

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov, The graph of acyclic digraphs, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Volume 25, Issue 4, 441–452

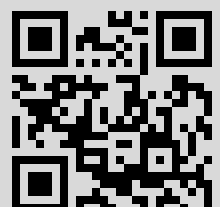
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 37.239.132.5

October 17, 2016, 19:39:59



УДК 519.175, 519.115

© *Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов*

ГРАФ АЦИКЛИЧЕСКИХ ОРГРАФОВ

В терминах характеристических функций на множестве всех бинарных отношений множества X вводится понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определяется алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества и из всех неупорядоченных пар смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф («граф графов»). Доказано, что диаметр графа бинарных отношений равен 2. Показано, что если σ и τ — смежные отношения, то σ — ациклическое отношение (конечный ациклический орграф) тогда и только тогда, когда τ — ациклическое отношение. Получена явная формула для числа компонент связности графа ациклических отношений.

Ключевые слова: бинарное отношение, ациклический ориентированный граф.

Работа продолжает исследование введенного авторами графа бинарных отношений [1, 2].

1. Смежность бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \rightarrow B$ будем называть *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X , порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma: X^2 \rightarrow B, \quad \chi_\sigma(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot, \cdot)$ будем обозначать через $\sigma(\cdot, \cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi: X^2 \rightarrow B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x, y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x, y) = 1$. Очевидно, отображение $\sigma \rightarrow \sigma(\cdot, \cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем σ как отношением, так и функцией.

Определение 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \emptyset$ или $Z = \emptyset$). Предположим, что отношение $\sigma \subseteq X^2$ таково, что $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $\tau \subseteq X^2$ такое, что

$$\tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x) \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x, y) = 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z \times Y,$$

$$\tau(x, y) = \sigma(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Отношение τ называется *смежным* с отношением σ .

Из определения следует, что если τ смежно с σ , то и σ смежно с τ , и этот факт мы записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. Применяя обозначение $\sigma|_{P \times Q}$ для сужения функции σ на прямоугольник $P \times Q$, получаем блочное представление

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \sigma|_{Y^2} & 0 \\ \hline \sigma|_{Z \times Y} & \sigma|_{Z^2} \\ \hline Y & Z \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline \tau|_{Y^2} & \tau|_{Y \times Z} \\ \hline 0 & \tau|_{Z^2} \\ \hline Y & Z \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} Y \\ Z \end{array}.$$

Так как $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$, то в блоке $Y \times Z$ записан «обобщенный» ноль (аналогично в блоке $Z \times Y$ отношения τ). В остальных блоках значения неизвестны, и там мы поступаем следующим образом. Берем за основу, например, отношение σ и проставляем в его блоках условный символ ε ; так как $\tau|_{Y^2} = \sigma|_{Y^2}$ и $\tau|_{Z^2} = \sigma|_{Z^2}$, то в диагональных блоках

отношения τ тоже пишем символ ε ; наконец, в блоке $Y \times Z$ отношения τ пишем символ ε' , означающий, что $\tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x)$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon \\ \hline Y & Z \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon & \varepsilon' \\ \hline 0 & \varepsilon \\ \hline Y & Z \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

На протяжении работы мы представляем диаграммы в виде (1). Заметим, что за основу можно брать и отношение τ (тогда в его блоке $Y \times Z$ следует писать символ ε , а в блоке $Z \times Y$ отношения σ — символ ε'). Еще заметим, что довольно часто мы применяем «обобщенную» единицу (в том случае, если априори известно, что все элементы блока равны 1).

Таким образом, X порождает пару $\langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$, где через 2^{X^2} обозначено множество вершин, состоящее из всех бинарных отношений множества X , а $E(X)$ — это множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар смежных бинарных отношений множества X (так как допускается, что $Y = \emptyset$, то $E(X)$ содержит все петли). Пару $G(X) \doteq \langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$ будем называть (неориентированным) *графом бинарных отношений* множества X .

Будем говорить, что бинарные отношения σ и τ принадлежат одной *компоненте связности* графа $G(X)$, если существует конечная последовательность отношений $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \tau$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k = 2, \dots, m$. Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное отношение σ .

2. Диаметр графа бинарных отношений.

Лемма 1. Для любых двух несмежных отношений $\sigma', \sigma'' \in G_\sigma(X)$ графа $\langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$ существует отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что

$$\sigma' \xleftrightarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftrightarrow{Y'' \times Z''} \sigma'', \quad Y' \times Z' \neq \emptyset, \quad Y'' \times Z'' \neq \emptyset.$$

Доказательство. Конечную цепочку

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{Y_1 \times Z_1} \sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \sigma_{m-2} \xleftrightarrow{Y_{m-1} \times Z_{m-1}} \sigma_{m-1} \xleftrightarrow{Y_m \times Z_m} \sigma_m$$

смежных отношений из компоненты $G_\sigma(X)$ будем называть *канонической*, если $\sigma_{k-1} \neq \sigma_k$ для всех $k = 1, \dots, m$ и $\sigma_{k-1} \neq \sigma_{k+1}$ для всех $k = 1, \dots, m-1$. Очевидно, $Y_k \neq \emptyset \neq Z_k$ для всех $k = 1, \dots, m$ и $Z_{k-1} \neq Y_k$ для всех $k = 2, \dots, m$. Через Ω_σ^m обозначим семейство всех канонических цепочек длины m компоненты $G_\sigma(X)$.

Так как $\sigma', \sigma'' \in G_\sigma(X)$, то существует конечная цепочка $\sigma' = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu = \sigma''$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k = 2, \dots, \mu$. Если цепочка не каноническая, то осуществим следующую процедуру удаления лишних узлов: просматривая цепочку слева направо и обнаружив при некотором k равенство $\sigma_{k-1} = \sigma_k$, удаляем из цепочки отношение σ_{k-1} ; вновь просматривая цепочку слева направо и обнаружив при некотором k равенство $\sigma_{k-1} = \sigma_{k+1}$, удаляем из цепочки отношения σ_{k-1} и σ_k . В итоге мы получим каноническую цепочку $\sigma' = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m = \sigma''$ из Ω_σ^m . Далее рассматриваем только канонические цепи.

Так как σ' и σ'' — несмежные отношения, то $m > 1$. При $m = 2$ утверждение леммы очевидно (достаточно положить $\tau = \sigma_1$). При $m = 3$ цепочка имеет вид

$$\sigma_0 \xleftrightarrow{Y_1 \times Z_1} \sigma_1 \xleftrightarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2 \xleftrightarrow{Y_3 \times Z_3} \sigma_3, \quad (2)$$

причем $Y_k \neq \emptyset \neq Z_k$, $k = 1, 2, 3$, $Z_1 \neq Y_2$, $Z_2 \neq Y_3$. Если

$$\begin{aligned} S_1 &\doteq Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3, & S_2 &\doteq Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3, & S_3 &\doteq Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3, & S_4 &\doteq Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3, \\ S_5 &\doteq Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3, & S_6 &\doteq Z_1 \cap Y_2 \cap Z_3, & S_7 &\doteq Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3, & S_8 &\doteq Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} Y_1 &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4, & Z_1 &= S_5 \cup S_6 \cup S_7 \cup S_8, & Y_2 &= S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6, \\ Z_2 &= S_3 \cup S_4 \cup S_7 \cup S_8, & Y_3 &= S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7, & Z_3 &= S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_8. \end{aligned}$$

Допустим, что $S_1 \neq \emptyset$ и $S_8 \neq \emptyset$. Тогда для любой пары $(x, y) \in S_1 \times S_8$ имеем $(y, x) \in Z_1 \times Y_1$ и $(x, y) \in Y_3 \times Z_3$, поэтому в силу диаграммы (2) справедливо $\sigma_1(y, x) = 0$ и $\sigma_2(x, y) = 0$. С другой стороны, $S_1 \times S_8 \subseteq Y_2 \times Z_2$, поэтому $\sigma_2(x, y) = 1 - \sigma_1(y, x) = 1$ — противоречие. Значит, одно из множеств S_1 или S_8 пусто.

I. Допустим, что $S_1 \neq \emptyset$, а $S_8 = \emptyset$. В этом случае имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}\sigma_1(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z_1 \times Y_1 = [S_5 \cup S_6 \cup S_7] \times [S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4], \\ \sigma_1(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Y_2 \times Z_2 = [S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6] \times [S_3 \cup S_4 \cup S_7], \\ \sigma_2(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z_2 \times Y_2 = [S_3 \cup S_4 \cup S_7] \times [S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6], \\ \sigma_2(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Y_3 \times Z_3 = [S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7] \times [S_2 \cup S_4 \cup S_6].\end{aligned}\quad (3)$$

Кроме того, в силу диаграммы $\sigma_1 \xleftarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2$ справедливы следующие утверждения.

1. Так как $\Delta_1 \doteq [S_1 \times S_2] \cup [S_1 \times S_6] \cup [S_5 \times S_6] \subseteq Y_2^2$, то $\sigma_1(x, y) = \sigma_2(x, y)$ при $(x, y) \in \Delta_1$, а так как $\Delta_1 \subseteq Y_3 \times Z_3$, то $\sigma_2(x, y) = 0$. Значит, $\sigma_1(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Delta_1$.

2. Так как $\Delta_2 \doteq S_3 \times S_4 \subseteq Z_2^2$, то $\sigma_1(x, y) = \sigma_2(x, y)$ при $(x, y) \in \Delta_2$, а так как $\Delta_2 \subseteq Y_3 \times Z_3$, то $\sigma_2(x, y) = 0$. Значит, $\sigma_1(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Delta_2$.

3. Так как $\Delta_3 \doteq [S_4 \times S_1] \cup [S_4 \times S_5] \subseteq Z_2 \times Y_2$, то $\sigma_1(x, y) = 1 - \sigma_2(y, x)$ при $(x, y) \in \Delta_3$, а так как $\Delta_3 \subseteq Z_3 \times Y_3$, то $\sigma_2(y, x) = 0$. Значит, $\sigma_1(x, y) = 1$ для всех $(x, y) \in \Delta_3$.

4. Так как $\Delta_4 \doteq [S_1 \times S_7] \cup [S_2 \times S_7] \subseteq Y_2 \times Z_2$, то $\sigma_2(x, y) = 1 - \sigma_1(y, x)$ при $(x, y) \in \Delta_4$, а так как $\Delta_4 \subseteq Y_1 \times Z_1$, то $\sigma_1(y, x) = 0$. Значит, $\sigma_2(x, y) = 1$ для всех $(x, y) \in \Delta_4$.

5. Так как $\Delta_5 \doteq S_7 \times S_3 \subseteq Z_2^2$, то $\sigma_2(x, y) = \sigma_1(x, y)$ при $(x, y) \in \Delta_5$, а так как $\Delta_5 \subseteq Z_1 \times Y_1$, то $\sigma_1(x, y) = 0$. Значит, $\sigma_2(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Delta_5$.

6. Так как $\Delta_6 \doteq [S_5 \times S_1] \cup [S_6 \times S_1] \cup [S_6 \times S_2] \subseteq Y_2^2$, то $\sigma_2(x, y) = \sigma_1(x, y)$ при $(x, y) \in \Delta_6$, а так как $\Delta_6 \subseteq Z_1 \times Y_1$, то $\sigma_1(x, y) = 0$. Значит, $\sigma_2(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Delta_6$.

В силу этих утверждений и формул (3) для отношений σ_1 и σ_2 имеем блочные представления (за основу берем σ_1):

$$\sigma_1 = \begin{array}{c|ccccccc} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}, \quad \sigma_2 = \begin{array}{c|ccccccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{array} \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}.$$

Следовательно, в силу диаграмм $\sigma_1 \xleftarrow{Z_1 \times Y_1} \sigma_0$ и $\sigma_2 \xleftarrow{Y_3 \times Z_3} \sigma_3$ справедливы представления

$$\sigma_0 = \begin{array}{c|ccccccc} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}, \quad \sigma_3 = \begin{array}{c|ccccccc} \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{array} \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}. \quad (4)$$

Имеет место диаграмма $\sigma_0 \xleftarrow{[S_1 \cup S_2] \times [S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7]} \tau \xleftarrow{[S_1 \cup S_3 \cup S_5] \times [S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_7]} \sigma_3$, где

$$\tau \doteq \begin{array}{cccccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & S_1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & S_4 \\ 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & S_5 \\ 0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 & S_6 \\ 0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}.$$

Так как $\emptyset = S_8 = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_4 &= Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_2 \cap Z_3, \\ S_6 &= Z_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [Z_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_1 \cap Z_3, \\ S_7 &= Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Z_1 \cap Z_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $W \doteq S_4 \cup S_6 \cup S_7 = [Z_1 \cap Z_2] \cup [Z_1 \cap Z_3] \cup [Z_2 \cap Z_3]$.

Если $W = \emptyset$, то $Z_1 \cap Z_2 = Z_1 \cap Z_3 = Z_2 \cap Z_3 = \emptyset$, поэтому

$$S_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [Y_1 \cap Z_2 \cap Z_3] = Y_1 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Z_3] \cup [Z_1 \cap Z_3] = Z_3 \neq \emptyset,$$

$$S_3 = Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] = Z_2 \cap Y_3 = [Z_2 \cap Y_3] \cup [Z_2 \cap Z_3] = Z_2 \neq \emptyset,$$

$$S_5 = Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2 \cap Y_3] = Z_1 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_3] = Z_1 \neq \emptyset.$$

Диаграмма принимает вид $\sigma_0 \xleftarrow{[S_1 \cup S_2] \times [S_3 \cup S_5]} \tau \xleftarrow{[S_1 \cup S_3 \cup S_5] \times [S_2]} \sigma_3$, причем прямые произведения в ней не пустые.

При $W \neq \emptyset$ диаграмма имеет вид $\sigma_0 \xleftarrow{[S_1 \cup S_2] \times [S_3 \cup S_5 \cup W]} \tau \xleftarrow{[S_1 \cup S_3 \cup S_5] \times [S_2 \cup W]} \sigma_3$, а так как $S_1 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграмме не пустые.

II. Случай $S_1 = \emptyset$, $S_8 \neq \emptyset$ доказывается симметричным образом.

III. Пусть, наконец, $S_1 = S_8 = \emptyset$. Блочные представления (4) для отношений σ_0 и σ_3 принимают вид

$$\sigma_0 = \begin{array}{cccccc} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 1 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}, \quad \sigma_3 = \begin{array}{cccccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 1 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array}.$$

Легко убедиться в истинности следующих диаграмм:

$$\sigma_0 \xleftarrow{[S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5] \times [S_6 \cup S_7]} \tau_1 \xleftarrow{[S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7] \times [S_4]} \sigma_3, \quad (6)$$

$$\sigma_0 \xleftarrow{[S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6] \times [S_7]} \tau_2 \xleftarrow{[S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7] \times [S_4 \cup S_6]} \sigma_3, \quad (7)$$

$$\sigma_0 \xleftarrow{[S_2] \times [S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7]} \tau_3 \xleftarrow{[S_3 \cup S_5] \times [S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_7]} \sigma_3, \quad (8)$$

$$\sigma_0 \xleftarrow{[S_2 \cup S_3] \times [S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7]} \tau_4 \xleftarrow{[S_5] \times [S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_7]} \sigma_3, \quad (9)$$

где

$$\begin{array}{c}
 \tau_1 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}, \quad \tau_2 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon' \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}, \\
 \\
 \tau_3 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon' & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}, \quad \tau_4 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array}.
 \end{array}$$

В силу (5) имеем $S_4 = Z_2 \cap Z_3$, $S_6 = Z_1 \cap Z_3$, $S_7 = Z_1 \cap Z_2$, а так как $\emptyset = S_1 = Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$, то

$$S_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3 = [Y_1 \cap Y_2 \cap Z_3] \cup [Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_1 \cap Y_2,$$

$$S_3 = Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3 = [Y_1 \cap Z_2 \cap Y_3] \cup [Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_1 \cap Y_3,$$

$$S_5 = Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = [Z_1 \cap Y_2 \cap Y_3] \cup [Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3] = Y_2 \cap Y_3.$$

В элементарной теории множеств справедлива импликация

$$A, B \subseteq X, \quad A \cap B = \emptyset, \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \implies \overline{A} = B, \quad \overline{B} = A. \quad (10)$$

Следовательно, $S_2 \cup S_7 \neq \emptyset$ и $S_4 \cup S_5 \neq \emptyset$. (Предположим, например, что $S_2 \cup S_7 = \emptyset$, тогда $\emptyset = S_2 = Y_1 \cap Y_2$ и $\emptyset = S_7 = Z_1 \cap Z_2 = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$, поэтому $Z_1 = Y_2$, — противоречие. Предположив истинность равенства $S_4 \cup S_5 = \emptyset$, также получим противоречие $Z_2 = Y_3$.)

1. Если $S_4 \neq \emptyset$ и $S_7 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграммах (6), (7) не пустые.
2. Если $S_4 = \emptyset$ и $S_7 = \emptyset$, то $S_5 \neq \emptyset$ и $S_2 \neq \emptyset$, следовательно, прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.
3. Пусть $S_4 \neq \emptyset$, а $S_7 = \emptyset$, тогда $S_2 \neq \emptyset$.

3а. Если $S_5 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.

3б. При $S_5 = \emptyset$ справедливо неравенство $S_3 \cup S_6 \neq \emptyset$. Предположив противное, имеем $S_3 = \emptyset$, $S_6 = \emptyset$, а в соответствии с (10) получаем равенство $Z_1 = Y_3$. Значит,

$$\emptyset = S_5 \cup S_7 = [Y_2 \cap Y_3] \cup [Z_1 \cap Z_2] = [Y_2 \cap Y_3] \cup [Y_3 \cap Z_2] = Y_3$$

— противоречие. Если $S_3 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграмме (8) не пустые, а если $S_6 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграмме (6) не пустые.

4. Пусть, наконец, $S_4 = \emptyset$, а $S_7 \neq \emptyset$, тогда $S_5 \neq \emptyset$.

4а. Если $S_2 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграммах (8), (9) не пустые.

4б. При $S_2 = \emptyset$ справедливо неравенство $S_3 \cup S_6 \neq \emptyset$. Предположив противное, имеем $S_3 = \emptyset$, $S_6 = \emptyset$, а в соответствии с (10) получаем равенство $Z_3 = Y_1$. Значит,

$$\emptyset = S_2 \cup S_4 = [Y_1 \cap Y_2] \cup [Z_2 \cap Z_3] = [Y_1 \cap Y_2] \cup [Z_2 \cap Y_1] = Y_1$$

— противоречие. Если $S_3 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграмме (9) не пустые, а если $S_6 \neq \emptyset$, то прямые произведения в диаграмме (7) не пустые.

Таким образом, при $m = 3$ утверждение леммы доказано. Оно является базой индукции. Зафиксируем $m > 3$ и предположим, что утверждение леммы справедливо для всех канонических цепочек из множества Ω_σ^{m-1} . Зафиксируем каноническую цепочку

$$\sigma' = \sigma_0 \xleftarrow{Y_1 \times Z_1} \sigma_1 \xleftarrow{Y_2 \times Z_2} \sigma_2 \xleftarrow{Y_3 \times Z_3} \sigma_3 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \sigma_{m-1} \xleftarrow{Y_m \times Z_m} \sigma_m = \sigma''$$

из множества Ω_σ^m . Существует отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что

$$\sigma_0 \xleftarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftarrow{Y'' \times Z''} \sigma_3, \quad Y' \times Z' \neq \emptyset, \quad Y'' \times Z'' \neq \emptyset,$$

следовательно, отношения σ' и σ'' связаны цепочкой

$$\sigma' = \sigma_0 \xleftarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftarrow{Y'' \times Z''} \sigma_3 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow \sigma_{m-1} \xleftarrow{Y_m \times Z_m} \sigma_m = \sigma''$$

из множества Ω_σ^{m-1} , что и доказывает индукционный переход.

Следствие 1. Диаметр нетривиального графа бинарных отношений равен 2.

3. Смежность ациклических отношений (ациклических орграфов). Далее считаем, что множество $X \doteq \{1, \dots, n\}$ конечно. Отношение $\sigma \in 2^{X^2}$ называем *ациклическим*, если:

- 1) $\sigma(x, x) = 0$ для всех $x \in X$;
- 2) для всех $m > 1$ и для всех $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ имеет место равенство

$$\sigma(x_m, x_1) \prod_{k=2}^m \sigma(x_{k-1}, x_k) = 0.$$

Семейство ациклических отношений обозначим через $A(X)$. Легко установить взаимно-однозначное соответствие между множеством $A(X)$ и множеством всех ациклических ориентированных графов, определенных на X . В разделе теории графов, посвященном этим графам, хорошо известно утверждение о том, что в любом конечном ациклическом орграфе множество вершин, в которые не входят дуги, не пусто. Поэтому справедливо следующее утверждение:

для любого $\sigma \in A(X)$ множество $S(\sigma) \doteq \{y \in X : \sigma(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in X\}$ не пусто.

Мы называем множества $S(\sigma)$ *опорными* (или *опорами*). В теории графов они называются множествами максимальных вершин (см., например, [3]).

Очевидно, всякий подграф ациклического орграфа является ациклическим, следовательно, имеет место следующее утверждение:

$$\text{если } \sigma \in A(X) \text{ и } \emptyset \neq Y \subseteq X, \text{ то } \sigma|_{Y^2} \in A(Y) \text{ и } S(\sigma|_{Y^2}) \neq \emptyset. \quad (11)$$

Всякое отношение $\sigma \in A(X)$ порождает (рекурсивным образом) два семейства множеств:

$$X^0 \doteq X, \\ X_k \doteq S(\sigma|_{X^{k-1} \times X^{k-1}}) \neq \emptyset, \quad X^k \doteq X^{k-1} \setminus X_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $X^0 \supset X^1 \supset X^2 \supset \dots$ и все включения строгие (в силу неравенств $X_k \neq \emptyset$), то рекурсивный процесс завершится за конечное число шагов. Другими словами, найдется p такое, что $X^{p-1} \neq \emptyset$, $X^p = \emptyset$. В частности, это означает, что $X_p = X^{p-1}$, а совокупность $(X_1, \dots, X_p)$ является разбиением множества X . Более того, для всех $k = 1, \dots, p$ имеет место равенство $X^{k-1} = \bigcup_{i=k}^p X_i$ (оно доказывается индукцией с помощью равенства $X^{k-1} = X^k \cup X_k$). Из рекурсии следует, что $X_k = \{y \in X^{k-1} : \sigma(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in X^{k-1}\}$, $k = 1, \dots, p$, значит,

- 1) $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in X^{k-1} \times X_k$, $k = 1, \dots, p$;
- 2) для любого $y \in X^k = X^{k-1} \setminus X_k$ найдется $x \in X^{k-1}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$, $k = 1, \dots, p-1$.

Ниже мы приводим два следствия этих утверждений. Так как $X^{k-1} = \cup_{i=k}^p X_i$, $k = 1, \dots, p$, то $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Omega \doteq \cup_{k=1}^p \cup_{i=k}^p (X_i \times X_k)$. Зафиксируем элемент $y \in X_k$, $k = 2, \dots, p$. Тогда $\sigma(x, y) = 0$ для всех $x \in X^{k-1}$, а так как $X_k \subseteq X^{k-1}$, то $y \in X^{k-1}$, поэтому найдется $x \in X^{k-2}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$. Следовательно, существует $x \in X^{k-2} \setminus X^{k-1} = X_{k-1}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$. Таким образом, для любого $k = 2, \dots, p$ и для любого $y \in X_k$ найдется $x \in X_{k-1}$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$.

В силу этих следствий для отношения $\sigma \in A(X)$ имеет место представление (12), в котором используется условный символ $*$, означающий, что в блоке $X_{k-1} \times X_k$, $k = 2, \dots, p$, в каждом столбце имеется хотя бы одна единица (называем блок невырожденным):

$$\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & * & & & & \\ \hline 0 & 0 & * & & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_p \end{array} \end{array} \quad (12)$$

$X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad X_p$

Для любого $k = 1, \dots, p$ определены множества $Y_k \doteq \cup_{i=k}^p X_i$ и $Z_k \doteq \cup_{j=1}^{k-1} X_j$, причем

$$Y_k \times Z_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} \bigcup_{i=k}^p (X_i \times X_j) \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} \bigcup_{i=j}^p (X_i \times X_j) \subset \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=j}^p (X_i \times X_j) = \Omega,$$

следовательно, $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y_k \times Z_k$. Очевидно, $Y_k \cup Z_k = X$ — дизъюнктное объединение, поэтому оно порождает отношение $\sigma^k \in 2^{X^2}$ такое, что

$$\sigma \xleftrightarrow{Y_k \times Z_k} \sigma^k. \quad (13)$$

(Заметим, что $Y_1 = X$, $Z_1 = \emptyset$, $\sigma^1 = \sigma$.) Таким образом, для любого $\sigma \in A(X)$ определено разбиение $(X_1, \dots, X_p)$ множества X такое, что $X_1 = S(\sigma)$, справедливо представление (12) и в соответствии с диаграммой (13) определены отношения $\sigma^k \in 2^{X^2}$, $k = 1, \dots, p$.

Замечание 1. Легко показать, что отношения σ^k и σ^m , $k, m = 1, \dots, p$, смежны.

4. Граф ациклических отношений (ациклических орграфов).

Теорема 1. Пусть σ и τ — смежные отношения. Включение $\sigma \in A(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in A(X)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in A(X)$. В силу диаграммы (1) $\tau(x, x) = \sigma(x, x)$ для всех $x \in X$. Допустим, что $\tau \notin A(X)$. Тогда для некоторого $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ справедливы равенства $\tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \dots, m$ и $\tau(x_m, x_1) = 1$.

Далее применяем обозначения диаграммы (1) и равенства $\sigma|_{Y^2} = \tau|_{Y^2}$, $\sigma|_{Z^2} = \tau|_{Z^2}$.

1. Допустим, что $x_1 \in Z$. Так как $\tau(x_1, x_2) = 1$ и $\tau(x_1, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_2 \in Z$. Так как $x_2 \in Z$, $\tau(x_2, x_3) = 1$ и $\tau(x_2, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_3 \in Z$. И так далее. Таким образом, $x_k \in Z$, $k = 1, \dots, m$. Следовательно, $\sigma(x_{k-1}, x_k) = \tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \dots, m$ и $\sigma(x_m, x_1) = \tau(x_m, x_1) = 1$, что противоречит включению $\sigma \in A(X)$.

2. Значит, $x_1 \in Y$. Так как $x_1 \in Y$, $\tau(x_m, x_1) = 1$ и $\tau(\xi, x_1) = 0$ для всех $\xi \in Z$, то $x_m \in Y$. (Допустим, что $x_k \in Z$ для некоторого $k \in \{2, \dots, m-1\}$. Так как $x_k \in Z$, $\tau(x_k, x_{k+1}) = 1$ и $\tau(x_k, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_{k+1} \in Z$. Так как $x_{k+1} \in Z$, $\tau(x_{k+1}, x_{k+2}) = 1$ и $\tau(x_{k+1}, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $x_{k+2} \in Z$. И так далее. Таким образом, $x_k, \dots, x_m \in Z$. В частности, $x_m \in Z$,

что противоречит включению $x_m \in Y$.) Итак, $x_k \in Y$ для всех $k = 1, \dots, m$. Следовательно, $\sigma(x_{k-1}, x_k) = \tau(x_{k-1}, x_k) = 1$ для всех $k = 2, \dots, m$, $\sigma(x_m, x_1) = \tau(x_m, x_1) = 1$, что противоречит включению $\sigma \in A(X)$. Значит, $\tau \in A(X)$. $\square$

Таким образом, множество $A(X)$ порождает подграф $\langle A(X), E(X) \rangle$ графа $G(X)$. Будем называть его *графом ациклических отношений* (или *графом ациклических орграфов*).

Лемма 2. Пусть $X \doteq \{1, \dots, n\}$, $n > 2$. Для любых двух отношений $\sigma', \sigma'' \in G_\sigma(X)$ графа $\langle A(X), E(X) \rangle$ существует отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что

$$\sigma' \xleftarrow{Y' \times Z'} \tau \xleftarrow{Y'' \times Z''} \sigma'', \quad Y' \times Z' \neq \emptyset, \quad Y'' \times Z'' \neq \emptyset.$$

Доказательство. Если σ' и σ'' — несмежные отношения, то утверждение справедливо в силу леммы 1. Далее считаем, что σ' и σ'' — смежные отношения: $\sigma' \xleftarrow{Y \times Z} \sigma''$.

1. В случае $\sigma' = \sigma''$ полагаем, что $Y = X$, $Z = \emptyset$. Так как σ' и σ'' ациклические, то $P \doteq S(\sigma') = S(\sigma'') \neq \emptyset$. Если $P = X$, то для любого непустого $S \subset X$ имеем $S' \doteq X \setminus S \neq \emptyset$ и

$$\sigma' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \end{array} \xleftarrow{S \times S'} \tau \doteq \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \end{array} \xleftarrow{S' \times S} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \end{array}.$$

Если же $P \subset X$, то $Q \doteq X \setminus P \neq \emptyset$ и

$$\sigma' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \end{array} \xleftarrow{Q \times P} \tau \doteq \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \end{array} \xleftarrow{P \times Q} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \end{array}.$$

2. Пусть смежные σ' и σ'' таковы, что $\sigma' \neq \sigma''$ (значит, $Y \neq \emptyset \neq Z$). Тогда $\sigma'|_{Y^2} = \sigma''|_{Y^2}$ и $\sigma'|_{Z^2} = \sigma''|_{Z^2}$, а в силу (11) имеем $P \doteq S(\sigma'|_{Y^2}) = S(\sigma''|_{Y^2}) \neq \emptyset$ и $Q \doteq S(\sigma'|_{Z^2}) = S(\sigma''|_{Z^2}) \neq \emptyset$. Если $P' \doteq Y \setminus P$, $Q' \doteq Z \setminus Q$, то имеет место диаграмма

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ P' \\ Q \\ Q' \end{array} = \sigma' \xleftarrow{Y \times Z} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ P' \\ Q \\ Q' \end{array}.$$

Легко убедиться в истинности следующих диаграмм:

$$\sigma' \xleftarrow{P' \times [P \cup Z]} \tau_1 \xleftarrow{P \times [P' \cup Z]} \sigma'', \quad \sigma' \xleftarrow{[Y \cup Q'] \times Q} \tau_2 \xleftarrow{[Y \cup Q] \times Q'} \sigma'',$$

где

$$\tau_1 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ P' \\ Q \\ Q' \end{array}, \quad \tau_2 \doteq \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ P' \\ Q \\ Q' \end{array}.$$

При $P' \neq \emptyset$ прямые произведения в первой диаграмме не пустые, а при $Q' \neq \emptyset$ таковыми являются прямые произведения во второй диаграмме. Пусть, наконец, $P' = Q' = \emptyset$. Тогда

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \end{array} = \sigma' \xleftarrow{Y \times Z} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ Q \end{array}.$$

Так как $n > 2$, то $\text{card } P > 1$ или $\text{card } Q > 1$. В случае $\text{card } P > 1$ для любого непустого $S \subset P$ имеем $S' \doteq P \setminus S \neq \emptyset$, $S \times S' \neq \emptyset$ и

$$\sigma' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \\ Q \end{array} \xleftrightarrow{S \times [S' \cup Q]} \tau \doteq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \\ Q \end{array} \xleftrightarrow{S' \times [S \cup Q]} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S \\ S' \\ Q \end{array}.$$

В случае $\text{card } Q > 1$ для любого непустого $S \subset Q$ имеем $S' \doteq Q \setminus S \neq \emptyset$, $S \times S' \neq \emptyset$ и

$$\sigma' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ S \\ S' \end{array} \xleftrightarrow{[P \cup S] \times S'} \tau \doteq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \varepsilon' \\ \hline \varepsilon & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ S \\ S' \end{array} \xleftrightarrow{[P \cup S'] \times S} \sigma'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} P \\ S \\ S' \end{array}.$$

5. Опорные множества ациклических отношений.

Лемма 3. Пусть отношения σ и τ принадлежат одной и той же компоненте связности графа $\langle A(X), E(X) \rangle$. Равенство $S(\sigma) = S(\tau)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma = \tau$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение тривиально. При $n = 2$ в графе имеется единственная связная компонента $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, в которой опорные множества равны $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2\}$ соответственно, поэтому утверждение также очевидно. Пусть $n > 2$ и $S \doteq S(\sigma) = S(\tau)$. В силу леммы 2 существует отношение π такое, что

$$\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \pi \xleftrightarrow{P \times Q} \tau, \quad Y \times Z \neq \emptyset, \quad P \times Q \neq \emptyset.$$

Пусть $S_1 \doteq Y \cap P$, $S_2 \doteq Y \cap Q$, $S_3 \doteq Z \cap P$, $S_4 \doteq Z \cap Q$. Справедливы равенства $Y = S_1 \cup S_2$, $Z = S_3 \cup S_4$, $P = S_1 \cup S_3$, $Q = S_2 \cup S_4$ и представления (за основу берем отношение π)

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon & 0 \\ \hline 1 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}, \quad \pi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}, \quad \tau = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon & 1 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon' & \varepsilon & \varepsilon' \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}.$$

Очевидно, $S = S(\sigma) \subseteq S_2 \cup S_3 \cup S_4$ и $S = S(\tau) \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3$, поэтому $S \subseteq S_2 \cup S_3$. Предположим, что $S_4 \neq \emptyset$. В силу (11) имеем $S(\sigma|_{S_4}) \neq \emptyset$, следовательно, $S \cap S_4 = S(\sigma) \cap S_4 \neq \emptyset$ (см. представление для σ), что противоречит включению $S \subseteq S_2 \cup S_3$. Значит, $S_4 = \emptyset$. Предположим, что $S_1 \neq \emptyset$. В силу (11) имеем $S(\tau|_{S_1}) \neq \emptyset$, следовательно, $S \cap S_1 = S(\tau) \cap S_1 \neq \emptyset$ (см. представление для τ), что противоречит включению $S \subseteq S_2 \cup S_3$. Значит, $S_1 = \emptyset$, а представления принимают вид

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \end{array}, \quad \pi = \begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \end{array}, \quad \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon' & \varepsilon \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \end{array}.$$

Итак, $\sigma = \tau$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

В силу диаграммы (13) для любого $\sigma \in A(X)$ определены отношения σ^k , $k = 1, \dots, p$, а в силу теоремы 1 имеем $\sigma^k \in A(X)$, поэтому определены опорные множества $S(\sigma^k)$.

Предложение 1. Для любого $k = 1, \dots, p$ справедливы включения $X_k \subseteq S(\sigma^k) \subseteq S(\sigma) \cup X_k$.

Доказательство. Так как $X_1 = S(\sigma)$ и $\sigma^1 = \sigma$, то при $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть $k \geq 2$. Тогда $p \geq 2$. В соответствии с диаграммой (13) справедливы равенства

$$Y_k \doteq \bigcup_{i=k}^p X_i, \quad Z_k \doteq \bigcup_{j=1}^{k-1} X_j, \quad \sigma^k|_{Y_k^2} = \sigma|_{Y_k^2}, \quad \sigma^k|_{Z_k^2} = \sigma|_{Z_k^2}, \quad \sigma^k(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in Z_k \times Y_k, \quad (14)$$

а в силу представления (12) $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Pi_k \doteq Y_k \times X_k$.

Очевидно, $\Pi_k \subset Y_k^2$, поэтому $\sigma^k(x, y) = \sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Pi_k$. Пусть, далее, $\Pi'_k \doteq Z_k \times X_k$. Очевидно, $\Pi'_k \subset Z_k \times Y_k$, поэтому $\sigma^k(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Pi'_k$. Таким образом, $\sigma^k(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in \Pi_k \cup \Pi'_k = X \times X_k$. Значит, $X_k \subseteq S(\sigma^k)$.

1. Пусть $k = 2, p \geq 3$. Тогда $Y_2 = \bigcup_{i=2}^p X_i, Z_2 = X_1$ и $X_{i-1} \times X_i \subset Y_2^2$ для всех $i = 3, \dots, p$. В силу (14) имеем $\sigma^2|_{X_{i-1} \times X_i} = \sigma|_{X_{i-1} \times X_i}$, поэтому блоки $X_{i-1} \times X_i$ отношения σ^2 невырожденные. Значит, для любого $y \in \bigcup_{i=3}^p X_i = X \setminus (X_1 \cup X_2)$ найдется x такое, что $\sigma^2(x, y) = 1$, поэтому $S(\sigma^2) \subseteq X_1 \cup X_2$. Это же включение справедливо и при $p = 2$ (здесь $X_1 \cup X_2 = X$).

2. Пусть $k = p \geq 3$. Тогда $Y_p = X_p, Z_p = \bigcup_{j=1}^{p-1} X_j$ и $X_{j-1} \times X_j \subset Z_p^2$ для всех $j = 2, \dots, p-1$. В силу (14) имеем $\sigma^p|_{X_{j-1} \times X_j} = \sigma|_{X_{j-1} \times X_j}$, поэтому блоки $X_{j-1} \times X_j$ отношения σ^p невырожденные. Значит, для любого $y \in \bigcup_{j=2}^{p-1} X_j = X \setminus (X_1 \cup X_p)$ найдется x такое, что $\sigma^p(x, y) = 1$, поэтому $S(\sigma^p) \subseteq X_1 \cup X_p$.

3. Пусть $p \geq 4, 3 \leq k \leq p-1$ — общий случай. Тогда множества Y_k и Z_k имеют общий вид (14), $X_{i-1} \times X_i \subset Y_k^2$ для всех $i = k+1, \dots, p$ и $X_{j-1} \times X_j \subset Z_k^2$ для всех $j = 2, \dots, k-1$. В силу (14) (по аналогии с пунктами 1 и 2) для любого $y \in [\bigcup_{i=k+1}^p X_i] \cup [\bigcup_{j=2}^{k-1} X_j] = X \setminus (X_1 \cup X_k)$ найдется x такое, что $\sigma^k(x, y) = 1$, поэтому $S(\sigma^k) \subseteq X_1 \cup X_k$.

Предложение 2. Для любого $\sigma \in A(X)$ и для любого непустого подмножества $S \subseteq S(\sigma)$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = S$, причем τ смежно с σ .

Доказательство. Отношение σ и множество $S \subseteq S(\sigma) = X_1$ порождают (рекурсивным образом) три семейства множеств:

$$Z_1 \doteq X_1 \setminus S, \quad Y_1 \doteq S \neq \emptyset,$$

$$Y^k \doteq \bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i \neq \emptyset, \quad Z_k \doteq \{y \in X_k : \sigma(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in Y^k\}, \quad Y_k \doteq X_k \setminus Z_k, \quad k = 2, \dots, p.$$

Пусть $Y \doteq \bigcup_{i=1}^p Y_i, Z \doteq \bigcup_{j=1}^p Z_j$ и $(x, y) \in Y \times Z$. Существуют i и j такие, что $(x, y) \in Y_i \times Z_j$. Если $i \geq j$, то $(x, y) \in Y_i \times Z_j \subseteq X_i \times X_j$, а в силу (12) справедливо равенство $\sigma(x, y) = 0$. Если же $i < j$, то $(x, y) \in Y_i \times Z_j \subseteq Y^j \times Z_j$, следовательно, $\sigma(x, y) = 0$. Таким образом, $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$. Очевидно, $Y \cup Z = X$ — дизъюнктное объединение, поэтому оно порождает отношение $\tau \in A(X)$ такое, что $\sigma \xrightarrow{Y \times Z} \tau$.

Зафиксируем $k = 2, \dots, p$ и $y \in Y_k$. В силу определения Y_k существует $x \in Y^k$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$. Так как $\tau|_{Y^2} = \sigma|_{Y^2}$ и $Y^k \times Y_k \subset Y^2$, то $\tau|_{Y^k \times Y_k} = \sigma|_{Y^k \times Y_k}$ и существует $x \in Y^k$ такое, что $\tau(x, y) = 1$. Значит, для любого $y \in \bigcup_{k=2}^p Y_k = Y \setminus Y_1$ найдется x такое, что $\tau(x, y) = 1$.

Зафиксируем пару $(x, y) \in Y_1 \times Z \subset Y \times Z$. Тогда $\tau(y, x) = 0$ и $\tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x)$. Так как $(y, x) \in Z \times Y_1 \subset X \times S(\sigma)$, то $\sigma(y, x) = 0$, поэтому $\tau(x, y) = 1$. Значит, для любого $y \in Z$ найдется $x \in Y_1$ такое, что $\tau(x, y) = 1$.

Итак, для любого $y \in [Y \setminus Y_1] \cup Z = X \setminus Y_1$ найдется x такое, что $\tau(x, y) = 1$. Иными словами, $S(\tau) \subseteq Y_1$. С другой стороны, для любого $y \in Y_1$ справедливо:

1) если $x \in Z$, то $(x, y) \in Z \times Y_1$, поэтому $\tau(x, y) = 0$ (см. предыдущий абзац);

2) если $x \in Y$, то $(x, y) \in Y \times Y_1 \subset X \times S(\sigma)$ (поэтому $\sigma(x, y) = 0$) и $(x, y) \in Y^2$ (поэтому $\tau(x, y) = \sigma(x, y)$), следовательно, $\tau(x, y) = 0$.

Таким образом, $\tau(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in X \times Y_1$, значит, $Y_1 \subseteq S(\tau)$, поэтому $S(\tau) = S$.

Единственность τ следует из леммы 3.

Предложение 3. Для любого $\sigma \in A(X)$ и для любого $x \in X$ существует единственное отношение $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{x\}$.

Доказательство. Так как σ порождает разбиение $(X_1, \dots, X_p)$ множества X , то существует k такое, что $x \in X_k$. В силу предложения 1 справедливо включение $X_k \subseteq S(\sigma^k)$, где $\sigma^k \in G_\sigma(X)$ — это отношение, определенное диаграммой (13). Так как $\{x\} \subseteq X_k \subseteq S(\sigma^k)$, то в силу предложения 2 существует $\tau \in G_{\sigma^k}(X) = G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{x\}$. $\square$

Замечание 2. В силу предложения 3 каждой компоненте $G_\sigma(X)$ графа $\langle A(X), E(X) \rangle$ соответствует единственное ациклическое отношение $\tau \in A(X)$ такое, что $S(\tau) = \{1\}$. Следовательно, количество связных компонент графа $\langle A(X), E(X) \rangle$ равно $\text{card } A^{(1)}(X)$, где

$$A^{(\nu)}(X) \doteq \{ \sigma \in A(X) : S(\sigma) = \{1, \dots, \nu\} \}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

6. Число связных компонент графа ациклических отношений. Пусть $X \doteq \{1, \dots, n\}$, $A_n \doteq \text{card } A(X)$, $A_n^{(\nu)} \doteq \text{card } A^{(\nu)}(X)$, $\nu = 1, \dots, n$. Согласно [3, лемма 2] справедливо равенство

$$A_n^{(\nu)} = \sum_{m=\nu}^n (-1)^{m-\nu} \binom{n-\nu}{m-\nu} 2^{m(n-m)} A_{n-m}. \quad (15)$$

Лемма 4. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\nu = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$A_n^{(\nu)} = \sum_{\substack{p_1+\dots+p_k=n \\ \nu \leq p_1}} (-1)^{n+1-\nu-k} \binom{n-\nu}{p_1-\nu, p_2, \dots, p_k} 2^{(n^2-p_1^2-\dots-p_k^2)/2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1, \dots, p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$ и $\nu \leq p_1$.

Доказательство. При $\nu = n$ формула тривиальна. Пусть $\nu < n$. Согласно [4] справедлива формула

$$A_n = \sum_{p_1+\dots+p_k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{p_1, \dots, p_k} 2^{(n^2-p_1^2-\dots-p_k^2)/2}, \quad n \geq 1,$$

следовательно, в силу (15)

$$\begin{aligned} A_n^{(\nu)} - (-1)^{n-\nu} &= \sum_{m=\nu}^{n-1} (-1)^{m-\nu} \binom{n-\nu}{m-\nu} 2^{m(n-m)} A_{n-m} = \\ &= \sum_{m=\nu}^{n-1} (-1)^{m-\nu} \binom{n-\nu}{m-\nu} 2^{m(n-m)} \sum_{p_1+\dots+p_k=n-m} (-1)^{n-m-k} \binom{n-m}{p_1, \dots, p_k} 2^{[(n-m)^2-p_1^2-\dots-p_k^2]/2}. \end{aligned}$$

Переходя к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$A_n^{(\nu)} = (-1)^{n-\nu} + \sum_{\substack{m+p_1+\dots+p_k=n \\ \nu \leq m < n}} (-1)^{n-\nu-k} \binom{n-\nu}{m-\nu, p_1, \dots, p_k} 2^{(n^2-m^2-p_1^2-\dots-p_k^2)/2}.$$

Сделав замену переменных $p'_1 = m$, $p'_i = p_{i-1}$, $i = 2, \dots, k'$, $k' = k + 1$, получаем равенство

$$A_n^{(\nu)} = (-1)^{n-\nu} + \sum_{\substack{p_1+\dots+p_{k'}=n \\ \nu \leq p_1 < n}} (-1)^{n+1-\nu-k'} \binom{n-\nu}{p_1-\nu, p_2, \dots, p_{k'}} 2^{(n^2-p_1^2-\dots-p_{k'}^2)/2}$$

(штрихи у новых переменных не пишем), что и доказывает утверждение леммы.

В силу замечания 2 и леммы 4 справедлива

Теорема 2. Если $X \doteq \{1, \dots, n\}$, то

$$\text{card } A(X) = \sum_{p_1+\dots+p_k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{p_1, \dots, p_k} 2^{(n^2-p_1^2-\dots-p_k^2)/2},$$

а количество компонент связности графа $\langle A(X), E(X) \rangle$ равно

$$\text{card } A^{(1)}(X) = \sum_{p_1+\dots+p_k=n} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{p_1-1, p_2, \dots, p_k} 2^{(n^2-p_1^2-\dots-p_k^2)/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12.
2. Аль Джабри Х.Ш. Граф рефлексивно-транзитивных отношений и граф конечных топологий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 3–11.
3. Лисковец В.А. О числе максимальных вершин случайного ациклического графа // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20. Вып. 2. С. 412–420.
4. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 105. P. 319–321.

Поступила в редакцию 23.10.2015

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
преподаватель, Аль-Кадисия университет, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov
The graph of acyclic digraphs

Keywords: binary relation, acyclic digraph.

MSC: 05C30

The paper introduces the concept of a binary reflexive relation of adjacency on the set of all binary relations of a set X (in terms of characteristic functions) and determines an algebraic system consisting of all binary relations of the set and of all unordered pairs of adjacent binary relations. If X is a finite set then this algebraic system is a graph ("the graph of graphs"). It is proved that the diameter of a graph of binary relations is 2. It is shown that if σ and τ are adjacent relations, then σ is an acyclic relation (finite acyclic digraph) if and only if τ is an acyclic relation. An explicit formula for the number of connected components of a graph of acyclic relations is received.

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 3–12 (in Russian).
2. Al' Dzhabri Kh.Sh. The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 3–11 (in Russian).
3. Liskovets V.A. On the number of maximal vertices of a random acyclic digraph, *Theory Probab. Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 401–409.
4. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs, *Discrete Mathematics*, 1992, vol. 105, pp. 319–321.

Received 23.10.2015

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru