دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي (الخبري) Empirical Bayse لنموذج ماركوف Markove Model

طاهر ريسان دخيل الخاقاني•

الخلاصة

ان أسلوب بيز التجريبي هو احد الأساليب ضمن المدرسة البيزية الذي يعتمد على فكرة كون المعلمة المقدرة متغير عشوائي تمتلك توزيعا معينا وليست ثابتة كما تفترضها المدرسة التقليدية .بالاعتماد على هذه الفكرة فان الباحث سيدرس تقدير بيز التجريبي عندما يتبع حد الخطأ في نموذج ماركوف للسلاسل الزمنية توزيعات متقطعة غير التوزيع الطبيعي .

Abstract

Empirical Bayse is one of Baysian estimation school which depends on the idea that the parameter doesn't a constant but a random variable which has a particular distribution .depends on this idea we study the empirical Bayse estimation when the error term in Markove model in time series has a different distribution else normal.

المقدمة

ان موضوع السلاسل الزمنية يعد واحداً من أهم الركائز الأساسية التي يستند عليها علم الإحصاء ، لما له من دور بارز في مجال التحليل والتقدير الإحصائي، إذ إن الكثير من الدراسات والبحوث تهتم بهذا الجانب وقد سعى العلماء لتطوير نظرياته وقواعده منذ القرن ١٩ حتى يومنا هذا، وكذلك يعد موضوع التقدير في السلاسل الزمنية من العناصر الأساسية التي تعتمد عليها اغلب الدراسات والتخطيطات المستقبلية ولكل المجالات.

ان طريقة التقدير في نماذج السلاسل الزمنية مثل باقي الجوانب الإحصائية قد تخضع لإحدى المدرستين ،المدرسة الكلاسيكية "Classical School" وهي التي تفترض ان معالم النموذج تتمثل بمعالم غير معلومة يجب تقديرها وفق المعلومات المتاحة، أما المدرسة الثانية فهي المدرسة البيزيه "Bayesian School" وهي التي تفترض ان معالم النموذج متغيرات عشوائية تخضع

• مدرس مساعد /قسم الاحصاء /جامعة القادسية

tahir_reisan@yahoo.com

لتوزيع معين، وان التقدير يعتمد على المعلومات قيد الدراسة وعلى المعلومات الاوليه التي يمكن الحصول عليها من المعالم قيد التقدير ، ولكن في الجانب التطبيقي فان اغلب الأحيان يكون توزيع المعالم مجهول، وعليه فقد استعيض عن ذلك بتحديد التوزيع التكراري لتلك المعلمة،إلا ان ذلك يتطلب مشاهدات عن المعلمة نفسها وهذا قد يتعذر أيضا . لذا فقد برزت أهمية طريقة بيز التجريبية (الخبرية) حيث تعتمد هذه الطريقة على المعلومات المتأتية من المشاهدات نفسها بوصفها معلومات أولية عن المعلمة المراد تقديرها.

هدف البحث

يهدف هذا البحث الى دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي لنموذج ماركوف في السلاسل الزمنية عند خضوع حد الخطأ العشوائي (a_t) الى توزيعات متقطعة مختلفة ولحالات مختلفة من السلاسل الزمنية " مستقرة وغير مستقرة" وكذلك نموذج المسار العشوائي حيث تم إجراء دراسة تجريبية لأحجام عينات مختلفة صغيرة ومتوسطة وكبيرة في محاولة للكشف عن خصائص ومميزات المقدرات لمعلمة النموذج وفق تقدير بيز التجريبي.

نموذج ماركوف Markove Model[1][3]

ان نموذج ماركوف في السلاسل الزمنية هو من اهم النماذج التابعة للانحدار الذاتي ضمن السلاسل الزمنية والتي تاخذ الصيغة الآتية:-

$$x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\ldots+\phi_p x_{t-p}+a_t \quad \text{---------------}(1)$$

حيث ان :-

a_t :- متغير البواقي وتكون مشاهداته مستقلة عن بعضها البعض ويفترض غالباً خضوعه للتوزيع الطبيعي.

حيث يتمثل نموذج ماركوف بالصيغة الآتية وعندما تكون (p=1) :-

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+ a_t \quad \text{------------------}(2)$$

أي عندما تكون هناك معلمة واحدة فقط.ويعتبر هذا النموذج مع نموذج يل أو النموذج من الدرجة الثانية هما الأكثر شيوعا لتمثيل الظواهر التي تأخذ شكل السلاسل الزمنية.

ويمكن ملاحظة انه عندما تقترب قيمة المعلمة لنموذج ماركوف في الصيغة (٢) من الواحد الصحيح فان النموذج حينئذ يسمى بنموذج المسار العشوائي والذي يمكن تمثيله بالصيغة الاتية:-

$$X_t=X_{t-1}+a_t \quad \text{-----------------}(3)$$

طريقة بيز التجريبية الخبرية Empirical Bayes estimation [2][4][5][6]

لقد أبدى الباحثون اهتماماً كبيراً في مسالة إيجاد الطرائق الإحصائية الدقيقة لتقدير المعالم العشوائية(أي التي تتغير بتغير الزمن) حيث نلاحظ ان اغلب التطبيقات العملية هي من هذا النوع حيث يتم اعتماد مشاهدات سابقه لبناء النموذج الإحصائي الملائم مع الأخذ بنظر الاعتبار حالة التغير في المستقبل ،وان طريقة بيز التجريبية (الخبرية) هي واحدة من أهم هذه الطرائق ،ولتوضيح طريقة بيز التجريبية (الخبرية) نفترض إن المعلمة (ϕj) تختلف قيمتها من عينة الى أخرى ،فيتم تحديد التوزيع التكراري لهذه المعلمة من العينات المختلفة المدروسة غير انه في

الواقع العملي لا يمكن معاينة ϕj بل ان المتاح هو معاينة المشاهدات للسلسلة الزمنية xj التي تخضع لنموذج معلمته ϕj وإذا تم افتراض خضوع ϕj لنموذج معين بالمتوسط (μ) فانه يمكن التعبير عن التوقع اللاحق لـ عند معرفة (xj) كمتوسط موزون لـ ϕj و (μ) حيث إن يمثل تقدير لـ(ϕj) وان هذا التقدير اللاحق يمثل تقدير بيز (Bayes estimate) . بما إن (μ) غير معلومة عموما نتيجة لعدم معرفة $\hat{\phi} j$ توزيع ( ) فيتم $\hat{\phi} j$ الاستعاضة عنها بتقدير من المشاهدات فيدعى التوقع اللاحق عندئذ بتقدير بيز التجريبي (الخبري) وطريقة حسابه هي:-

على افتراض ان المشاهدات$x_t(j)$ في السلسلة $\hat{\mu}$ ($j=1,2,3,............n$) عند الزمن ($t=1,2,............T$) تتمثل بنموذج ماركوف آلاتي .

$x_t(j)= \phi j\ x_t(j)+a_t(j)$ ----------------(4)

حيث ان :- ϕj معالم النموذج تخضع للتوزيع الطبيعي ، بمتوسط ($y'B$) وتباين γ حيث إن (y متجه التباينات).

$at(j)$: أخطاء النموذج يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط (صفر) وتباين (σ^2) ويتم تقدير معالم النموذج بالخطوات الاتية:-

$$\xi j = \sigma^2 + \gamma^2 \sum x_{t-1}^2(j) \qquad \text{---------------(5)}$$

وبافتراض ان σ^2، γ^2 معلومة فيكون

$$\hat{\mu}_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_t(j)x_{t-1}(j)/\xi j}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2(j)/\xi j} \qquad \text{-----------(6)}$$

$$\xi = \sigma^2 + \gamma^2 \sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2(n+1) \qquad \text{----------------(7)}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{t-1}^2(n+1)}{\sum_{t=1}^{T} x_t(n+1)x_{t-1}(n+1)} \qquad \text{-------(8)}$$

$$B = \frac{\xi}{\sigma^2}\hat{m}_n + (1 - \frac{\xi}{\sigma^2})\hat{\phi} \qquad \text{------------------(9)}$$

حيث إن (B) هو تقدير بيز التجريبي (الخبري) للمعلمة (ϕj) لنموذج ماركوف.

المحاكاة Simulation

إن أسلوب المحاكاة (simulation) هو الوسيلة الفعالة لدراسة كفاءة الكثير من الاختبارات والتحليلات الإحصائية حيث يتعذر في كثير من الأحيان الحصول على بيانات دقيقة وخالية من الأخطاء ، ولان أهمية الدراسات تعتمد على مدى دقة البيانات المدروسة ، لذا اهتم الباحثون بهذا المجال وتم تطويره مع تطور سرعة الحاسب وكفاءته الذي ساعد على أداء أسلوب المحاكاة بصورة أسرع وأسهل للحصول على بيانات دقيقة وسليمة وخاضعة لأي توزيع .

وسيتم في هذا الجانب توليد متغيرات الأخطاء العشوائية a_t والخاضعة للتوزيعات الآتية (Binomial , Geometric , Discrete Uniform ,Poisson) ومنها يتم إيجاد متغير السلسلة (X_t) ومن ثم إتباع طريقة بيز التجريبية (الخبرية) لتقدير معالم نموذج ماركوف وكما تم ذكره في الجانب النظري ، واعتماد (MSE) كمعيار مقارنه .

وصف تجربة المحاكاة

سيتم في هذه التجربة دراسة حصانة مقدرات بيز التجريبية(الخبرية) لتقدير معلمة نموذج ماركوف وللتوزيعات المفترضة وفق الافتراضات الآتية :-

١- تم افتراض عدة قيم لمعلمة نموذج ماركوف منها ما تجعل السلسلة مستقره (ϕ =0.8,0.1,-0.8,-0.1) ومنها ما تجعل السلسلة غير مستقرة (ϕ=1.1,-1.1) ومنها ما يجعل السلسلة ذات نموذج مسار عشوائي عندما (ϕ=1)

٢- تم افتراض أحجام عينات مختلفة منها ما هو صغير (T= 10,20) ومنها ما هو متوسط(T=50) ومنها ما هو كبير (T=100)

٣- تم افتراض عدد سلاسل خبرية مختلفة (n=1,3,7,10)

وتم اعتماد (MSE) كمعيار مقارنه بين النتائج .

تحليل النتائج

نلاحظ من خلال الجدول (1) ان قيم MSE تقل بازدياد عدد السلاسل الخبرية ولجميع أنواع السلاسل الزمنية ،بينما نلاحظ ان هناك ثبوتا نسبيا في قيم هذا المعيار عند زيادة حجم العينة .

وفيما يتعلق بالتوزيع المنتظم المتقطع فنلاحظ أيضا من خلال الجدول (2) ان قيم MSE تقل بازدياد حجم السلاسل الزمنية الخبرية وكذلك تزداد قيم هذا المعيار بزيادة حجم العينة .

اما التوزيع الهندسي فنلاحظ من خلال الجدول (3) ان سلوك قيم (MSE) بالنسبة لهذا التوزيع تقارب السلوك في توزيع بواسون ولجميع أنواع السلاسل الزمنية عند زيادة عدد السلاسل الزمنية الخبرية تقل قيم معيار MSE بينما يكون هناك ثبوتا نسبيا عند ازدياد حجم العينة.

ومن خلال الجدول (4) الذي يمثل قيم MSE لتوزيع ثنائي الحدين فان قيم هذا المعيار تقل أيضا بزيادة عدد السلاسل الزمنية الخبرية وكذلك بزيادة حجم العينة ،ويمكن ملاحظة ان السلاسل الزمنية غير المستقرة قد أعطت قيما لـ MSE اكبر منها في السلاسل الزمنية المستقرة ، وأيضا ان قيم MSE تقل عندما تقترب قيمة المعلمة من الصفر.

وبمقارنة النتائج بين التوزيعات المستخدمة فقد النتائج ان قيم MSE كانت أعلى بالنسبة لتوزيعي ثنائي الحدين والتوزيع المنتظم المتقطع منه لتوزيعي بواسون والهندسي.

الاستنتاجات

١- نستنتج من خلال الدراسة أن توزيعي بواسون والهندسي يمتلكان أفضلية لكون قيم) (MSE تعطي اقل القيم من بين التوزيعات الباقية.
٢- إن اكبر قيم (MSE) هي عند توزيع ثنائي الحدين والتوزيع المنتظم المتقطع .
٣- لم نلاحظ ان هنالك تأثيراً للإشارة السالبة والموجبة لقيم المعالم بالنسبة للتوزيعات المستخدمة.
٤- نلاحظ ان قيم (MSE) تقل بازدياد عدد السلاسل الخبرية ولجميع التوزيعات المستخدمة.

جدول رقم (١)
ويمثل قيم MSE لتوزيع بواسون بالمعلمة $\lambda=1/3$

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	١٥,٢	15.91	15.96	16.62
	-0.1	13.62	14.66	13.82	14.05
	0.1	12.98	12.83	12.86	12.68
	0.8	13.35	11.91	11.03	10.28
	1	12.42	10.75	10.95	10.99
	-1.1	15.43	16.67	16.24	18.02
	1.1	12.87	12.22	14.52	14.93
3	-0.8	5.06	5.4	5.63	5.4
	-0.1	4.83	4.65	4.54	4.52
	0.1	4.42	4.28	4.45	4.25
	0.8	3.59	3.71	3.48	3.34
	1	3.82	4.01	3.85	3.83
	-1.1	5.07	5.56	5.72	5.87
	1.1	3.64	4.01	4.41	5.22
7	-0.8	2.12	2.22	2.27	2.34
	-0.1	1.88	1.85	1.98	2
	0.1	1.94	1.87	1.85	1.83
	0.8	1.58	1.55	1.49	1.42

	1	1.67	1.69	1.59	1.59
	-1.1	2.18	2.45	2.39	2.45
	1.1	1.68	4.22	2.01	2.22
10	-0.8	1.54	1.51	1.62	1.66
	-0.1	1.37	1.33	1.37	1.37
	0.1	1.26	1.27	1.30	1.3
	0.8	1.19	1.06	1.03	1
	1	1.14	1.11	1.16	1.09
	-1.1	1.48	1.61	1.73	1.78
	1.1	1.2	1.27	1.44	1.56

جدول رقم (٢)

ويمثل قيم MSE للتوزيع المنتظم المتقطع

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	٢٠,١٧	89.09	659.49	٢٧٨١,٣٢
	-0.1	15.4	64.93	385.68	١٥٥٥,٦٩
	0.1	14.05	56.1	343.85	١٣٧٣,١٣ ٢
	0.8	12.58	49.82	256.03	968.48
	1	14.53	57.9	362.51	1472.39
	-1.1	21.58	112.1	805.8	3276.06
	1.1	15.17	72.59	569.73	2776.98
3	-0.8	6.93	31.59	221.62	922.39
	-0.1	5.11	21.32	128.5	517.42
	0.1	4.61	18.68	114.71	460.91
	0.8	4.35	15.81	85.52	323.7
	1	4.72	19.42	121.75	491.44
	-1.1	7.48	37.36	265.4	1096.64
	1.1	5.05	23.08	188.39	920.14
7	-0.8	2.96	13.81	95.25	394.2
	-0.1	2.2	9.12	55.3	221.97
	0.1	2.02	8.18	49.43	195.02

	0.8	1.8	6.72	37.05	138.2
	1	2.06	8.29	51.96	209.74
	-1.1	3.16	15.98	114.69	464.98
	1.1	2.1	10.05	81.38	394.49
10	-0.8	2.1	13.93	66.86	276.13
	-0.1	1.58	6.31	38.78	156.55
	0.1	1.51	5.73	34.92	136.15
	0.8	1.33	4.7	25.76	96.81
	1	1.48	5.81	36.41	145.77
	-1.1	2.21	11.29	79.8	325.59
	1.1	1.54	6.87	56.65	274.68

جدول رقم (3)

ويمثل قيم MSE للتوزيع الهندسي بالمعلمة p=٠,٧

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	١,٧٥	1.82	١,٩٧	١,٨٧
	-0.1	1.62	1.81	1.72	1.79
	0.1	1.64	1.8	1.71	1.67
	0.8	1.53	1.54	1.46	1.43
	1	1.65	1.55	1.5	1.55
	-1.1	1.73	1.77	1.95	1.96
	1.1	1.5	1.63	1.7	1.8
3	-0.8	0.56	0.63	0.61	0.63
	-0.1	0.59	0.59	0.59	0.6
	0.1	0.52	0.59	0.57	0.57
	0.8	0.5	0.52	0.5	0.49
	1	0.49	0.52	0.51	0.53
	-1.1	0.55	0.61	0.65	0.64
	1.1	0.52	0.54	0.57	0.62
7	-0.8	0.24	0.27	0.28	0.28
	-0.1	0.24	0.26	0.25	0.25

	0.1	0.24	0.25	0.25	0.25
	0.8	0.22	0.21	0.21	0.21
	1	0.22	0.21	0.22	0.22
	-1.1	0.26	0.27	0.27	0.28
	1.1	0.22	0.23	0.25	0.26
10	-0.8	0.17	0.18	0.2	0.19
	-0.1	0.16	0.17	0.18	0.18
	0.1	0.18	0.17	0.17	0.17
	0.8	0.16	0.15	0.16	0.15
	1	0.16	0.16	0.15	0.15
	-1.1	0.17	0.18	0.19	0.19
	1.1	0.16	0.15	0.17	0.18

جدول رقم (٤)

ويمثل قيم MSE لتوزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين T و d=0.3

n	ϕ T	10	20	50	100
1	-0.8	١٧١٢,١٦	782.47	٤٨٠,١٧	518.17
	-0.1	713.43	397.48	218.11	249.55
	0.1	659.45	394.37	214.43	218.56
	0.8	1144.08	964.12	454.07	305.15
	1	1903.81	1887.74	1830.77	2028.61
	-1.1	5319.69	6922.95	7628.43	7411.32
	1.1	2703.23	2673.23	4801.37	6140.91
3	-0.8	589.78	309.99	182.72	154.12
	-0.1	240.53	156.59	82.15	49.74
	0.1	278.48	153.73	76.11	42.94
	0.8	443.37	314.33	164.29	80.4
	1	734.12	683.36	618.86	651.38
	-1.1	1457.55	2112.28	2498.2	2420.1
	1.1	790.32	866.97	1521.82	2002.25
7	-0.8	255.91	142.76	122.43	185.15
	-0.1	111.21	66.46	34.95	19.91

	0.1	121.18	75.29	27.88	19.12
	0.8	219.13	134.23	78.87	34.26
	1	329.99	304.02	277.24	281.01
	-1.1	632.55	969.28	1088.46	1076.94
	1.1	355.45	436.08	641.26	852.69
10	-0.8	192.54	122.97	77.85	86.64
	-0.1	85.9	51.49	25.22	23.96
	0.1	72.99	48.69	18.96	35.47
	0.8	132.8	91.64	40.87	27.04
	1	205.73	192.49	196.7	207.54
	-1.1	515.63	731.57	707.78	760.52
	1.1	270.01	272.52	473.3	592.22

المصادر

١-الساقي،محمد فاضل محمد ١٩٩٨ "استخدام المحاكاة لمقارنة طرائق تقدير أنموذج الانحدار الخطي عند خضوع الخطأ لعملية الانحدار الذاتي الطبيعية المستقرة من الدرجة الأولى " رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية.

٢-العقابي، عباس لفتة ١٩٩٦ "استخدام أسلوب بيز وبيز التجريبي في التقدير (دراسة مقارنة) "رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

٣-المفرجي، رحاب كاظم ٢٠٠٠ "استخدام المحاكاة لدراسة حصانة مقدرات بيز التجريبي (الخبري) لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى" رسالة ماجستير، الجامعة المستنصرية.

4- Berger,J. & Berliner L. 1983 “Robust Bayes &Empirical Bayes analysis with contaminated priors “ Annals of statistics vol.14,no.2,pp.(461-486).

5- Bryan T. 1979 “Rates of convergence in a modified empirical Bayes estimation problem involving Poisson distribution ”common. Statistical theory method , A8(2),pp. (167-174).

6- Efron B. &Tusher,V. 2001 “Empirical Bayes analysis of a microarray experiment” “J. of the American statistical Association ,96,1151-1160.