

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Kh. Sh. Al' Dzhabri, The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Volume 25, Issue 1, 3–11

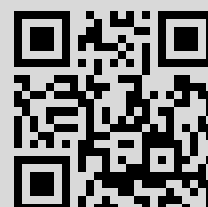
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 37.239.132.5

October 17, 2016, 19:38:43



УДК 519.175, 519.115.5

© *Х. Ш. Аль Джабри*

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНО-ТРАНЗИТИВНЫХ ОТНОШЕНИЙ И ГРАФ КОНЕЧНЫХ ТОПОЛОГИЙ

Любое бинарное отношение $\sigma \subseteq X^2$ (где X — произвольное множество) порождает на множестве X^2 характеристическую функцию: если $(x, y) \in \sigma$, то $\sigma(x, y) = 1$, а иначе $\sigma(x, y) = 0$. В терминах характеристических функций на множестве всех бинарных отношений множества X вводится понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определяется алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества и из всех неупорядоченных пар различных смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф («граф графов»).

Показано, что если σ и τ — смежные отношения, то σ является рефлексивно-транзитивным отношением тогда и только тогда, когда τ является рефлексивно-транзитивным отношением. Исследованы некоторые особенности строения графа $G(X)$ рефлексивно-транзитивных отношений. В частности, если X состоит из n элементов, а $T_0(n)$ — это число помеченных T_0 -топологий, определенных на множестве X , то количество компонент связности равно $\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1)$, где $S(n, m)$ — числа Стирлинга 2-го рода. (Хорошо известно, что количество вершин в графе $G(X)$ равно $\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m)$.)

Ключевые слова: граф, рефлексивно-транзитивное отношение, конечная топология.

1. Смежность бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \rightarrow B$ будем называть *характеристическими*. Всякое подмножество $R \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X , порождает характеристическую функцию

$$\chi_R: X^2 \rightarrow B, \quad \chi_R(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin R. \end{cases}$$

Далее, функцию $\chi_R(\cdot, \cdot)$ будем обозначать через $R(\cdot, \cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi: X^2 \rightarrow B$ порождает бинарное отношение $R_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x, y) \in R_\chi$, если $\chi(x, y) = 1$. Очевидно, отображение $R \rightarrow R(\cdot, \cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций.

На множестве 2^{X^2} всех бинарных отношений множества X (на множестве характеристических функций) введем бинарное рефлексивное отношение смежности.

Определение 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \emptyset$ или $Z = \emptyset$). Предположим, что отношение $\sigma \subseteq X^2$ таково, что $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $\tau \subseteq X^2$ такое, что

$$\tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x) \quad \text{для всех } (x, y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x, y) = 0 \quad \text{для всех } (x, y) \in Z \times Y,$$

$$\tau(x, y) = \sigma(x, y) \quad \text{для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Отношение τ называется *смежным* с отношением σ .

Замечание 1. Из определения следует, что если отношение τ смежно с отношением σ , то и σ смежно с τ , и этот факт мы записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$, или

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & Y & Z \\ \hline Y & & 0 \\ \hline Z & \sigma(x, y) & \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & Y & Z \\ \hline Y & & 1 - \sigma(y, x) \\ \hline Z & 0 & \\ \hline \end{array}.$$

Здесь и далее в диаграммах мы отмечаем значения характеристических функций в тех точках, которые априори известны. Например, в блоке $Y \times Z$ для отношения σ пишем «обобщенный» ноль, и это означает, что $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$, а в таком же блоке для отношения τ пишем $1 - \sigma(y, x)$, и это означает, что $\tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x)$ для всех $(x, y) \in Y \times Z$.

Например, $X = \{1, \dots, 6\}$, $Y = \{1, 2\}$, $Z = \{3, 4, 5, 6\}$,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 10 & \\ \hline 01 & 0 \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftarrow{Y \times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 1010 \\ \hline 01 & 1110 \\ \hline \end{array}.$$

2. Рефлексивно-транзитивные отношения. Через $V(X)$ обозначим совокупность всех рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве X . Другими словами, отношение $\sigma \subseteq X^2$ принадлежит множеству $V(X)$, если оно удовлетворяет аксиомам рефлексивности ($(x, x) \in \sigma$) и транзитивности (если $(x, y) \in \sigma$, $(y, z) \in \sigma$, то $(x, z) \in \sigma$). В терминах характеристических функций имеем: $\sigma \in V(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(x, x) = 1 \text{ для всех } x \in X,$$

$$\sigma(x, y) \sigma(y, z) \leq \sigma(x, z) \text{ для всех } x, y, z \in X.$$

Для любых $\sigma \in V(X)$ и $x \in X$ множество

$$U_\sigma(x) \doteq \{y \in X : \sigma(x, y) = 1\} \quad (1)$$

не пусто (так как $x \in U_\sigma(x)$).

Предложение 1. Пусть $\sigma \in V(X)$ и $x, y \in X$. Включение $y \in U_\sigma(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $U_\sigma(y) \subseteq U_\sigma(x)$.

Доказательство. Пусть $y \in U_\sigma(x)$, тогда $\sigma(x, y) = 1$. Если $z \in U_\sigma(y)$, то $\sigma(y, z) = 1$, поэтому $\sigma(x, z) = 1$ и $z \in U_\sigma(x)$. Значит, $U_\sigma(y) \subseteq U_\sigma(x)$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Отношение $\sigma \in V(X)$ порождает на множестве X отношение эквивалентности: пишем $x \sim y$ (или $x \overset{\sigma}{\sim} y$) тогда и только тогда, когда $U_\sigma(x) = U_\sigma(y)$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $x \in X$, обозначаем $[x]_\sigma$ (или $\overline{x}$).

Предложение 2. Пусть $\sigma \in V(X)$ и $x, y \in X$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $[x]_\sigma \subseteq U_\sigma(x)$;
- 2) если $y \in U_\sigma(x)$, то $[y]_\sigma \subseteq U_\sigma(x)$; следовательно,

$$U_\sigma(x) = \bigcup_{[x]_\sigma \subseteq U_\sigma(x)} [x]_\sigma; \quad (2)$$

- 3) $\sigma(\xi, \eta) = 1$ для всех $(\xi, \eta) \in [x]_\sigma^2$;
- 4) $\sigma(\xi, \eta) = \sigma(x, y)$ для всех $(\xi, \eta) \in [x]_\sigma \times [y]_\sigma$;
- 5) если $[x]_\sigma \neq [y]_\sigma$, то $\sigma(\xi, \eta) \sigma(\eta, \xi) = 0$ для всех $(\xi, \eta) \in [x]_\sigma \times [y]_\sigma$.

Доказательство. 1. Включение $\xi \in [x]_\sigma$ влечет $\xi \sim x$ и $\xi \in U_\sigma(\xi) = U_\sigma(x)$.

2. В силу первого пункта и предложения 1 справедливо $[y]_\sigma \subseteq U_\sigma(y) \subseteq U_\sigma(x)$. Обозначим правую часть (2) через S . Если $z \in S$, то $z \in [x]_\sigma$ для некоторого x такого, что $[x]_\sigma \subseteq U_\sigma(x)$, поэтому $z \in U_\sigma(x)$. Обратно: если $z \in U_\sigma(x)$, то $[z]_\sigma \subseteq U_\sigma(x)$ и $z \in [z]_\sigma \subseteq S$.

3. Так как $\xi \sim \eta$, то $U_\sigma(\xi) = U_\sigma(\eta)$, значит, $\eta \in U_\sigma(\xi)$ и $\sigma(\xi, \eta) = 1$.

4. Если $\sigma(\xi, \eta) = 0$ для всех $\xi \in [x]_\sigma$, $\eta \in [y]_\sigma$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что $\sigma(z, w) = 1$ для некоторых $z \in [x]_\sigma$ и $w \in [y]_\sigma$, тогда $w \in U_\sigma(z)$. Следовательно,

$[w]_\sigma \subseteq U_\sigma(w) \subseteq U_\sigma(z)$, значит, $\eta \in U_\sigma(z)$ для любого $\eta \in [y]_\sigma = [w]_\sigma$. Так как $\xi \in [x]_\sigma = [z]_\sigma$, то $U_\sigma(\xi) = U_\sigma(z)$, поэтому $\eta \in U_\sigma(\xi)$. Таким образом, $\sigma(\xi, \eta) = 1$ для всех $\xi \in [x]_\sigma, \eta \in [y]_\sigma$.

5. Предположим противное, то есть $\sigma(\xi, \eta) = 1, \sigma(\eta, \xi) = 0$. Тогда $\eta \in U_\sigma(\xi), \xi \in U_\sigma(\eta)$ и $U_\sigma(\eta) \subseteq U_\sigma(\xi) \subseteq U_\sigma(\eta)$, значит, $\xi \sim \eta$, что противоречит условию $[x]_\sigma = [y]_\sigma \neq [z]_\sigma = [w]_\sigma$. $\square$

3. Граф рефлексивно-транзитивных отношений

Предложение 3. Пусть σ и τ — смежные отношения, определенные на множестве X , то есть $\sigma \xrightarrow{Y \times Z} \tau$. Включение $\sigma \in V(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in V(X)$.

Доказательство. В силу симметрии утверждения достаточно показать импликацию $\sigma \in V(X) \implies \tau \in V(X)$. Пусть $\sigma \in V(X)$. Поскольку σ и τ — смежные отношения, то $\tau(x, x) = \sigma(x, x) = 1$ для всех $x \in X$, что доказывает рефлексивность отношения τ .

Транзитивность. Пусть $x, y, z \in X$ таковы, что $\tau(x, y) = \tau(y, z) = 1$, и предположим сначала, что $y \in Y$. Поскольку $\tau(\xi, y) = 0$ для всех $\xi \in Z$, то $x \in Y$. Если $z \in Y$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$, а так как $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(x, z) = 1$, поэтому $\tau(x, z) = 1$. Если же окажется, что $z \in Z$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(z, y) = 1 - \tau(y, z) = 0$; поскольку $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(z, x) = \sigma(z, x) \sigma(x, y) \leq \sigma(z, y) = 0$, значит, $\sigma(z, x) = 0$, поэтому $\tau(x, z) = 1$.

Полагаем теперь, что $y \in Z$. Поскольку $\tau(y, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $z \in Z$. Если $x \in Z$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$, а так как $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(x, z) = 1$, поэтому $\tau(x, z) = 1$. Если же $x \in Y$, то $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$ и $\sigma(y, x) = 1 - \tau(x, y) = 0$, а поскольку $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(z, x) = \sigma(y, z) \sigma(z, x) \leq \sigma(y, x) = 0$, значит, $\sigma(z, x) = 0$, поэтому $\tau(x, z) = 1$.

Итак, во всех случаях имеет место равенство $\tau(x, z) = 1$. $\square$

Таким образом, множество X порождает пару $\langle V(X), E(X) \rangle$, где $V(X)$ — это множество вершин, состоящее из всех рефлексивно-транзитивных отношений множества X , а $E(X)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных рефлексивно-транзитивных отношений множества X . Пару $G(X) \doteq \langle V(X), E(X) \rangle$ будем называть (неориентированным) графом рефлексивно-транзитивных отношений множества X .

Определение 2. Будем говорить, что рефлексивно-транзитивные отношения σ и τ принадлежат одной компоненте связности графа $G(X)$, если существует конечная последовательность рефлексивно-транзитивных отношений $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \tau$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k = 2, \dots, m$. Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное рефлексивно-транзитивное отношение σ .

4. Особенности строения графа рефлексивно-транзитивных отношений. Пусть $\sigma \in V(X)$. Через $[X]_\sigma$ обозначим совокупность всех классов эквивалентности множества X , то есть $[X]_\sigma = \{[x]_\sigma\}_{x \in X} = \{\bar{x}\}_{x \in X}$. В силу пункта 4 предложения 2 определена характеристическая функция $\bar{\sigma}: [X]_\sigma^2 \rightarrow B$ такая, что

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \sigma(\xi, \eta), \text{ где } (\xi, \eta) \text{ — произвольная пара из прямого произведения } \bar{x} \times \bar{y}.$$

Очевидно,

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{x}) = \sigma(x, x) = 1 \text{ для всех } \bar{x} \in [X]_\sigma;$$

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\sigma}(\bar{y}, \bar{z}) = \sigma(x, y) \sigma(y, z) \leq \sigma(x, z) = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{z}) \text{ для всех } \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in [X]_\sigma;$$

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\sigma}(\bar{y}, \bar{x}) = \sigma(x, y) \sigma(y, x) = \delta_{\bar{x}\bar{y}} \text{ для всех } \bar{x}, \bar{y} \in [X]_\sigma \text{ (где } \delta_{\bar{x}\bar{y}} \text{ — символ Кронекера)}.$$

Значит, σ порождает на множестве $[X]_\sigma$ частичный порядок $\bar{\sigma}$ (см. аксиомы (1) в [1]). Следовательно, в соответствии с [1] σ порождает граф $G_0([X]_\sigma) \doteq \langle V_0([X]_\sigma), E([X]_\sigma) \rangle$, где $V_0([X]_\sigma)$ — это множество частичных порядков, определенных на множестве $[X]_\sigma$, а $E([X]_\sigma)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных частичных порядков множества $[X]_\sigma$. Таким образом, $\bar{\sigma} \in V_0([X]_\sigma)$ и определена компонента связности графа $G_0([X]_\sigma)$, содержащая частичный порядок $\bar{\sigma}$ (обозначим ее $G_0^{\bar{\sigma}}([X]_\sigma)$).

Пример 1. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда $G_\sigma(X) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$,

$$[X]_\sigma = \{\bar{1}, \bar{3}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_0([X]_\sigma) = G_0^\sigma([X]_\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Будем говорить, что отношения $\sigma, \tau \in V(X)$ являются рефлексивно-транзитивными отношениями *одного и того же типа*, если $[X]_\sigma = [X]_\tau$.

Предложение 4. Если σ и τ — смежные рефлексивно-транзитивные отношения, определенные на множестве X , то $[X]_\sigma = [X]_\tau$ (то есть σ и τ имеют один и тот же тип).

Доказательство. В силу смежности отношений σ и τ существует дизъюнктное объединение $Y \cup Z = X$ такое, что $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. Пусть $x, y \in X$. В силу симметрии утверждения достаточно показать импликацию $x \overset{\sigma}{\sim} y \implies x \overset{\tau}{\sim} y$, или $[x]_\sigma = [y]_\sigma \implies [x]_\tau = [y]_\tau$.

Пусть $[x]_\sigma = [y]_\sigma$, и предположим, что $[x]_\tau \neq [y]_\tau$. Тогда в соответствии с пунктом 5 предложения 2 имеет место равенство $\tau(x, y)\tau(y, x) = 0$. С другой стороны, в силу пункта 3 этого же предложения справедливы равенства $\sigma(x, y) = \sigma(y, x) = 1$, следовательно, $(x, y) \notin Y \times Z$ и $(y, x) \notin Y \times Z$. Значит, $(x, y), (y, x) \in Y^2 \cup Z^2$, поэтому $\tau(x, y) = \sigma(x, y) = 1$, $\tau(y, x) = \sigma(y, x) = 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

Замечание 2. В процессе доказательства мы показали, в частности, что если $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$, то для любого $x \in X = Y \cup Z$ имеет место альтернатива: *либо $\bar{x} \subseteq Y$, либо $\bar{x} \subseteq Z$* . Другими словами, множество $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$[X] = [Y] \cup [Z], \quad \text{где } [Y] \doteq \{\bar{x} \in [X] : \bar{x} \subseteq Y\}, \quad [Z] \doteq \{\bar{x} \in [X] : \bar{x} \subseteq Z\}. \quad (3)$$

Замечание 3. В итоге мы установили, что всякое отношение $\sigma \in V(X)$ порождает компоненту связности $G_\sigma(X)$ графа $G(X)$, совокупность $[X]_\sigma$ классов эквивалентности, частичный порядок $\bar{\sigma} \in V_0([X]_\sigma)$, граф $G_0([X]_\sigma)$ и его компоненту связности $G_0^\sigma([X]_\sigma)$. Кроме того, если $\tau \in G_\sigma(X)$, то $G_\tau(X) = G_\sigma(X)$ и $[X]_\tau = [X]_\sigma$, а в приводимом ниже предложении 5 доказано равенство $G_0^\tau([X]_\tau) = G_0^\sigma([X]_\sigma)$.

Предложение 5. Пусть рефлексивно-транзитивные отношения σ и τ определены на множестве X , а $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ — это порожденные ими частичные порядки, определенные на множествах $[X]_\sigma$ и $[X]_\tau$ соответственно. Отношения σ и τ смежны тогда и только тогда, когда смежны отношения $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$.

Доказательство. Так как $\sigma, \tau \in V(X)$, то $\bar{\sigma} \in G_0^\sigma([X]_\sigma)$, $\bar{\tau} \in G_0^\tau([X]_\tau)$.

Предположим, что σ и τ смежны, тогда существует дизъюнктное объединение $Y \cup Z = X$ такое, что $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. В силу предложения 4 имеем $[X]_\sigma = [X]_\tau$, а в силу (3) справедливо $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau = [Y] \cup [Z]$. Из определения 1 следует, что

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma(x, y) = 0 \quad \text{для всех } (\bar{x}, \bar{y}) \in [Y] \times [Z],$$

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(x, y) = 1 - \sigma(y, x) = 1 - \bar{\sigma}(\bar{y}, \bar{x}) \quad \text{для всех } (\bar{x}, \bar{y}) \in [Y] \times [Z],$$

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(x, y) = 0 \quad \text{для всех } (\bar{x}, \bar{y}) \in [Z] \times [Y],$$

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(x, y) = \sigma(x, y) = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{для всех } (\bar{x}, \bar{y}) \in [Y]^2 \cup [Z]^2.$$

Следовательно, $\bar{\sigma} \xleftrightarrow{[Y] \times [Z]} \bar{\tau}$, то есть частичные порядки $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ смежны.

Обратно: если $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ смежны, то $G_0^\sigma([X]_\sigma) = G_0^\tau([X]_\tau)$ и, в частности, $[X]_\sigma = [X]_\tau$. Пусть $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau$. В силу смежности отношений $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ существует дизъюнктное объединение $[Y] \cup [Z] = [X]$ такое, что $\bar{\sigma} \xleftrightarrow{[Y] \times [Z]} \bar{\tau}$. Из определения 1 следует, что если $Y \doteq \{x \in X : \bar{x} \in [Y]\}$ и $Z \doteq \{x \in X : \bar{x} \in [Z]\}$, то

$$\sigma(x, y) = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \text{для всех } (x, y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x, y) = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - \bar{\sigma}(\bar{y}, \bar{x}) = 1 - \sigma(y, x) \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x, y) = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z \times Y,$$

$$\tau(x, y) = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Следовательно, $\sigma \xrightarrow{Y \times Z} \tau$, то есть отношения σ и τ смежны. $\square$

Предложение 6. Пусть $\sigma \in V(X)$. Связные графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^\sigma([X]_\sigma)$ изоморфны.

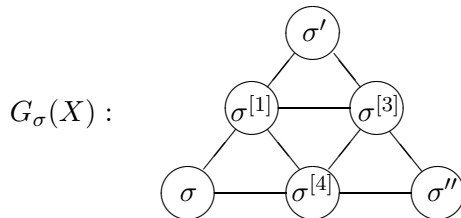
Действительно, в силу предложения 5 отображение $G_\sigma(X) \ni \tau \rightarrow \bar{\tau} \in G_0^\sigma([X]_\sigma)$ является изоморфизмом алгебраических систем $G_\sigma(X)$ и $G_0^\sigma([X]_\sigma)$.

Предложение 7. Пусть $\sigma \in V(X)$ и $x \in X$. Существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $\tau(x, y) = \tau(y, x) = \delta_{\bar{x}\bar{y}}$ для всех $y \in X$. (Будем обозначать это рефлексивно-транзитивное отношение через $\sigma^{[x]}$, то есть $\tau = \sigma^{[x]}$.)

Доказательство. Графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^\sigma([X]_\sigma)$ изоморфны, а в силу следствия 1 [1] существует единственное $\bar{\tau} \in G_0^\sigma([X]_\sigma)$ такое, что $\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\tau}(\bar{y}, \bar{x}) = \delta_{\bar{x}\bar{y}}$ для всех $\bar{y} \in [X]_\sigma$. Через τ обозначим прообраз отношения $\bar{\tau}$ при изоморфизме графов $G_\sigma(X) \rightarrow G_0^\sigma([X]_\sigma)$. Тогда $\tau \in G_\sigma(X)$, $\tau(x, y) = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = \delta_{\bar{x}\bar{y}}$ и $\tau(y, x) = \bar{\tau}(\bar{y}, \bar{x}) = \delta_{\bar{y}\bar{x}}$ для всех $y \in X$. $\square$

Таким образом, при фиксированном $\sigma \in V(X)$ определено отображение $X \rightarrow G_\sigma(X)$, сопоставляющее элементу $x \in X$ рефлексивно-транзитивное отношение $\sigma^{[x]}$ (очевидно, если $x \sim y$, то $\sigma^{[x]} = \sigma^{[y]}$, но может оказаться, что $\sigma^{[x]} = \sigma^{[y]}$ и при $[x]_\sigma \neq [y]_\sigma$).

Пример 2. В примере 1 графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^\sigma([X]_\sigma)$ изоморфны и $\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} = \sigma^{[3]} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 001 \end{bmatrix}$. Если $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\sigma = \begin{bmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 0011 \\ 0001 \end{bmatrix}$, то $\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1100 \\ 0011 \\ 0001 \end{bmatrix}$, $\sigma^{[3]} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1100 \\ 0010 \\ 1101 \end{bmatrix}$, $\sigma^{[4]} = \begin{bmatrix} 1110 \\ 1110 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix}$,



$$\sigma' = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1100 \\ 1111 \\ 1101 \end{bmatrix}, \quad \sigma'' = \begin{bmatrix} 1110 \\ 1110 \\ 0010 \\ 1111 \end{bmatrix}.$$

5. Биекция между конечными рефлексивно-транзитивными отношениями и конечными топологиями. Отношение $\sigma \in V(X)$ будем называть *конечным*, если множество $[X]_\sigma$ состоит из конечного числа классов эквивалентности, то есть $\text{card } [X]_\sigma < \infty$. Совокупность всех таких отношений обозначим через $W(X)$. Очевидно, $W(X) \subseteq V(X)$.

Зафиксируем произвольное множество X . Совокупность T его подмножеств называется *топологией* на X (мы придерживаемся определений [2, с. 84]), если: 1) $\emptyset, X \in T$; 2) объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T , принадлежит T ; 3) пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T , принадлежит T . Множества, принадлежащие совокупности T , называются *открытыми множествами*. Если $\text{card } T < \infty$, то говорят, что T является *конечной топологией*.

Далее считаем, что T — конечная топология на множестве X . Тогда для любого $x \in X$ существует наименьшее открытое множество $S_T(x)$, содержащее точку x , где $S_T(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x .

Предложение 8. Пусть T — конечная топология на множестве X , $S \in T$ и $x, y, z \in X$.

1. Если $x \in S$, то $S_T(x) \subseteq S$. Справедливо равенство $S = \bigcup_{x \in S} S_T(x)$.
2. Включение $y \in S_T(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $S_T(y) \subseteq S_T(x)$.
3. Если $y \in S_T(x)$, $z \in S_T(y)$, то $z \in S_T(x)$.

Доказательство. 1. Пусть $x \in S$. Так как $S_T(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x , то $S_T(x) \subseteq S$. Кроме того, $S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in S} S_T(x) \subseteq S$.

2. Пусть $y \in S_T(x)$, тогда $S_T(y) \subseteq S_T(x)$. Обратное утверждение очевидно.

3. Так как $S_T(y) \subseteq S_T(x)$ и $S_T(z) \subseteq S_T(y)$, то $S_T(z) \subseteq S_T(x)$, поэтому $z \in S_T(x)$. $\square$

Зафиксируем на множестве X конечную топологию T и построим функцию $\sigma: X^2 \rightarrow B$ такую, что $\sigma(x, y) = 1$, если $y \in S_T(x)$, а иначе $\sigma(x, y) = 0$. Покажем, что σ является характеристической функцией для некоторого рефлексивно-транзитивного отношения. Действительно, для любого $x \in X$ справедливо $x \in S_T(x)$, поэтому $\sigma(x, x) = 1$. Докажем неравенство $\sigma(x, y)\sigma(y, z) \leq \sigma(x, z)$. Если $\sigma(x, y) = 1$, $\sigma(y, z) = 1$, то $y \in S_T(x)$, $z \in S_T(y)$, следовательно, $z \in S_T(x)$ (см. предложение 8), значит, $\sigma(x, z) = 1$. Остальные случаи тривиальны. Таким образом, $\sigma \in V(X)$. Покажем, что справедливо включение $\sigma \in W(X)$. Действительно, для любого $x \in X$ справедливо равенство $S_T(x) = \{y \in X: \sigma(x, y) = 1\}$, поэтому в силу (1)

$$U_\sigma(x) = S_T(x), \quad (4)$$

а так как $S_T(x) \in T$, то всякое множество $U_\sigma(x)$ принадлежит конечной топологии T , значит, их количество конечно. Поскольку $[x]_\sigma = \{y \in X: U_\sigma(y) = U_\sigma(x)\}$, то количество классов эквивалентности $[x]_\sigma$ тоже конечно, следовательно, $\sigma \in W(X)$.

Итак, всякое топологическое пространство (X, T) , $\text{card } T < \infty$, порождает бинарное отношение $\sigma \in W(X)$. Другими словами, если $T(X)$ — это совокупность всех конечных топологий, определенных на множестве X , то определено отображение $\Phi: T(X) \rightarrow W(X)$, $T \rightarrow \sigma$.

Предложение 9. Отображение $\Phi: T(X) \rightarrow W(X)$ биективно.

Доказательство. Если $T, T' \in T(X)$, $T \neq T'$, то существует множество $S \subseteq X$ такое, что $S \in T$ и $S \notin T'$. Тогда $S = \bigcup_{x \in S} S_T(x)$ и найдется $y \in S$ такое, что $S_T(y) \neq S_{T'}(y)$ (предположив противное, получим противоречие $S = \bigcup_{x \in S} S_T(x) = \bigcup_{x \in S} S_{T'}(x) \in T'$). Следовательно, если $\sigma = \Phi(T)$, $\sigma' = \Phi(T')$, то существует $z \in X$ такое, что $\sigma(y, z) \neq \sigma'(y, z)$. Значит, $\sigma \neq \sigma'$, поэтому Φ — инъективное отображение.

Сюръективность. Зафиксируем $\sigma \in W(X)$. Через T обозначим совокупность всех тех подмножеств множества X , каждое из которых является объединением конечного числа множеств вида (1). Другими словами, $S \in T$, если существует такое $A \subseteq X$, что $\text{card } A < \infty$ и $S = \bigcup_{x \in A} U_\sigma(x)$. Очевидно, $\emptyset \in T$. Так как $X = \bigcup_{[x]_\sigma \subseteq X} [x]_\sigma \subseteq \bigcup_{[x]_\sigma \subseteq X} U_\sigma(x) \subseteq X$, то имеет место равенство $X = \bigcup_{[x]_\sigma \subseteq X} U_\sigma(x)$. Поскольку $\text{card } [X]_\sigma < \infty$, то $X \in T$. Если $F, G \in T$, то, очевидно, $F \cup G \in T$. Справедлива импликация

$$F = \bigcup_{x \in A} U_\sigma(x), \quad G = \bigcup_{y \in B} U_\sigma(y) \implies F \cap G = \bigcup_{x \in A, y \in B} (U_\sigma(x) \cap U_\sigma(y)).$$

Если $S \doteq U_\sigma(x) \cap U_\sigma(y) \neq \emptyset$, то включение $z \in S$ влечет $z \in U_\sigma(x)$, $z \in U_\sigma(y)$, следовательно, $U_\sigma(z) \subseteq U_\sigma(x)$, $U_\sigma(z) \subseteq U_\sigma(y)$, поэтому $[z]_\sigma \subseteq U_\sigma(z) \subseteq S$ и $S = \bigcup_{z \in S} \{z\} \subseteq \bigcup_{z \in S} U_\sigma(z) \subseteq S$. Значит, $S = \bigcup_{z \in S} U_\sigma(z)$. Пусть, далее, $Q \doteq \bigcup_{[z]_\sigma \subseteq S} U_\sigma(z)$. (Поскольку $\text{card } [X]_\sigma < \infty$, то $Q \in T$.) Если $w \in Q$, то найдется $z \in S$ такое, что $[z]_\sigma \subseteq S$ и $w \in U_\sigma(z)$, поэтому $w \in S$ и, следовательно, $Q \subseteq S$. Если же $w \in S$, то найдется $z \in S$ такое, что $w \in U_\sigma(z)$. Выше мы доказали импликацию $z \in S \implies [z]_\sigma \subseteq S$, значит, $w \in Q$ и, следовательно, $S \subseteq Q$. Таким образом, $S = Q \in T$, а так как $\text{card } A < \infty$ и $\text{card } B < \infty$, то $F \cap G \in T$. Следовательно, $T \in T(X)$.

Из определения совокупности T следует, что $U_\sigma(x) \in T$ для всех $x \in X$, то есть $U_\sigma(x)$ — это открытые множества топологии T . Так как $x \in U_\sigma(x)$, а $S_T(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x , то $S_T(x) \subseteq U_\sigma(x)$. С другой стороны, для множества $S_T(x)$

(как элемента совокупности T) справедливо представление $S_T(x) = \bigcup_{z \in A} U_\sigma(z)$, $\text{card } A < \infty$, а так как $x \in S_T(x)$, то найдется $z \in A$ такое, что $x \in U_\sigma(z)$, следовательно, $U_\sigma(x) \subseteq U_\sigma(z) \subseteq S_T(x)$. Значит, $S_T(x) = U_\sigma(x)$ для всех $x \in X$. Пусть $\sigma' \doteq \Phi(T)$. В силу (4) имеем $U_{\sigma'}(x) = S_T(x)$, поэтому $U_{\sigma'}(x) = U_\sigma(x)$ для всех $x \in X$. Значит, $\sigma' = \sigma$ и $\Phi(T) = \sigma$. $\square$

6. Граф конечных топологий. Пусть $\text{card } X < \infty$ (будем считать, что $X = \{1, \dots, n\}$ — отрезок натурального ряда). Очевидно, всякая топология T , заданная на X , конечна, то есть $T \in T(X)$. Для любого $\sigma \in V(X)$ справедливо $\text{card } [X]_\sigma < \infty$, поэтому $\sigma \in W(X)$. Значит, $W(X) = V(X)$ и $\text{Im } \Phi = V(X)$.

В силу биекции $\Phi^{-1}: V(X) \rightarrow T(X)$ можно считать, что вершинами графа $\langle V(X), E(X) \rangle$ являются конечные топологии (элементы множества $T(X)$). При этом можно говорить, что топологии $T, T' \in T(X)$ *смежны*, если смежны отношения $\Phi(T), \Phi(T') \in V(X)$. Можно также говорить, что $\langle T(X), E(X) \rangle$ — это *граф конечных топологий*.

Пример 3. В примере 2 топология $\Phi^{-1}(\sigma) = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$ смежна с топологиями

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\sigma^{[1]}) &= \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \\ \Phi^{-1}(\sigma^{[4]}) &= \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\},\end{aligned}$$

которые, в свою очередь, тоже смежны.

Семейство $\{X_1, \dots, X_m\}$, состоящее из подмножеств множества X , будем называть его *разбиением*, если $\bigcup_{k=1}^m X_k = X$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. (Очевидно, $m \leq n$.) Совокупность всех разбиений множества X обозначим через $\mathcal{P}(X)$, а через $\mathcal{P}_m(X)$ обозначим семейство всех тех разбиений, которые имеют ровно m компонент. Имеет место равенство $\text{card } \mathcal{P}_m(X) = S(n, m)$, где $S(n, m)$ — числа Стирлинга 2-го рода (см., например, [3, с. 102]). Заметим еще, что в [3, с. 121] приведена явная формула

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n.$$

Очевидно, для любого $\sigma \in V(X)$ семейство $[X]_\sigma$ является разбиением множества X .

Через $V_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X . Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $V_0(X)$ и множеством всех помеченных транзитивных графов, определенных на X (см., например, [4, с. 28]); в свою очередь, существует взаимно однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех помеченных T_0 -топологий, определенных на X (см., например, [5, с. 256]). Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий. Полагаем $T_0(0) = 1$.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G(X) \doteq \langle V(X), E(X) \rangle$ — граф рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве $X \doteq \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\text{card } V(X) = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m),$$

а если $[G(X)]$ — это совокупность связных компонент графа $G(X)$, то

$$\text{card } [G(X)] = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1).$$

Доказательство. Первая формула следует из равенств $\text{card } V(X) = \text{card } T(X)$ и $\text{card } T(X) = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m)$ (см., например, [6–8]).

В силу предложения 4 все вершины связной компоненты $G_\sigma(X)$ графа $G(X)$ имеют один и тот же тип $[X]_\sigma$, поэтому для любого $\{X_1, \dots, X_m\} \in \mathcal{P}(X)$ определено семейство связных графов $G(X_1, \dots, X_m) \doteq \{G_\sigma(X) : [X]_\sigma = \{X_1, \dots, X_m\}\}$.

Очевидно,

$$[G(X)] = \bigcup_{\{X_1, \dots, X_m\} \in \mathcal{P}(X)} G(X_1, \dots, X_m),$$

$$\text{card}[G(X)] = \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} \in \mathcal{P}(X)} \text{card } G(X_1, \dots, X_m) = \sum_{m=1}^n \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} \in \mathcal{P}_m(X)} \text{card } G(X_1, \dots, X_m).$$

Зафиксируем разбиение $P \doteq \{X_1, \dots, X_m\}$. Очевидно, $P \in \mathcal{P}_m(X)$. Кроме того, P порождает семейство $G(X_1, \dots, X_m)$ и граф $G_0(P)$, вершинами которого являются частичные порядки, определенные на множестве P . Через $[G_0(P)]$ обозначим совокупность связных компонент графа $G_0(P)$. В силу теоремы 1 [1] имеет место равенство $\text{card}[G_0(P)] = T_0(m-1)$.

Зафиксируем компоненту $G_\sigma(X) \in G(X_1, \dots, X_m)$, и пусть $\sigma' \in V(X)$ — ее представитель (без ограничения общности можно считать, что $\sigma' = \sigma$). Очевидно, $[X]_\sigma = P$. В силу замечания 3 отношение σ порождает частичный порядок $\bar{\sigma} \in V_0([X]_\sigma) = V_0(P)$ и связную компоненту $G_0^{\bar{\sigma}}([X]_\sigma) = G_0^{\bar{\sigma}}(P)$ графа $G_0([X]_\sigma) = G_0(P)$. Значит, определено отображение $\varphi: G_\sigma(X) \rightarrow G_0^{\bar{\sigma}}(P)$, действующее из $G(X_1, \dots, X_m)$ в $[G_0(P)]$.

Инъективность φ . Допустим, что $G_0^{\bar{\sigma}}(P) = G_0^{\bar{\tau}}(P)$ для некоторых $\sigma, \tau \in V(X)$. Следовательно, $\bar{\tau} \in G_0^{\bar{\sigma}}(P)$, и без ограничения общности можно считать, что $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ — смежные частичные порядки. В силу предложения 5 отношения σ и τ тоже смежны, поэтому $G_\sigma(X) = G_\tau(X)$.

Сюръективность φ . Пусть $G_0^{\bar{\tau}}(P) \in [G_0(P)]$ для некоторого частичного порядка $\bar{\tau} \in V_0(P)$. Он порождает функцию $\sigma: X^2 \rightarrow B$ такую, что $\sigma(x, y) \doteq \bar{\tau}(X_i, X_j)$ для всех $(x, y) \in X_i \times X_j$. Если $(x, y, z) \in X_i \times X_j \times X_k$, то

$$\sigma(x, x) = \bar{\tau}(X_i, X_i) = 1,$$

$$\sigma(x, y)\sigma(y, z) = \bar{\tau}(X_i, X_j)\bar{\tau}(X_j, X_k) \leq \bar{\tau}(X_i, X_k) = \sigma(x, z),$$

следовательно, $\sigma \in V(X)$ и определено разбиение $[X]_\sigma$. Зафиксируем индекс i и $x \in X_i$.

Для всех $y \in X_i$, $\eta \in X$ справедливо $\sigma(x, \eta) = \bar{\tau}(X_i, X_j) = \sigma(y, \eta)$ (где j таково, что $\eta \in X_j$). Следовательно, $U_\sigma(x) = U_\sigma(y)$, $x \sim y$, $y \in [x]_\sigma$. Значит, $X_i \subseteq [x]_\sigma$. Пусть, далее, $z \in [x]_\sigma$, а j таково, что $z \in X_j$. Так как $x \sim z$, то $\sigma(x, \eta) = \sigma(z, \eta)$ для всех $\eta \in X$. Следовательно,

$$1) \text{ если } \eta \in X_j, \text{ то } \bar{\tau}(X_i, X_j) = \sigma(x, \eta) = \sigma(z, \eta) = \bar{\tau}(X_j, X_j) = 1;$$

$$2) \text{ если } \eta \in X_i, \text{ то } \bar{\tau}(X_j, X_i) = \sigma(z, \eta) = \sigma(x, \eta) = \bar{\tau}(X_i, X_i) = 1;$$

поэтому $\bar{\tau}(X_i, X_j)\bar{\tau}(X_j, X_i) = 1$, значит, $i = j$ (поскольку $\bar{\tau}$ — частичный порядок) и $z \in X_i$. Следовательно, $[x]_\sigma \subseteq X_i$, поэтому $[x]_\sigma = X_i$ и справедлива импликация $x \in X_i \implies [x]_\sigma = X_i$. Обратная импликация очевидна. Таким образом, $[X]_\sigma = P$ и $G_\sigma(X) \in G(X_1, \dots, X_m)$. Так как $(\xi \in X_i \iff \bar{\xi} = X_i)$, то $\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma(x, y) = \bar{\tau}(X_i, X_j) = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y})$, поэтому $\bar{\sigma} = \bar{\tau}$. Следовательно, $\varphi(G_\sigma(X)) = G_0^{\bar{\sigma}}(P) = G_0^{\bar{\tau}}(P)$, то есть $\text{Im } \varphi = [G_0(P)]$. Итак, φ — биекция, поэтому множества $G(X_1, \dots, X_m)$ и $[G_0(P)]$ равномощны. Значит, $\text{card } G(X_1, \dots, X_m) = T_0(m-1)$ и

$$\text{card}[G(X)] = \sum_{m=1}^n \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} \in \mathcal{P}_m(X)} T_0(m-1) = \sum_{m=1}^n \text{card } \mathcal{P}_m(X) T_0(m-1) = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
3. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с.
4. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
6. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. 1966. Vol. AB262. P. A1091–A1094.

7. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies // *Comm. ACM*. 1967. Vol. 10. P. 295–297.
8. Gupta H. Number of topologies on a finite set // *Res. Bull. Panjab. Univ. (N.S.)*. 1968. Vol. 19. P. 231–241.

Поступила в редакцию 12.11.2014

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; преподаватель, Аль-Кадисия университет, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29.

E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Kh. Sh. Al' Dzhabri

The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies

Keywords: graph, reflexive-transitive relation, finite topology.

MSC: 05C30

Any binary relation $\sigma \subseteq X^2$ (where X is an arbitrary set) generates on the set X^2 a characteristic function: if $(x, y) \in \sigma$, then $\sigma(x, y) = 1$, otherwise $\sigma(x, y) = 0$. In terms of characteristic functions we introduce on the set of all binary relations of the set X the concept of a binary reflexive relation of adjacency and determine an algebraic system consisting of all binary relations of the set and of all unordered pairs of various adjacent binary relations. If X is a finite set then this algebraic system is a graph («the graph of graphs»).

It is shown that if σ and τ are adjacent relations then σ is a reflexive-transitive relation if and only if τ is a reflexive-transitive relation. Several structure features of the graph $G(X)$ of reflexive-transitive relations are investigated. In particular, if X consists of n elements, and $T_0(n)$ is the number of labeled T_0 -topologies defined on the set X , then the number of connected components is equal to $\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1)$, where $S(n, m)$ are Stirling numbers of second kind. (It is well known that the number of vertices in a graph $G(X)$ is equal to $\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m)$.)

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 3–12 (in Russian).
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1981, 544 p.
3. Aigner M. *Combinatorial theory*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979, 492 p. Translated under the title *Kombinatornaya teoriya*, Moscow: Mir, 1982, 558 p.
4. Ore O. *Theory of graphs*, Providence: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1962, vol. 18, 270 p. Translated under the title *Teoriya grafov*, Moscow: Nauka, 1980, 336 p.
5. Harary F., Palmer E. *Graphical enumeration*, New York–London: Academic Press, 1973, 272 p. Translated under the title *Perechislenie grafov*, Moscow: Mir, 1977, 324 p.
6. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci.*, 1966, vol. AB262, pp. A1091–A1094 (in French).
7. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. ACM*, 1967, vol. 10, pp. 295–297.
8. Gupta H. Number of topologies on a finite set, *Res. Bull. Panjab. Univ. (N.S.)*, 1968, vol. 19, pp. 231–241.

Received 12.11.2014

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, Post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com