MSC 35K05

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

А.В. Костин, М.В. Муковнин, М.Х. Гим

Воронежский Государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394000, Россия, e-mail: leshakostin@mail.ru

Аннотация. Устанавливается корректная разрешимость по Адамару одной нестационарной задачи для одномерного уравнения теплопроводности, называемой задачей без начальных условий. При этом требуется найти производную от температуры по пространственной переменной, характеризующую тепловой поток на границе раздела сред. Исследования таких задач, как известно, приводят к использованию аппарата дробного интегро-дифференцирования. Однако, как правило, получаемые при этом результаты касаются только вопросов существования решений и их интегро-дифференциальным представлениям. Вопрос же устойчивости решения по исходным данным, требующий использования соответствующих метрических пространств в таких работах не обсуждается. В настоящей заметке эти вопросы решаются методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных преобразований в специальных функциональных пространствах.

Ключевые слова: корректная разрешимость, полугруппы, косинус-функция, задача Коши, дробные степени операторов.

Многие процессы тепло– и массопереноса описываются нестационарной задачей

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in (-\infty,\infty), x \in (0,\infty)\,. \tag{0.1}$$

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0. \tag{0.2}$$

t — время, x — пространственная координата, $u(t,x)$ — температура.

Требуется определить выражение для теплового потока, т.е. производную от температуры по координате x на границе области

$$q(t) = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{0.3}$$

Частный случай такой задачи (когда $u_0(t)$ — периодическая функция или заданная рядом Фурье) рассмотрен в [1], с. 57. Здесь она называется задачей без начальных условий.

Следует отметить, что решение этих задач в [1] формально осуществляется с помощью функциональных рядов, членами которых являются интегро-дифференциальные конструкции дробного порядка. При этом, вопросы сходимости приближенных решений к точному и их устойчивость к погрешностям исходных данных не обсуждается.

Иными словами, не обсуждается проблема корректной разрешимости по Ж. Адамару рассматриваемых задач, требующая введения соответствующих метрик.

В настоящей заметке методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов рассматривается более общая задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \gamma(t)u(t,x)\,, \tag{0.4}$$

$x \in (0,\infty)$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0\,, \tag{0.5}$$

где $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ — произвольные непрерывные на (a,b) функции, $u_0(t)$ — элементы некоторого банахова пространства.

В работе устанавливается равномерно корректная разрешимость, в смысле С.Г. Крейна [5], с. 305, с использованием методов сильно непрерывных полугрупп.

§1. Необходимые факты из общей теории

В банаховом пространстве E рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in [0,\infty), \tag{1.1}$$

где оператор A такой, что $-A$ является генератором полугруппы $(T,-A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|T(t,-A)\| \le e^{-\omega t} \quad (\omega \ge 0). \tag{1.2}$$

и, следовательно, по К. Иосида [3], с. 358, определены отрицательный $A^{-\frac{1}{2}}$ и положительный. Квадратные корни

$$A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t,-A)\varphi dt\,, \tag{1.3}$$

$$A^{\frac{1}{2}}\varphi = A\cdot A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t,-A)A\varphi dt, \tag{1.4}$$

если $\varphi \in D(A)$.

При этом оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является генератором полугруппы класса C_0 вида

$$T(t,-A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right)T(s,-A)\varphi ds \tag{1.5}$$

(см. [3], с. 369, [2], с. 120).

Далее, согласно С.Г. Крейну [5], с. 306 дадим

Определение 1.1. *Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (1.1), если:*

1) *она непрерывна на* $[0,\infty)$, *имеет непрерывную вторую производную на* $(0,\infty)$, *а функция* $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ *имеет непрерывную первую производную на* $[0,\infty)$;
2) *значения* $u(t)$ *на* $(0,\infty)$ *принадлежат* $D(A)$;
3) *она удовлетворяет уравнению* (1.1).

В дальнейшем будет использована

Теорема 1.1 (С.Г. Крейн [5], с. 324). *Если оператор* A *удовлетворяет выше приведенным условиям, то для всякого* $u_0 \in E$ *существует единственное ограниченное на полуоси* $[0,\infty)$ *обобщенное решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условию* $u(0)=u_0$.

Это решение задается формулой

$$u(t) = T(t, -A^{\frac{1}{2}})u_0\,. \tag{1.6}$$

§2. Полугруппы переносов с деформациями

а) Полугруппы $T^+_{h,\rho}(t)$.

На интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ конечном или бесконечном, введем непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$ такую, что $h'(x)>0$, $\lim\limits_{x\to b} h(x)=\infty$.

Через $L^+_{p,\omega,h}$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_{p,\omega_1,h,g} = \left[\int_a^b |\exp[\omega h(x)]g(x)\varphi(x)|^p dh(x)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

$p\ge 1$, $\omega>0$, $g(x)>0$, $g'(x)>0$. Введем обозначения $h(x)\oplus t = h^{-1}[h(x)+t]$.

Пусть $\rho(x)\ge 0$ локально интегрируемая на (a,b) функция. Будем рассматривать операторное семейство

$$T^+_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^{x} \rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\oplus t]\,. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Операторное семейство* $T^+_{h,\rho}(t)$ *является сильно непрерывной сжимающей полугруппой действующей в пространстве* $L_{P,\omega,h}$, *удовлетворяющей оценке*

$$\|T^+(t)\| \le \exp\left(-\frac{\omega}{p}t\right). \tag{2.3}$$

□ Сначала оценим

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g} = \int_a^b \exp\left[\omega h(x) + p\int_{h(x)\oplus t}^{x}\rho(\xi)dh(\xi)\right]g(x)|\varphi[h(x)\oplus t]|^p dh(x) \le$$

$$\le \int_a^b g(x)\exp[\omega h(x)]|\varphi(h(x)\oplus t)|^p dh(x)\,. \tag{2.4}$$

После замены $h(x) \oplus t = \tau$ неравенство (2.4) принимает вид

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g} \leq \exp(-\omega t) \int_{h(a)\oplus t}^{b} \exp[\omega h(\tau)] g[h^{-1}(h(\tau)-t)] |\varphi(\tau)|^p dh(\tau) \leq$$

$$\leq \exp(-\omega t) \int_a^b \exp[\omega h(\tau)] g(\tau) |\varphi(\tau)|^p dh(\tau) \, .$$

Отсюда следует ограниченность полугруппы

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g} \leq \exp\left(-\frac{\omega}{p} t\right) \|\varphi\| \, . \tag{2.5}$$

Свойство $T^+_{h,\rho}(0)\varphi = \varphi$ очевидно.

Для установления полугруппового соотношения $T(t)T(s) = T(t+s)$ проведем следующие вычисления

$$T^+_{h,\rho}(t) T^+_{h,\rho}(s)\varphi(x) = T_{h,\rho}(t) \exp\left[\int_{h(x)\oplus s}^{x} \rho(s) d(\xi)\right] \varphi[h(x)\oplus s] =$$

$$= \exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^{x} \rho(\xi) dh(\xi)\right] \exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^{h(x)\oplus t} \rho(\xi) dh(\xi)\right] \varphi[h(x)\oplus t+s] =$$

$$= \exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^{x} \rho(\xi) dh(\xi)\right] \varphi[h(x)\oplus t+s] = T^+_{h,\rho}(t+s)\varphi(x) \, . \tag{2.6}$$

Теперь установим сильную непрерывность полугруппы

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi - \varphi\| \leq \left[\int_{x(a)\oplus t}^{\infty} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] | \exp\left[\int_{h^{-1}(t+\tau)}^{h^{-1}(\tau)} \rho(\xi) dh(\xi)\right] \varphi[h^1(\tau+t)] - \varphi[h^1(\tau)]|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Далее, положим $\varphi[h^{-1}(t)] = \psi(t)$, $\rho[h^{-1}(s)] = \mu(s)$ и, используя метод «прибавить–отнять», с применением неравенства Коши-Буняковского, получаем

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi - \varphi\| \leq \left[\int_{h(a)}^{\infty} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] \exp\left[\int_{t+\tau}^{\tau} \mu(s) ds\right] |\psi(t+\tau) - \psi(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\int_{h(a)}^{\infty} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] | \exp\left[p \int_{t+\tau}^{\tau} \mu(s) ds\right] - 1| \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} = S_1(t) + S_2(t) \, .$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to 0} S_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} S_2(t) = 0$.

В случае $S_1(t)$ этот факт следует из непрерывности в целом L_p-весовых норм.

В случае $S_2(t)$, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ запишем $S_2^p(t)$ в виде суммы

$$S_2^p(t) = \int_{h(a)}^{N} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] | \exp\left[p \int_{t+\tau}^{\tau} \mu(s) ds\right] - 1| \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau +$$

$$+\int_N^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)]| \exp\left[p\int_{t+\tau}^{\tau}\mu(s)ds\right]-1|\cdot|\psi(\tau)|^p d\tau = S_2^{(N)}(t)+S_2^{(N)}(t)\,, \qquad (2.8)$$

где N выбрано так, что выполняется неравенство $S_2^{(N)}(t)<\frac{\varepsilon}{2}$. Затем, учитывая конечность интервала интегрирования, выбирая t_0 такое, что при всех $t>t_0$ выполняется оценка $S_1^{(N)}(t)<\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует соотношение $\lim S_2(t)=0$, а из (1.18) получаем выполнение сильной непрерывности полугруппы $T_{h,\rho}(t)$

$$\lim_{h\to 0}\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi-\varphi\|=0, \quad \forall\varphi\in L_{p,h,\rho}\,. \qquad (2.9)$$

Это завершает доказательство теоремы. ■

Таким образом, семейство $T^+_{h,p}$ является сильно непрерывной полугруппой с оценкой (2.5).

Из теоремы 1.1 и результатов [5], с. 258, [3], с. 327 следует, что для полугруппы $T^+_{h,\rho}(t)$ определен производящий оператор как сильный предел

$$A^+_{h,\rho}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}[T^+_{h,\rho}(t)-I]\varphi(x)\,.$$

Его область определения $D(A^+_{h,\rho})$ плотна в $L^+_{p,h,\omega,g}$ и он замкнут.

В соответствии с [5], с. 258 значение производящего оператора можно определить как правую производную полугруппы в точке $t=0$, то есть

$$A^+_{h,\rho}\varphi(x)=\frac{d}{dt}T^+_{h,\rho}(t)\varphi(x)|_t=\frac{d\varphi(x)}{dh(x)}-\rho(x)\varphi(x)=\mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x)\,. \qquad (2.11)$$

Таким образом, производящим оператором полугруппы $T^+_{h,\rho}(t)$ является оператор $A^+_{h,\rho}$, заданный выражением $\mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x)$ и областью определения $D(A^+_{h,\rho})=\{\varphi\in L^+_{p,\omega,h,g}$, $\mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x)\in L^+_{p,\omega,h,g}\}$.

б) Полугруппы $T^-_{h,\rho}(t)$.

Рассмотрим случай когда функция $h(x)$, $x\in(a,b)$ удовлетворяет условиям: $h'(x)>0$, $\lim)x\to ah(x)=-\infty$.

Через $L^-_{p,\omega,h,g}$ обозначим пространства функций с нормой

$$\|\varphi\|^-=\|\varphi\|^-_{p,\omega,h,g}=\left[\int_a^b\exp(-\omega h(x))g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\,. \qquad (2.12)$$

$p\ge 1$, $\omega>0$, $g(x)>0$, $g'(x)<0$.

Пусть $h(x)\ominus t=h^{-1}[h(x)-t]$. Рассмотрим операторные семейства

$$T^-_{h,\rho}(t)\varphi(x)=\exp\left[\int_x^{h(x)\ominus t}\rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\ominus t]\,. \qquad (2.13)$$

Для этих семейств аналогично $T^+_{h,\rho}$ доказывается

Теорема 2.2. *Операторное семейство (2.13) является сильно непрерывной полугруппой действующей в пространстве $L^-_{p,\omega,h,g}$ и удовлетворяющей оценке*

$$\|T^-(t)\|^-_{p,\omega,h,d} \leq \exp\left(-\frac{\omega}{p}t\right). \tag{2.14}$$

Ее генератором является оператор $A^-_{h,p}$, заданный выражением

$$\mathfrak{D}^-_{h,\rho}\varphi = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x). \tag{2.15}$$

с областью определения $D(A^-_{h,\rho}) = \{\varphi \in L^-_{p,\omega,h,g}, \mathfrak{D}^-_{h,\rho}\varphi \in^-_{p,\omega,h,g}\}$.

§3. Некоторые частные случаи

В этом пункте рассмотрим некоторые пример.

1. Если оператор $A^+_{h,\rho}$ задан выражением (2.11), $\rho(x) = \mu \cdot h(x)$, $\mu \geq 0$, то производящая его полугруппа имеет вид

$$T^+_h(t)\varphi(x) = \left(\frac{h(x)}{h(x)+t}\right)^\mu \varphi[h^{-1}(h(x)+t)]. \tag{3.1}$$

Она является сильно непрерывной в пространстве $L^+_{p,\omega,h,g}$ с нормой (2.1).

2. Если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\mu = 0$, то из (3.1) следует, что $T^+_h(t)\varphi(x) = \varphi(x+t)$ является полугруппой правых сдвигов в пространстве $L^+_{p,\omega}$ с нормой

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Аналогично, полугруппа левых сдвигов $T^-_h(t)\varphi(x) = \varphi(x-t)$ является сильно непрерывной в пространствах $L^-_{p,\omega,h,g}$ с нормой

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Здесь $\omega > 0$. Заметим, что при $\omega = 0$ эти факты не справедливы.

3. Если в (3.1), $(a,b) = (0,\infty)$, $\mu > 0$, то соответствующая полугруппа имеет вид

$$T^+_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\mu \varphi(x+t). \tag{3.4}$$

4. Полугруппы Адамара. Если $(a,b) = (0,\infty)$, $h(x) = \ln x$, $\mu = 0$, то полугруппы имеют вид

$$T_h^+(t)\varphi(x) = \varphi(xe^t)\,, \tag{3.5}$$

$$T_h^-(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{-t})\,. \tag{3.6}$$

Эти полугруппы сильно непрерывны в пространствах T с нормами:

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_0^\infty x^\omega |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0\,, \tag{3.7}$$

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_0^\infty x^{-\omega} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0\,, \tag{3.8}$$

Производящими операторами этих полугрупп являются операторы: A_α^+, аданный выражением $\mathfrak{D}_u^+\varphi = x\dfrac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A_\alpha^+) = \{\varphi \in L_{\omega,p}^+,\, \mathfrak{D}^+\varphi \in L_{\omega,p}^+\}$ и соответственно A_u^-, заданный выражением $\mathfrak{D}_u^-\varphi = -x\dfrac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A_\alpha^-) = \{\varphi \in L_{\omega,p}^+,\, \mathfrak{D}^-\varphi \in L_{\omega,p}^-\}$

Следуя [5] эти операторы мы называем операторами Адамара, а соответствующие полугруппы — полугруппами Адамара.

5. Гиперболические полугруппы. Если $(a,b) = (0,1)$, $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$, $\mu = 0$, то нетрудно видеть, что в этом случае мы имеем полугруппу

$$T_h(t)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x+t}{1+xt}\right)\,, \tag{3.9}$$

которая в [10], с. 275 называется гиперболической.

Из наших результатов следует, что эта полугруппа сильно-непрерывна в пространствах с нормой

$$\varphi\|_{\omega,p} = \left[\int_0^1 \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{\omega}{2}} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\,. \tag{3.10}$$

§4. Решение задачи (0.4)-(0.5)

В предположении $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) \geq 0$, $h'(t) = \alpha(t)$, $\rho(t) = \gamma(t)/\alpha(t)$ будем рассматривать два вида уравнения (0.4).

$$\frac{\partial^2 u_+(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_+(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t,x)\,, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 u_-(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_-(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t,x)\,, \tag{4.2}$$

Поменяв местами параметры t и x, уравнения (4.1) и (4.2) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} = -\mathfrak{D}_{h,\rho}^+ u_+(t,x)\,, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} - = -\mathfrak{D}^-_{h,\rho} u_-(t,x)\,, \tag{4.4}$$

При этом краевые условия (4.5) принимают вид

$$u_\pm(0,x) = u_0(x); \qquad u_\pm(\infty,x) = 0\,. \tag{4.5}$$

Считая $u_\pm(t,x)$ векторнозначными функциями $u_\pm(t)$ со значениями в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}$ или $L^-_{p,\omega,h,g}$ соответственно, можно записать задачи (4.3)-(4.5) в операторной форме

$$\frac{d^2 u_\pm}{dt^2} = A^+ u_\pm(t)\,, \tag{4.6}$$

$$u_\pm(0) = u_0, \qquad u_0 \in L^+_{p,\omega,h,g}$$

в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}(L^+_{p,\omega,h,g})$, то из теоремы 1.1. следует

Теорема 4.1. *Пусть $t_0 \in (a,b)$, $h(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s)ds$, $\rho(t) = \gamma(t)/\alpha(t)$, тогда:*

1) для каждого $u_0 \in L^+_{p,\omega,h,g}$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.3)-(4.5), и оно представимо в виде

$$u_+(t) = T^+_{h,\rho}[t, -(A^+_{h,\rho})^{\frac{1}{2}}]u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T^+_{h,\rho}(s, -A^+_{h,\rho}) u_0 ds\,; \tag{4.7}$$

2) для каждого $u_0 \in L^-_{p,\omega,h,g}$ существует единственное обобщенное решение задачи (4.4)-(4.5), и оно представимо в виде

$$u_-(t) = T^-_{h,\rho}[t, -(A^-_{h,\rho})^{\frac{1}{2}}]u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T^-_{h,\rho}(s, -A^-_{h,\rho}) u_0 ds\,. \tag{4.8}$$

Теперь, переходя к обозначениям уравнений (4.1) и (4.2) и возвращаясь к задачам (4.1)-(4.3), (4.2)-(4.3), получаем их решения

$$u_+(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^+(s, -A^+_{h,\rho}) u_0(t) ds =$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_{h(x)\oplus s}^x \rho(\xi)dh(\xi)\right] u_0[h^-(h(s)+x)]ds\,, \tag{4.9}$$

$$u_-(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^-(s, -A^-_{h,\rho}) u_0(t) ds =$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_x^{h(x)\ominus s} \rho(\xi)dh(\xi)\right] u_0[h^-(h(s)-x)]ds\,. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10), в частности следуют представления соответствующих тепловых потоков

$$q_+(t) = \left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=0} = -(A^+_{\rho,h})^{\frac{1}{2}} u_0(t)\,, \tag{4.11}$$

$$q_-(t) = \frac{\partial u_-}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(A^-_{\rho,h})^{\frac{1}{2}} u_0(t)\,, \tag{4.12}$$

В заключении заметим, что результаты полученные в настоящей заметке являются новыми даже в простейшем случае $h(x) = x$, $\rho(x) \equiv 0$, когда $T \pm (t)\varphi(x) = \varphi(x \pm t)$ – полугруппы сдвигов, а операторы $(-A^{\pm})^{\frac{1}{2}}$ определяются дробными производными Римана-Лиувилля.

Литература

1. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков / Л.: Химия, 1986. – 144 с.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Киев: Выща школа, 1989. – 347 с.
3. Иосида К. Функциональный анализ / Учебник, пер. с англ. В.М,Волосова / М. : Мир, 1967. – 624 с.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 500 с.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит-ры., 1967. – 464 с.
6. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // ДАН. – 2009. – 428, №1. – С.20-22.
7. Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0-операторный интеграл Дюамеля // ДАН. – 2013. – 452, №4. – С.367-370.
8. Костин В.А., Костин А.В., Костин Д.В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения // ДАН. – 2014. – 455, №2. – С.142-146.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с.

ABOUT WELL-POSED SOLVABILITY OF SOME NONSTATIONARY PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS

A.V. Kostin, M.V. Mukovnin, M.H. Geem

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394000, Russia, e-mail: leshakostin@mail.ru

Abstract. It is established well-posed solvability of a Hadamard nonstationary problem for one-dimensional heat equation, referred to the problem without initial conditions. This requires to find the derivative of the temperature at the spatial variable Which describes the variable of heat flow at the boundary of matter. Studying of these problems is known lead to the using of mechanism of fractional integro-differentiation. However, in general, the results are obtained concern only with the questions of existence solutions and its integral-differential concepts. The question of the stability solution on the initial data which requires using an appropriate metric spaces in such works is not discussed. In this paper, these problems are solved by using the theory of strongly continuous semigroups of linear transformations in special functional spaces.

Key words: heat- and mass-transfer, time-dependent problems, well-posed solvability, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators.