندما لا يكون هناك تلوث في البيانات
الحالة الثانية	عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع الاسي
الحالة الثالثة	عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع اللوغارتيمي الطبيعي
الحالة الرابعة	عند وجود تلوث في البيانات بتوزيع مربع كاي

عرض النتائج Results

1- الحالة الأولى

نلاحظ من خلال جدول رقم (1) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند عدم وجود تلوث في البيانات بأنه قيم MSE تكون متوازية بصورة عامة عند زيادة حجم العينة ونلاحظ أيضاً أن قيم هذا المعيار تكون اقل في حالة $\phi = 0.8$. ويمكن ملاحظة أن طريقة الطيف تكون أفضل من الطريقة التقليدية و لكلا المنفذين المستخدمين وذلك عندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة عندما $\phi = 1.1$ وعندما $\phi = 0.8$ بينما أعطت الطريقة التقليدية قيماً اقل لـ MSE في حالة السلسلة الزمنية المستقرة وعندما $\phi = 0.1$.

2- الحالة الثانية

يتبين من خلال الجدول رقم (2) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بنسبة 10% و20% بالتوزيع الاسي بان التأثر بهذه البيانات الملوثة بدا واضحاً من خلال ارتفاع قيم MSE بصورة عامة عما كانت عليه عند عدم وجود التلوث ونلاحظ أيضاً انه كلما زادت نسبة التلوث وزاد حجم العينة فان التأثير يكون اكبر .وقد كانت أفضل الطرق في هذه الحالة هي الطريقة التقليدية عندما تكون السلسلة مستقرة عند $\phi = 0.1$ وكذلك طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey عندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة عندما $\phi = 1.1$ وعندما تكون مستقرة عند $\phi = 0.8$.وأيضاً نلاحظ أن تأثر السلسلة الزمنية الغير مستقرة $\phi = 1.1$ كان أكبر من تأثر السلاسل الزمنية المستقرة .

3- الحالة الثالثة

توضح نتائج الجدول رقم (3) بان قيم المعيار تزداد بزيادة نسبة التلوث وحجم العينة ونلاحظ أيضاً أن الطريقة التقليدية كانت الأفضل عندما $\phi = 0.1$.بينما طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey كانت الأفضل عندما $\phi = 0.8 , 1.1$، وبصورة عامة فان السلسلة الزمنية الغير مستقرة تأثرت أكثر من تأثر السلاسل الزمنية المستقرة بالتلوث في البيانات .

4- الحالة الرابعة

ان قيم معيار MSE يزداد عند زيادة نسبة التلوث وزيادة حجم العينة ونلاحظ أيضاً أن الطريقة التقليدية كانت الأفضل عندما $\phi = 0.1$.كذلك ان طريقة الطيف باستخدام منفذ Parzen كانت الأفضل عند حجم العينة 20 ولكن طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey تصبح هي الأفضل عند زيادة حجم العينة .ونلاحظ ايضا أن السلسلة الزمنية الغير مستقرة كانت أكثر تأثراً بالقيم الشاذة من بقية الطرائق. هذا ما نلاحظه من خلال الجدول رقم (4) في الملاحق والذي يمثل قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بتوزيع مربع كاي

الاستنتاجات

يمكن أن نضع بعض الاستنتاجات من خلال ما تم تحليله وملاحظته من الجداول الأربعة في الملاحق والتي تمثل قيم MSE عند وجود وعدم وجود تلوث في البيانات ومن هذه الاستنتاجات:-

1- إن جميع الطرائق المستخدمة تتأثر بصورة كبيرة بالقيم الشاذة في البيانات .
2- عندما تزداد نسبة التلوث في البيانات يكون له تأثيراً سلبياً على طرائق التنبؤ .
3- عند زيادة حجم العينة وعند وجود تلوث في البيانات تكون الطرائق متأثرة بهذا التلوث أكثر.
4- إن أفضل طريقة يمكن استخدامها عند السلسلة الزمنية المستقرة $\phi = 0.1$ هي الطريقة التقليدية .
5- إن أفضل طريقة يمكن استخدامها في السلسلة الزمنية الغير مستقرة $\phi = 1.1$ وعندما تكون السلسلة الزمنية مستقرة وبالمعلمة $\phi = 0.8$ هي طريقة الطيف باستخدام منفذ Tukey .
6- إن السلسلة الزمنية الغير مستقرة هي أكثر تأثراً بالقيم الشاذة من السلاسل الزمنية المستقرة ولجميع طرائق التنبؤ المستخدمة .

Reference **المصادر**

1- Chatfield,C.1984 "The Analysis Of Time Series An Introduction " Chapman an Mall .

2- Elizabeth, A.M.2003 " Using Evolutionary Spectra To Forecast Time Series" Working Paper 4.Monash University .

3- Makridakis,S.,Wheelwright,S.And Hyndman,.R.(1997) "Forecasting Method And Applications Third Edition" John Wiley And Sons, New York.

4- Park, D.,Rilett,L.And Han, G.(1999) " Spectral Basis Neural Network For Real Time - Travel Time Forecasting" , Journal Of Transportation Engineering 125-515.

5- Priestley,M.B.(1965) " Evolutionary Spectra And Non – Stationary Processes" Journal Of The Royal Statistical Society,(B),27, 204 - 237.

6- Rao,A.G.And Shapiro, A.(1970). " Adaptive Smoothing Evolutionary Spectra" ,Management Science,17,208 – 281.

7- Wie, W.W.S. (1990) " Time Series Analysis : Univariate And Multivariate Methods" Addison – Wesley Publishing Company Inc.

الملاحق

جدول رقم (1)

قيم MSE عند عدم وجود تلوث

Normal (0, 1)

ϕ	الطريقة	n=20	n=40	n=80
0.1	C	113.8	150.11	136.94
	T	183.93	153.27	155.87
	P	151.75	184.94	163.52
0.8	C	31.09	33.98	52.8
	T	10.06	12.95	29.86
	P	11.61	26.31	40.01
1.1	C	166.09	169.24	158.34
	T	145.79	71.62	100.16
	P	100.3	47.22	63

جدول رقم (2)

قيم MSE عند وجود تلوث بالتوزيع الاسي

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	197.06	182.4	174.61	154.45	168.04	149.14
	T	235.83	254.91	234.15	234.15	211.51	179.47
	P	222.02	198.48	206.88	174.02	187.92	171.03
0.8	C	136.81	110.28	135.42	102.62	123.83	96.16
	T	118.04	76.45	91.8	66.14	87.11	64.34
	P	130.53	92.64	113.23	84.78	113.28	78.51
1.1	C	546.99	372.66	536.81	359.56	482.14	331.57
	T	271.38	216.95	238.12	195.18	207.29	165.08
	P	282.1	260.14	259.03	233.81	209.54	177.42

جدول رقم (3)
قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بالتوزيع
اللوغارتيمي الطبيعي

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	229.95	195.05	206.05	166.17	183.22	165.11
	T	241.66	195.08	226.98	184.41	213.52	172.98
	P	257.33	226.11	233.85	189.18	209.62	188.9
0.8	C	119.41	92.84	117.58	87.92	99.4	69.95
	T	83.24	74.08	109.92	67.03	69.37	56.95
	P	101.43	76.23	98.27	68.5	74.85	48.83
1.1	C	354.91	347.73	298.93	292.93	274.95	138.6
	T	338.58	277.03	267.7	205.11	165.59	130.92
	P	339.93	284.67	279.58	222.15	169.65	126.14

جدول رقم (4)
قيم MSE عند وجود تلوث في البيانات بتوزيع
مربع كاي

ϕ	الطريقة	n=20		n=40		n=80	
		نسبة التلوث		نسبة التلوث		نسبة التلوث	
		10%	20%	10%	20%	10%	20%
0.1	C	348.76	285.85	236.38	217.99	198.75	140.57
	T	354.31	336.34	316.68	254.68	300.79	194.07
	P	371.81	301.43	258.42	242.19	218.73	166.62
0.8	C	264.7	232.74	167.7	132.94	162.35	89.93
	T	227.44	203.85	136.88	149.58	153.59	73.63
	P	235.53	203.95	146.32	111.09	139.71	71.77
1.1	C	505.41	499.17	445.27	443.51	218.14	215.4
	T	403.44	328.8	318.52	278.81	217.94	131.71
	P	498.85	408.17	483.25	383.19	187.88	180.95