УДК 517.9

О КОЭРЦИТИВНОСТИ СИСТЕМ C_0–ОПЕРАТОРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. А. Костин, М. В. Муковнин, М. Х. Гим

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.02.2014 г.

Аннотация: работы по проблемам коэрцитивности для систем дифференциальных операторов с частными производными были начаты Н. Ароншайном в пятидесятых годах прошлого века и развиты Л. Хермандером, М. Шехтером, Д. Ж. Фигуэрдо и другими зарубежными математиками. Дальнейшему изучению этой проблемы для дифференциальных операторов в пространствах С. Л. Соболева изотропных и анизотропных посвящены фундаментальные работы О. В. Бесова, С. М. Никольского. Проблема коэрцитивности для эволюционных уравнений с оператором в банаховом пространстве исследовалась в работах П. Е. Соболевского.

В настоящей работе, по аналогии с системами дифференциальных операторов Бесова-Никольского вводятся системы C_0-операторных многочленов, то есть многочленов над полем комплексных чисел от производящего оператора сильно непрерывной полугруппы линейных операторов в банаховом пространстве.

Здесь указываются условия при которых рассматриваемые системы коэрцитивны. Доказываются необходимые и достаточные условия на весовые пространства непрерывных на действительной функции в которой производящие операторы полугрупп левых и правых переносов являются сильно непрерывными и, следовательно, системы многочленов с генераторами таких полугрупп являются коэрцитивными.

Ключевые слова: корректная разрешимость, коэрцитивность, сильно непрерывные полугруппы.

COERCIVITY OF SYSTEMS C_0-OPERATOR POLYNOMIALS

V. A. Kostin, M. V. Mukovnin, M. H. Geem

Abstract: the works on the problems of the coercivity for systems of differential operators with partial derivatives were started N. Aronszajn in the fifties of the last century and developed by L. Hormander, M. Schechtor, D. G. Figuerdo and foreign mathematicians. Further study this problems of differential operators in C. L. Sobolev spaces of isotropic and anisotropic. dedicated the fundamental works of O. V. Besov, C. M. Nikolski. The problem of coercivity of evolution equations with operator in Banach space has been studied in works of P. E. Sobolevski.

In this paper, similarly with systems of differential operators of Besov-Nikolski introduced systems are C_0-operators polynomials, i.e. polynomials over the field of complex numbers from the generator operator of strongly continuous semigroup of linear operators in the Banach space.

This specifies the conditions in which these systems are coercive and provides. In particular, we prove necessary and sufficient conditions for weighted spaces continuous on the real function which generator of the semigroup of left and right shifts are strongly continuous and therefore the systems of polynomials with the generators of such semigroups are coercive.

Keywords: correct resolvability, coercivity, strongly continuous semigroup.

Пусть E — банахово и оператор A, с областью определения $D(A)$, является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U(t,A), t \geqslant 0$. То есть для $f \in E$ выполняются соотношения:
1) $U(0,A)f = f$,
2) $U(t+S,A)f = U(t,A)U(S,A)f$,
3) $\lim\limits_{t\to 0+} \|U(t,A)f - f\|_E = 0$,
4) $\frac{dU(t,A)}{dt}|_{t=0} f = Af$, для $f \in D(A)$
Для полугруппы $U(t,A)$, которую мы здесь называем C_0-полугруппой, выполняется неравенство

$$\|U(t,A)f\|_E \leqslant Me^{\omega t} \cdot \|f\|_E \tag{1}$$

где M и ω от t и f не зависят.

В [9] для $u \in D(A^n)$ $(n = 1,2,\ldots)$ рассматриваются операторные многочлены

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u, \tag{2}$$

которые, используя терминологию из [9], мы называем C_0 — операторными многочленами. В [9] показывается, что если λ_k — корни скалярного многочлена $P_n(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексная плоскость, удовлетворяют условию

$$Re\lambda_k = \lambda_0 > \omega. \tag{3}$$

то оператор $\mathbb{A}$ определен на всем E и ограничен.

Настоящая заметка посвящена установлению коэрцитивности системы C_0-операторных многочленов $\{\mathbb{A}_k\}_{R=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$ — натуральные числа

$$\mathbb{A}_k u = \sum_{m_{k=1}}^{n_k} a_{m_k} A^{m_k} u. \tag{4}$$

Отметим, что начало работ по проблемам коэрцитивности было положено Ароншайном, Агмоном, Инхтером, Хермандером и другими.

Дальнейшее изучение проблем в пространствах С. Л. Соболева было продолжено О. В. Бесовым С. М. Никольским в русле этой проблемы местами работали П. Е. Соболевский, В. П. Орлов.

В предлагаемой работе приводятся новые примеры систем дифференциальных операторов для которых имеет место коэрцитивность.

1. $\chi(t)$ ФУНКЦИЯ ХЕВИСАЙДА И $q(t)$ — ФУНКЦИЯ ГРИНА

Рассмотрим некоторые вспомогательные факты, необходимые в дальнейшем.

Пусть $\delta(t)$ — дельта функция Дирака, действующая на непрерывную функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$(\delta,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

Тесно связанную с ней единичную функцию Хевисайда (функцию скачка), определяют соотношением

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(s)ds \tag{1.1}$$

см. [4, с. 193]. Отсюда следует, что $\chi(t) \equiv 0$, при $t < 0$ и $\chi(t) \equiv 1$, при $t > 0$.

Вопрос о значении $\chi(t)$ при $t = 0$ остается открытым. В разных случаях принимаются $\chi(0) = 1, \chi(0) = \frac{1}{2}, \chi(0) = 0$. Последнему свойству придерживается А. Н. Колмогоров и С. Г. Фомин [3, с. 197]. Корректность этого выбора, с нашей точки зрения, объясняется тем, что интегрирование в (1.1) осуществляется в положительном направлении (слева направо), поэтому естественно считать $\chi(0)$ левым пределом, то есть $\chi(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \chi(t) = 0$. Также функцию Хевисайда будем обозначать $\chi_0(t)$.

В таком случае, функция $\chi_0(t)$ является обычным (не обобщенным) решением задачи Коши

$$u'(t) = \delta(t), t \in [0, \infty) \tag{1.2}$$

$$u(0) = 0 \tag{1.3}$$

Далее рассмотрим C_0–операторное уравнение

$$P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f, \tag{1.4}$$

$f \in E, a_m \in \mathbb{C}$. И поставим ему в соответствие дифференциальное уравнение

$$P_n(-\frac{d}{dt})q(t) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \frac{d^m q(t)}{dt^m} = \delta(t),\ t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Определение 1.1. *Решение уравнения (1.5) удовлетворяющие начальным условиям Коши*

$$q(0) = q'(0) = \ldots = q^{(n-1)}(0) = 0 \tag{1.6}$$

будем называть $q(t)$ — функцией Грина уравнения (1.5).

Это связанно с тем что при выполнении условия (3), как показано в [9] уравнение (1.5) имеет единственное решение $u \in D(A^n)$ и оно представимо в виде

$$u = \int\limits_0^\infty q(t)U(t)f dt. \tag{1.7}$$

при этом, в соответствии [2, с. 231] имеем соотношение

$$q(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{n=1}^{m} \frac{B_{m,k}}{(k-1)!} t^{k-1} \cdot e^{-\lambda_m t} = \sum_{m=1}^{n} Q_m(t) e^{-\lambda_m t} \tag{1.8}$$

$B_{m,k}$ — известные константы, и, следовательно, $Q_m(t)$ — многочлены степени $(m-1)$

Из (1.7), в частности получаем равенство

$$Au = \int\limits_0^\infty q(t)AU(t)f dt = \int\limits_0^\infty q(t)\frac{dU(t)}{dt} f dt = q(t)U(t)f\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty q'(t)U(t)f dt =$$

$$= -\int\limits_0^\infty q'(t)U(t)f dt = \int\limits_0^\infty \delta(t)U(t)f df = f. \tag{1.9}$$

Таким образом из (1.5)-(1.7) следует

Лемма 1.1. *Функция $q(t) = -\chi_0(t)$ является функцией Грина для уравнения*

$$Au = f \tag{1.10}$$

Действительно в этом случае задача (1.5)-(1.6) имеет вид

$$-q'(t) = \delta(t), \tag{1.11}$$

$$q(0) = 0 \tag{1.12}$$

и следовательно $q(t) = -\chi_0(t)$.

2. ТЕОРЕМА КОЭРЦИТИВНОСТИ

Определение 2.1. *Систему операторных многочленов (4) назовем коэрцитивной, если для всех $u \in D(A^N)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n_k=1}^{N} \sum_{m_k=1}^{n_k} \| A^{m_k} u \|_E \leqslant M_2 \sum_{k=1}^{N} \| A_k u \|_E, \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Система C_0 — многочленов (4) является коэрцитивной, если корни $\lambda_{k,j}(k = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, n_k)$ многочленов $P_{n_k}(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > \omega. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из соотношений (1.4)-(1.8) и замкнутости оператора A вытекает равенство

$$A^m u = \int\limits_0^\infty q(t) A^m U(t, A) f dt = \int\limits_0^\infty q(t) \frac{dU^m(t, A)}{dt^m} f dt = (-1)^m \int\limits_0^\infty q^{(m)}(t) U(t, A) f dt \tag{2.3}$$

Далее, пользуясь (1.8) и (2.2), получаем оценки

$$\|A^m u\|_E \leqslant M \int\limits_0^\infty |q(t)| e^{(\omega t)} dt \cdot \|f\|_E \leqslant M_3 \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_0 - \omega)t} dt \cdot \| f \|_E = \frac{M_3}{\lambda_0 - \omega} \|f\|_E = M_3 \cdot \|\mathbb{A}u\|_E.$$

Отсюда, следует оценка

$$\sum_{m=1}^{n} \|A^m u\|_E \leqslant M_4 \|\mathbb{A}u\|_E \tag{2.4}$$

теперь, применяя (2.4) к каждому оператору $\mathbb{A}_k$, получаем неравенство (2.1) и доказательство теоремы.

Заметим что из (2.3) следует и отличное от [9] доказательство того, что элемент u, заданный соотношением (1.7), является решением уравнения (1.4).

Для этого достаточно умножить обе части равенства (2.3) на a_m и просуммировать

$$\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m q^{(m)}(t) U(t, A) f dt = \int\limits_0^\infty \delta(t) U(t, A) f dt = U(0, A) f = f. \tag{2.5}$$

3. ПРИМЕРЫ

Как известно, существуют многочисленные классы генераторов полугрупп класса C_0 (в частности [10]) и, следовательно, на них распространятся теоремы (2.1).

Здесь же мы приведем некоторые примеры, содержащие новые результаты, связанные с классическими дифференциальными выражениями.

I. Применим теорему 2.1 к операторам связанным с дифференциальным выражением $l = \frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Для того, в соответствии с [9], [10], введем банаховы пространства $C^{\pm}_{\omega,g}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций определенных нормами

$$\|\varphi\|^{+}_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|,\ \omega \geqslant 0,\ g(x) > 0, g'(x) > 0; \tag{3.1}$$

в случае $C^{+}_{\omega,g}$,

$$\|\varphi\|^{-}_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|,\ \omega > 0,\ g(x) > 0, g'(x) < 0; \tag{3.2}$$

в случае $C^{-}_{\omega,g}$.

В этих пространствах рассмотрим полугруппы сдвигов

$$U^{+}(t)\varphi(t) = \varphi(x+t),\ \text{если}\ \varphi \in C^{+}_{\omega,g},$$

$$U^{-}(t)\varphi(x) = \varphi(x-t),\ \text{если}\ \varphi \in C^{-}_{\omega,g}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\|U^{\pm}(t)\varphi\|^{\pm}_{\omega,g} \leqslant e^{-\omega t}\|\varphi\|^{\pm}_{\omega,g} \tag{3.3}$$

Действительно. Например, для норм $C^{+}_{\omega,g}$ имеем

$$e^{\omega x} g(x)|U^{+}(t)\varphi(x)| = e^{\omega x} g(x)\varphi(x+t) = e^{\omega t}\cdot e^{\omega\tau} g(\tau - t)|\varphi(\tau)| \leqslant e^{-\omega t}\|\varphi\|^{+}_{\omega,g} \tag{3.4}$$

и, переходя, к sup ω при $x \in \mathbb{R}$ в левой части (3.4), получаем (3.3).

Для норм $C^{-}_{\omega,g}$ доказательство аналогичное. Генераторами этих полугрупп являются операторы $A^{\pm}$ заданные, соответственно дифференциальными выражениями

$$\left.\frac{dU^{\pm}(t)}{dt}\varphi(x)\right|_{t=0} = \pm\frac{d\varphi}{dx} \tag{3.5}$$

и областями определения $D(A^{\pm}) = \{\varphi : \varphi \in C^{\pm}_{\omega,g}, \frac{d\varphi}{dx} \in C^{\pm}_{\omega,g}\}$

Теорема 3.1. *Система многочленов*

$$\mathbb{A}_k u = \sum_{m_k=1}^{n_k} a_{m_k}\left(\pm\frac{d}{dx}\right)^{m_k} u(x) \tag{3.6}$$

является коэрцитивной в $C^{+}_{\omega,g}$ если соответственно корни $\lambda_{k,j}$ многочленов $P_{n_k}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > -\omega. \tag{3.7}$$

В качестве следствия также получаем, что уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m u(x)}{dx^m} = f(x), \tag{3.8}$$

имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$a) \qquad u(x) = \int_0^\infty q(t) f(x+t)dt = \int_x^\infty q(\tau - x) f(\tau) d\tau, \tag{3.9}$$

где $f \in C^+_{\omega,g}$, $q(\tau)-$ решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \frac{d^m q}{dx^m} = \delta(x),\ q(0) = \ldots = q^{n-1}_{(0)} = 0. \tag{3.10}$$

$$б) \qquad u(x) = \int_0^\infty q(t) f(x-t)dt = \int_{-\infty}^{x} q(x-\tau) f(\tau) d\tau, \tag{3.11}$$

где $f \in C^-_{\omega,g}$, $q(\tau)-$ решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m q(x)}{dx^m} = \delta(x),\ q(0) = \ldots = q^{(n-1)}_{(0)} = 0. \tag{3.12}$$

В частности, решение задачи $u'(x) = f(x)$ в пространствах $C^+_{\omega,g}$ имеет вид $u(x) = -\int\limits_x^\infty f(x) d\tau$, а решение задачи $-u'(x) = f(x)$ в $C^-_{\omega,g}$ имеет вид $u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s)ds$. При этом справедливы оценки

$$\|u\|^{\pm}_{\omega,g} \leqslant \frac{\|f\|^{\pm}_{\omega,g}}{\omega} \tag{3.13}$$

Замечание 3.1. *Заметим, что пространства $C^{\pm}_{\omega,g}$ здесь являются оптимальными, в том смысле, что если неравенства (3.13) выполняются для норм более общего вида*

$$\|f\|^+_\rho = \sup_x \frac{|f(x)|}{\rho(x)},\ \|f\|^-_\rho = \sup_x \rho(x)|f(x)|, \tag{3.14}$$

где $\rho(x) \geqslant 0$, $\rho'(x) > 0$, $\rho(-\infty) = 0$, то необходимо чтобы $\rho(x)$ имело вид $\rho(x) = e^{\omega x}|g(x)|$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) \geqslant 0$.

Действительно. Пусть $J_+\varphi = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds$ выполнено неравенство

$$\|J_+\varphi\| \leqslant M\|\varphi\|_\rho \tag{3.15}$$

для всех $\rho \in C^+_s$, а, следовательно и для $\varphi(x) = \rho(x)$.

Но тогда из (3.15) следует неравенство

$$\frac{1}{\rho(x)} \int_{-\infty}^{x} \rho(s)ds \leqslant M \tag{3.16}$$

Отсюда, используя правило Лопиталя для пределов заключим, что конечны пределы.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\rho(s)}\int_{-\infty}^{x}\rho(s)ds=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\rho(x)}{\rho'(x)}\leqslant M_1. \tag{3.17}$$

Это дает оценки

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}\geqslant\frac{1}{M_1}\quad \text{и } \rho(x)\geqslant M_2e^{\frac{t}{M_1}}. \tag{3.18}$$

То есть, для $\rho(x)$ справедливо представление $\rho(x)=M_2e^{\frac{t}{M_1}}\cdot g(x)$, где $g'(x)=M_2e^{-\frac{t}{M_1}}\left(\rho'(x)-\frac{\rho}{M_1}\right)\geqslant 0$. Что и доказывает наше утверждение.

Для интеграла J_- оно доказывается аналогично.

II. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $E=L_p(\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$ $\|f\|_p=\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^pdx\right]^{\frac{1}{p}}$. Оператор A зададим лапласианом $\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2}$ определим в пространстве С. Л. Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^2}=\|u\|_{L_p}+\left[\sum_{R=1}^{n}\|\frac{\partial^2u}{\partial x_i}\|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ (p\geqslant 1)$$

Так определенный оператор A является генератором полугруппы класса C_0 Гаусса-Вейерштрасса

$$U(t)f(x)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{|x-s|^2}{4t}}f(s)ds \tag{3.19}$$

действующий в $L_p(\mathbb{R}^n)$, при этом $\omega=0$. Применение теоремы (2.2) к этим операторам дает следующий результат.

Теорема 3.2. *Система многочленов*

$$\{\mathbb{A}_ku\}_{k=1}^N,\ \mathbb{A}_ku=\sum_{m_k=1}^{n_k}a_{m_k}\Delta^{m_k}u \tag{3.20}$$

является коэрцитивной и удовлетворяет соотношениям (2.1), если корни $\lambda_{k,j}(k=1,\dots,N,i=1,\dots,u_k)$ *многочленов* $P_{n_k}(\lambda)$ *расположены в положительной комплексной полуплоскости.*

Теорема 3.3. *Уравнение*

$$\sum_{m=0}^{n}a_m\Delta^mu=f, \tag{3.21}$$

при $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ *имеет единственное решение* $u\in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$, *для него справедливы представления*

$$u(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k-1)!}\int_{\mathbb{R}^n}f(s)\int_0^\infty t^{k-\frac{n}{2}-1}e^{-\lambda_mt-\frac{|x-s|^2}{4t}}dtds=$$

$$=\frac{2}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k-1)!}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|x-s|}{2\lambda_m}\right)^{k-\frac{n}{2}}\cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m|x-s|)f(s)ds=$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{m=1}^{N} \lambda_m^{\frac{n}{2}-k} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_m^{\frac{n}{2}-k} A_{k,m}}{2^{k-1}(k-1)!} \int_{\mathbb{R}^n} |x-s|^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m |x-s|) f(s) ds$$

Здесь $K_v(z)$ — функция Макдональда $|f|^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m|f|) \cdot f(s)$.

Для частного случая полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x), \; m \in \mathbb{N} \tag{3.22}$$

рассматриваемого в [1, с. 558], где f — обобщенная функция, из наших результатов следует

Теорема 3.4. *Если выполняется условие $n > 2m$, то для всякого $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение (3.22) имеем единственное решение $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ для него справедливо представление*

$$u(x) = G_{m,n} * f(x); \tag{3.23}$$

где

$$G_{m,n}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{\frac{n}{2}}} |x|^{2m-n} \tag{3.24}$$

[1, с. 523].

Из этой теоремы следует, что оператор Δ^m при $n > 2m$ имеет ограниченный обратный в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 1974. — 808 с.

[2] Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 471 с.

[3] Колмогоров А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

[4] Зельдович Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. — М.: Наука, 1972. — 592 с.

[5] Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 737 с.

[6] Интегральные операторы в пространсвах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. — М.: Наука, 1976. — 499 с.

[7] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[8] Маслов В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. — М.: Наука, 1973. — 544 с.

[9] Костин В.А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0-операторный интеграл Дюамеля / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.

[10] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производные уравнения. / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 455, № 2. — С. 142–146.

[11] Соболевский П.Е. Эллиптические и параболические операторы в C / П.Е. Соболевский. // Докл. Академии наук СССР. — 1988. — Т. 298, № 4. — С. 815–819.

[12] Соболевский П.Е. Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений / П. Е. Соболевский // Докл. Академии наук СССР. — 1964. — Т. 157, № 1. — С. 52–55.

REFERENCES

[1] Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. [Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnyx formul]. Moscow, Nauka, 1974, 808 p.

[2] Evgrafov M.A. Analytic functions. [Evgrafov M.A. Analiticheskie funkcii]. Moscow, Nauka, 1968, 471 p.

[3] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. E'lementy teorii funkcii i funkcional'nogo analiza]. Moscow, Nauka, 1972, 496 p.

[4] Zeldovich Y.B., Myskis A.D. Elements of Applied Mathematics. [Zel'dovich Ya.B., Myshkis A.D. E'lementy prikladnoj matematiki]. Moscow, Nauka, 1972, 592 p.

[5] Lavrent'ev M.A. , Shabat B.V. Methods of theory of functions of complex variables. [Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo]. Moscow, Nauka, 1973, 737 p.

[6] Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskij P.E. Integral'nye operatory v prostransvax summiruemyx funkcij]. Moscow, Nauka, 1976, 499 p.

[7] Krein S.G. Linear differential equation in a Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow, Nauka, 1967, 464 p.

[8] Maslov V.P. Operator methods. [Maslov V.P. Operatornye metody]. Moscow, Nauka, 1973, 544 p.

[9] Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Maslov-Heaviside operator method and Duhamel C_0-operator integral. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova-Xevisajda i C_0-operatornyj integral Dyuamelya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, Vol. 452, no. 4, pp. 367–370.

[10] Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementary transformation semigroups and their generating equations. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. E'lementarnye polugruppy preobrazovanij i ix proizvodnye uravneniya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, Vol. 455, no. 2, pp. 142–146.

[11] Sobolevskii P. E.. Elliptic and parabolic operators in C. [Sobolevskij P.E. E'llipticheskie i parabolicheskie operatory v C]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1988, Vol. 4, no. 1, pp. 816–819.

[12] Sobolevskii P.E. Coercivity inequalities for abstract parabolic equations. [Sobolevskij P.E. Neravenstva koe'rcitivnosti dlya abstraktnyx parabolicheskix uravnenij]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1964, Vol. 157, no. 1, pp. 52–55.

Костин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vlkostin@mail.ru

Kostin Vladimir Alekseevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlkostin@mail.ru

Муковнин М. В., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Mukovnin M. V., graduate student, Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Гим М. Х., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская федерация
E-mail: kazolamz@yahoo.com

Geem M. H., graduate student, Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kazolamz@yahoo.com