УДК 517.9

М.Н. НЕБОЛЬСИНА, ГИМ МЕТХАК ХАМЗА ГИМ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В практических исследованиях при описании переходных процессов, начавшихся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения, рассматриваются так называемые задачи без начальных данных. К ним, в частности, относятся рассматриваемые здесь задачи.

При $t\in(-\infty,+\infty), x\ge 0$, ставятся задачи отыскания решения уравнения

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}=\nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+(1-\nu)p(t,x)-(1-\nu)\gamma^2\int_{-\infty}^{t}e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds=L_t p(t,x) \tag{1}$$

и краевые условия

$$p(t,0)=q(t), \lim_{x\to\infty}|p(t,x)|=0, \tag{2}$$

где $q\in C_{[-\infty,+\infty]}$. Здесь $C_{[-\infty,+\infty]}$ – банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $(-\infty,+\infty)$ функций с нормой $\|q\|_C=\sup_{t\in(-\infty,+\infty)}|q(t)|$. Здесь ν – доля объема проточных зон, γ – константа массообмена между проточными и застойными зонами, a – коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0}=\varphi(t). \tag{3}$$

Ниже доказывается следующая теорема.

Теорема. Задача 1–2 имеет единственное решение, которое представимо в виде:

$$p(t,x)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}U(s,-A)q(t)ds.$$

где $U(x,-A)q(t)=e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\int_0^\infty I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})e^{-\gamma s}q(t-\frac{\nu}{a}x-s)ds,$

где $I_1(z)$ – функция Бесселя первого рода. При этом справедливы оценки:

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}|p(t,x)|\le e^{[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]^{\frac{1}{2}}x}\|q\|_C.$$

Доказательство.

Здесь мы используем довольно общий метод С.Г. Крейна решения краевых задач для уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве [4, с. 322]. Аналогичные исследования с применением теории полугрупп проводились в [3–5].

При таком подходе систему 1–2 запишем в операторной форме:

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2}=Ap(x), x>0, \tag{4}$$

$$p(0)=q, \lim_{x\to\infty}\|p(x)\|_C=0, \tag{5}$$

где оператор A задается интегро-дифференциальным выражением $\frac{1}{a}L_p$ и областью определения:

$$D(A)=\{u\in C_{[-\infty,\infty]},\frac{du}{dt}\in C_{[-\infty,\infty]}\},\tag{6}$$

$C_{[-\infty,\infty]}$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $[-\infty,\infty]$ функций с нормой $\|u\|=\sup_{t\in(-\infty,\infty)}|u(t)|$. Тогда, если для оператора A определен оператор $\sqrt{A}$, то решение задачи 4–5 по теореме С.Г. Крейна [4, с. 323] имеет вид:

$$p(x)=U(x,-\sqrt{A})q,\tag{7}$$

где $U(x,-\sqrt{A})$ – сильно непрерывная в $C_{[-\infty,\infty]}$ полугруппа линейных преобразований с генератором $-\sqrt{A}$.

И задача вычисления функции $\varphi(t)$ сводится к вычислению

$$\frac{dp}{dx}|_{x=0}=-\sqrt{A}q=-AA^{-\frac{1}{2}}q.\tag{8}$$

Таким образом, для получения решений задач 1–2 и 3 необходимо построить оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полугруппу $U(x,-\sqrt{A})$, имеющую, в силу [3], представление:

$$U(x,-\sqrt{A})q=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\exp(-\frac{x^2}{4s})}{s^{\frac{3}{2}}}U(s,-A)qds=-\frac{A}{\pi}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)qds,\tag{9}$$

где $U(x,-A)$ – сильно непрерывная полугруппа с генератором –А.

Оператор А представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1u(t)=\frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt}+\frac{1-\nu}{a}u(t)\tag{10}$$

и областью определения $D(A_1)=\{u\in C_{[-\infty,\infty]},l_1u\in C_{[-\infty,\infty]}\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2u(t)=-\frac{1-\nu}{a}\gamma^2\int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds=-\frac{1-\nu}{a}\gamma^2\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}u(t-\tau)d\tau.\tag{11}$$

Нетрудно видеть, что оператор A_2 ограничен в $C_{[-\infty,\infty]}$ в силу очевидной оценки

$$\|A_2u\|\le\frac{1-\nu}{a}\gamma\|u\|,u(t)\equiv 1,\|A_2\|=\frac{1-\nu}{a}\gamma.\tag{12}$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Это следует из легко проверяемого равенства:

$$\int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)}u'(s)ds=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds.\tag{13}$$

Полугруппа $U(x,-A_1)$ с генератором A_1 имеет вид:

$$U(x,-A_1)u(t)=e^{-\frac{1-\nu}{a}x}u(t-\frac{\nu}{a}x).\tag{14}$$

Отсюда следует равенство:

$$\|U(x,-A_1)\|=e^{-\frac{1-\nu}{a}x}.\tag{15}$$

Далее для получения представления полугруппы $U(x,-A_2)$ воспользуемся рядом:

$$U(x,-A_2)u(t)=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}(-A_2)^nu(t),\tag{16}$$

где:
$$(-A_2)^n u(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-\nu)^n \gamma^{2n}}{a^n (n-1)!} \int_0^\infty e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s)ds, & n = 1,2,...; \\ I, & n = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

I – тождественный оператор.

Это дает оценку:
$$\|A_2^n u\| \le \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n}}{a^n (n-1)!} \int_0^\infty e^{-\gamma s} s^{n-1} ds \|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n \gamma^n \|u\|. \qquad (18)$$

Оценивая полугруппу 16, используя 17, получаем оценку:
$$\|U(x,-A_2)u\| \le \|u\| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-\nu}{a})^n \frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x} \|u\|. \qquad (19)$$

Теперь нетрудно видеть, что из 15 и 19 следует оценка:
$$\|U(x,-A)\| \le \|U(x,-A_1)\| \|U(x,-A_2)\| \le exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \qquad (20)$$

Далее, пользуясь 17 в 16, получаем представление:
$$U(x,-A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n}{a^n (n-1)! n!} \int_0^\infty e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s)ds = u(t) + \int_0^\infty (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n s^{n-1}}{a^n (n-1)! n!}) e^{-\gamma s} u(t-s)ds =$$
$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^\infty (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}\gamma]^{2m}}{m!(m+1)!}) e^{-\gamma s} u(t-s)ds = u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^\infty e^{-\gamma s} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}) u(t-s)ds.$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода [6, с. 642].

Теперь, пользуясь 14, получаем выражение для композиции полугрупп:
$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \int_0^\infty I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}) e^{-\gamma s} u(t - \frac{\nu}{a}x - s)ds. \qquad (21)$$

Используя 18 в 8 получаем представление для градиента решения задачи 1–2
$$\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}} q(t) = \frac{1}{\pi} A \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) q(t) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) Aq(t) ds. \qquad (22)$$

В последнем равенстве учтено условие $q(0) = 0$. Из 22, 19 и 15, в частности для $q \in D(A)$ следует оценка:
$$\|\varphi\| \le \frac{1}{\pi} \|Aq\| \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}s} ds = (\frac{a}{\pi(1-\nu)(1-\gamma)})^{\frac{1}{2}} \|Aq\|. \qquad (23)$$

Список литературы

1. Бабенко, Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю.И. Бабенко. – СПб. : НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 631 с.
3. Иосида, К. Функциональный анализ : учебник / К. Иосида; пер. с анг. В.М. Волосова. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
4. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 464 с.

5. Костин, В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 428. – № 1. – С. 20–22.

6. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач : учебное пособие для вузов; изд. 3-е исправленное / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука. Гл.ред.физ.мат.лит, 1986. – 288 с.

References

1. Babenko, Ju.I. Metody drobnogo integrodifferencirovanija v prikladnyh zadachah teorii teplomassoobmena / Ju.I. Babenko. – SPb. : NPO «Professional», 2009. – 584 s.

2. Bahvalov, N.S. Chislennye metody / N.S. Bahvalov. – M. : Nauka, 1973. – 631 s.

3. Iosida, K. Funkcional’nyj analiz : uchebnik / K. Iosida; per. s ang. V.M. Volosova. – M. : Mir, 1967. – 624 s.

4. Krejn, S.G. Linejnye differencial’nye uravnenija v banahovom prostranstve / S.G. Krejn. – M. : Nauka, 1967. – 464 s.

5. Kostin, V.A. O korrektnoj razreshimosti kraevyh zadach dlja uravnenija vtorogo porjadka / V.A. Kostin, M.N. Nebol’sina // Doklady Akademii Nauk. – 2009. – T. 428. – № 1. – C. 20–22.

6. Lavrent’ev, M.A. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo / M.A. Lavrent’ev, B.P. Shabat. – M. : Nauka, 1973. – 736 s.

7. Tihonov, A.N. Metody reshenija nekorrektnyh zadach : uchebnoe posobie dlja vuzov; izd. 3-e ispravlennoe / A.N. Tihonov, V.Ja. Arsenin. – M. : Nauka. Gl.red.fiz.mat.lit, 1986. – 288 s.