الصفحة ١ - ١٦

# معايير إختيار معلمة التمهيد لمقدّر الشريحة الجزائية: دراسة مقارنة باستخدام المحاكاة


**حافظ محمد مطير**      **محمد حبيب الشاروط**

**قسم الرياضيات**      **قسم الإحصاء والمعلوماتية**

**كلية علوم الحاسوب والرياضيات**

**جامعة القادسية**



## الخلاصة

إن إنحدار الشرائح الجزائية (Penalized Regression Spline) أو اختصاراً (P-Spline) هو أحد الأساليب المهمة المستخدمة في تقدير منحنى الإنحدار اللامعلمي ، ومن أهم العناصر المستخدمة لتطبيق هذا الأسلوب هو اختيار معلمة التمهيد (Smoothing Parameter) والتي تلعب دوراً في الموازنة بين التحيز والتباين للمقدر الناتج أو ما يطلق عليه (bias – variance trad – off) ، يهدف هذا البحث إلى تسليط الضوء على بعض طرائق إختيار معلمة التمهيد لمقدر الشريحة الجزائية كما تضمن عمل دراسة مقارنة بين ثلاثة معايير لاختيار معلمة التمهيد وهي : معيار $\boldsymbol{GCV}$، ومعيار $\boldsymbol{AIC}$، ومعيار $\boldsymbol{AIC}$ المعدل $\boldsymbol{AIC}_{corr}$، والمفاضلة بين المعايير الثلاث باستخدام معيارين من معايير الأخطاء للنماذج المستخدمة هما $\boldsymbol{MRASE}$ ، $\boldsymbol{MAAE}$،وقد توصلنا من خلال نتائج تجارب المحاكاة المطبقة من التوصل إلى أن معيار $\boldsymbol{AIC}_{corr}$ أفضل من بقية المعايير في تقدير معلمة التمهيد لمقدّر الشريحة الجزائية.


## ١ - المقدمة

إذا افترضنا أنموذج الإنحدار الآتي :

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_i) + \varepsilon_i \ , \quad \boldsymbol{i} = 1,\cdots,\boldsymbol{n} \qquad \text{......................} \qquad (1)$$

حيث $\varepsilon_i$ هي الأخطاء العشوائية وتتوزع توزيعاً طبيعياً توقعه صفر وتباينه ثابت ويساوي $(\sigma^2)$ فإن إحدى الدوال المهمة والمستخدمة في الحصول على تقريب لمنحنى الانحدار هي دالة الشريحة Function Spline ، حيث يقسم مجال $\boldsymbol{X}$ إلى فترات جزئية صغيرة نسبياً بواسطة نقاط ربط تسمى عقد Knots ويتم تقدير متعددات حدود موضعية من نفس الدرجة في الفترات الجزئية ، ولضمان منحنى مستمر يفرض قيد الإستمرارية عند العقد وللحصول على منحنى ممهد Smooth Curve تفرض قيود الإستمرارية للمشتقات من رتب معينة عند العقد.إن الدالة $\boldsymbol{g}$ تسمى دالة الانحدار Regression Function وهي دالة غير معلومة وتهدف طرائق تمهيد الانحدار اللامعلمية الى تقديرها دون فرض أي صيغة مسبقة محددة لشكل المنحنى المقدر ، وإن إحدى أهم الطرق لتقدير الدالة $\boldsymbol{g}$ هي انحدار الشرائح الجزائية,Penalized Regression Splines [3],[4],[7],[8],[9],[10],[11],[12] . قدمت الصيغة الأولى من قبل كل من Eilers و Marx في عام 1996 [4] وأطلقوا عليه إختصاراً P-Spline ، وافترض الباحثان أن $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ba}$ حيث $\boldsymbol{g}$ هي دالة الانحدار و $\boldsymbol{B}$ هي مصفوفة من الدرجة $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ وأن $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{i,j})_{n\times m}$ حيث $\boldsymbol{b}_{ij} = \boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{q})\ ,\ \boldsymbol{i} = 1,\cdots,\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{j} = 1,\cdots,\boldsymbol{m}$ وأن $\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{q})$ هي قيمة الشريحة $\boldsymbol{j}$ من الدرجة $\boldsymbol{q}$ عند

النقطة $x_i$ ، وأن قيمة $m$ تعتمد على درجة الشريحة وعدد العقد في الأنموذج حيث استخدم الباحثان عقد بمسافات متساوية.أما $a$ فهو متجه معاملات الشرائح-B حيث $a=(a_1,\cdots,a_m)^T$ ، أما الصيغة الأخرى فقدمها كل من Ruppert و Carroll في عام 1997 [٩] واستخدما فيه الشرائح مع قواعد أخرى تسمى قواعد TPF Truncated (Polynomial Function) واستخدما عقد عند نقاط تمثل مجزءات للبيانات (Equally Spaced Sample Quiantile).

**٢ - هدف البحث**

يهدف البحث إلى إجراء دراسة مقارنة بين ثلاثة معايير مختلفة لإختيار معلمة التمهيد لمقدر الشريحة الجزائية P-Spline وهي معيار $GCV$، ومعيار $AIC$ ، ومعيار $AIC_{corr}$ ، وتم استخدام أسلوب المحاكاة Simulation لتوليد البيانات باستخدام الحاسوب الإلكتروني لتوليد عدد كبير من العينات ( 500 عينة ) التي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين ثابت وتم استخدام قيم متدرجة للإنحراف المعياري وأحجام مختلفة للعينات هي (300,150,50,20)، ولغرض اجراء المقارنة بين المعايير الثلاث والمفاضلة فيما بينها تم استخدام معايير الأخطاء التالية $RASE$ ، $MRASE$ ، $AAE$ ، $MAAE$ لكل أنموذج تم تقديره والتي سوف يتم التطرق لها في الجانب النظري.

**٣ - الشريحة الجزائية P-Spline**

لإيجاد تقدير لدالة الإنحدار $g$ افترض الباحثان Eilers و Marx أن $g=Ba$ حيث $B$ مصفوفة التصميم (design matrix)من الدرجة $n\times m$ حيث قيمة $m$ تعتمد على درجة الشريحة وعدد العقد (knots) في الأنموذج وأن $a$ متجه معاملات الشرائح من الدرجة $m\times 1$ واستخدم الباحثان معيار المربعات الصغرى التالي لإيجاد تقدير للمتجه $a$ والذي أطلقا عليه معيار المربعات الصغرى الجزائية :

$$S=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\sum_{j=1}^{m}a_jB_j(x_i)\}^2+\lambda\sum_{j=k+1}^{m}(\Delta^k a_j)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

حيث $\Delta^k a_j$ تمثل الفروقات من الرتبة $k$ لمعاملات الشرائح المتجاورة ، ونلاحظ من خلال الصيغة (2) أن المعيار يتكون من جزءين الأول يمثل مجموع مربعات البواقي RSS أما الجزء الثاني فأطلق عليه الباحثان الجزاء غير الممهد Roughness Penalty وتتحكم به معلمة التمهيد $\lambda$ حيث عندما $\lambda=0$ أي لايوجد حد الجزاء فان تصغير مجموع مربعات البواقي يؤدي إلى منحنى متذبذب غير مقبول، وبزيادة قيمة $\lambda$ تزداد كمية التمهيد في المنحنى ولكن الزيادة الكبيرة جداً $(\lambda\to\infty)$ فإن المقدر الناتج يكون على شكل خط مستقيم $(k=2)$ ، ومنحنى تربيعي $(k=3)$.وبكتابة المعيار (2) بصيغة المصفوفات فانه يصبح كالآتي:

$$S=(Y-Ba)^T(Y-Ba)+\lambda D^T{}_k D_k a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

حيث $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ ، $D_k$ مصفوفة الفروقات من الرتبة $k$

وللحصول على متجه المعاملات المقدرة نقوم بتصغير المعيار في (3) بإيجاد التفاضل الجزئي بالنسبة الى $a$ ثم مساواة الناتج للصفر فينتج نظام المعادلات الطبيعية التالي:

$$(B^TB+\lambda D_k^TD_k)\hat{a}=B^TY \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

إذن

$$\hat{a}=(B^TB+\lambda D_k^TD_k)^{-1}B^TY$$

إذن

$$\begin{aligned}\hat{g} &= B\hat{a} \\ &= B(B^T B + \lambda D_k^T D_k)^{-1} B^T Y \\ &= H_\lambda Y\end{aligned}$$

المصفوفة $H_\lambda$ تسمى مصفوفة التمهيد Smoother Matrix أو Hat Matrix

ويعرف أثر المصفوفة $H_\lambda$ بأنه مجموع عناصر القطر الرئيسي لها ويرمز له بالرمز $tr(H_\lambda)$ ويكتب كما يأتي:
$tr(H_\lambda) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$ حيث $h_{ii}$ هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $H_\lambda$

ويطلق على $tr(H_\lambda)$ أيضا درجات الحرية الفعالة Effective Dgree of Freedom

## ٤- معايير اختيار معلمة التمهيد Smoothing Parameter Selection Criterion

ليكن $Y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ ، $g = \left(g(x_1), \cdots, g(x_n)\right)^T$ ، $\hat{g} = \left(\hat{g}(x_1), \cdots, \hat{g}(x_n)\right)^T$ ، وأن $\hat{g} = H_\lambda Y$ فإن معايير اختيار معلمة التمهيد تكون كما يأتي:

### (i) معيار العبور الشرعي المعمم Genaralized Cross Validation, ($GCV$) [10][4][11]

وضع من قبل كل من Graven و Wahba عام 1979 [11] ضمن سياق اختيار معلمة التمهيد لمقدر الشريحة الممهدة Smoothing Spline ،ويعتبر معيار $GCV$ تقريب لمعيار العبور الشرعي $CV$(Cross Validation) ، والفكرة تتمثل في تصغير أحد معايير الأخطاء $ASE$ لأيجاد القيمة المثلى للمعلمة التمهيدية ولأن المعيار $ASE$ يحوي على كمية غير معلومة يتم تقديره وتكون صيغة المقدر كما يلي : $RSS = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$ ، ولكن تصغير هذه الصيغة يؤدي الى منحنى متذبذب غير مقبول من قبل الإحصائيين لأن قيم $y_i$ تستخدم مرتين في آن واحد لأنها تستخدم أصلا عند ايجاد $\hat{y}_i$ ولذلك يتم حذف المشاهدة $y_i$ عند ايجاد التقدير لكل نقطة من نقاط البيانات ولذلك يطلق عليه Leave – One – Out وتكون عندها صيغة معيار $CV$ كما يلي :

$$CV = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{g}^{-i}(x_i;\lambda)\right)^2$$

حيث $\hat{g}^{-i}(x_i)$ تعني تقدير الدالة $g$ بعد حذف المشاهدة $y_i$ ، وهناك صيغة تقريبية لمعيار $CV$ تكتب كالآتي:

$$CV = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \hat{g}(x_i,\lambda)}{1 - h_{\lambda,ii}}\right)^2$$

حيث $h_{\lambda,ii}$ هي عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة التمهيد $H_\lambda$ .

وباستبدال القيم $h_{\lambda,ii}$ بمتوسطها $\frac{\sum_{i=1}^{n} h_{\lambda,ii}}{n} = \frac{tr(H_{\lambda,ii})}{n}$ نحصل على تقريب لمعيار $CV$ وهو معيار $GCV$ وصيغته كالآتي:

$$GCV = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - g(x_i;\lambda)\right)^2}{\left(1-\frac{tr(H_\lambda)}{n}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

وفيه يتم اختيار قيمة معلمة التمهيد $\lambda$ التي تجعل قيمة المعيار $GCV$ أصغر ما يمكن.

**(ii) معيار $AIC$ Akaike Information Criterion [10],[4],[2],[1]**

وضع من قبل Akaike في عام 1973 ، والصيغة العامة للمعيار تكون كالآتي :

$$AIC = -2\log(L(\hat{b})) + 2\times K$$

حيث $K$ عدد المعالم في النموذج ، $L$ دالة الترجيح الأعظم للمقدر ، $\hat{b}$ متجه المعالم المقدرة، وهذه الصيغة التي وضعها العالم Akaike تمثل تقديراً لمعيار Kullback-Leibler information والذي وضع من قبل كل من Kullback و Leibler في عام 1951 وتكون صيغته كالآتي:

$$I(f,g) = \mathbf{E}_x[\log f(X|\theta^*) - \log g(x|\theta)]$$

حيث $f(X|\theta^*)$ الأنموذج الحقيقي ، $g(x|\theta)$ الأنموذج المقدر ، ويمثل المعيار $I(f,g)$ الفرق (Separation) بين الأنموذجين.أن معيار AIC يكتب في سياق الإنحدار اللامعلمي كالآتي:

$$AIC = \log(RSS) + 2df/n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

حيث $RSS = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - g(x_i;\lambda)\right)^2$ ، $df = tr(H_\lambda)$

ويتم اختيار قيمة معلمة التمهيد $\lambda$ التي تجعل المعيار $AIC$ أصغر ما يمكن.

ويمثل معيار $AIC$ تقديراً غير متحيز بالمحاذي Asymptotically Unbiased Estimates لمعيار Kullback-Leibler information حيث $E(AIC) = I(\theta;\theta^*) + o(1)$ وأن $o(1) \to 0$ عندما $n \to \infty$. إلا أن هذا المعيار يعاني من بعض العيوب نذكر منها [7]:

1- أن معيار $AIC$ لا يمتلك خاصية الأمثلية Optimal Property ، بمعنى أنه لا يخفض قيمة المعدل لأية دالة معيار.

2- أن قاعدة $AIC$ غير متسقة بمعنى أن احتمال أن تذهب قاعدة القرار لاختيار أنموذج خاطيء ،لا يذهب هذا الاحتمال إلى الصفر حتى عندما يقترب عدد المشاهدات إلى ما لا نهاية .

**(iii) معيار $AIC$ المعدل ($AIC_{corr}$)**

وضع من قيل كل من Hurvich ، و Simonoff ، و Tsai [5] في عام 1998 كنسخة معدلة من معيار $AIC$ حيث تم إضافة تعديل للتحيز Biase adjustment وتكون صيغته كالآتي:

$$AIC_{corr} = \log(RSS) + \frac{2(df+1)}{n-df-2} \qquad (7)$$

حيث كل من $RSS$ ، $df$ كما سبق. أن معيار $AIC_{corr}$ يمثل تقديراً غير متحيز فعلياً وليس محاذياً لمعيار Kullback-Leibler .information

**٥- معايير الأخطاء**

تم في البحث استخدام معايير الأخطاء الآتية:

(i) الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ Root Average Sequared Error وصيغته :

$$RASE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(g(x_i) - \hat{g}(x_i)\right)^2}{n}} \qquad (8)$$

(ii) معدل الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ Mean Root Average Sequared Error وصيغته:

$$MRASE = \frac{\sum_{j=1}^{N} RASE(j)}{N} \qquad (9)$$

حيث $N$ عدد التكرارات.

(iii) متوسط الخطأ المطلق Average Absolute Error وصيغته:

$$AAE = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i) - \hat{g}(x_i)\right|}{n} \qquad (10)$$

(iiii) معدل متوسط الخطأ المطلق Mean Average Absolute Error وصيغته:

$$MAAE = \frac{\sum_{j=1}^{N} AAE(j)}{N}$$ حيث $N$ عدد التكرارات.

**٦-الجانب التجريبي**

لغرض تطبيق معايير اختيار معلمة التمهيد عند إيجاد مقدر الشريحة الجزائية P-Spline والواردة في الجانب النظري ، لابد من وضع بعض الافتراضات المهمة للحصول على تحليل أكثر شمولية من خلال استخدام عدد كبير من العينات وبأحجام مختلفة أواختيار قيم مختلفة لتباين الأخطاء ونظرا لصعوبة تطبيق هذه الافتراضات والحصول على هذه العينات في الواقع العملي يتم استخدام الأسلوب التجريبي من خلال تطبيق أسلوب المحاكاة (Simulation) .

### المحاكاة Simulation

تعرف المحاكاة بأنها تقليد للواقع العملي بحيث تقوم بتوظيف نماذج تظهر فيها عدد كبير من الحالات الافتراضية لتكون نتائج التحليل أكثر شمولية ، وقد ظهرت الاستعانة بالمحاكاة أساسا كإحدى افرازات التقدم الحاصل في مجال الحاسبات الالكترونية من جانب ، ومن جانب أخر بسبب التطور الحاصل في مجال التحليل العددي.أما مسوغات العمل بالمحاكاة تكون في الغالب للتأكد من تحقق جانب تطبيقي موجود أصلا أو لصعوبة الحصول على بيانات توفر معلومات دقيقة عن ظاهرة معينة أو عندما يصعب إثبات البرهان الرياضي بشكله النظري لبيان أفضلية طرائق تقدير معينة على حساب أخرى.تم توليد المتغيرات التوضيحية $X_i$ والتي تتبع التوزيع المنتظم القياسي باستخدام برنامج R وبطريقة (Mersenne – Twister) ، وباستخدام طريقة (Box – Muller) يتم تحويل هذه المتغيرات الى متغيرات تتبع التوزيع الطبيعي القياسي ومن ثم باستخدام التحويل $\varepsilon = \sigma Z$ -حيث $Z$ متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي- يمكن الحصول على متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي الذي توقعه صفر وتباينه ثابت ويساوي $\sigma^2$ ، ولغرض استخدام أسلوب المحاكاة في بحثنا هذا تم استخدام ثلاث مستويات للانحراف المعياري $(\sigma)$ هي كالآتي:

(1) $\sigma = 0.3$     (2) $\sigma = 0.5$     (3) $\sigma = 1$

أما قيم المتغير المعتمد فيتم توليدها باستخدام المعادلة التالية : $y_i = g(x_i) + \varepsilon_i \ ,i = 1,\cdots,n$ حيث $x_i$ هي المتغيرات التوضيحية التي تم توليدها كما سبق ، و $g(x_i)$ قيمة دالة الإختبار عند النقطة $x_i$ ، $\varepsilon_i$ هي الأخطاء العشوائية التي تم توليدها كما سبق.

وقد تم استخدام أربع قيم لحجوم العينات هي : $n = 20 , 50 , 150 , 300$

بالنسبة لدرجة الشريحة فتم استخدام أساس الشريحة التكعيبية Cubic Spline وأما بالنسبة لعدد العقد المستخدم في الأنموذج فتم الإعتماد على الخوارزمية التالية [9]:

### خوارزمية اختيار عدد العقد

تعتمد هذه الخوارزمية على أحد المعايير مثل $GCV$ ، $AIC_{corr}$ ، $AIC$ لاختيار عدد العقد وقيمة المعلمة الممهدة في آن واحد وكما يأتي :

١. يتم تعريف متجه عدد العقد $K = (5,10,20,40,80,120)$ على أن لا يتجاوز عدد العقد في المتجه القيمة $n - P - 1$ حيث $n$ عدد البيانات الغير مكررة و $p$ درجة الشريحة .
٢. يتم إيجاد التقدير عند كل قيمة في المتجه $K$ ( عدد العقد ) وتحسب قيمة $\lambda$ المقابلة لأصغر قيمة للمعيار $GCV$ أو $AIC_{corr}$ أو $AIC$.
٣. يتم اختيار المتجه $K$ المقابل أصغر قيمة للعيار $GCV$ أو $AIC_{corr}$ أو $AIC$ وقيمة $\lambda$ المقابلة .

### دوال الإختبار المستخدمة في تجارب المحاكاة

تم اختيار خمسة دوال مختلفة للإختبار في تجارب المحاكاة يمكن توضيحها كالآتي:

**١- دالة الانحدار اللاخطية وصيغتها:**

$$g(x) = \sin(2(4x-2)) + 2\exp(-(16(x-0.5))^2)$$

**٢- دالة الانحدار غير المتجانسة مكانيا Spatially Heterogeneous Function وصيغتها :**

$$g(x)=\sqrt{x(1-x)}\sin\{\frac{2\pi(1+2^{(9-4j)/5})}{x+2^{(9-4j)/5}}\} \quad ,j=6$$

**٣- دالة الإنحدار اللاخطية Three – Bump وصيغتها :**

$$g(x)=\exp\{-400(x-0.6)^2\}+\frac{5}{3}\exp\{-500(x-0.75)^2\}+2\exp\{-500(x-0.9)^2\}$$

**٤- دالة الانحدار اللاخطية Bump Function وصيغتها :**

$$g(x)=x+2\exp[-\{16(x-0.5)\}^2]$$

**٥- دالة الإنحدار اللاخطية Logistic Functin وصيغتها :**

$$g(x)=\frac{1}{1+\exp(-20(x-0.5))}$$

**تجارب المحاكاة**

بعد توليد المتغيرات العشوائية تم تنفيذ تجارب المحاكاة بواقع (500) تكرار لكل تجربة وكانت النتائج كالآتي:

**نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الأولى**

$$g(x)=\sin(2(4x-2))+2\exp(-(16(x-0.5))^2)$$

أظهرت النتائج باستخدام دالة الإختبار الأولى والمبينة في الجدول (1) ما يلي:

(1) عندما $(\sigma=0.3 \ ,\ \sigma=0.5)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$، و $MAAE$ وعند حجوم العينات $(n=300, n=150, n=50)$ تفوق معيار اختيار معلمة التمهيد $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم GCV ثم AIC ، في حين تفوق معيار AIC عند حجم العينة $(n=20)$ .

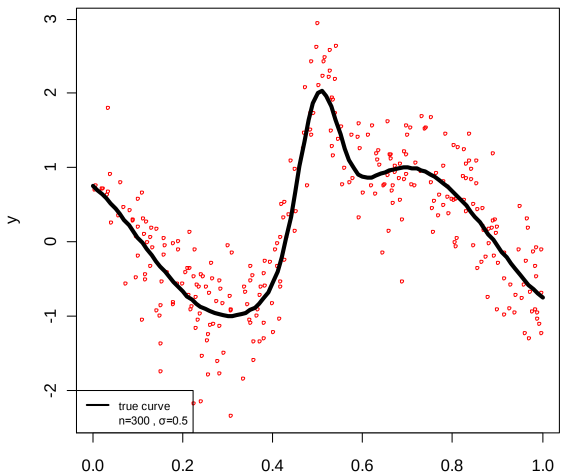
(2) وعندما $(\sigma=1)$ وعند جميع حجوم العينات $(n=300, n=150, n=50, n=20)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$، و $MAAE$ تفوق معيار $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$ .

(3) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة (300).

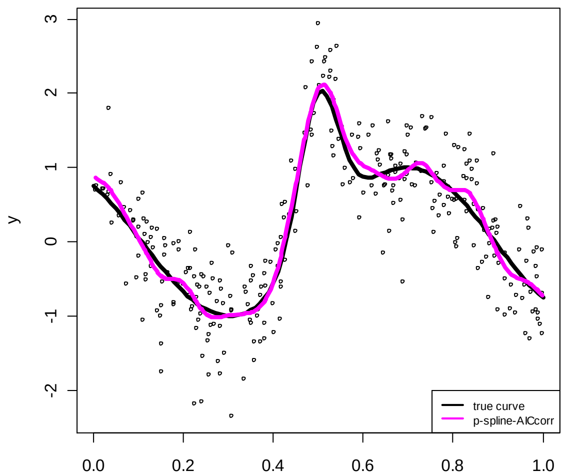
(4) النتائج لكل من المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

### جدول (1) نتائج تجارب المحاكاة لدالة الاختبار الأولى

| التسلسل | الأنموذج | حجم العينة | $\sigma = 0.3$ MRASE | $\sigma = 0.3$ MAAE | $\sigma = 0.5$ MRASE | $\sigma = 0.5$ MAAE | $\sigma = 1$ MRASE | $\sigma = 1$ MAAE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P-SPLINE GCV | 20 | 0.243345 | 0.1889211 | 0.3652866 | 0.2905084 | 0.5963176 | 0.4838494 |
| | | 50 | 0.1771237 | 0.1335809 | 0.2501669 | 0.1954053 | 0.4529894 | 0.3583659 |
| | | 150 | 0.1617727 | 0.1117769 | 0.1929029 | 0.1440078 | 0.3074983 | 0.2432281 |
| | | 300 | 0.1457595 | 0.0974267 | 0.1743363 | 0.1244588 | 0.2406186 | 0.1862853 |
| 2 | P-SPLINE AIC | 20 | 0.2423486 | 0.1885617 | 0.3634983 | 0.2897624 | 0.600413 | 0.4868099 |
| | | 50 | 0.1794342 | 0.1354449 | 0.2552371 | 0.1993374 | 0.468431 | 0.3703915 |
| | | 150 | 0.1621789 | 0.1120996 | 0.1941074 | 0.1449919 | 0.3110884 | 0.2459679 |
| | | 300 | 0.145944 | 0.09756803 | 0.1746673 | 0.1247332 | 0.2415254 | 0.1870081 |
| 3 | P-SPLINE $AIC_{corr}$ | 20 | 0.2597316 | 0.1978863 | 0.3752821 | 0.2963616 | 0.5891705 | 0.4782588 |
| | | 50 | 0.1754659 | 0.1320879 | 0.2476987 | 0.1929891 | 0.4454057 | 0.3525148 |
| | | 150 | 0.1615316 | 0.1115407 | 0.1921906 | 0.1434978 | 0.3062699 | 0.2420907 |
| | | 300 | 0.1455945 | 0.0973053 | 0.1740704 | 0.1242379 | 0.2403106 | 0.1860291 |




شكل(1) المنحنى الحقيقي لدالة الإختبار الأولى باستخدام معيار $AIC_{corr}$ لإختيار




شكل(2) منحنى مقدر الشريحة الجزائية معلمة التمهيد لدالة الإختبار الأولى.

### نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الثانية

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)}\,\sin\left\{\frac{2\pi(1+2^{(9-4j)/5})}{x+2^{(9-4j)/5}}\right\} \quad , j = 6$$

أظهرت النتائج باستخدام دالة الإختبار الثانية والمبينة في الجدول (2) ما يلي:

(1) عندما $(\sigma = 0.3)$ وبناء على قيم المعيارين، ***MRASE*** و ***MAAE*** عند حجوم العينات

| التسلسل | الأنموذج | حجم العينة | $\sigma = 0.3$ | | $\sigma = 0.5$ | | $\sigma = 1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | MRASE | MAAE | MRASE | MAAE | MRASE | MAAE |

$(\boldsymbol{n} = 50, \boldsymbol{n} = 150, \boldsymbol{n} = 300)$ تفوق معيار اختيار معلمة التمهيد $\boldsymbol{AIC}_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $\boldsymbol{AIC}_{corr}$ ثم ***GCV*** ثم ***AIC***، في حين تفوق معيار ***AIC*** عند حجم العينة $(\boldsymbol{n} = 20)$.

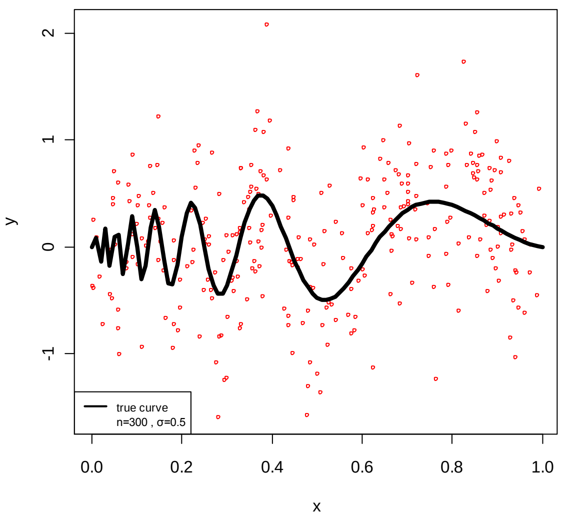
(2) أما عندما $(\sigma = 1 , \sigma = 0.5)$ وعند جميع حجوم العينات $(\boldsymbol{n} = 20, \boldsymbol{n} = 50, \boldsymbol{n} = 150, \boldsymbol{n} = 300)$ وبناء على قيم المعيارين، ***MRASE*** و ***MAAE*** تفوق معيار $\boldsymbol{AIC}_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $\boldsymbol{AIC}_{corr}$ ثم ***GCV*** ثم ***AIC***.

(3) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة $(\boldsymbol{n} = 300)$

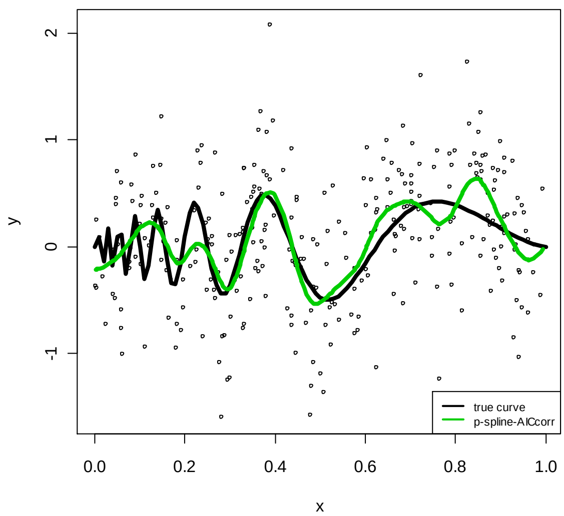
(4) النتائج لكل من المعيارين ***MRASE*** و ***MAAE*** ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

**جدول (2) نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الثانية**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P-SPLINE GCV | 20 | 0.2245734 | 0.1809882 | 0.3015123 | 0.2429571 | 0.4853741 | 0.3965685 |
| | | 50 | 0.1815641 | 0.1413051 | 0.2529593 | 0.2013028 | 0.4294651 | 0.3464494 |
| | | 150 | 0.1390431 | 0.1056154 | 0.1919056 | 0.1509340 | 0.3215320 | 0.2586784 |
| | | 300 | 0.1155773 | 0.08646617 | 0.1573166 | 0.1214941 | 0.2521491 | 0.2004306 |
| 2 | P-SPLINE AIC | 20 | 0.2231317 | 0.1796258 | 0.302831 | 0.2439076 | 0.493811 | 0.4027535 |
| | | 50 | 0.1837958 | 0.1431776 | 0.2593936 | 0.2061220 | 0.4447339 | 0.3580603 |
| | | 150 | 0.1405795 | 0.1069414 | 0.1966315 | 0.1544943 | 0.3278801 | 0.2635238 |
| | | 300 | 0.1157251 | 0.08673609 | 0.1580182 | 0.1220977 | 0.2533564 | 0.2013373 |
| 3 | P-SPLINE $AIC_{corr}$ | 20 | 0.2300462 | 0.1856055 | 0.2962542 | 0.2395195 | 0.4684077 | 0.3829705 |
| | | 50 | 0.1804187 | 0.1402153 | 0.2502793 | 0.1993348 | 0.4222308 | 0.3408115 |
| | | 150 | 0.1387724 | 0.1051332 | 0.1907246 | 0.14991 | 0.3199437 | 0.2574653 |
| | | 300 | 0.1154892 | 0.08615463 | 0.1568851 | 0.1210750 | 0.2517738 | 0.2001807 |




شكل(3) المنحنى الحقيقي لدالة الإختبار الثانية.
باستخدام معيار $AIC_{cor\ r}$لإختيار




شكل(4) منحنى مقدر الشريحة الجزائية
معلمة التمهيد لدالة الإختبار الثانية.

**نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الثالثة**

$$g(x) = \exp\{-400(x-0.6)^2\} + \frac{5}{3}\exp\{-500(x-0.75)^2\} + 2\exp\{-500(x-0.9)^2\}$$

أظهرت النتائج باستخدام دالة الإختبار الثالثة والمبينة في الجدول (3) ما يلي:

(1) عندما $(\sigma = 0.3)$ وبناء على قيم المعيارين، $MRASE$ و $MAAE$ فان أداء معيار اختيار معلمة التمهيد $AIC_{corr}$ أفضل من أداء المعيارين الآخرين خصوصاً عند حجوم العينات $(n = 150, n = 300)$ ، وكان ترتيب المعايير عند هذين الحجمين هو : $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$ ، في حين تفوق المعيار $AIC$ عند الحجوم $(n = 20, n = 50)$.

(2) عندما $(\sigma = 0.5)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ تفوق معيار اختيار معلمة التمهيد $AIC_{corr}$ عند حجوم العينات $(n = 150, n = 300)$ وكان ترتيب المعايير عند هذين الحجمين هو : $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$ في حين تفوق معيار $AIC$ عندما $(n = 20)$ ل $MRASE$ ومعيار $GCV$ ل $MAAE$ ، وتفوق معيار $GCV$ عندما $(n = 50)$.

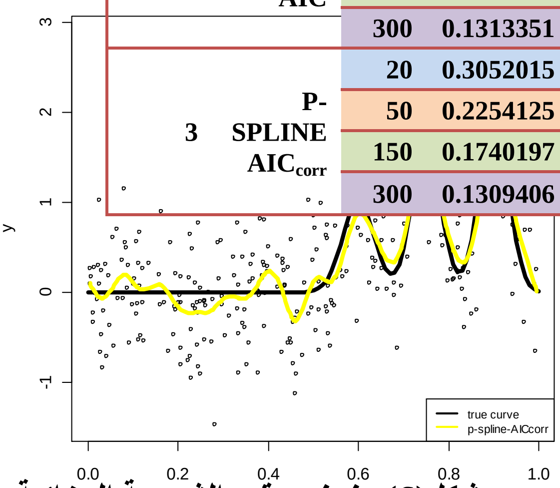
(3) أما عندما $(\sigma = 1)$ وعند جميع حجوم العينات $(n = 20, n = 50, n = 150, n = 300)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ تفوق معيار $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$.

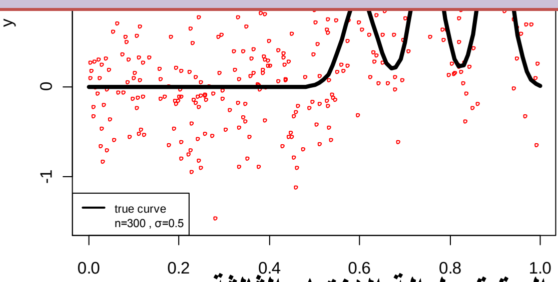
(4) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة $(n = 300)$

(5) النتائج لكل من المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

**جدول (3) نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الثالثة**

| التسلسل | الأنموذج | حجم العينة | $\sigma=0.3$ MRASE | $\sigma=0.3$ MAAE | $\sigma=0.5$ MRASE | $\sigma=0.5$ MAAE | $\sigma=1$ MRASE | $\sigma=1$ MAAE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P-SPLINE GCV | 20 | 0.2919296 | 0.2214334 | 0.3666626 | 0.2846156 | 0.5327417 | 0.4266905 |
| | | 50 | 0.2236143 | 0.1681082 | 0.3052597 | 0.2336578 | 0.4738421 | 0.3760044 |
| | | 150 | 0.1742942 | 0.1275391 | 0.2357195 | 0.1772353 | 0.3598004 | 0.2788376 |
| | | 300 | 0.1310648 | 0.09612687 | 0.1933675 | 0.1435926 | 0.2977212 | 0.2275235 |
| 2 | P-SPLINE AIC | 20 | 0.2898255 | 0.2206015 | 0.3664167 | 0.2853265 | 0.5394976 | 0.4319782 |
| | | 50 | 0.2234386 | 0.1680454 | 0.3064368 | 0.2351426 | 0.484833 | 0.3841152 |
| | | 150 | 0.1750635 | 0.1281666 | 0.2377774 | 0.1788550 | 0.3630265 | 0.2813826 |
| | | 300 | 0.1313351 | 0.09633456 | 0.1936901 | 0.1438194 | 0.2983989 | 0.2280401 |
| 3 | P-SPLINE $AIC_{corr}$ | 20 | 0.3052015 | 0.2290701 | 0.3688299 | 0.2848836 | 0.5195889 | 0.4164398 |
| | | 50 | 0.2254125 | 0.1689146 | 0.3077777 | 0.2345420 | 0.4678338 | 0.3705733 |
| | | 150 | 0.1740197 | 0.1272828 | 0.234774 | 0.1764384 | 0.3583534 | 0.2773443 |
| | | 300 | 0.1309406 | 0.0960147 | 0.1929458 | 0.1432547 | 0.2975246 | 0.2273732 |




شكل(5) المنحنى الحقيقي لدالة الإختبار الثالثة.

شكل(6) منحنى مقدر الشريحة الجزائية باستخدام معيار $AIC_{cor\,r}$ لإختيار معلمة التمهيد لدالة الإختبار الثالثة.

**نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الرابعة.**

$$g(x)=x+2\exp[-\{16(x-0.5)\}^2]$$

أظهرت النتائج باستخدام دالة الإختبار الرابعة والمبينة في الجدول (4) ما يلي:

(1)عندما $(\sigma=0.3\ ,\ \sigma=0.5)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$، و $MAAE$ وعند حجوم العينات $(n=300, n=150, n=50)$ تفوق معيار اختيار معلمة التمهيد $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$، في حين تفوق معيار $AIC$ عند حجم العينة $(n=20)$.

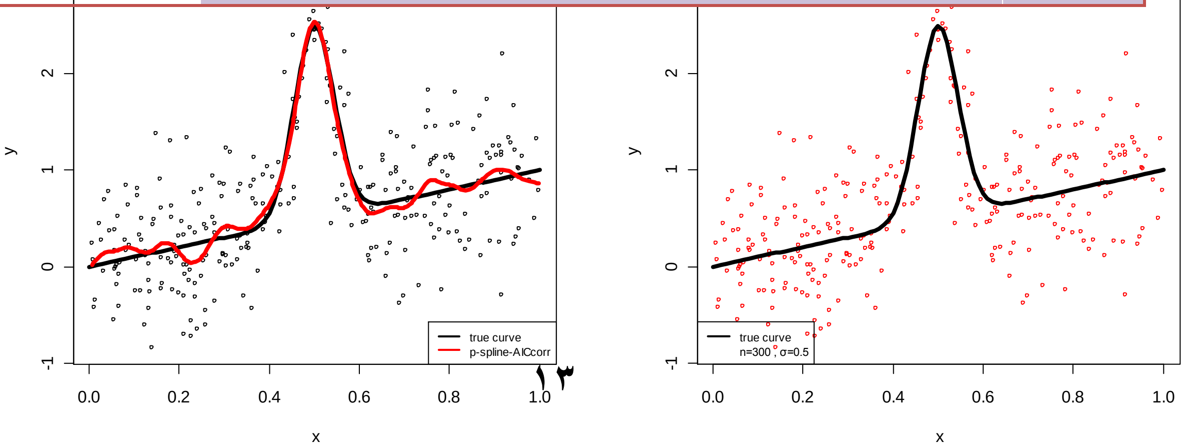
(2) وعندما $(\sigma=1)$ وعند جميع حجوم العينات $(n=20, n=50, n=150, n=300)$ وبناء على قيم المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ تفوق معيار $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$.

(3) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة $(n = 300)$.

(4) النتائج لكل من المعيارين ***MRASE*** و ***MAAE*** ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

**جدول (4) نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الرابعة**

| التسلسل | الأنموذج | حجم العينة | $\sigma = 1$ MAAE | $\sigma = 1$ MRASE | $\sigma = 0.5$ MAAE | $\sigma = 0.5$ MRASE | $\sigma = 0.3$ MAAE | $\sigma = 0.3$ MRASE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P-SPLINE GCV | 20 | 0.4293125 | 0.5399063 | 0.2578642 | 0.3350887 | 0.1781946 | 0.2330881 |
| | | 50 | 0.3583073 | 0.4514662 | 0.1954713 | 0.2499578 | 0.1334417 | 0.1769065 |
| | | 150 | 0.2445869 | 0.3086679 | 0.1435296 | 0.1924706 | 0.1116438 | 0.1617204 |
| | | 300 | 0.1857045 | 0.2399383 | 0.1241545 | 0.1740802 | 0.09717957 | 0.1458055 |
| 2 | P-SPLINE AIC | 20 | 0.4342213 | 0.54596 | 0.2570414 | 0.3337696 | 0.1777089 | 0.2317695 |
| | | 50 | 0.3713525 | 0.4681223 | 0.1996873 | 0.2554956 | 0.1353116 | 0.1791599 |
| | | 150 | 0.2472225 | 0.3120862 | 0.1444984 | 0.1936803 | 0.1119669 | 0.1621263 |
| | | 300 | 0.1864488 | 0.2408808 | 0.1244296 | 0.1744107 | 0.09732652 | 0.1459946 |
| 3 | P-SPLINE $AIC_{corr}$ | 20 | 0.4224709 | 0.5311377 | 0.2627588 | 0.3443846 | 0.1871741 | 0.2500742 |
| | | 50 | 0.3524316 | 0.443989 | 0.1929811 | 0.2474149 | 0.1319322 | 0.1751888 |
| | | 150 | 0.2433053 | 0.3072352 | 0.1430260 | 0.1918099 | 0.1114190 | 0.1614931 |
| | | 300 | 0.1855129 | 0.2397641 | 0.1238788 | 0.1737513 | 0.09706124 | 0.1456377 |



| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sigma = 0.3$ | $\sigma = 0.5$ | $\sigma = 1$ |

**شكل(7) المنحنى الحقيقي لدالة الإختبار الرابعة.**

**شكل(8) منحنى مقدر الشريحة الجزائية باستخدام معيار $AIC_{corr}$ لإختيار معلمة التمهيد لدالة الإختبار الرابعة.**

**نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الخامسة.**

$$g(x) = \frac{1}{1 + \exp(-20(x - 0.5))}$$

أظهرت النتائج باستخدام دالة الإختبار الخامسة والمبينة في الجدول (5) ما يلي:

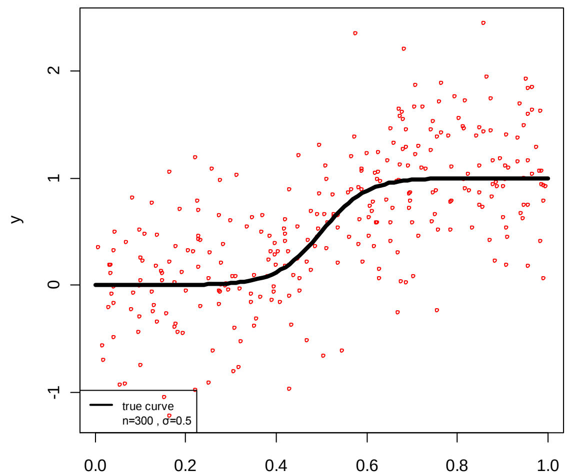
(1) عندما $(\sigma = 0.3, \sigma = 0.5, \sigma = 1)$ وعند جميع حجوم العينات $(n = 20, n = 50, n = 150, n = 300)$ وبناء على قيم المعيارين، و تفوق معيار $AIC_{corr}$ وكان الترتيب كالآتي: $AIC_{corr}$ ثم $GCV$ ثم $AIC$.

(2) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة $(n = 300)$.

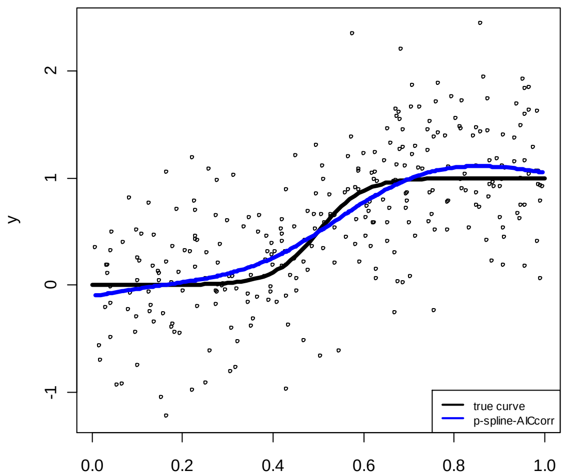
(3) النتائج لكل من المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

**جدول (5) نتائج تجارب المحاكاة لدالة الإختبار الخامسة.**

| التسلسل | الأنموذج | حجم العينة | MRASE | MAAE | MRASE | MAAE | MRASE | MAAE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P-SPLINE GCV | 20 | 0.1512608 | 0.1237027 | 0.2342071 | 0.1899261 | 0.4376186 | 0.3566224 |
| | | 50 | 0.1157831 | 0.09314796 | 0.1916624 | 0.1537910 | 0.3833273 | 0.3098367 |
| | | 150 | 0.07197386 | 0.05793716 | 0.1155194 | 0.09377281 | 0.2469128 | 0.1993353 |
| | | 300 | 0.05564373 | 0.04518935 | 0.08932096 | 0.07204973 | 0.1765126 | 0.1422414 |
| 2 | P-SPLINE AIC | 20 | 0.15439 | 0.1261353 | 0.2394550 | 0.1939084 | 0.4477999 | 0.364432 |
| | | 50 | 0.1188360 | 0.09543395 | 0.1979383 | 0.1586157 | 0.3969235 | 0.3203926 |
| | | 150 | 0.07232149 | 0.05818825 | 0.1160435 | 0.09409664 | 0.2501138 | 0.2017712 |
| | | 300 | 0.0557504 | 0.04525239 | 0.08950016 | 0.07219673 | 0.1774984 | 0.1430061 |
| 3 | P-SPLINE $AIC_{corr}$ | 20 | 0.1456935 | 0.1193868 | 0.2237788 | 0.1824610 | 0.4203055 | 0.3442840 |
| | | 50 | 0.1133978 | 0.09139237 | 0.1877814 | 0.1508021 | 0.3769753 | 0.3047724 |
| | | 150 | 0.07170547 | 0.05768855 | 0.1152848 | 0.09367495 | 0.2459476 | 0.1986249 |
| | | 300 | 0.05553896 | 0.045108 | 0.08906145 | 0.07185116 | 0.1761813 | 0.1419941 |




شكل(9) المنحنى ألحقيقي لدالة الإختبار الخامسة.
باستخدام معيار $AIC_{corr}$ لإختيار




شكل(10) منحنى مقدر الشريحة الجزائية
معلمة التمهيد لدالة الإختبار الخامسة.

## ٧- الإستنتاجات

مما تقدم يمكن استنتاج الآتي:

(1) أن معيار $AIC_{corr}$ كان الأفضل من بين المعايير $GCV$ و $AIC$ في اختيار معلمة التمهيد لمقدر الشريحة الجزائية (P-Spline) وخصوصا عند حجوم العينات الكبيرة $(n \geq 50)$، يليه معيار $GCV$ ثم $AIC$

(2) أن معيار اختيار معلمة التمهيد $AIC$ حقق نتائج جيدة عند حجم العينة الصغيرة $(n = 20)$.

(3) كانت النتائج للمعايير الثلاث لإختيار معلمة التمهيد متقاربة جدا عند حجم العينة $(n = 300)$.

(4) النتائج لكل من المعيارين $MRASE$ و $MAAE$ ولكل معيار من معايير اختيار معلمة التمهيد كانت تتقارب كلما زاد حجم العينة عند ثبوت الإنحراف المعياري، وكلما قلت قيمة الإنحراف المعياري عند ثبوت حجم العينة.

## ٨- التوصيات

(1) يوصي الباحث باستخدام معيار $\text{AIC}_{\text{corr}}$ لاختيار معلمة التمهيد كونه أثبت تفوقا في هذه الدراسة.

(2) كما يوصي الباحث باستخدام معلمة تمهيدية تتغير عبر العقد لأن المقدرات في هذه الحالة تكون أكثر تكيفا مع عدم التجانس في دالة الإنحدار حيث لوحظ بالنسبة للمعايير المستخدمة في البحث أن المقدرات تعاني من التذبذب.

## ٩- المصادر

[1] Akaike,H.(1981)"Liklihood A Model And Information Criterion"Journal of Econometrics 16 (1981) 3-14.
[2] Bozdogan,H.(2000)"Akaike s Information Criterion And Recent Developments in Information Complexity" Journal of Mathematical Psychology 44, 62_91 .
[3] Claeskens, G, Krivobokova, T and Opsomer, J. (2007). "Asymptotic properties of penalized spline estimators". Katholeke Universiteit Leuven,AMS2000 subject classification.62G08,62G20.
[4] Eilers, P.H.C. and Marx, B.D. (1996)." Flexible smoothing using B-splines and penalizedlikelihood (with Comments and Rejoinder)". Statistical Science 11(2): 89-121
[5] Hurvich,C.M and Simonoff,J.S and Tsai ,C.L.(1998)"Smoothing Parameter Selection in Nonparametric Regression usig an Improved Akaike Information Criterion" J. R. Statist. Soc. B (1998) 60, Part2 , p p.2 71-293.
[6] Kumar,D.N and Mujumdar,P.P (1990):"Stochastic Models of Steram Flow . Some Case Studies ".Hydrogical Sciences , Vol 35 , No 4 ,PP 395-410.
[7] Li, Y. and Ruppert, D. (2008). "On the asymptotics of penalized splines". Biometrika, 95, 415-436.

[8] Ruppert, D (2002) "Selecting the numper of knots for Penalized Splines",Journal of Computational and Graphical Statistics 11,735-757.
[9] Ruppert, D and Carroll, R. J (1997) "Penalized Regression Splines" , http://www.citeulike.org/user/hyndman/article/2577705
[10] Ruppert, D., Wand, M.P., and Carroll, R.J. (2003). "Semiparametric Regression". CambridgeUniversity Press, New York.
[11] Wahba,G.(1975)"Smoothing Noisy Data With Spline Functions" Numer.Math. 24 ,383-393,by Springer – Verlag (1975).
[12] Wand, M. P (1999) " On the optimal amount of smoothing in penalized spline regression " Biometrika , 86 , 4 ,pp.936-940.

## Smoothing Parameter selection Criterions for Penalized Spline Estimator: A Comparison Study Using Simulation.

### Abstract

Penalized Regression Spline or P-Spline is one of the important approche that are used to estimate the regression curve non parametrically , and one of the most important elements that contribute to the application of the method is a Smoothing Parameter, which plays a role in balancing between the bias and the variance of the estimator or the so-called Bias - Variance Trad - off, The research comes to shed light to some of the methods of selection of smoothing parameter for penalized spline estimator and included a comparative study between the three criteria for the selection of smoothing parameter: the $\boldsymbol{GCV}$ criterion, and the $\boldsymbol{AIC}$ criterion, and the corrected $\boldsymbol{AIC}$ criterion $\boldsymbol{AIC_{corr}}$ , A Comparison between these three criteria using two of the errors criterias to models used are $\boldsymbol{MRASE}$ ,$\boldsymbol{MAAE}$ , according to the results of simulation experiments we were able to reach that $\boldsymbol{AIC_{corr}}$ better than the rest of the criteria in estimating smoothing parameter for penalized spline estimator.